Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet

von

Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von **Felix Müller, Albert Wangerin, Erich Salkowski** sowie der **Berliner Mathematischen Gesellschaft**

herausgegeben

von

Emil Lampe.

Band 36. Jahrgang 1905.

(In 3 Heften.)

Heft 1.

Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1907.

Bogen 1 bis 33.

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von **Felix Müller, Albert Wangerin, Erich Salkowski** sowie der **Berliner Mathematischen Gesellschaft**

herausgegeben
von
Emil Lampe.

Band 36. Jahrgang 1905.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1908.

Erklärung der Zitate.

Eine eingeklammerte Zahl vor der (fett gedruckten) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu welcher der Band gehört. Einige periodische Schriften, in denen nur zuweilen eine vereinzelte mathematische Arbeit erschienen ist, sind in dieses Verzeichnis nicht aufgenommen worden; das bezügliche Zitat im Texte ist dann in hinreichender Ausführlichkeit gegeben.

Abh. zur Gesch. der Math.: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **20.**

Acc. Peloritana: Atti della R. Accademia Peloritana. Messina. 8°. **19.**

Acta Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4°. **29, 30.**

Acta Soc. Fennicae: Acta societatis scientiarum Fennicae. Helsingfors. 4°.

American Acad. Proc.: Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Boston. 8°. **41.**

American J.: American Journal of Mathematics. Edited by Fr. Morley. With the cooperation of S. Newcomb, A. Cohen, Ch. A. Scott etc. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. 4°. **27.**

Amer. Math. Monthly: The American Mathematical Monthly. Edited by B. F. Finkel, J. M. Colaw. Kidder Missouri. 8°. **12.**

American M. S. Bull.: Bulletin of the American Mathematical Society. A historical and critical review of mathematical science. Edited by F. N. Cole, A. Ziwet, D. E. Smith, F. Morley, V. Snyder, H. S. White. New York. 8°. (2) **11, 12.**

American M. S. Trans.: Transactions of the American Mathematical Society. Edited by E. H. Moore, E. W. Brown, Th. S. Fiske. Lancaster, Pa., and New York: The Macmillan Company. gr. 8°. **6.**

Am. J. of science: The American Journal of Science. Editor: Edward S. Dana. Associate editors: Professors Geo. L. Goodale etc. New Haven, Connecticut. 8°. (4) **19.**

Amst. Akad. Verh.: Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. (Eerste Sectie.) 4°. **9.**

Amst. Ak. Versl.: Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Verslag van de gewone Vergaderingen der wis- en natuurkundige Afdeeling. 4°. **13, 14.**

A*

Annali di Mat.: Annali di matematica pura ed applicata già diretti da Francesco Brioschi e continuati dai professori L. Bianchi, U. Dini, G. Jung, C. Segre. Milano. 4°. (3) **11, 12.**

Annals of Math.: Annals of Mathematics. (Founded by Ormond Stone.) Edited by O. Stone, W. E. Byerly, H. S. White, F. S. Woods, M. Bôcher, E. V. Huntington. Published under the auspices of Harvard University. The Publication Office of Harvard University. Cambridge Mass. 4°. (2) **6, 7.**

Ann. de Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Berthelot, Mascart, Moissan. Paris: Masson et Cie, éditeurs. 8°. (8) **4, 5.**

Ann. de l'Ec. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées etc. par un comité de rédaction composé de MM. les maitres de conférences de l'École. Paris: Gauthier-Villars. 4°. (3) **22.**

Ann. der Physik: Annalen der Physik. Begründet und fortgeführt durch F. A. C. Gren, L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann. Kuratorium: F. Kohlrausch, M. Planck, G. Quincke, W. C. Röntgen, E. Warburg. Unter Mitwirkung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und insbesondere von M. Planck herausgegeben von P. Drude. Leipzig: J. A. Barth. gr. 8°. (4) **16, 17, 18.**

Ann. Soc. scient. de Brux. Siehe Brux. S. sc.

Annuaire Longit.: Annuaire pour l'an 1905, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris: Gauthier-Villars. 16mo.

Arch. d. Math. u. Phys.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. Gegründet 1841 durch J. A. Grunert. Dritte Reihe. Herausgegeben von E. Lampe, W. Fr. Meyer, E. Jahnke. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. gr. 8°. (3) **8, 9.**

Arch. du Musée Teyler: Archives du Musée Teyler. Haarlem: Loosjes. (2) **9, 10.**

Arch. f. Math. og Naturv: Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Herausgegeben von A. Helland, G. O. Sars, S. Tomp. Christiania: Alb. Cammermeyer. 8°. **26.**

Arch. Néerl.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem et rédigées par J. Bosscha, secrétaire. La Haye: Martinus Nijthoff. 8°. (2) **10.**

Arch. sc. phys.: Bibliothèque universelle. Archives des sciences physiques et naturelles. Genève, Bureau des Archives. 8°. (4) **19, 20.**

Ark. för Mat., Astron. och Fys.: Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, utgivet af K. Svenska Vetenskaps-Akademien. Stockholm. 8°. **1, 2.**

Assoc. Franç.: Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 33me session. Congrès de Grenoble (1904). Paris au secrétariat de l'association et chez G. Masson et Cie. 8°. (1905.)

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher. Unter Mitwirkung des Vorstandes der Astronomischen Gesellschaft herausg. von H. Kreutz. Kiel. 4°. **167, 168, 169.**

Atti Acc. Gioenia: Atti della Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania. Catania: C. Galàtola. (4).

Atti dell' Acc. Peloritana: Atti della R. Accademia Peloritana. Messina. 8°. **19.**

Atti dell' Acc. Pont.: Atti dell' Accademia Pontaniana. Napoli. (2) **10.**

Batt. G.: Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degli studi nelle università italiane. Fondato nel 1863. Proseguito dal prof. A. Capelli. Napoli: Pellerano. gr. 8°. **43** [(2) **12**].

Belg. Bull. Sciences: Académie Royale de Belgique. Bulletin de la classe des sciences. Bruxelles: F. Hayez. 8°. 1905.

Belg. Mém.: Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles: F. Hayez. 4°.

Belg. Mém. cour.: Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in-8°. Bruxelles: F. Hayez. (2) **1**.

Belgrad Ak.: Veröffentlichungen der Kgl. Serbischen Akademie. Belgrad (Serbisch).

Berl. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°. 1904, 1905.

Berl. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1905.

Bern. Mitt.: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1905. Bern. 8°.

Bibl. Math.: Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von Gustaf Eneström in Stockholm. Leipzig: B. G. Teubner. gr. 8°. (3) **6**.

Boll. di Mat. Bologna: Il Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali, diretto da A. Conti. Bologna. **4**.

Bologna Mem.: Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (6) **2**.

Bologna Rend.: Rendiconto delle sessioni dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Bologna. 8°. **9** (1904-1905).

Bordeaux Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.

Bordeaux Procès-verbaux: Procès-verbaux des séances de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°. 1904/05.

Brit. Ass. Rep.: Report of the meeting of the British Association for the advancement of science. South Africa. gr. 8°. 1904/05.

Brux. S. sc.: Annales de la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles: Schepens; Paris: Gauthier-Villars. (Doppelt paginiert, unterschieden durch A und B; A = 1ère partie, B = 2e partie.) **29**.

Bryn Mawr Coll. Monogr.: Bryn Mawr College Monographs. Reprint series, Vol. I, Nr. 4. Contributions from the Mathematical and Physical Departments. Bryn Mawr, Penna.

Bull. des sc. Math. et phys. élém.: Bulletin des sciences mathématiques et physiques élémentaires.

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. 8°. **13**.

Cambr. Trans.: Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. 4°. **20**.

Canada Proc. and Trans.: Proceedings and Transactions of the Royal Society of Canada. Section III.

Časopis: Časopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigiert mit besonderer Rücksicht auf Studierende der Mittel- und Hochschulen. Herausgegeben vom Verein böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8⁰. (Böhmisch.) **34.**

Charkow Ges.: Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. (Russisch.) (2) **9.**

Christiania Vidensk. Selsk. Skr.: Christiania Videnskabs-Selskabets Skrifter.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris: Gauthier-Villars. 4⁰. **140, 141.**

Darboux Bull.: Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux, E. Picard et J. Tannery avec la collaboration de MM. Brocard etc. Paris: Gauthier-Villars. 8⁰. (2) **29.**

Deutsche Math.-Ver.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von A. Gutzmer. Leipzig: B. G. Teubner. 8⁰. **10, 14.**

Dublin Proc.: Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin. 8⁰. (3).

Dublin Trans.: The Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. 4⁰. (2) **8.**

Edinb. M. S. Proc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 8⁰. **23.**

Edinb. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8⁰. **26.**

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4⁰. **41.**

Ed. Times: Mathematical questions and solutions, from the „Educational Times", with many papers and solutions in addition to those published in the „Educational Times". Edited by C. J. Marks. London: Francis Hodgson. 8⁰. (2) **7, 8.**

Encykl. d. math. Wiss.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Herausgegeben von H. Burkhardt, Fr. Meyer, F. Klein, A. Sommerfeld. Leipzig: B. G. Teubner. gr. 8⁰. **2, 3, 4, 5, 6.**

Ens. math.: L'enseignement mathématique. Revue internationale paraissant tous les deux mois. Directeurs: C.-A. Laisant, H. Fehr. Paris: C. Naud; Genève: Georg et Cie. 8⁰. **7.**

Gazeta mat.: Gazeta matematica (Rumänisch). Bukarest. **10, 11.**

Gött. Abh.: Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4⁰. 1905. (2) **4.**

Gött. Nachr.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1905. Göttingen. 8⁰. 1905.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Leipzig: B. G. Teubner. 8⁰. **4.**

Handel. Nederl. Natuur- en Geneesk. Congr.: Handelingen van het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres (den Haag). **10.**

Japan J.: Journal of the College of science, imperial university, Japan. Published by the university Tokyo. 4⁰.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris: Gauthier-Villars. 4°. (2) **10.**

J. für Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von K. Hensel. Berlin: G. Reimer. 4°. **128, 129, 130.**

Il Pitagora: Il Pitagora, pubblicato per cura di G. Fazzari. **11, 12.**

Johns Hopkins Univ. Circ.: Johns Hopkins University Circulars. Published with the approbation of the Board of Trustees. Baltimore. 8°. 1905.

Journ. de Math.: Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville etc. Publié par C. Jordan avec la collaboration de M. Lévy, A. Mannheim, E. Picard, H. Poincaré. Paris: Gauthier-Villars. 4°. (5) **10**, (6) **1.**

Journ. de Phys.: Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida et publié par MM. E. Bouty, G. Lippmann, E. Mascart, A. Potier et B. Brunhes. Paris: Au Bureau du Journal de Physique. 8°. (4) **4.**

Kasan Ges.: Nachrichten der physiko-mathematischen Gesellschaft an der Kaiserlichen Universität zu Kasan. (Russisch.) (2) **14, 15.**

Kiew Univ.: Anzeiger der Universität Kiew. (Russisch.) 8°. 1905.

Kiew Polyt.: Anzeiger des Polytechnikums Kiew. (Russisch.) **5.**

Königsb. Physik.-ökon. Ges.: Schriften der Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Königsberg i. Pr. gr. 4°.

Krakau Anz.: Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie. Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. 8°. 1905.

Kriegstechn. Zs.: Kriegstechnische Zeitschrift. Für Offiziere aller Waffen. Zugleich Organ für kriegstechnische Erfindungen und Entdeckungen auf militärischen Gebieten. Verantwortlich geleitet von E. Hartmann. Berlin: Ernst Siegfried Mittler und Sohn. **8.**

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig. 4°. **29.**

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **57.**

Leop. Nova Acta: Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum. Abhandlungen der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Halle. 4°.

Leopoldina: Leopoldina. Amtliches Organ der Kais. Leopoldino-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Herausgegeben von K. v. Fritsch. Halle a. S. gr. 4°. **41.**

Liége Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liége. Bruxelles: Hayez; Paris: Roret. (3).

Lomb. Ist. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano: U. Hoepli. 8°. (2) **38.**

Lond. M. S. Proc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London: F. Hodgson. gr. 8°. (2) **2, 3.**

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. (A) **204**, **205**.

Lond. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8°. **74**, **75**, **76**.

Loria Boll. bibl.: Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di Gino Loria. Torino: Carlo Clausen. 8°. **8**.

Manchester Mem. and Proc.: Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. 8°.

Marseille Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Marseille. 4°. 1905.

Math. Ann.: Mathematische Annalen. Begründet 1868 durch A. Clebsch und C. Neumann. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, A. Mayer, C. Neumann, M. Noether, K. Von der Mühll, H. Weber gegenwärtig herausgegeben von F. Klein, W. von Dyck, D. Hilbert. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **60**, **61**.

Math. és phys. Lapok: Mathematikai és physikai Lapok. Budapest. 8°. **14**.

Mathesis: Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg avec la collaboration de plusieurs professeurs belges et étrangers. Paris: Gauthier-Villars. Gand: Hoste. 8°. (3) **5**.

Math. Gazette: The Mathematical Gazette, edited by W. J. Greenstreet. London: George Bell & Sons. 8°. **3**, **4**, **5**.

Math. Magazine: The Mathematical Magazine. A journal of elementary and higher mathematics. Edited and published by A. Martin. Washington. 4°.

Math. naturw. Bl.: Mathematisch naturwissenschaftliche Blätter. Organ des Verbandes mathematischer und naturwissenschaftlicher Vereine an deutschen Hochschulen. Leipzig: B. G. Teubner. 4°. **2**.

Math.-naturw. Mitt.: Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen. Im Auftrag des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg herausgegeben von A. Schmidt, A. Haas, E. Wölffing. Stuttgart: J. B. Metzler. 8°. (2) **7**.

Mem. della Soc. It.: Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle scienze (detta dei XL) Roma. (3) **13**, **14**.

Mém. Sav. Étr.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. 4°.

Messenger: The Messenger of Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher, London and Cambridge: Macmillan and Co. 8°. (2) **35**, **36**.

Meteorol. Zs.: Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben im Auftrage der österreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigiert von J. Hann und G. Hellmann. Wien: Ed. Hölzel. gr. 8°. **22**.

Mitt. üb. Art. u. Genie: Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Herausgegeben vom K. u. K. technischen Militärkomité. Wien: R. v. Waldheim. 8°. **36**.

Modena Mem.: Memorie della Regia Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Modena. 4°. (3) **4**.

Monatsh. f. Math.: Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des hohen K. K. Ministeriums für Kultus und Unterricht herausgegeben von G. v. Escherich, F. Mertens und W. Wirtinger in Wien. Wien. 8°. **16**.

Moskau. Math. Samml.: Mathematische Sammlung, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau. (Russisch.) **25**.

Moskau. Phys. Sect.: Arbeiten der physikalischen Sektion der Kaiserlichen Gesellschaft der Freunde der Naturkunde, Anthropologie und Ethnologie. Moskau. (Russisch.) (Auch unter dem Titel: Nachrichten der Kaiserlichen Gesellschaft etc.) **13.**

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München. 4°.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°. **35.**

Napoli Atti: Società reale di Napoli. Atti della Reale Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Napoli. 4°. (2) **12.**

Napoli Rend.: Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Napoli. 4°. (3) **11.**

Nature: Nature, a weekly illustrated journal of science. London and New York: Macmillan and Co. 4°. **71, 72, 73.**

Naturw. Rundsch.: Naturwissenschaftliche Rundschau. Herausgegeben von W. Sklarek. Braunschweig: Fr. Vieweg. 4°. **20.**

Nieuw Archief: Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam onder redactie van J. C. Kluyver, D. J. Korteweg en P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. (2) **6, 7.**

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles spéciales à la licence et à l'agrégation, rédigé par C. A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard. Paris: Gauthier-Villars. 8°. (4) **5.**

Nuovo Cimento: Il Nuovo Cimento. Giornale fondato da C. Matteucci e R. Piria. Organo della Società Italiana di Fisica, publ. per cura dei Direttori A. Battelli, A. Ròiti, V. Volterra. Pisa. gr. 8°. (5) **9, 10.**

Nyt Tidsskr. for Math.: Nyt Tidsskrift for Mathematik. Redigeret af P. T. Fold erg og C. Juel. (Abteilung A für elementare, B für höhere Mathematik.) Kjöbenhavn. 8°. **16.**

Palermo Rend.: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo. gr. 8°. **19, 20.**

Periodico di Mat.: Periodico di matematica per l'insegnamento secondario fondato da D. Besso, continuato da A. Lugli ed attualmente diretto dal Dott. G. Lazzeri. Organo dell' Associazione „Mathesis". Livorno. 8°. (3) **2, 3.**

Petersb. Bull.: Bulletin der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. St. Petersburg. (5)

Petersb. Denkschr.: Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. St. Petersburg. gr. 4°. (8) **16.**

Phil Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. Conducted by Lord Kelvin, J. Joly, W. Francis. London. 8°. (6) **9, 10.**

Phys. Rev.: The Physical Review, a Journal of experimental and theoretical physics. Published for Cornell University. New York: The Macmillan Company. **20, 21.**

Physik. Zs.: Physikalische Zeitschrift. Herausgegeben von E. Riecke und H. Th. Simon. Leipzig: S. Hirzel. 4°. **6.**

Pisa Ann.: Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Pisa.

Poske Zs.: Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von E. Mach herausgegeben von F. Poske. Berlin: J. Springer. gr. 8°. **18.**

Pr. = Programmabhandlung, *Gymn.* = Gymnasium, *Realgymn.* = Realgymnasium, etc. 1905.

Prace mat.-fiz.: Prace matematyczno-fizyczne. (Mathematische und physikalische Abhandlungen, herausgegeben in Warschau von S. Dickstein, W. Gosiewski, E. u. W. Natanson.) gr. 8°. (Polnisch.) **16.**

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8°. 1905.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher. London. 8°. **36, 37.**

Rev. Acad. Madrid: Revista de la Real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid. **1, 2, 3.**

Rev. générale des sc.: Revue générale des sciences pures et appliquées. Dir. Louis Olivier. Paris. **16.**

Rev. de Mat. Santiago de Chile: Revista de Matemáticas, Santiago de Chile. **2, 3.**

Revista trim. de Mat.: Revista trimestral de Matemáticas, publicada por J. Rius y Casas. Zaragoza. **5.**

Revue d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15 de chaque mois. Paris. 8°. **65, 66, 67.**

Revue de Math.: Revue de Mathématiques (Rivista di Matematica), publiée par G. Peano. Turin: Bocca. 8°. **8.**

Revue de Math. spéc.: Revue de Mathématiques spéciales rédigée par MM. E. Humbert et G. Papelier avec la collaboration de MM. etc. Paris: Vuibert et Nony. 4°. **15, 16.**

Revue des Quest. sc.: Revue des Questions scientifiques, publiée par la Société scientifique de Bruxelles. Louvain: Secrétariat de la Société scientifique. gr. 8°. (3) **7, 8.**

Revue scientifique: Revue scientifique. Directeur: M. Ch. Richet. Paris: L. Baudouin. 8°. (5) **3, 4.**

Rivista fis., mat. e sc. nat.: Rivista di fisica, matematica e scienze natural Pavia: Fratelli Fusi. 8°. **6.**

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4°. (5) **5.**

Rom. Acc. L. Rend.: Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Roma. 4°. (5) **14.** (Je zwei Semester, unterschieden als $\mathbf{14}_1$ und $\mathbf{14}_2$.)

Rom. Acc. P. d. N. L. Atti: Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma. 4°. **58.**

Rom. Acc. P. d. N. L. Mem.: Memorie dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma. 4°. **23.**

Rozpravy: Rozpravy české Akademie cisaře Frantiska Josefa pro vědy, slovesnost a umění (II. Cl.). Prag. (Böhmisch.) (Dazu: *Bulletin international.* Résumés des travaux présentés. Classe des sciences mathématiques et naturelles. — Académie des Sciences de l'Empereur François Joseph I.) **14.**

Science. (N. S.): Science. A weekly journal devoted to the advancement of science. Published weekly by The Macmillan Company New York. 4° (New Series) **22**.

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°. **33**.

Sitzungsber. Berl. Math. Ges.: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft. (Im Arch. d. Math. u. Phys.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 8°. **4**.

Soc. Philom. Bull.: Bulletin de la Société Philomathique de Paris. Paris. (9) **7**.

Spaczinski's Bote: Spaczinski's Bote der Experimentalphysik und elementaren Mathematik, früher herausgegeben von Spaczinski, jetzt von Gernet und Zimmermann in Odessa. 24 Nummern jährlich. Die Nummern laufen vom Anfange des Journals an. (Russisch.) 1905. Nr. 385-406.

Suppl. al Period.: Supplemento al Periodico di Matematica diretto dal Dott. G. Lazzeri. Livorno: R. Giusti. 8°. **8, 9**.

Teixeira J.: Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. **15**.

Tokio Math. Ges.: Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji. (Zeitschrift der Physiko-Mathematischen Gesellschaft in Tokio. Englisch und Japanisch.) Tokio. 8°. **2**.

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino: C. Clausen. 8°. **40**.

Torino Mem.: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino: C. Clausen. 4°. (2) **55**.

Toulouse Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la Faculté etc. Paris: Gauthier-Villars. 4°. (2) **6, 7**.

Toulouse Mém.: Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. Toulouse: Douladoure-Privat. 8°. (10) **5**.

Ungar. Ber.: Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ung. Akademie der Wissensch. und der Königl. Ung. naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von Baron R. Eötvös etc. Redig. v. J. Kürschák u. Fr. Schafarzik. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **20, 23**.

Unterrichtsbl. f. Math.: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Herausgegeben von Fr. Pietzker. Berlin: O. Salle. 4°. **11**.

Upsala Nova Acta: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis (3).

Ven. Ist. Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°. **64** [(8) **7**], **65** [(8) **8**].

Ven. Ist. Mem.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 4°.

Verh. des 3. intern. Math. Kongr. Heidelb.: Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. Herausgegeben von dem Schriftführer des Kongresses A. Krazer. Leipzig: B. G. Teubner.

Verh. Deutsche Phys. Ges.: Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Jahre 1905. Im Auftrage der Gesellschaft herausgegeben von K. Scheel. Braunschweig: Fr. Vieweg & Sohn. 8°. **7**.

Verh. Naturf. Ges.: Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte zu Breslau 1904 und Meran 1905. Herausgegeben von A. Wangerin. Leipzig: F. C. W. Vogel. **1, 2.** (1905.)

Věstník: Vestník České Akademie (Bericht der kaiserlich böhmischen Akademie). (Böhmisch.) 8⁰.

Vierteljahrsschr. Astr. Ges.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von den Schriftführern der Gesellschaft R. Lehmann-Filhés und G. Müller. Leipzig: W. Engelmann. 8⁰. **40.**

Washington Bull.: Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Washington. **14.**

Wiad. Mat.: Wiadomosci Matematyczne. Redactor i Wydawca S. Dickstein. Warszawa. (Polnisch.) 8⁰. **8, 9.**

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8⁰. **114.**

Zs. f. Math. u. Phys.: Zeitschrift für Mathematik und Physik. Begründet 1856 durch O. Schlömilch. Organ für angewandte Mathematik. Gegenwärtig unter Mitwirkung von C. von Bach usw. herausgegeben von R. Mehmke und C. Runge. Leipzig: B. G. Teubner. 8⁰. **51, 52.**

Zs. f. Vermessw.: Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometervereins. Herausgegeben von Reinhertz und C. Steppes. Stuttgart: Konrad Wittwer. 8⁰. **34.**

Zs. f. math. u. naturw. Unterr.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Begründet 1869 und bis 1901 herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Gegenwärtig herausgegeben unter Mitwirkung der Herren usw. von H. Schotten. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 8⁰. **36.**

Zürich. Naturf. Ges.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Herausgegeben unter Mitwirkung etc. von F. Rudio. Zürich. 8⁰. **50.**

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte, Philosophie und Pädagogik.

Kapitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

Seite

B. Geschichte einzelner Disziplinen.

Kapitel 2. Philosophie, Mengenlehre und Pädagogik.

A. Philosophie.

B. Mengenlehre.

C. Pädagogik.

Seite

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Kapitel 1. Gleichungen, universale Algebra und Vektoranalysis.

A. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transzendente Gleichungen.)

B. Universale Algebra und Vektoranalysis.

Kapitel 2. Theorie der Formen (Invariantentheorie).

A. Theorie der algebraischen Formen.

B. Determinanten.

C. Elimination und symmetrische Funktionen.

Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

Kapitel 1. Niedere Arithmetik.

Kapitel 2. Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

B. Theorie der Formen.

Kapitel 3. Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt.

Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Kapitel 1. Allgemeines.

Kapitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Kapitel 5. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Kapitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Funktionen von Differentialen. Maxima und Minima).

Kapitel 3. Integralrechnung.

Kapitel 4. Bestimmte Integrale.

Kapitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen und Differenzenrechnung.

A. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

B. Differenzenrechnung.

Kapitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Kapitel 7. Variationsrechnung.

Seite

Siebenter Abschnitt. Funktionentheorie.

Kapitel 1. Allgemeines.

Kapitel 2. Besondere Funktionen.

A. Elementare Funktionen, Gammafunktion und hypergeometrische Reihe.

B. Elliptische Funktionen.

C. Hyperelliptische, Abelsche und verwandte Funktionen.

D. Kugelfunktionen und verwandte Funktionen.

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Kapitel 1. Prinzipien der Geometrie.

Kapitel 2. Kontinuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie).

Kapitel 3. Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

Kapitel 4. Darstellende Geometrie.

Kapitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

B. Besondere ebene Gebilde.

C. Besondere räumliche Gebilde.

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

E. Abzählende Geometrie.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Kapitel 1. Lehrbücher Koordinaten.

Seite

Kapitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Kurven.

B. Theorie der algebraischen Kurven.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

D. Andere spezielle Kurven.

Seite

Kapitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumkurven.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

D. Andere spezielle Raumgebilde.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

Kapitel 4. Liniengeometrie (Komplexe, Strahlensysteme).

Kapitel 5. Verwandtschaft, Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

B. Konforme Abbildungen und dergleichen.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.)

Seite

Kapitel 2. Kinematik.

Kapitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrostatik.

Kapitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

Kapitel 5. Potentialtheorie.

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Kapitel 1. Molekularphysik, Kapillarität, Elastizität, Akustik.

A. Molekularphysik und Allgemeines.

B. Kapillarität.

C. Elastizitätstheorie.

D. Akustik.

Seite

Kapitel 2. Optik.

A. Theoretische Optik.

B. Geometrische Optik.

Kapitel 3. Elektrizität und Magnetismus.

Kapitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

B. Gastheorie.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Kapitel 1. Geodäsie.

Kapitel 2. Astronomie.

Kapitel 3. Mathematische Geographie und Meteorologie.

Anhang.

Verzeichnis
der Herren, die für den sechsunddreißigsten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen den Übersetzer der in nicht deutscher Sprache eingesandten Referate.)

Bö.	Herr	Prof. Börsch Potsdam.
Br.	„	Reg.-Rat Dr. Brix Steglitz.
D.	„	Prof. Dehn-Münster i. W.
Dn.	„	Prof. Dickstein Warschau.
Dz.	„	Prof. Dziobek Chlbg.
E.	„	Prof. Eneström Stockholm.
El.	„	Prof. Engel Greifswald.
E. M.	„	Dr. Eugen Meyer Chlbg.
F.	„	Prof. Faerber Berlin.
Fe.	„	Prof. Fehr Genf.
Fu.	„	Prof. Fueter Basel.
Fs.	„	Dr. Fuchs Halensee.
Gbg.	„	Prof. Guldberg Christiania.
Gbs.	„	Prof. Gibson Glasgow.
G. K.	„	Prof. G. Kowalewski Bonn.
Gln.	„	Reg.-Rat Dr. Gleichen Berlin.
Gm.	„	Dr. Grimm Halensee.
Gt.	„	Prof. Güntsche Berlin.
Gz.	„	Prof. Gutzmer Halle a. S.
H.	„	Prof. Haussner Jena.
Hsb.	„	Prof. Hessenberg Bonn.
Jhk.	„	Prof. Jahnke Berlin.
Jk.	„	Prof. Joukowsky Moskau.
Js.	„	Prof. Jolles Halensee.
K.	„	Prof. Kühnen Potsdam.
Kl.	„	Prof. Kluyver Leiden.
Kr.	„	Prof. Krazer Karlsruhe.
La.	„	Prof. Loria Genua.
Le.	„	Dr. Lewe Aachen.
Ldt.	„	Dr. Lindt Charlottenburg.
Lp.	„	Prof. Lampe Berlin.
Lsg.	Herr	Prof. Landsberg Kiel.
Lwt.	„	Oberl. Lewent Berlin.
Ly.	„	Prof. Loewy Freiburg i. B.
M.	„	Prof. F. Müller Weißer Hirsch bei Dresden.
Mi.	„	Schulrat Dr. Michaelis Berlin.
Mn.	„	Prof. Mansion Gent.
Msn.	„	Dr. Mattson Vesterås.
My.	„	Prof. F. Meyer Königsberg i. Pr.
Ot.	„	Dr. Oster Mannheim.
P.	„	† Dr. Pund Charlottenbg.
Pe.	„	Prof. Petr Prag.
Re.	„	Prof. Rothe Klausthal.
R. M.	„	Prof. R. Müller Schöneberg.
Rns.	„	Prof. Riens Berlin.
Rr.	„	Prof. Reissner Aachen.
Rtt.	„	Obering. Rotth Berlin.
Sh.	„	Prof. Schafheitlin Berlin.
Si.	„	Prof. Sintzow Charkow.
Sk.	„	Dr. Salkowski Berlin.
St.	„	Prof. Stäckel Karlsruhe.
Stz.	„	Prof. Steinitz Berlin.
T.	„	Dr. Toeplitz Göttingen.
Tn.	„	Prof. Treutlein Karlsruhe.
V.	„	Dr. Valentiner Kopenhagen.
Vi.	„	Prof. Vivanti Pavia.
Wbg.	„	Prof. Wallenberg Chlbg.
Wn.	„	Prof. Wangerin Halle a. S.
Wö.	„	Prof. Wölffing Stuttgart.
Wz.	„	Prof. Weltzien Zehlendorf.
Z.	„	Dr. Zühlke Halensee.
Zch.	„	Dr. Zacharias Berlin.

Chlbg. = Charlottenburg.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittlung der Verlagsbuchhandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe, Berlin W. 15, Fasanenstraße 64.

Erster Abschnitt.

Geschichte, Philosophie und Pädagogik.

Kapitel 1.

G e s c h i c h t e.

A. Biographisch-Literarisches.

W.-W. Rouse Ball. Histoire des mathématiques. Édition française revue et augmentée. Traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. Tome Premier: Les mathématiques dans l'antiquité. Les mathématiques au moyen-âge et pendant la renaissance. Les mathématiques modernes de Descartes à Huygens. Notes complémentaires. Paris: A. Hermann. VIII u. 422 S. gr. 8° (1906).

R. Ball's A short account of the history of mathematics, London, erschien zuerst 1888 (s. F. d. M. **20**, 1-2, 1888); die 2. Auflage folgte 1892, die 3. 1901. Das Werk, welches ursprünglich nach recht veralteten Quellen bearbeitet war, hat manche Verbesserungen erfahren; doch sind selbst in der 3. Auflage viele einzelne Unrichtigkeiten stehen geblieben. Daher ist eine Übersetzung mit großen Schwierigkeiten verbunden, was Eneström bei der Besprechung der italienischen Übersetzung (Bibl. math. (3) **5**, 313, 1904) besonders hervorgehoben hat. Da in dem Jahrbuch nur der I. Teil dieser italienischen Übersetzung (**34**, 41) angeführt ist, so sei hier der vollständige Titel genannt: Breve compendio di storia delle matematiche. Versione di D. Gambioli e G. Puliti, rived. et corr. di G. Loria. I. Le matematiche dell' antichità al rinascimento. Bologna: Zanichelli 1903. X u. 284 S. II. Le matematiche moderne sino ad oggi. ib. 1904. VI u. 439 S.

Die französische Übersetzung ist ebenso wie die italienische in zwei Teile zerlegt, was durch mehrfache Zusätze geboten war. Der erste Teil reicht bis zum Beginn des 17. Jahrhunderts. Er umfaßt 3 Perioden: I. Die Mathematik unter dem Einfluß der griechischen Zivilisation. II. Die Mathematik im Mittelalter und während der Renaissance. III. Die moderne Mathematik.

Auf Einzelheiten werden wir bei der Besprechung des II. Teiles, der mit Newton beginnt, näher eingehen. M.

G. Eneström, A. Favaro, C. Grönblad, J. Kürschák, F. Rudio, A. Sturm, H. Suter. Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bibl. Math. (3) **6**, 101-111, 208-214, 305-321, 394-408.

Fortsetzung der Reihe von Bemerkungen, die im ersten Bande der dritten Folge der „Bibliotheca Mathematica" begann (vgl. F. d. M. **31**, 2, 1900). Die Anzahl der neuen Bemerkungen beträgt etwa 90.

E.

P. Mansion. Mémorial mathématique. Mathesis (3) **5**, 5-6, 33, 57-58, 89, 113-114, 145, 169, 201-202.

Angabe des Geburts- oder Todestages der bedeutenderen Mathematiker innerhalb der Zeit vom 1. Januar bis zum 30. September nach dem Gedenktagebuch für Mathematiker von Felix Müller, Leipzig, Teubner (F. d. M. **35**, 2, 1904). Mn.

P. Mansion. Mémorial mathématique d'après le Professeur Dr. Félix Müller. Gand: Hoste. 16 S. 8°.

Mn.

M. Simon. Über die Mathematik der Ägypter. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelberg, 526-535.

Der Papyros Rhind scheint, wie auch andere Forscher schon betont haben, nicht ein Vademekum eines ägyptischen Feldmessers, sondern das Heft eines schlechten Schülers zu sein, das später von einem Schreiber ohne mathematische Bildung abgeschrieben wurde. Aus den Aufgaben des Papyros Rhind ergibt sich, daß die Ägypter arithmetische und geometrische Reihen kannten, Gleichungen ersten Grades und reine quadratische Gleichungen lösten, mit dem Wesen der Ähnlichkeit vertraut waren, einfache trigonometrische Berechnungen an Pyramiden ausführten, und aus alten Zeichnungen erkennt man, daß sich bei ihnen Ansätze zur darstellenden Geometrie finden. P.

M. Simon. Zur ägyptischen Mathematik. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **9**, 102-103.

1. Der bei den Ägyptern gebräuchliche Wert für π ist wahrscheinlich durch praktisches Ausmessen gefunden. 2. Eine von Schack im Berliner Papyrus 6619 gefundene quadratische Gleichung. 3. Notizen nach Borchardt 1893 über Einzelheiten. Lp.

G. Vacca. Sulla matematica degli antichi Cinesi. Loria Boll. bibl. 8, 96-102.

Eine Stelle aus dem Werke Cheu-pi soan King, verfaßt unter der Dynastie der Cheu (beginnt 1122 v. Chr.), ist dreimal übersetzt worden, unter anderem nach der Übersetzung des Alexander Wylie (1852) von Biernatzki im J. für Math. **52**, 65, 1856. Da die erwähnten drei Übersetzungen unter sich abweichen, gibt Vacca eine neue Übertragung nach dem Werke Tien yuen leih li tsiuen shu, veröffentlicht von Seu fa 1682, im Besitze von Carlo Puini, der bei der Übersetzung mitgewirkt hat. Vacca schließt aus der abgedruckten Fassung, daß nicht der pythagoreische Lehrsatz, sondern seine Umkehrung, die Konstruktion eines rechten Winkels vermittelst eines Seils mit den Knotenabschnitten 3, 4, 5 den Chinesen jener Zeit bekannt war, vielleicht sogar der Satz vom rechten Winkel im Halbkreise. Damit sei im Gegensatz zu den bisherigen Ansichten die Existenz einer mathematischen Wissenschaft bei den alten Chinesen dargetan. Lp.

P. Harzer. Die exakten Wissenschaften im alten Japan. 2 Textfig. Rede z. Feier d. Geb. Sr. Maj. an der Universität in Kiel. Kiel: Lipsius & Tischer. 39 S. gr. 8°; Deutsche Math.-Ver. **14**, 312-339.

Unter dem „alten Japan“ sind die Jahrhunderte vor dem reichlicheren Eindringen europäischer Wissenschaft in Japan verstanden. Der Hauptteil der Betrachtung ist der „alten“ Mathematik gewidmet, insbesondere den verschiedenen, zum Teil höchst eigenartigen Methoden der Berechnung von π, der Darstellung der Kreisbogenlänge durch unendliche Reihen, der Verwendung der Kettenbrüche, dem Studium von Ellipse, Kettenlinie und Zykloide und Schwierigerem. Eine besondere Untersuchung erfährt die Frage der Selbständigkeit japanischer Forschung (S. 325 ff.). Tn.

P. Harzer. On Japanese Mathematics. Brit. Ass. Rep. South Africa **75**, 325-329.

Dem Inhalte nach übereinstimmend mit der vorstehend angezeigten Festrede, besonders mit dem Abdruck in Deutsch. Math.-Ver., wo die Fußnoten viel sachliches Material enthalten. Lp.

W. J. G(reenstreet). Japanese mathematics. Math. Gazette **3**, 268-270.

Bemerkungen zu der Rede Harzers (vergl. die vorstehenden Referate). Lp.

V. T. Hayashi. A brief history of the Japanese mathematics. Nieuw Archief (2) **6**, 325-361; (2) **7**, 105-163.

Vergl. F. d. M. **35**, 4, 1904. Tn.

H. Suter. Zur Geschichte der Mathematik bei den Indern und Arabern. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelberg, 556-561.

I. Über die Vielecksformel in Bhâskaras Lîlâvati:

$$s = \frac{4\,db\,(p-b)}{\frac{5}{4}p^2 - b\,(p-b)} = \frac{4\,d\,(n-1)}{\frac{5}{4}n^2 - (n-1)},$$

wo d = Durchmesser. b = Bogen, p = Peripherie, n = Seitenzahl des Polygons, also $b = p/n$. Suter zeigt, auf welchem Wege diese Formel wahrscheinlich abgeleitet ist. II. Über den Verf. des „liber augmenti et diminutionis“. Statt der früher aufgestellten Konjekturen (F. d. M. **33**, 12, 1902) macht Suter es sehr wahrscheinlich, daß die genannte Schrift das „Buch der Vermehrung und Verminderung“ des Šoǵâʿ b. Aslam sei.

Lp.

F. Amodeo. Gli istituti accademici di Napoli intorno al 1800. Atti dell'Acc. Pontaniana (2) **34**, 1-60. Napoli: F. Giannini e Figli. 59 S. 4°.

Im Jahre 1900 gab G. Beltrami in einem Aufsatz: „La R. Accademia di Scienze e Belle Lettere fondata in Napoli nel 1778“, Atti dell' Acc. Pontaniana eine Geschichte der Accademia Reale zu Neapel. Hier wird dieselbe ergänzt durch eine Geschichte der „Reale Accademia delle Scienze“, einer Abteilung der Accademia Reale, am Schluß des XVIII. und bei Beginn des XIX. Jahrhunderts. Im Jahre 1788 erschien ein Band der „Atti della Reale Accademia delle Scienze e Belle Lettere di Napoli dalla fondazione sino all' anno 1787“ mit einem „Discorso istorico preliminare“, mit Arbeiten von Fergola, Saladini u. a. Die neue Accademia delle Scienze wurde am 24. April 1809 in 3 Klassen geteilt. Die erste Klasse der Mathematiker bildeten: Generale Parise Giuseppe, Generale Campredon, Generale Dedon, Piscicelli Francesco, Sangro Giuseppe, Flauti Vincenzo, Fergola Nicolò. Statuten und Name wurden wiederholt geändert. Der erste Band der Memorie vom Jahre 1819 und die folgenden enthielten mathematische Aufsätze von Fergola, Flauti, Francesco Bruno, Francesco Paolo Tucci u. a., über welche hier berichtet wird.

Es folgen dann Notizen über das „Istituto Nazionale“, das „R. Istituto d' incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli“ und die „Società Pontaniana“.

M.

F. Amodeo. Vita matematica napoletana. Studio storico, biografico, bibliografico. Parte prima. Con una tavola di 3 ritratti fuori testo e 5 ritratti nel testo. Napoli: R. Tipografia Francesco Giannini & Figli VIII u. 216 S. 4°.

Das schön ausgestattete und interessante Werk zerfällt in vier Kapitel: I. Stato delle matematiche a Napoli dal 1650 al 1732. II. Dai fratelli Di Martino a Vito Caravelli. III. Nicolò Fergola. IV. Gl'istituti d'istruzione e scientifici in Napoli intorno al 1800. — Die Kapitel I-III sind einzeln schon früher in den Atti dell' Accademia Pontaniana veröffentlicht und danach im Jahrbuche besprochen worden (F. d. M. **32**, 86, 1901; **33**, 17, 1902; **34**, 11, 1903; vgl. das vorstehende Referat).

Im Kapitel IV wird der Reihe nach über folgende Institute berichtet: 1. Die königliche Universität und die Lyzeen. 2. Die königliche Kriegsakademie. 3. Die königliche Marineakademie. 4. Die Schule für Brücken- und Straßenbau. 5. Die Privatstudien und die Bibliotheken. 6. Das königliche geographische Amt und die Geodäten Rizzi-Zannoni und Visconti. 7. Die königliche Sternwarte und die Astronomen Cassella, Zuccari, Piazzi und Brioschi. Da noch ein zweiter Teil versprochen wird, welchem ein ausführliches Namenregister angehängt werden soll, dürfen wir jetzt schon unsere Freude über eine so gründliche Monographie aus der Geschichte der Mathematik aussprechen. Lp.

A. A. Björnbo. Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz. 2. Bibl. Math. (3) **6**, 230-238.

Fortsetzung des Artikels, dessen erster Abschnitt in der Bibl. Math. (3) **4** (vgl. F. d. M. **34**, 5, 1903). Hier werden zwei weitere mathematische Handschriften beschrieben, die jetzt in der „Biblioteca Laurenziana“ aufbewahrt sind. Beide stammen aus dem 14. Jahrhundert und enthalten ausschließlich astronomische oder astrologische Traktate. E.

G. Galilei. Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d' Italia. Volume XVI. Firenze: Tipografia Barbèra. 564 S. 4°.

Der Band enthält den Briefwechsel Galileis aus den Jahren 1634 bis 1636 unter den fortlaufend gezählten Nummern 2838 bis 3412, unter ihnen 50 von Galilei geschriebene Briefe. Für die Lebensgeschichte des alten Forschers während seines Aufenthaltes zu Arcetri enthält der Band interessante Dokumente. Die Einrichtungen beim Abdrucke des Briefwechsels sind in F. d. M. **31**, 8, 1900, bei der Anzeige des ersten Bandes des Galileischen Briefwechsels angegeben. Lp.

A. Favaro. Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. — XII: Vincenzio Renieri; XIII: Vincenzio Galilei. Ven. Ist. Atti [(8) 7] **64**, 111-195, 1349-1377.

A. Favaro. Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. — XIV. Giacomo Badouère. — XV. Martino Hastal. Ven. Ist. Atti [(8) 8] **65**, 183-208.

In Fortsetzung seiner früheren Studien (vgl. F. d. M. **35**, 8, 1904) behandelt der unermüdliche Galileiforscher, soweit möglich, Leben und Bedeutung von vier weiteren Männern, die mit Galilei in Beziehung traten: Renieri (1606-1647), V. Galilei (1606-1649), G. Badouère (?-1620) und M. Hastal. Für Renieri werden auch (S. 163-195) Belegstellen und Briefe mitgeteilt. Tn.

E. Wohlwill. Galilei-Studien. Die Legende von den Pisaner Fallversuchen Galileis. Mitt. zur Gesch. d. Medizin u. Naturw. 4, Nr. 2 [Poske Zs. 18, 304-306].

Einzige Quelle für die angeblichen Fallversuche Galileis ist der historische Bericht über das Leben Galileo Galileis von Vincenzio Viviani, geschrieben 1654, gedruckt 1717, aufgenommen in eine Gesamtausgabe der Werke Galileis 1718. Wohlwill zeigt die Unglaubwürdigkeit dieses Berichtes, der ebenso legendarisch ist wie die andere Erzählung, daß Gustav Adolf von Schweden an den Paduaner Vorträgen Galileis teilgenommen habe. Lp.

A. Favaro. L'episodio di Gustavo Adolfo di Svezia nei racconti della vita di Galileo. Nota. Ven. Ist. Atti [(8) 8] 65, 17-39.

Gegenüber den Angriffen Wohlwills verteidigt hier Favaro die Glaubwürdigkeit Galileis sowohl, als seines Biographen Viviani hinsichtlich der Aussage, Gustav Adolf sei zu Padua Galileis Schüler gewesen — und dies selbst für den Fall, daß der berühmte Schwedenkönig gar nicht in Padua war. Tn.

R. Descartes. Œuvres de Descartes publiées par Charles Adam & Paul Tannery sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. VIII. Paris: Léopold Cerf. 4°.

Principia Philosophiae. VIII (Première partie). XVIII u. 348 S.

Epistola ad G. Voetium. Lettre apologétique. Notae in programma. VIII (Seconde partie). XIII u. 378 S.

Der vorliegende achte Band der neuen Ausgabe von den Werken des Vaters der modernen Philosophie zerfällt in zwei Teile, von denen der erste die Hauptschrift philosophischen Inhaltes, der zweite die durch gegnerische Angriffe hervorgerufenen Verteidigungsschriften enthält. In beiden Teilen sind Nachbildungen der Originaltitel beigegeben. Dieselben lauten: Renati Des-Cartes Principia Philosophiae. Amstelodami, Apud Ludovicum Elzevirium, anno 1644. Cum privilegiis. — Epistola Renati Des-Cartes, Ad celeberrimum Virum D. Gisbertum Voetium, In qua examinantur duo libri, nuper pro Voetio Ultrajecti simul editi: unus de Confraternitate Mariana, alter de Philosophia Cartesiana. Amsterodami, Apud Ludovicum Elzevirium, 1643. — Magni Cartesii Manes ab ipsomet defensi; sive N. V. Renati Des-Cartes Querela Apologetica ad Amplissimum Magistratum Ultrajectinum, Qua technae, calumniae, mendacia, falsorum testimoniorum fabricae, aliaque crimina Voetiorum & Dematii, plene reteguntur. Opusculum antea ineditum, nunc vero opponendum quotidianis Voetii & Voetianorum criminationibus, iis nominatim quas sub Theologiae Naturalis Reformatae titulo haud ita pridem emiserunt. Vristadii, Apud Lancellotum Misopodem ad insigne fortunae volatilis insuburbio. 1656. — Renati des Cartes Notae in Programma quoddam,

sub finem Anni 1647, in Belgio editum, cum hoc Titulo: Explicatio Mentis humanae, sive Animae rationalis, ubi explicatur, quid sit, & quid esse possit. Amstelodami, Ex Officina Ludovici Elzevirii 1648.

Der Band ist von Adam allein herausgegeben; Paul Tannery hatte jedoch bei der Vorbereitung noch mitwirken können. In dem Vorworte „Paul Tannery et l'édition des œuvres de Descartes" werden die Verdienste des leider zu früh verstorbenen gelehrten Historikers der Mathematik um die Herausgabe der Werke von Descartes nach Gebühr gewürdigt. Lp.

C. de Waard. Eene correspondentie van Descartes uit de jaren 1618 en 1619. Nieuw Archief (2) 7, 69-87.

Hier werden sechs Briefe von Descartes an seinen Freund Isaac Beeckman (1588-1637) aus den Jahren 1618 und 1619 veröffentlicht, die über verschiedene wissenschaftliche Gegenstände handeln (Wasserdruck, Fall der Körper, musikalische Intervalle, kubische Gleichungen, Längenbestimmung, Lullische Kunst). Die Briefe sind entnommen aus dem handschriftlichen über die Jahre 1611 bis 1635 sich erstreckenden Tagebuch Beeckmans, in dem auch Descartes' Compendium musicae enthalten ist (Fol. 163r bis 178v). Tn.

H. Schneider. Die Stellung Gassendis zu Descartes. Leipzig: Dürr. 67 S. (1904).

Chr. Huygens. Œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société Hollandaise des Sciences. Tome dixième. Correspondance 1691-1695. La Haye: Martinus Nijthoff. IV u. 815 S. 4°.

Vier Jahre nach dem Erscheinen des neunten Bandes (vgl. F. d. M. **32**, 6, 1901) ist der zehnte Band des Briefwechsels zwischen Huygens und seinen Zeitgenossen vollendet worden. Statt der zuerst in Aussicht gestellten acht Bände umfaßt die Correspondance also zehn Bände (vgl. F. d. M. **20**, 10, 1888), und die Herausgeber haben in der gewissenhaften Durchsicht und Kommentierung des Materials eine höchst schätzenswerte und erstaunliche Arbeit geleistet. Der gegenwärtige letzte Band des Briefwechsels, der die Nummern 2655 bis 2894 umfaßt, außerdem zehn nachträglich aufgefundene Briefe der früheren Jahre bringt, enthält als letztes Schreiben des großen Niederländers einen Brief vom 4. März 1695 an seinen Bruder Constantin; danach folgen noch je ein Brief vom Marquis de l'Hospital und von Leibniz an Huygens, endlich als würdiger Abschluß der Klagebrief von Leibniz an H. Basnage de Bauval (16/26. Juli 1695) über den Tod des Gelehrten, den der letzte Brief nicht mehr erreichte († 9. Juli 1695). Die am häufigsten vorkommenden Namen Fatio de Duillier, De l'Hospital, Leibniz genügen, um das Interesse der Mathematiker an den in diesen Briefen behandelten Fragen zu erregen. Man findet in der verschiedenen Auf-

fassung der erörterten Aufgaben, unter denen die Eigenschaften der Kettenlinie einen breiten Raum beanspruchen, wertvolle Beiträge zur Geschichte der Infinitesimalrechnung. Die „Bernoullische Kurve", bei der die Länge der Tangente zu der Abszisse des Schnittpunktes der Tangente mit der x-Achse ein gegebenes Verhältnis hat, beschäftigt den alternden Gelehrten in seinen letzten Lebensjahren in hohem Grade. Hier zeigen sich seine Methoden im Nachteil gegenüber der Infinitesimalrechnung.

Lp.

J. Vahlen. Erinnerungen an Leibniz. Berl. Ber. 1905, 653-671.

R. Sturm. Ein Distichon von der Hand Joh. Bernoullis. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **8**, 342.

Stammbuchverse aus 1702:

Illa mihi Patria est ubi pascor, non ubi nascor;
Illa ubi sum notus, non ubi natus eram.

Lp.

B. N. Menschutkin. M. W. Lomonossow, der erste russische Physiker und Chemiker. Spaczinskis Bote Nr. 385, 8-12; 386, 25-32; 387, 57-68 (Russisch).

Der im Jahre 1765 gestorbene Akademiker M. W. Lomonossow, mehr bekannt durch seine poetischen Werke, darf in der Geschichte der Physik und Chemie nicht unerwähnt bleiben; denn seine atomistische Theorie ist den modernen Ansichten näher als die erst später von Boskowitsch gegebene. Auch wurde sie von ihm auf die Theorie der Wärme angewendet (die betreffende Abhandlung stammt aus dem Jahre 1744; die Wärme erklärte er durch die Bewegung der kleinsten Teilchen der Materie) und auf die mechanische Theorie der Gase („Versuch der Theorie der elastischen Kraft der Luft", 1748; der Grundgedanke entstand wahrscheinlich unter dem Einfluß von D. Bernoullis Hydrodynamik). Weiter sind zu erwähnen ein Versuch zur Erklärung der Krystallstruktur, seine Ansichten über Äther und Elektrizität. Vollständiger schrieb der Verf. über diesen Gegenstand in seiner Abhandlung: M. W. Lomonossow als Physiko-Chemiker. Zur Geschichte der Chemie in Rußland (Journal der russischen Chemischen Gesellschaft, 1904, Abt. II, S. 77-304, und in den Nachrichten des St.-Petersburger Polytechnischen Instituts, 1904).

Si.

F. Schur. Johann Heinrich Lambert als Geometer. Rede beim Rektoratswechsel an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe. Deutsche Math.-Ver. **14**, 186-198.

Vgl. F. d. M. **35**, 10, 1904.

G. Eneström. Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I. Bernoulli. III. 1739-1746. Bibl. Math. (3) **6**, 16-87.

Schluß des Artikels, dessen zwei erste Abschnitte in der Bibl. Math. (3) **4** und **5** (vgl. F. d. M. **34**, 10, 1903; **35**, 10, 1904) erschienen sind. Dieser letzte Artikel bringt 5 Briefe von Euler und 6 Briefe von Bernoulli aus den Jahren 1739-1741 zum Abdruck; dazu wird noch der Inhalt von 6 folgenden Briefen des Bernoulli aus den Jahren 1741-1746 angegeben, welche Briefe schon von Fuß veröffentlicht wurden, aber hier nicht zum Abdruck gebracht werden, weil die entsprechenden Eulerschen Briefe alle verloren sind. Auch in den Briefen aus den Jahren 1739-1741 kommen vielfach Streichungen vor, wodurch größere oder kleinere Absätze unleserlich gemacht sind.

Von den rein mathematischen Fragen, die in den hier abgedruckten Briefen behandelt werden, sind in erster Linie die Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und die Summierung der Reihe $\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^2 \pm n}$ zu nennen. Mehr im Vorübergehen wird gewisser anderer Reihen und einiger Reduktionsformeln für unbestimmte Integrale gedacht. Auch mit vielen Gegenständen der angewandten Mathematik beschäftigen sich die Briefe, besonders mit der Bewegung schwimmender Körper und mit hydrodynamischen Fragen.

E.

R. Marcolongo. Notizie sul „Discorso matematico“ e sulla vita di Giulio Mozzi. Loria Boll. bibl. 8, 1-8.

Giulio Giuseppe Mozzi del Garbo, geb. 23. Febr. 1730 zu Florenz, gest. ebenda 16. April 1813, nach dem Artikel von Loria in Batt. G. **31**, 23-30, 1895, über Giorgini bekannt als Verfasser des „Discorso matematico sopra il rotamento dei corpi“ (Napoli 1763), scheint nur diese eine Schrift aus den mathematischen Wissenschaften veröffentlicht zu haben. Vorher waren von ihm schon poetische Erzeugnisse erschienen, ein „Inno al Sole“ und eine „Ode sopra la noia“. Als unter dem Großherzog Leopold die drei Akademien in Florenz 1784 zu der „Accademia Fiorentina“ vereinigt wurden, ernannte der Großherzog Mozzi zum Präsidenten, und unter den wechselvollen Geschicken des Landes, die Mozzi alle durchmachte, bald erniedrigt, bald zum Minister erhöht, wurde ihm das Amt des Vorsitzenden der Akademie immer wieder übertragen; bei seinem Tode war er Präsident der „Classe della Crusca“.

Diesen Nachrichten über das Leben Mozzis schickt Marcolongo einen genauen Bericht über den Inhalt des „Discorso“ vorauf, der „wegen seiner beachtenswerten Bedeutung es verdient, der Vergessenheit entrissen zu werden“. Bis jetzt wußte man nur, daß der Hauptsatz der Kinematik starrer Körper dort aufgestellt ist: Jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers läßt sich als eine Rotation um eine Achse und eine Translation längs derselben zurückführen. Marcolongo nimmt

Mozzi gegen den Vorwurf in Schutz (Encyklopädie IV, 2, S. 143, Fußnote), der Beweis dieses Satzes bei Mozzi sei nicht richtig. Die Beweismethode ist im wesentlichen die noch heute übliche; ein Versehen am Anfange lasse sich aus dem Versuche erklären, die von d'Alembert und Euler bewiesene Existenz der momentanen Rotationsachse bei Vorhandensein eines festen Punktes geometrisch zu zeigen. Als bisher nicht bekannt teilt Marcolongo ferner mit, daß sich im Discorso schon verschiedene Sätze über Kräftepaare finden. Der ganze dynamische Teil der Schrift handelt nach der jetzigen Art der Bezeichnung von den Stoßkräften und behandelt die Aufgabe: wenn die Stoßkraft gegeben ist, die momentane Schraubenbewegung in einem freien oder auch Verbindungen unterworfenen starren Systeme zu finden. Lp.

P. S. Laplace. Œuvres complètes de Laplace publiées sous les auspices de l'Académie des sciences, par MM. les secrétaires perpétuels. Tome treizième. Paris: Gauthier-Villars. VIII u. 358 S. 4° (1904).

Der Band enthält die in der „Connaissance des temps" von 1798 bis 1827 abgedruckten kleinen Artikel. Da diese weniger bekannt geworden sein dürften, halten wir es für nützlich, ihre Titel hier wiederzugeben.

1. Sur les équations séculaires des mouvements de l'apogée et les noeuds de l'orbite lunaire. 2. Sur les plus grandes marées de l'an IX. 3. Sur quelques équations des Tables lunaires. 4. Sur les Tables de Jupiter et sur la masse de Saturne. 5. Sur la théorie de Jupiter et de Saturne. 6. Sur l'anneau de Saturne. 7. Mémoire sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique qui résulte des observations anciennes. 8. Sur la dépression du mercure dans un tube de baromètre due à sa capillarité. 9. Du milieu qu'il faut choisir entre les résultats d'un grand nombre d'observations. 10. Sur l'inégalité à longue période du mouvement lunaire. 11. Sur les comètes. 12. Sur l'application du calcul des probabilités à la philosophie naturelle. 13. Sur la longueur du pendule à secondes. 14. Application du calcul des probabilités aux opérations géodésiques. 15. Sur la rotation de la Terre. 16. Sur la loi de la pesanteur en supposant le sphéroïde terrestre homogène et de même densité que la mer. 17. Sur l'influence de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne dans le mouvement des corps du système solaire. 18. Sur la figure de la Terre et la loi de la pesanteur à sa surface. 19. Application du calcul des probabilités aux opérations géodésiques de la méridienne. 20. Sur les inégalités lunaires dues à l'aplatissement de la Terre. 21. Sur le perfectionnement de la théorie et des Tables lunaires. 22. Sur l'inégalité lunaire à longue période, dépendante de la différence des deux hémisphères terrestres. 23. Mémoire sur la diminution de la durée du jour par le refroidissement de la Terre. 24. Sur la densité moyenne de la Terre. 25. Éclaircissements sur les Mémoires précédents, relatifs aux inégalités lunaires dépendantes de la figure de la Terre, et au per-

fectionnement de la théorie des Tables de la Lune. 26. Sur les variations des éléments du mouvement elliptique et sur les inégalités lunaires à longues périodes. 27. Sur la détermination des orbites des comètes. 28. De l'orbite de la seconde comète de 1805, par M. Bouvard. 29. Sur l'attraction des sphères et sur la répulsion des fluides élastiques. 30. Développement de la théorie des fluides élastiques et application de cette théorie à la vitesse du son. 31. Sur la vitesse du son. 32. Sur les variations de l'obliquité de l'écliptique et de la précession des équinoxes. 33. Mémoire sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. 34. Mémoire sur divers points de Mécanique céleste. 35. Mémoire sur un moyen de détruire les effets de la capillarité dans les baromètres. 36. Tables nouvelles des dépressions du mercure dans le baromètre dues à sa capillarité, par M. Bouvard. 37. Mémoire sur le flux et le reflux lunaire atmosphérique. — Bei dieser Aufzählung sind die Notizen von einigen Zeilen fortgelassen, Doppelaufsätze nur einmal angeführt. Lp.

M. A. Tichomandritzky. Note über die mathematischen Studien von Prof. F. L. Schweikart. Charkow Univ. 1905, Nr. 1, I-IV. (Russisch.)

F. L. Schweikart war in den Jahren 1811-1816 an der Universität in Charkow Professor „der wichtigsten Rechte sowie der alten wie der neueren Völker". 1817 ist er nach Marburg zurückgekehrt. Wie Gerling an Gauß schrieb, ist seine Astralgeometrie in Charkow ersonnen. Tichomandritzky berichtet darüber auf Grund von Gauß' Werken **8**. ohne die von P. Stäckel und Fr. Engel herausgegebene Urkundensammlung „die Theorie der Parallellinien" 1895 zu berücksichtigen. Si.

L. Koenigsberger. Carl Gustav Jacob Jacobi. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelberg, 57-85.

Vergl. F. d. M. **35**, 11, 1904.

S. Dickstein. Wronski als Mathematiker. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelberg, 515-525.

Im wesentlichen eine Zusammenfassung der früheren Publikationen des Verf. über die mathematischen Leistungen von Wronski in der Bibliotheca mathematica, besonders in dem Buche Hoene Wronski (F. d. M. **27**, 13, 1896). P.

F. Klein. Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Sechster Bericht. Math. Ann. **61**, 72-76.

Abdruck aus Gött. Nachr. 1904; vgl. F. d. M. **35**. 14. 1904.

A. CAUCHY. Œuvres d'Augustin Cauchy publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. (2) **1.** Paris: Gauthier-Villars. IV u. 570 S. 4°.

Die Bände der Gesamtausgabe von Cauchys Werken werden nicht nach ihrer Bezifferung veröffentlicht; daher kommt es, daß jetzt erst der Band I der zweiten Serie anzuzeigen ist. Die erste Abteilung dieser Serie soll diejenigen Abhandlungen bringen, welche in anderen Sammelschriften als in denen der Pariser Akademie erschienen sind. Der vorliegende Band enthält die sehr wichtigen Arbeiten aus dem Journal de l'École Polytechnique, die meistens einen sehr großen Umfang haben und nach den beigegebenen Noten oft viel früher verfaßt als veröffentlicht sind. Wegen der Bedeutung dieser Abhandlungen setzen wir ihre Titel her: 1. Recherches sur les polyèdres. 2. Sur les polygones et les polyèdres. 3. Recherches sur les nombres. (Sätze über kongruente Zahlen, „nombres de même forme"; offenbar ohne Kenntnis der Gaußschen Disquisitiones arithmeticae 1813 veröffentlicht.) 4. Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme. 5. Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. 6. Mémoire sur la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques. 7. Sur les racines imaginaires des équations. 8. Mémoire sur une espèce particulière du mouvement des fluides. 9. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles et à coefficients constants. 10. Mémoire sur le système de valeurs qu'il faut attribuer à divers éléments déterminés par un grand nombre d'observations, pour que la plus grande de toutes les erreurs, abstraction faite du signe, devienne un minimum. 11. Mémoire sur une certaine classe d'équations aux différentielles partielles et sur les phénomènes dont cette intégration fait connaître les lois dans les questions de Physique mathématique. 12. Calcul des indices des fonctions. 13. Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des intégrales définies et sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales de cette espèce.

Die letzte Abhandlung (Nr. 13), die umfangreichste von allen (S. 467-567), stammt nach einer Fußnote Cauchys aus dem Jahre 1815, ist aber erst 1844 gedruckt. Von beträchtlicher Länge sind ferner die beiden Abhandlungen Nr. 4 und 5 (S. 64-169), Nr. 6 (S. 170-257), Nr. 9 (S. 275-357), Nr. 10 (S. 358-403) und Nr. 12 (S. 416-466). Alle Arbeiten bezeugen die Ursprünglichkeit und die Vielseitigkeit der mathematischen Produktivität Cauchys und dürften noch immer zu Arbeiten Anregung geben. Die charakteristische Eigentümlichkeit des Mangels einer Bezugnahme auf frühere oder gleichzeitige Forschungen tritt aber auch in diesen hochberühmten Arbeiten auffällig hervor. Lp.

Hermann Minkowski. Peter Gustav Lejeune-Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik. Rede. (Mit Bildnis.) Deutsche Math. Ver. **14**, 149-163.

Eine Rede, gehalten in der Festsitzung der Göttinger Mathematischen Gesellschaft bei der hundertjährigen Wiederkehr des Geburtstages von Lejeune-Dirichlet, am 13. Februar 1905. Sie feiert Dirichlet als zu Göttingen gehörig, zur Georgia Augusta, die auf dem Gebiete der höheren Mathematik am rühmlichsten an dem leitenden Gesichtspunkt festgehalten habe, daß die Universität nicht bloß eine hohe Schule für den Unterricht der Studierenden, nicht bloß eine Bewahrerin bereits erworbener wissenschaftlicher Kenntnisse sein, sondern auch an dem Fortbau der Wissenschaft als eines Gemeingutes der Menschheit arbeiten soll. Nach einigen Daten aus dem Leben Dirichlets werden seine Leistungen auf seinem Hauptarbeitsfelde, der höheren Arithmetik, eingehend geschildert. Kürzer legt der Redner die Verdienste Dirichlets um die mathematische Physik dar. M.

W. Ahrens. Peter Gustav Lejeune-Dirichlet. Math. naturw. Bl. **2**, 36-39, 51-55.

Zur hundertsten Wiederkehr von Dirichlets Geburtstag (13. Febr. 1905) hat der Verf. aus den verschiedensten Quellen zahlreiche Reminiszenzen zusammengestellt, die sich insbesondere auf seine Tätigkeit als akademischer Lehrer, seine Berufung nach Göttingen, seine Ernennung zum Associé étranger der französischen Akademie und seine italienische Reise beziehen. Sk.

J. H. Graf. Beiträge zur Biographie Steiners. Mit einem bisher unbekannten Porträt Steiners. Mitt. Naturf. Ges. Bern 1905. Sep. 11 S. 8°.

Das Bild, ein Geschenk des Großrats Leuch in Utzenstorf an die Berner Hochschule, ist eine Kreidezeichnung des Zeichenlehrers Niklaus Senn, der als ehemaliger Mitschüler von Steiner in Iferten mit diesem befreundet war, und stellt ihn in jungen Jahren, etwa zwischen 1830 und 1840, dar. Die der Schrift beigegebene Nachbildung ist sehr gut. — Zwei Briefe von Krüsi aus 1817 und 1818 zeigen, daß Steiner nicht nur bei Pestalozzi, sondern auch bei Krüsi zu dieser Zeit Unterricht erteilt hat. — Zuletzt berichtet Graf, daß er das Todeshaus Steiners in Bern festgestellt hat und die Anbringung einer Gedenktafel daselbst (an der Kramgasse Nr. 38) veranlassen will. Außerdem wird der Totenschein abgedruckt, nach welchem Steiner an der Brightschen Nierenkrankheit gestorben ist. Lp.

E. Study. Sir William Rowan Hamilton. Nekrolog (mit Bildnis). Deutsche Math. Ver. **14**, 421-424.

Die dreibändige Biographie Hamiltons von Graves und ein Nekrolog in der Encyclopaedia Britannica, von Tait verfaßt, sind in Deutschland wenig bekannt. William Rowan Hamilton wurde am 4. August 1805 zu Dublin geboren und starb am 2. Sept. 1865 zu Dunsing als Royal Astronomer of Ireland. Er war ein frühreifes Wunderkind; die Professur für Astronomie an der Universität Dublin erhielt er im Alter von 21 Jahren. Hamilton hat auf verschiedenen Gebieten Bahnbrechendes geleistet. Am bedeutendsten sind seine Arbeiten über die geometrische Optik, seine durch das Hamiltonsche Prinzip berühmt gewordenen Untersuchungen über theoretische Mechanik und seine Werke über Quaternionen. M.

P. Tannery. Auguste Comte et l'histoire des sciences. Rev. générale des sc. **16**, 410-417.

V. E. Pépin. Auguste Comte et l'histoire scientifique. Rev. générale des sc. **16**, 694-700.

H. Poincaré. Cournot et les principes du calcul infinitésimal. Rev. de métaphys. et de morale **13**, 293-306.

F. Mentré. Les racines historiques du probabilisme rationnel de Cournot. Ibid. 485-508.

H. L. Moore. Antoine Augustin Cournot. Ibid. 521-543.

Artikel zum Andenken an Cournot (1801-1877). Lp.

S. Friedlaender. Julius Robert Mayer. (Klassiker der Naturwissenschaften 1. Bd.) Leipzig: Th. Thomas. VI u. 210 S. gr. 8°. [Naturw. Rundschau **20**, 426.]

Edm. Laguerre. Œuvres de Laguerre publiées sous les auspices de l'Académie des sciences, par MM. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, Membres de l'Institut. Tome II. Géométrie. Paris: Gauthier-Villars. 715 S. gr. 8°.

Der erste Band der gesammelten Schriften Laguerres ist 1898 erschienen (F. d. M. **29**, 9). Während dort versucht ist, die Artikel gruppenweise nach ihrem Inhalte zu ordnen, ist in dem gegenwärtigen Schlußbande die chronologische Folge der Veröffentlichung festgehalten. Als letzte Nummer erscheint ein Aufsatz „Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels", der schon im ersten Bande hätte abgedruckt werden sollen. Da die Gesamtzahl der Titel aller Aufsätze in beiden Bänden 151 beträgt, von denen 83 auf den zweiten Band entfallen, ist das von Rouché in dem Nekrologe (F. d. M. **19**, 21, 1887) angegebene Verzeichnis, das auch sonst manche Fehler

aufweist, um 18 Nummern zu vermehren. Zur rascheren Auffindung einer gesuchten Arbeit wäre ein besser geordnetes Gesamtregister wünschenswert gewesen. Die Abwesenheit jeder Bemerkung über einen Plan der Herausgabe läßt vermuten, daß Rouché, der doch wohl die eigentliche Arbeit der Veröffentlichung geleistet hat, ohne Aufstellung einer innezuhaltenden Reihenfolge den Druck des ersten Bandes begonnen hat, wo eine Abhandlung aus 1883 die Reihe der algebraischen Aufsätze eröffnet und dahinter Noten aus 1874 folgen.

Die Jugendarbeiten Laguerres über die projektivische Deutung des Winkelmaßes, geschrieben vor dem Eintritt in die École polytechnique 1852 und als bedeutsame Entdeckung auf dem Gebiete der Geometrie des Maßes bis auf den heutigen Tag betrachtet, stehen als einsame, bei ihrem Erscheinen in Nouv. Ann. **1** wenig beachtete Zeichen eines hohen mathematischen Talentes an der Spitze der geometrischen Arbeiten des zweiten Bandes. Nach zwölfjähriger Pause, herbeigeführt durch die Pflichten des Artillerieoffiziers im praktischen Dienste, erschienen dann in kurzen Zwischenräumen während der 21 verbleibenden Lebensjahre die Früchte der stillen Tätigkeit des Forschers, dessen Geist inzwischen nicht gerastet hatte.

Wie in den ersten Untersuchungen die Theorie des Imaginären in der Geometrie den Antrieb zur allgemeinen Auffassung des Winkelbegriffes geführt hatte, so blieb in einer Reihe geometrischer Artikel diese Theorie die Quelle, aus der von neuem geschöpft wurde. Die Erkenntnis der wichtigen Rolle des Inhaltes eines sphärischen Dreiecks in der Kugelgeometrie und die Ausdehnung der Theorie der Brennpunkte auf alle algebraischen Kurven nach der Art der Plückerschen Auffassung waren Früchte solcher Betrachtungen. Mit der analytischen Auffassung projektiver Beziehungen hängt die Anwendung der Theorie der homogenen Formen und ihrer Invarianten auf die Untersuchung der algebraischen Kurven und Oberflächen eng zusammen. In dieser Richtung bewegen sich viele Arbeiten, deren Zusammengehörigkeit durch die chronologische Anordnung in die Augen springt. Außer der algebraischen Geometrie wird aber auch die infinitesimale nicht vernachlässigt; wir erwähnen die Untersuchungen über die geodätischen Linien und über die Krümmung der anallagmatischen Oberflächen. Die Anwendungen der elliptischen und hyperelliptischen Funktionen auf die Geometrie zeigen Laguerre als vielseitig gebildeten Mathematiker, der mit großer Leichtigkeit aus dem einen Gebiete in ein anderes sich versetzen konnte. Bei dieser summarischen Übersicht der Leistungen Laguerres in den einzelnen Zweigen der Geometrie ist es nur möglich, Gesichtspunkte hervorzuheben, unter denen sich gewisse Gruppen der vielen ungemein knapp gefaßten Noten betrachten lassen. Besonders hervorzuheben sind diejenigen Arbeiten, welche der „Geometrie der Richtung“ (Géométrie de direction) gewidmet sind, wo der Verf. die beiden Halbgeraden einer Geraden und die beiden „Zykel“ eines Kreises unterscheidet. Da alle bezüglichen Aufsätze im Jahrbuche besprochen sind, bedarf es nur dieses nachdrücklichen Hin-

weises, um auf Laguerres eigentümliche analytisch-geometrische Überlegungen von neuem aufmerksam zu machen, durch welche dieser Geometer, wie Darboux in seiner Anzeige des vorliegenden Bandes bemerkt (Darboux Bull. (2) **29**, 160, 1905), die bezüglichen Arbeiten von Ribaucour und Lie in selbständiger Weise weitergebildet und fruchtbar gemacht hat. Wir schließen mit den Worten von Darboux am Ende seines Referates: „Man kann die Lektüre dieser Werke Laguerres nicht genug empfehlen. In ihnen ist nichts banal; alles trägt den Stempel tiefen Nachdenkens. Die neuen Ansichten bieten sich überreichlich; die scharfsinnigsten und gewähltesten Anwendungen sind so geartet, daß sie den Leser interessieren und ihm Anregung zu neuen Forschungen geben.“

Lp.

Zur Erinnerung an Josef Petzval. Vom Komitee für die Errichtung eines Petzval-Denkmals. Mit einem Titelbilde. Wien. Selbstverlag des Komitees. 23 S. 8°.

Eine ausführliche Biographie Josef Petzvals (geb. den 6. Januar 1807 zu Szepesbila, im Zipser Komitat in Ungarn, gestorben am 17. September 1891 zu Wien) gab Erményi, 2. Aufl., Halle 1903. (S. F. d. M. **34**, 1903, 19-20.) Auf dem Zentralfriedhofe von Wien erwarb man ein Ehrengrab, das mit einem würdigen Denkmal zur Erinnerung an den Begründer der photographischen Dioptrik geschmückt wurde. Prof. W. Wirtinger hielt die hier veröffentlichte Gedenkrede (S. 8-12). S. 15-20 erzählt derselbe: „Wie Petzval nach Wien kam“.

M.

Felix Müller. Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstraß. Mit einem Bildnis Karl Schellbachs. Abhdl. z. Gesch. d. math. Wissensch. **20**, 1-86.

Vgl. F. d. M. **35**, 17, 1904.

Felix Müller. Erinnerung an die 100. Wiederkehr des Geburtstages von Karl Schellbach. Sitzber. Berl. Math. Ges. **4**, 8-10.

Jul. Reiner. Hermann von Helmholtz. Leipzig: Th. Thomas. 204 S. 1 Bildnis. gr. 8°. (Klassiker der Naturwissenschaften, herausgegeb. von Loth. Brieger-Wasservogel. II. Bd.)

H. v. Mangoldt. Opere matematiche di Eugenio Beltrami. T. I. Gött. gelehrte Anzeigen 1904, 341-348.

Diese Anzeige des ersten Bandes der Werke Beltramis geht über die gewöhnliche Art der Rezensionen hinaus, indem historische und sachliche Bemerkungen zu einzelnen der Arbeiten gegeben werden. So wird zu der Abhandlung Beltramis aus dem Jahre 1863 „Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche dei novi punti" bemerkt, daß hier 16 Jahre vor Stephanos die Eigenschaften der desmischen Tetraeder bereits ziemlich vollständig entwickelt sind. Ref. erlaubt sich auf eine noch frühere Behandlung dieses Gegenstandes hinzuweisen. In dem Aufsatze „Ausdehnung eines Satzes vom ebenen Vierseit auf räumliche Figuren" (J. für Math. **56**, 204-217, 1858) hat O. Hermes die drei desmischen Tetraeder nebst ihren Hauptbeziehungen zueinander aus dem Hexaeder abgeleitet, ohne einen Namen dafür einzuführen. Auf diesen Umstand hat Ref. schon 1885 aufmerksam gemacht. Lp.

L. Schlaefli und A. Cayley. Briefwechsel von Ludwig Schlaefli mit Arthur Cayley. Mit dem Faksimile eines Briefes von A. Cayley. Herausgegeben von J. H. Graf. Festgabe der Universität Bern für das 50jährige Jubiläum des eidgenössischen Polytechnikums in Zürich. 1855-1905. Bern: K. J. Wyss. 42 S. gr. 8°.

„Der Briefwechsel Ludwig Schläflis mit Arthur Cayley beginnt im Jahr 1856 und erstreckt sich mit einigen Unterbrechungen bis zum Jahre 1871. Er ist von großer Bedeutung für die Theorie der Flächen dritten Grades, sowie einiger anderer wichtiger mathematischer Gebiete. Die Briefe und Aufsätze Schläflis an Cayley fanden sich im Konzepte in seinem Nachlasse; die Briefe Cayleys sind im Original vorhanden." Im ganzen sind je neun Briefe von Schläfli und von Cayley abgedruckt; dem Inhalte nach sind die Schläflischen Briefe, die schon durch den Umfang hervortreten, von größerem mathematischen Interesse und verdienen es, genauer studiert zu werden. Ein besserer Korrektor wäre nicht bloß für die englischen Texte wünschenswert gewesen. Aronholds Leben ist S. 22 von 1849-1864 angegeben, statt von 1819-1884. Als Beitrag zur Geschichte der Mathematik, insbesondere zur Kenntnis solcher bedeutenden Mathematiker wie Schläfli und Cayley, sind derartige Veröffentlichungen von großem Werte. Lp.

A. Gilkinet. Notice sur Joseph Delboeuf. Annuaire de l'Acad. de Belgique 1905, 47-147.

Geb. zu Lüttich 30. Sept. 1831, gest. in Bonn 31. Aug. 1896, ist Delboeuf zuerst Professor der Philosophie in Gent (1863-1866), dann der klassischen Philologie in Lüttich (1866-1896) gewesen. Geschrieben hat er über Mathematik, algorithmische Logik, Biologie, Psychologie, Hypnotismus, romanische, lateinische, griechische Philologie usw. In der Mathematik ist seine beste Schrift die erste: „Prolégomènes philosophiques de la géométrie" (1860). In seinen weiteren Veröffentlichungen über

diese Wissenschaft trug er den zeitgenössischen Arbeiten, die er gar nicht oder nur oberflächlich kannte, keine Rechnung. — Dem Nachruf von Gilkinet folgt eine ziemlich vollständige Liste der Arbeiten Delboeufs.

Mn. (Lp.)

E. Waelsch. Carl Joseph Küpper. Nekrolog. (Mit Bildnis.) Deutsche Math. Ver. **14**, 389-394.

Carl Küpper wurde am 10. März 1828 zu Düsseldorf am Rhein geboren, studierte am Gewerbeinstitut und auf der Universität zu Berlin und war 1853-67 an der K. Provinzialgewerbeschule in Trier als Lehrer tätig. Darauf kam er als Professor der beschreibenden Geometrie an das Polytechnische Institut, die spätere Technische Hochschule zu Prag, wo er bis zum Jahre 1898 blieb. Nach seiner Pensionierung zog er nach Bonn, wo er am 15. Sept. 1900 starb. Nach Kennzeichnung der geometrischen Arbeiten Küppers gibt Waelsch ein Verzeichnis derselben, nach Zeitschriften geordnet. M.

Ch. Hermite et Th. J. Stieltjes. Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publiée par les soins de B. Baillaud, H. Bourget. Avec une préface de Émile Picard, Membre de l'Institut. Tome I (8 novembre 1882 — 22 juillet 1889). Tome II (18 octobre 1889 — 15 décembre 1894). Paris: Gauthier-Villars. XXII u. 477 S., VIII u. 457 S. gr. 8°.

Dem ersten Bande dieses Briefwechsels zwischen Hermite und Stieltjes sind als Titelbilder die ausgezeichnet gelungenen Heliogravüren der beiden befreundeten Mathematiker beigegeben. Der zweite Band ist durch das Bildnis des 25jährigen Hermite geschmückt, das auch als Titelbild des ersten Bandes seiner gesammelten Werke verwendet ist. Ferner ist am Ende des zweiten Bandes ein Faksimile eines Manuskriptes von Stieltjes hinzugefügt. Als Denkmal der Freundschaft zweier Mathematiker, von denen der eine auf der Höhe seines Ruhmes stand, der andere in jugendlichem Zutrauen sich dem Meister nahte, von ihm in stets geübtem Wohlwollen aufgenommen wurde, sich an ihm heranbildete und rasch emporwuchs, bis ein inniges Band beide umschlang, ist dieser Briefwechsel eine willkommene Ergänzung der im Erscheinen begriffenen Werke Hermites und zeigt beide Männer nicht nur als hoch ragende Gestalten unter den Mathematikern in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts, sondern auch als verwandte Seelen in wissenschaftlichem Streben und schöner, edler Menschlichkeit. Es dürfte kaum möglich sein, in dem Rahmen eines kurzen, sachlichen Referates ein angemessenes Bild von dem Inhalte der beiden Bände zu geben; daher mag die Vorrede Picards in ihren wesentlichen Teilen die Stelle eines Berichtes vertreten.

„Kein Briefwechsel Hermites wurde stetiger unterhalten und ist ergiebiger als der, welchen er 1882 mit einem Astronomen, einem Adjunkten der Sternwarte von Leiden, mit Thomas Stieltjes, begonnen

hatte. Um dieselben Probleme sich mühend und von derselben geistigen Richtung, fühlte sich Hermite zu Stieltjes hingezogen, und ein lebendiges Einverständnis verband schnell den jungen Anfänger und den Veteranen der Wissenschaft. Der vorzeitig 1894 eingetretene Tod von Stieltjes konnte allein diesem in der Geschichte der Wissenschaft vielleicht einzig dastehenden Briefwechsel ein jähes Ende bereiten. Als Hermite nach diesem traurigen Ausgange die lange Folge der Briefe des hochbegabten Mathematikers wieder durchlas, für den er eine so achtungsvolle Zuneigung besaß, meinte er, es wäre für das Andenken an Stieltjes von Bedeutung, daß dieses Zeugnis seiner mathematischen Tatenlust und Begabung nicht verloren ginge. Die Briefe von Stieltjes zu veröffentlichen, ohne auch die Hermiteschen zu veröffentlichen, das war unmöglich; dazu war ihre Zusammenarbeit zu innig gewesen. Die Freunde von Stieltjes hatten hier bei Hermite einigen Widerstand zu überwinden; zuletzt entschloß er sich jedoch dazu, den gesamten Briefwechsel erscheinen zu lassen.

Baillaud und Bourget, genaue Bekannte und Verehrer ihres Kollegen aus der Faculté des Sciences von Toulouse, übernahmen zunächst die Durchsicht der Briefe und machten einige notwendige Abstriche. In der Sorge um die Vollkommenheit dieser Ausgabe rechneten sie dann die Stellen durch, bei denen es nötig schien, und fügten Anmerkungen und Erläuterungen hinzu. Das Manuskript war fast ganz fertig, als Hermite starb, der die Mühe einer nochmaligen Prüfung übernommen hatte. Alle Freunde und Bewunderer Hermites und Stieltjes' werden Baillaud und Bourget für die Sorgfalt und die Hingabe dankbar sein, welche sie auf dieses zweibändige Werk verwendet haben.

Leider fehlt etwas. Hermite hatte die Abfassung einer Einleitung versprochen, in der er zweifelsohne die Ursprünglichkeit des Stieltjesschen Talentes voll beleuchtet haben würde. Niemandem kommt es nunmehr zu, an seiner Stelle die Feder anzusetzen. Die mathematische Verwandtschaft zwischen diesen beiden großen Geistern war vollständig. Ein großer Teil des Briefwechsels hat einen arithmetischen Charakter; es ist der vir arithmeticus, wie Jacobi gesagt hätte, für den Hermite besonders in Stieltjes Zuneigung empfand. Dieser Arithmetiker verweilt nicht bloß auf den Gipfeln zur Betrachtung der Dinge aus der Höhe und Ferne; er steigt in die Tiefe der Täler und sammelt dort numerische Anwendungen, aus denen er dann allgemeine Bemerkungen abzuziehen versteht. Welche Freude war für Hermite die Begegnung mit einem so scharfsichtigen Schriftwechsler, der sich für die Näherungsfragen interessierte, denen er selbst einen großen Teil seiner wissenschaftlichen Arbeit gewidmet hatte, insbesondere für die angenäherten Quadraturen und die algebraischen Kettenbrüche! Man findet bei Stieltjes auf der Höhe seines Talentes den Rechner wieder, der er ehedem in der Sternwarte von Leiden gewesen war; dies ist eine der Seiten seiner Ursprünglichkeit.

Man ist auch aufs höchste erstaunt über die Schnelligkeit, mit der er auf die von Hermite ihm gestellten Fragen antwortet und sinnreiche,

tiefgehende Beweise für die ihm im Wortlaute mitgeteilten Theoreme findet. Gleichzeitig sehen wir, wie sich das Gebiet seiner Forschungen allmählich weitet; seine Untersuchungen über eine von Riemann betrachtete Transzendente treiben ihn tief in die Funktionentheorie hinein. Wie viel schöne Arbeiten hätte er noch vollendet, wenn er seine arithmetischen und algebraischen Anlagen auf diesen Weg geleitet hätte, wenn seine Laufbahn nicht so frühzeitig geendet hätte! Das bezeugt genügend seine letzte Abhandlung über die algebraischen Kettenbrüche, welche sicherlich ein Meisterwerk ist.

Der Briefwechsel zwischen Hermite und Stieltjes wird nicht bloß die Analytiker interessieren. Außer zwei Mathematikern ersten Ranges erschaut man zwei schöne Seelen. Welche Einfalt und welcher Freimut zwischen dem Meister und dem Jünger oder vielmehr zwischen den beiden Freunden! Man wird durch die Lektüre dieser Zeilen erbaut, in die sich keine persönliche Voreingenommenheit drängt, in denen jeder seinen Gedanken bis zu Ende denkt. Es scheint sogar, und dies ist ein seltsam nachhaltiger Eindruck dieser Briefe, als ob unter dieser persönlicheren Gestalt die abstrakte Redeweise der Analysis von ihrer Trockenheit verlöre und die Mathematik darin sich mehr vermenschlichte. Endlich vergesse man nicht, daß wir es der durch diesen Briefwechsel erblühten Freundschaft verdanken, wenn wir Thomas Stieltjes zu den hervorragendsten Mathematikern der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts rechnen dürfen." Lp.

Ch. Hermite. Œuvres de Charles Hermite publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par Émile Picard. Tome I. Paris: Gauthier-Villars. XL u. 498 S. 8°.

In der Vorlesung, welche Picard an der Sorbonne über das wissenschaftliche Lebenswerk Hermites wenige Wochen nach dem Tode dieses seines Schwiegervaters gehalten hat (vgl. F. d. M. **32**, 22-24, 1901), heißt es am Schlusse: „Die Lebensarbeit Hermites befindet sich zerstreut in einer großen Zahl wissenschaftlicher, französischer und ausländischer Zeitschriften; sie wird noch größer erscheinen, wenn sie vereinigt ist und man dann besser von ihrer schönen Einheitlichkeit Einsicht nehmen kann. Mit wenigen Ausnahmen sind die Abhandlungen kurz. Der allgemeine Gedankengang wird in ihnen immer greifbar dargelegt; besonders aber in der ersten Periode seiner Laufbahn kleidet Hermite die Darstellung in eine synthetische Form; die Sorge, zahlreiche Zwischensätze zu bestätigen, deren Wortlaut allein angegeben wird, bleibt dem Leser überlassen. Welche fruchtbare Übung ist die Lektüre einer dieser grundlegenden Abhandlungen für den begabten Studenten, der alle ihre Einzelheiten zu begründen sucht!"

„Wenn man sich in den gewöhnlichen Gebietsgrenzen hält und den Hermiteschen Genius zu bestimmen versuchen will, so kann man sagen, die arithmetischen und die algebraischen Gesichtspunkte seien in diesen Arbeiten vorherrschend. In der Algebra und in der Arithmetik ist er

besonders ein Pfadfinder, ein Schöpfer gewesen. Mit Cayley und Sylvester hat er die Theorie der Kovarianten der algebraischen Formen begründet, und die bewundernswerten Untersuchungen, bei denen er das Kontinuum in das Reich des Diskontinuums einführt, sichern ihm in der Zahlentheorie, dieser Königin der Mathematik, einen Ehrenplatz neben den beiden großen Mathematikern, als deren Schüler er sich gern bekannte: Gauß und Dirichlet."

Wie Picard seine ganze erwähnte Vorlesung der mit Spannung erwarteten Ausgabe der Werke Hermites als Einleitung vorausgeschickt hat, so mögen uns die dieser Einleitung entnommenen Sätze zur Anzeige des ersten Bandes die Leitgedanken geben. Die sorgfältig durchgesehenen und mit kurzen Fußnoten des Herausgebers versehenen Aufsätze reichen von 1842 bis 1858 und zeigen den jungen Mathematiker im Vollbesitze aller Fähigkeiten und Ideen, welche im Laufe seines reich gesegneten Lebens immer neue Früchte zeitigten. Wir lassen die Titel der einzelnen Aufsätze folgen, ohne zu dem Inhalte derselben etwas hinzuzufügen. Gleich lautende Titel werden nicht wiederholt.

Lieu géométrique des pôles d'une section conique par rapport à une autre (1842). — Considérations sur la résolution algébrique de l'équation du cinquième degré (1842). — Extraits de deux lettres à M. Jacobi (1843, 1844). — Sur la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques (1844). — Sur la théorie des transcendantes à différentielles algebriques (1844). — Principaux théorèmes de l'analyse des fonctions elliptiques (1845). — Note sur la théorie des fonctions elliptiques (1848). — Sur la théorie des fonctions elliptiques (1849). — Rapport sur un Mémoire présenté par M. Hermite et relatif aux fonctions à double période (1851). — Note sur la réduction des fonctions homogènes à coefficients entiers et à deux indéterminées (1848). — Sur la théorie des formes quadratiques ternaires (1850). — Quatre lettres à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres (1847-1849). — Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres (1850). — Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies (1853). — Sur la théorie des formes quadratiques (1853). — Note sur un théorème relatif aux nombres entiers (1848). — Sur une question relative à la théorie des nombres (1849). — Démonstration élémentaire d'une proposition relative aux diviseurs de $x^2 + Ay^2$ (1849). — Sur les fonctions algébriques (1851). — Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées (1852). — Remarques sur le théorème de M. Sturm (1853). — Sur la décomposition d'un nombre en quatre carrés (1853). — Remarques sur un Mémoire de M. Cayley relatif aux déterminants gauches (1854). — Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées (1854). — Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données (1854). — Sur le nombre limité d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients complexes d'un degré et d'un discriminant donnés (1855 ?). — Sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynomes homogènes du second

degré (1856). — Sur les formes cubiques à deux indéterminées (1857). — Lettre à Cayley sur les formes cubiques (1857). — Extrait d'une lettre à Sylvester sur les solutions de l'équation $ax + by = n$ (1857). — Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes (1855). — Remarque sur un théorème de Cauchy (1855). — Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques (1858).

Das beigegebene Bildnis zeigt uns Hermite als jungen Mann von etwa 25 Jahren mit heiterem Gesichtsausdruck und ist für alle Verehrer des menschenfreundlichen Gelehrten eine freudige Überraschung. Indem wir nun noch zuletzt der Genugtuung über die Vollendung des ersten Bandes der gesammelten Schriften Hermites Ausdruck geben, wollen wir doch den Wunsch nicht unterdrücken, daß der Fortgang dieser Ausgabe in rascherem Tempo erfolgen möge. Wir hoffen, daß die Pietät des Schwiegersohnes in der Besiegung der nicht geringen Schwierigkeiten, die wir wohl zu würdigen vermögen, sich glänzend bewähren wird. Wann wird unser Kummer in gleicher Weise erscheinen? Lp.

P. Painlevé. Charles Hermite. Nouv. Ann. (4) **5**, 49-53.

Dieser Artikel, ein Auszug aus La Nature vom 2. Febr. 1901, schildert Hermite als Lehrer der Mathematik und berichtet in kurzen Zügen über seine großen Entdeckungen. Die Eleganz seines Vortrages und seiner schriftlichen Darstellung hat in Frankreich für das Studium der Entdeckungen von Weierstraß vielleicht mehr anregend gewirkt als in Deutschland die Vorlesungen von Weierstraß selbst. M.

R. d'Adhémar. Trois maîtres: Ampère, Cauchy, Hermite. 15 S. sep. aus „La Quinzaine" 1905.

O. H. Tittmann. Charles Anthony Schott (1826-1901). Washington Bull. **14**, 312-314.

Am 31. Juli 1901 starb der Geodät Charles Anthony Schott, einer der Begründer der Philosophical Society of Washington. Zu Mannheim in Baden am 7. August 1826 geboren, zum Zivilingenieur auf der Polytechnischen Schule zu Karlsruhe vorgebildet, ging er 1848 nach Amerika. Er beteiligte sich an den Gradmessungen der Vereinigten Staaten. Seine wissenschaftlichen Arbeiten behandeln Geodäsie, Hydrographie und Erdmagnetismus. M.

H. Poincaré. Notice sur la vie et les œuvres d'Alfred Cornu. J. de l'Éc. Polyt. (2) **10**, 143-176.

Alfred Cornu (vgl. F. d. M. **33**, 40, 1902), geb. im Jahre 1841, trat 1860 in die École Polytechnique, war zuerst Bergwerksingenieur, dann Repetitor und schon 1867 Professor der Physik an der École Poly-

technique. Ganz neu war sein Vortrag über Thermodynamik. 1878 wurde er Mitglied der Académie des Sciences, und 1886 trat er in das Bureau des Longitudes. Seine optischen Arbeiten verschafften ihm einen großen Ruf. Sie betrafen hauptsächlich die geometrische Optik, die Diffraktion, Interferenz, elektrische Polarisation und Spektroskopie. Hier leistete er den Astronomen wichtige Dienste. Er verbesserte auch die Methoden zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde, zur elektrischen Synchronisation der Uhren, zur Konstruktion der elektrodynamischen Maschinen, zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichts. Als Lehrer war er sehr anregend und aufmunternd. Die Seiten 156-176 enthalten ein Verzeichnis seiner Werke. M.

L. Schlesinger. Bericht über die Herausgabe der gesammelten Werke von L. Fuchs. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelberg, 543-544.

Vgl. F. d. M. **35**, 23, 1904.

J. S. Mackay. Peter Guthrie Tait. Ens. math. 7, 5-10.

Materiell fügt dieser verspätete Nekrolog den früheren kaum etwas Neues hinzu (vgl. F. d. M. **32**, 32, 1901; **33**, 39, 1902; **34**, 26, 1903). Als Schotte hat Mackay natürlich eine warme Verehrung für den reckenhaften Tait, und er steht nicht an, ihn der illustren Reihe schottischer Gelehrten anzufügen: Brewster, Forbes, Graham, Hamilton, Rankine, Archibald Smith, Maxwell. Lp.

W. H. Dall. Obituary notice. Marcus Baker (1849-1903). Washington Bull. Phil. Soc. **14**, 277-285.

Der Geodät Marcus Baker wurde auf einer Farm in der Nähe von Camazoo, Michigan, am 23. September 1849 geboren. Nachdem er auf der Michigan University zu Ann Arbor Mathematik und Astronomie studiert, nahm er an der Vermessung der Küste von Alaska und der Aleuten teil, 1873-1880. Kurze Zeit war er in Los Angeles, California, seit 1884 in Washington, mit Anfertigung topographischer und anderer Karten beschäftigt, dann Geograph bei der Venezuela-Kommission. Nach der Rückkehr 1899 redigierte er seine geographischen Arbeiten, und 1902 wurde er bei der Organisation des Carnegie-Institution angestellt. Er starb am 12. Dezember 1903 zu Washington. Mit Vorliebe löste er in seinen Mußestunden mathematische Aufgaben und sammelte ältere und neuere Zeitschriften, in denen solche Aufgaben gelöst waren. M.

L. K. Lachtin. Nikolaj Wassilievitsch Bugajew [Lebensskizze]. Mosk. Math. Samml. **25**, 251-269. (Russisch.)

L. M. Lopatin. Philosophische Weltanschauung N. W. Bugajews. Ibid. 270-292. (Russisch.)

A. P. Minin. Über die Leistungen Bugajews auf dem Gebiete der Zahlentheorie. Ibid. 293-321. (Russisch.)

L. K. Lachtin. Über N. W. Bugajews Leistungen auf dem Gebiete der Analysis. Ibid. 322-330. (Russisch.)

Bericht über die öffentliche Sitzung der Moskauer Mathematischen Gesellschaft am 16. III. (29. III.) 1904. Ibid. 331-333. (Russisch.)

Die Moskauer Mathematische Gesellschaft widmete dem Andenken ihres am 20. Mai (11. Juni) 1903 gestorbenen Präsidenten, des Professors der Mathematik an der Universität Moskau N. W. Bugajew, eine feierliche öffentliche Sitzung am 16./29. März 1904 (vgl. F. d. M. **35**. 25, 1904). Es wurden die Reden gelesen, welche die Verdienste des Verstorbenen von verschiedenen Seiten beleuchteten. Nekrassov sprach über die Moskauer philosophisch-mathematische Schule und deren Begründer (vgl. F. d. M. **35**. 76, 1904). Lachtin zeichnete das Lebensbild Bugajews und berichtete über seine Arbeiten in der Analysis. Minin sprach über die Hauptleistung Bugajews, seine zahlentheoretischen Untersuchungen. Lopatin schilderte seine philosophischen Ansichten. Diese Reden, sowie der Sitzungsbericht über die erwähnte Versammlung sind in Mosk. Math. Samml. **25** veröffentlicht. Es sind dort auch zwei Reden von N. W. Bugajew abgedruckt: Einleitung in die Zahlentheorie (Antrittsvorlesung) und die Züricher Rede: Mathematik und wissenschaftlich-philosophische Weltanschauung (F. d. M. **29**, 43). Zum Schluß ist eine Liste der Arbeiten Bugajews gegeben. Si.

C. Alasia. Josiah Willard Gibbs. In memoriam. Riv. di fis., mat. e sc. nat. **6**, 21-30, 111-125.

Über das Leben und die wissenschaftlichen Leistungen des Begründers der physikalischen Chemie (geb. zu New Haven den 11. April 1839, gestorben daselbst den 28. April 1903). Vgl. F. d. M. **34**, 33-34, 1903 u. **35**, 30, 1904. Vi.

F. H. Bigelow. Obituary Notice. William Harkness (1837-1903). Washington Bull. Phil. Soc. **14**, 292-296.

Der Professor der Mathematik und Mitbegründer der Philosophischen Gesellschaft zu Washington, William Harkness, wurde zu Ecclefechan in Schottland am 17. Dez. 1837 geboren und starb zu Jersey City, New Jersey, am 23. Februar 1903. Zuletzt war er astronomischer Direktor des U. S. Naval Observatory und Leiter des Nautical Almanac-Bureaus. Berühmt ist sein Werk „Solar parallax and its related constants“. Er nahm an verschiedenen astronomischen Expeditionen teil. 1882 erschien seine Abhandlung: „Relative accuracy of different methods of determining the solar parallax“. Außerdem veröffentlichte er zahlreiche

astronomische Arbeiten in verschiedenen Journalen. Am 17. Dez. 1899 zog er sich von seinem Amte am U. S. Naval Observatory mit dem Charakter als Admiral zurück. M.

G. G. STOKES. Mathematical and physical papers. Reprinted from the original Journals and Transactions, with brief historical notes and references. Vol. V. Cambridge: University Press. XXV u. 370 S. [Nature **72**, 555-556.]

K. PETR und J. SOBOTKA. Über das Leben und die Tätigkeit von Eduard Weyr. Časopis **34**, 457-516. (Böhmisch.)

Eduard Weyr war am 21. Juni 1852 in Prag geboren und starb am 23. Juli 1903 in Záboř bei Kolin. Er studierte an der Technischen Hochschule in Prag, an der Universität in Göttingen und in Paris (im Wintersemester 1885/86 besuchte er noch die Vorlesungen von Kronecker und Weierstraß in Berlin). Dann habilitierte er sich im Jahre 1875 als Privatdozent an der böhmischen Technischen Hochschule in Prag, und schon im folgenden Jahre erfolgte seine Ernennung zum außerordentlichen Professor an dieser Hochschule an Stelle seines älteren Bruders Emil, der nach Wien berufen war. Ordentlicher Professor wurde er im Jahre 1881.

Es folgt eine eingehende Würdigung seiner Arbeiten in der Analysis, Algebra und Geometrie, von denen die wichtigsten sich auf die Rechnung mit Matrizen, auf die Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung, auf die Klassifikation der allgemeinen Raumkurven und auf die synthetische Geometrie beziehen. Endlich wird ein chronologisches Verzeichnis seiner Publikationen gegeben. Pe.

EUGEN MÜLLER. Mitteilungen über die Herausgabe von E. Schröders Nachlaß. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelberg, 216-218.

Im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung wird Müller aus den hinterlassenen Papieren Schröders das, was sich auf die „Algebra der Logik“ bezieht und noch von ihm hinreichend ausgeführt erscheint, im Druck herausgeben. Lp.

L. SAALSCHÜTZ. Zur Erinnerung an W. Fuhrmann. (Mit Bild.) Deutsche Math. Ver. **14**, 56-60.

Wilhelm Fuhrmann, geb. 28. Februar 1833 zu Burg bei Magdeburg, besuchte, nachdem er einige Zeit Seefahrer gewesen, die Prima des Altstädtischen Gymnasiums zu Königsberg i. Pr., bezog nach bestandener Reifeprüfung 1853 die dortige Universität, studierte unter Richelot, Hesse und Franz Neumann und wurde nach Ablegung der Oberlehrerprüfung 1860 Lehrer an dem Realgymnasium, der jetzigen K. Oberrealschule auf der Burg zu Königsberg. Er starb am 11. Juni 1904 daselbst.

Seine in den Programmen der Anstalt veröffentlichten Arbeiten betreffen niedere Analysis, sphärische Trigonometrie und hauptsächlich synthetische Geometrie. Sie werden hier eingehender charakterisiert. M.

C. Kostka. Wilhelm Fuhrmann. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 68-71.

Diese Schilderung des Lebens und der wissenschaftlichen Tätigkeit des Verstorbenen stimmt im wesentlichen mit dem Nekrolog von Saalschütz überein (vgl. das vorstehende Referat). Anzuführen sind die selbständigen Schriften: „Einleitung in die neuere Geometrie" (1881), „Wegweiser in der Arithmetik, Algebra und niederen Analysis" (1886), besonders aber: „Synthetische Beweise planimetrischer Sätze" (F. d. M. **22**, 569, 1890). Lp.

A. Krause. Gedächtnisrede für Edmund Gerlach. Pr. Luisenstädt. Oberrealsch. Berlin. S. 36-40 (1904).

Edmund Gerlach, geb. zu Sonnenburg bei Küstrin am 20. November 1849, besuchte das Wilhelms-Gymnasium in Berlin, studierte Mathematik von 1868 an auf der Berliner Universität, machte 1870/71 den Feldzug gegen Frankreich mit, bestand 1873 die Oberlehrerprüfung, wurde Mitglied des Schellbachschen Seminars und sehr bald noch in demselben Jahre Lehrer, später Professor an der Luisenstädtischen Oberrealschule zu Berlin, an der er bis zu seinem Tode am 12. April 1904 verblieb. Seine wissenschaftlichen Arbeiten betreffen die Theorie des Segelns, den Widerstand bewegter fester Körper in Flüssigkeiten und in Luft.

Lp.

J. F. Cameron. R. W. H. T. Hudson. Obituary notice. Lond. M. S. Proc. (2) **2**, XV-XVII.

Aus einer Cambridger mathematischen Familie stammend, entschloß sich Ronald William Henry Turnbull Hudson sehr früh zur mathematischen Laufbahn. Im Jahre 1900 gewann er für eine Untersuchung über Differentialgleichungen einen Smith-Preis und wurde Fellow of St. John's. Sein Hauptwerk ist (1905) der Treatise on Kummer's Quartic Surface. Ein Verzeichnis seiner Schriften gibt die Mathematical Gazette **3**, 74 (vgl. F. d. M. **35**, 36, 1904). M.

Herbert G. Ogden. Adolph Lindenkohl (1833-1904). Washington Bull. Phil. Soc. **14**, 296-299.

Der Kartograph und Geodät Adolph Lindenkohl wurde zu Niederkaufungen in Hessen-Cassel am 6. März 1833 geboren und starb am 22. Juni 1904 zu Washington. Nach dem Besuch der Polytechnischen Schule in Cassel (1849-52) ging er nach Amerika als Feldmesser. Seine

Arbeiten über Geodäsie und Topographie finden sich in Petermanns Mitteilungen, in dem Amer. Journal of Science, Report of Coast and Geodetic Survey. M.

W. L. Davidsohn. George Pirie. Obituary notice. Lond. M. S. Proc. (2) **2**, XVIII-XIX.

George Pirie, geb. den 19. Juli 1843 zu Manse of Dyce, Aberdeenshire, studierte auf der Universität zu Aberdeen und dem Queen's College zu Cambridge und ward 1866 Fellow of Queen's College. 1875 erschienen seine Lessons on rigid dynamics, 1877 A short account of the principal geometrical methods of approximating to the value of π. Im folgenden Jahre kehrte er nach Aberdeen zurück auf den Lehrstuhl für Mathematik an der Universität. Er starb am 21. Aug. 1904. Seine Lehrtätigkeit wird näher charakterisiert. Vgl. F. d. M. **35**, 37, 1904. M.

Commemorazione del Presidente F. Regnani. Comunicazioni. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti 58, 29-30.

Mitteilung von dem Hinscheiden des Präsidenten Prof. F. Regnani. Prof. G. Lapponi hat eine Biographie des Verstorbenen verfaßt; vgl. das folgende Referat. M.

G. Lapponi. In memoria del Prof. Mons. Francesco Regnani. Rom. Acc. P. d. L. Mem. **23**. Sep.-Abz. 18 S. 4° mit Bildnis.

Francesco Regnani wurde am 15. Mai 1818 zu Forlì geboren. Er trat in das Collegio dei Gesuiti zu Forlì in der Absicht, Geistlicher zu werden, und setzte in Rom seine Studien fort. Hier erwachte in ihm die Liebe zur Physik. Nach vollendetem Studium wurde er Lehrer der Physik und Chemie an verschiedenen Schulen zu Rom. Außer Schriften über Elektrizität und Magnetismus erschien von ihm ein Lehrbuch: Elementi di fisica universale. Im Jahre 1871 wurde er Mitglied der Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei. In den letzten Jahren erschienen mehrere Aufsätze von ihm über Philosophie der Physik. Er starb am 13. Juli 1904 zu Rom. M.

M. Noether. George Salmon. Math. Ann. **61**, 1-19.

Mit gewohnter Meisterschaft schildert Noether in diesem Aufsatze die Verdienste Salmons um die Wissenschaft der Mathematik, indem er die einzelnen Veröffentlichungen des englischen Gelehrten eingehend würdigt, nachdem am Anfange kurz die Lebensumstände erzählt sind. Zur Ergänzung der im Vorjahre besprochenen Nekrologe (F. d. M. **35**, 37-38, 1904) nehmen wir Gelegenheit, auf die vorliegende Schilderung der Entdeckungen Salmons ausführlicher hinzuweisen. Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung, bei den letzteren besonders ihre fokalen Eigenschaften, algebraisch-geometrische Probleme mit dem Ausgangs- und

Zielpunkte des Problems der Reziprokalflächen, das Studium der Flächen dritter Ordnung als Beispiel zur Reziprokaltheorie mit nachfolgender Ausdehnung und wirklicher Ausführung der Reziprokaltheorie für die Flächen n^{ter} Ordnung, die Frage nach der Ordnung eines Systems von Bedingungen nebst der Anwendung von Eliminationsbegriffen auf Abzählungen, als einer der glänzendsten Leistungen Salmons, der Basisbegriff von Bedingungen, alle diese Gegenstände der ersten Periode der Salmonschen Forschung werden der Reihe nach besprochen. Danach folgen die Ausführungen über Themata, die in lebendiger Wechselwirkung mit Cayley behandelt wurden, und zu denen schon die letztberührten Fragen gehören. Hierher sind zu zählen: Arbeiten über Raumkurven wesentlich in abzählender Richtung, mit ihnen verwandt die Untersuchungen über Regelflächen, genaueres Eingehen auf die Theorie der Kurven dritter Ordnung, Beschäftigung mit den Methoden Cayleys in der Formentheorie, das Zusammenwirken des geometrischen Denkens und der formentheoretischen Richtung bei verschiedenen Aufgaben der Geometrie algebraischer Gebilde, besonders bei der Wiederaufnahme algebraischer Flächenprobleme, das Doppeltangentenproblem für eine ebene Kurve, die Invariantentheorie der quaternären kubischen Formen. Bei allen diesen Arbeiten „war Cayley der Führende, Salmon der anregende Begleiter. Die Durchführung der Gedanken war nicht Salmons Sache, und von irgend welcher Systematik in der Ausführung einer Methode war er weit entfernt. Dagegen ist sein Gedankengang original und voll geometrisch-intuitiven Geistes; er bringt es mehrmals zu algebraischen Ansätzen, die aus dem Geiste der Formentheorie herausgeholt sind. Dabei steht er ganz auf dem Boden der englischen induktiven Richtung; seine Arbeit charakterisiert sich durch eine innige Verbindung dieser formentheoretischen Ansätze mit den abzählenden Problemen, und er erscheint als reiner Empirist, fast noch mehr als Cayley. Und obwohl auch seine Noten eine völlige Gleichgültigkeit gegen die äußere Form zeigen, ist diese Forschertätigkeit Salmons doch, zusammengenommen mit der Cayleys, ein wesentliches Glied in der Entwicklung und Handhabung der Methoden der Polarentheorie geworden, und sie bildet eine vermittelnde Stufe zwischen den Arbeiten von Plücker-Hesse und denen von Clebsch“.

Die letzten Seiten dieser sympathischen Skizze klingen aus in ein hohes Lied auf die bekannten vier Lehrbücher Salmons, deren deutschem Bearbeiter Wilhelm Fiedler ein herzlicher Dank dafür ausgesprochen wird, daß er einen Teil seiner Lebensarbeit auf ihre zeitgemäße Erneuerung verwendet hat. „Bei allen Fortführungen und Umarbeitungen ist etwas von dem frischen Reiz übrig geblieben, der den Werken in ihrem Ursprung aus dem jugendlich aufstrebenden Wissenschaftszweige eingepflanzt worden ist.“

Ein Auszug aus diesem Nekrolog steht in Loria Boll. bibl. **8**, 127.

Lp.

P. Vieille. La vie et l'œuvre de Sarrau. Rev. générale des Sc. **16**, 7-10.

1. Biographie († 10. Mai 1904). 2. Ballistische Arbeiten. 3. Arbeiten aus der mathematischen Physik. 4. Arbeiten über die mechanische Wärmetheorie. 5. Arbeiten über die Zusammendrückbarkeit der Gase. Lp.

J. Lüroth. Wilhelm Schell †. Nekrolog (mit Bildnis). Deutsche Math. Ver. **14**, 113-121.

Der hauptsächlich durch seine „Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung“ und seine „Theorie der Bewegung und der Kräfte“ bekannte Mathematiker Wilhelm Schell wurde am 31. Oktober 1826 zu Fulda geboren, studierte in Marburg und Berlin, hielt 1850/51 sein Probejahr am Gymnasium in Marburg ab und wurde an der dortigen Universität Privatdozent der Mathematik und Musik. 1856 wurde er außerordentlicher Professor. Von 1861 bis zu seiner Pensionierung im Jahre 1901 war er Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, zuerst als Lehrer der geometrischen Fächer, dann nach Clebschs Fortgang von 1863 an als Professor der Mechanik und der synthetischen Geometrie. Er starb am 13. Februar 1904. Ein Verzeichnis seiner Werke wird am Schluß des Artikels gegeben. M.

N. Hatzidakis. Zum Nekrolog für Wilhelm Schell. Deutsche Math. Ver. **14**, 394-395.

Die kurze Notiz nennt eine im Verzeichnis der Werke Schells fehlende kleine Abhandlung und eine Bemerkung zur „Theorie der Kurven doppelter Krümmung“. M.

A. Bilimovitsch. J. J. Sechow u. A. P. Sonnenstrahl (Nachruf). Kiew Univ. Nr. 10 (Bericht d. Kiew. Ph.-math. Ges. 1904), 37-43. (Russisch.)

Nachruf für zwei Lehrer der Mathematik des Kadettenkorps in Kiew, welche im Sommer 1904 verschieden. Si.

Paul Tannery. Darb. Bull. (2) **29**, 102-109; Revue générale des sc. **16**, 97-99.

Am 27. November 1904 wurde der um die Geschichte der Mathematik hochverdiente Paul Tannery uns durch den Tod entrissen, leider ehe er sein großartig angelegtes Werk: „Discours sur l'histoire générale des sciences“ vollendete. Mit dem Entwurf dieses Werkes tröstete er sich, als ihm der Lehrstuhl für die allgemeine Geschichte der Wissenschaft, auf den ihn das Collège de France und die Académie des Sciences berufen wollten, höheren Orts versagt wurde. Paul Tannery wurde am 20. Dezember 1843 zu Mantes geboren; er trat 1861 in die École

Polytechnique, verließ sie als Ingénieur des Manufactures de l'État. Er war nacheinander Ingenieur-Eleve an der École d'application des tabacs, Unteringenieur der Tabakmanufaktur zu Lille, Unterdirektor des Bureau des Manufactures de l'État im Finanzministerium, 1894 Lieutenant-Colonel der Artillerie in der Landarmee und Direktor der Tabaksfabrik zu Pantin. Seine Mußezeit benutzte er zu philosophischen, sprachwissenschaftlichen und historischen Studien. Seine eigenen Arbeiten betreffen die Geschichte der exakten Wissenschaften und der Philosophie im Altertum, im Mittelalter, im 16. und 17. Jahrhundert. In der Geschichte der Philosophie verfolgte er eine ganz neue Methode, die in dem vorliegenden Artikel ausführlich charakterisiert wird. In 22 Journalen veröffentlichte Paul Tannery mehr als 400 Abhandlungen; dazu kommen 4 größere Einzelwerke, die Ausgaben der Werke von Diophant, Fermat und Descartes und die Mitarbeit an der französischen Bearbeitung der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. M.

H. G. Zeuthen. L'œuvre de Paul Tannery comme historien des mathématiques. Mit Einleitung und Schriftverzeichnis von G. Eneström. Bibl. Math. (3) 6, 257-304 u. Porträt als Titelbild.

Die Einleitung enthält biographische Notizen über Paul Tannery, wobei ausführlicher berichtet wird teils über seine mathematisch-historischen Vorlesungen in Paris 1884-1885, teils über die Umstände, durch die seine Hoffnungen getäuscht wurden, im Jahre 1904 zum Professor der Geschichte der Wissenschaften am Collège de France ernannt zu werden. Paul Tannery, geboren am 20. Dezember 1843 in Mantes, trat 1861 in die École Polytechnique ein, widmete sich nach seinem Austritte als Ingenieur der Tabakmanufaktur und starb als Direktor der Tabakmanufaktur in Pantin am 27. November 1904. Er gehörte der kleinen Zahl der Leute an, die sich nur aus rein sachlichem Interesse mit wissenschaftlichen Forschungen auf verschiedenen Gebieten beschäftigen, und er hat es getan, ohne dabei seine amtlichen Verpflichtungen zu vernachlässigen. Die Gebiete Tannerys waren Mathematik, Philosophie, Archäologie, klassische Philologie, Geschichte der Wissenschaften und besonders Geschichte der Mathematik.

Weil Tannery nicht allein als Historiker der Mathematik, sondern auch als Historiker der Wissenschaften im allgemeinen tätig war, ward es ihm möglich, die Entwicklung der Mathematik von einem höheren Gesichtspunkte aus zu würdigen, und da er nicht nur Historiker, sondern noch dazu Mathematiker und Philologe war, konnte er sehr viel Material, das sonst unzugänglich gewesen wäre, für seine mathematisch-historischen Forschungen auffinden und verwerten. Als Beleg nennt Zeuthen die Arbeit „Pour l'histoire de la science hellène“ (1887), wo Tannery aus Quellen, die nur zum Teil mathematischen Inhalts sind, wichtige Beiträge zur Kenntnis des Infinitesimalbegriffes vor Euklides und Archimedes entnommen hat.

In der Fortsetzung seines Berichtes gibt Zeuthen ausführliche Auskunft über die Tanneryschen Arbeiten auf dem Gebiete der griechischen Mathematik. Nicht nur hat Tannery hier ein höchst bedeutendes neues Material herbeigeschafft, sondern er hat auch das alte und das neue Material kritisch bearbeitet und dadurch die frühere Auffassung wesentlich berichtigt; so z. B. hat er nachgewiesen, daß die Griechen schon vor Euklides eine geometrische Algebra besaßen. Tannerys hierher gehörige Arbeiten behandeln ebenso eingehend Arithmetik, Algebra, Geometrie und Astronomie der Griechen.

Etwas kürzer bespricht Zeuthen Tannerys Wirksamkeit auf dem Gebiete der mittelalterlichen Mathematik und berichtet ferner über seine Verdienste um die Ausgaben von Fermats und Descartes' gesammelten Werken, sowie über die zahlreichen Artikel, durch die sich Tannery als ein hervorragender Kenner der Geschichte der Mathematik des 17. Jahrhunderts dokumentiert hat. Zeuthen hebt zuletzt hervor, daß das Studium von Tannerys Schriften, abgesehen von der direkten Ausbeute, auch wegen der darin enthaltenen Anregungen empfohlen werden kann.

Das Schriftverzeichnis, das chronologisch geordnet ist und 241 Nummern enthält, umfaßt Tannerys Veröffentlichungen, sofern sie sich auf Mathematik oder auf Geschichte und Philosophie der mathematischen Wissenschaften beziehen. Auch die von Tannery in mathematischen Zeitschriften veröffentlichten Rezensionen, von denen einige den Wert von Originalartikeln haben, sind summarisch angegeben. E.

G. Loria. Necrologio. Paolo Tannery. Loria Boll. bibl. 8, 27-30.

Kurze Schilderung des Lebensganges und der Verdienste des Dahingeschiedenen um die Geschichte der Mathematik; warmer Ausdruck der Bewunderung für seine Leistungen sowie der Verwunderung darüber, daß dem größten Historiker der Mathematik in Frankreich der hierfür vorhandene Lehrstuhl versagt wurde. Lp.

H. Bosmans. Notice sur les travaux de Paul Tannery. Revue des qu. scient. (3) 7, 544-574; Mathesis (3) 5, Supplément.

Biographie. 1. Die griechische Geometrie; die Untersuchungen über die Geschichte der Astronomie; zur Geschichte der hellenischen Wissenschaft. 2. Die Untersuchungen über die byzantinischen Mathematiker. 3. Die Ausgabe des Diophant. 4. Die Werke von Fermat. 5. Die Werke von Descartes. 6-7. Andere Arbeiten. Mn.

H. Fehr. Paul Tannery. Ens. math. 7, 51-52.

E. Waelsch. Nachruf. Wilhelm Weiß. Monatsh. f. Math. **16**, 3-6.
E. Waelsch und M. Noether. Wilhelm Weiß. Mit Bildnis. Deutsche Math. Ver. **14**, 171-175.

Wilhelm Weiß, geb. am 3. Februar 1859 im Dorfe Řidka bei Dobřiš in der Nähe von Prag, war in Prag ein Schüler von Franz Weyr und Joseph Mikoletzky, hörte während seiner Studienzeit an der Deutschen Universität und der Deutschen Technischen Hochschule in Prag Vorlesungen bei Lieblein, Küpper, Durège, Bobek, S. Kantor u. a., in Leipzig bei F. Klein, in Erlangen bei P. Gordan und M. Noether. Von 1887-1894 war er Assistent für Mathematik an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag, wo er sich 1894 habilitierte. An dieser Hochschule wurde er 1897 außerordentlicher, 1900 ordentlicher Professor der Mathematik. 1901 erhielt er die venia legendi für darstellende Geometrie an der Deutschen Universität in Prag. Nach langer Krankheit starb er am 18. Juni 1904. Seine Arbeiten gehören dem algebraisch-geometrischen Gebiete an. M.

Otto Knopf. Ernst Abbe. (Mit Bildnis.) Deutsche Math. Ver. **14**, 218-230; Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **40**, 198-213.

Ernst Abbe wurde am 23. Januar 1840 zu Eisenach geboren, studierte in Jena Mathematik, promovierte 1861 in Göttingen, war ein halbes Jahr auch Assistent an der Sternwarte bei Klinkerfues, von 1861-62 Dozent am Physikalischen Verein zu Frankfurt a. M. und habilitierte sich 1863 als Privatdozent für Mathematik, Physik und Astronomie in Jena. Carl Zeiß zu Jena beschäftigte sich in seiner seit 1846 bestehenden mechanischen Werkstätte besonders mit der Herstellung von Mikroskopen. Er wandte sich 1866 an Abbe, um durch die Theorie Fingerzeige für die Verbesserung der optischen Instrumente zu gewinnen. Dank den von Abbe ersonnenen Methoden erreichte die Zeißsche Werkstatt bald einen Weltruf. Auf Abbes Veranlassung machte 1881 Otto Schott Versuche zur Herstellung von Gläsern, deren Brechungs- und Dispersionsvermögen von den bisher bekannten Gläsern für die Herstellung optischer Instrumente abwichen, und errichtete 1884 unter Mitwirkung von Zeiß ein glastechnisches Laboratorium zu Jena. Abbe konstruierte nun für den Mikroskopiker seinen „Apochromaten“ und den „Kondensor Abbe“. Seine wiederentdeckte Prismenkombination verbesserte die Feldstecher, die Firma Zeiß erweiterte ihre Leistungen auf optische Instrumente aller Art. Die geometrische Optik förderte Abbe durch ganz neue Anschauungen. Seine Verdienste trugen ihm mehrfache Berufungen an andere Universitäten ein; aber er zog es vor, seine Verbindung mit Zeiß nicht zu lösen, sondern gestaltete sie durch den Eintritt als Geschäftsinhaber noch enger. Daneben folgte er der Aufforderung, das Direktorat der Universitätssternwarte zu übernehmen. Seine beträchtlichen Einnahmen aus dem Zeißschen Geschäfte verwendete er für wohltätige und wissenschaftliche Zwecke. Er ließ einen Neubau der Sternwarte aufführen und stellte aus eigenen Mitteln einen Observator an. Durch die

von ihm nach Zeiß' Tode errichtete Carl Zeiß-Stiftung wurden Millionen humanitären und wissenschaftlichen Zwecken zugewendet. Am 14. Januar 1905 endete der Tod das an Arbeit und Erfolgen überreiche Leben Ernst Abbes. M.

W. Voigt. Ernst Abbe. Gött. Nachr. (Geschäftl. Mitt.) 1905, 34-44.

In diesem Nachruf auf Ernst Abbe, das Ehrenmitglied der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, wird das Gebiet der „Wissenschaft der Technik" charakterisiert, dem die epochemachenden Forschungen Abbes über das Mikroskop angehören. Alsdann werden die Entdeckungen Abbes in der praktischen Optik, die für die Mikroskoptechnik und für die Herstellung von Fernrohren von größter Bedeutung wurden, dargelegt. Dann wird der erfreulichen und wünschenswerten Betätigung jenes „Interesses für wissenschaftliche Forschung" gedacht, auf Grund dessen die Ehrenmitgliedschaft erteilt wurde, und das sich in der pekuniären Unterstützung wissenschaftlicher Arbeit dokumentierte. In der Carl Zeiß-Stiftung tauchte Abbe mit seiner ganzen Persönlichkeit unter. Jede Hervorkehrung seiner Person war dem bescheidenen Gelehrten zuwider. M.

C. v. Voit. Nekrolog auf Ernst Abbe. Münch. Ber. 35, 346-355.

Mit Benutzung der Biographien Ernst Abbes aus der Feder von S. Finsterwalder, Jul. Pierstorff, E. Rühlmann, Fritz Böckel, Otto Knopf zeichnet der Verf. den Lebenslauf und die Verdienste Ernst Abbes, der seit 1889 Mitglied der Münchener Akademie war, um die theoretische und praktische Optik. Besonders die Verbesserung der Beleuchtungsapparate des Mikroskops, vor allem die Konstruktion seines Kondensors und die Verbesserung der homogenen Immersion wird dargelegt, ferner die Verbesserung der optischen Glasflüsse. Sie gewährten der Wissenschaft ungeheuren Nutzen. Die heutige Entwicklung der Lehre von den Bakterien wäre ohne Abbes Mitarbeit nicht möglich gewesen. M.

Gedenkreden und Ansprachen, gehalten bei der Trauerfeier für Ernst Abbe am 17. Januar 1905 im großen Saale des Volkshauses. Mit einem Bildnis. Jena: IV u. 23 S. gr. 8°.

Besonders hervorzuheben ist: „Zur Lebensgeschichte Ernst Abbes" von Cz. (I-IV) und Rede des Bevollmächtigten der Carl Zeiß-Stiftung Dr. S. Czapski (1-14). M.

S. Czapski. Nachruf auf Ernst Abbe. Verh. Deutsche Phys. Ges. 7, 89-121.

Nach kurzer Vorführung der hervorzuhebenden Daten des Lebensganges schildert Czapski zuerst Abbe in seiner Laufbahn als akademischen Lehrer und Forscher. Zur Ergänzung der vorangehenden Referate sei

erwähnt, daß Abbe in den beiden ersten Jahrzehnten seiner Lehrtätigkeit nicht nur physikalische, sondern im Anschluß an die von ihm bei Riemann gehörten Kollegien auch mathematische Vorlesungen gehalten hat, und zwar über Theorie der Funktionen einer komplexen Variable, elliptische Funktionen, bestimmte Integrale, analytische Geometrie, algebraische Analysis und Zahlentheorie. Der zweite Teil der vor der Deutschen Physikalischen Gesellschaft gehaltenen Rede schildert das, „was unzweifelhaft den Hauptinhalt von Abbes fachlichen Leistungen bildet", seine Reformation der technischen Optik. Der Mensch Abbe wird im Anschluß hieran in kurzen, treffenden Zügen gezeichnet. Lp.

R. T. G(lazebrook). Prof. Ernst Abbe. Forty years' progress. Nature **71**, 301-302.

E. Wandersleb. Ernst Abbe †. Naturw. Rundschau **20**, 193-195.

A. Winkelmann. Ernst Abbe. Rede, bei der von der Universität Jena veranstalteten Gedächtnisfeier am 2. Mai 1905 gehalten. Jena: G. Fischer. 23 S. gr. 8°.

W. Lorey. Karl Bopp. Math. naturw. Bl. **2**, 194-195.

Geboren am 29. Juni 1856, gestorben am 9. November 1905 als Professor am Goethe-Gymnasium zu Frankfurt a. M. Literarisch ist Bopp nur mit der Göttinger Dissertation „Über das kürzeste Verbindungssystem von vier Punkten" 1879 hervorgetreten. Sk.

W. E. P(lummer). Obituary of Ralph Copeland. Nature **73**, 32.

J. Halm. Obituary notice. Astr. Nachr. **170**, 29-32.

Geboren am 3. Sept. 1837 zu Woodplanton, Lancashire, wanderte Halm 1850 nach Australien aus, war Schäfer und Goldgräber, kam 1858 zurück, arbeitete in einer Fabrik für Lokomotivbau, studierte 1864 bei Klinkerfues in Göttingen, nahm an verschiedenen astronomischen Expeditionen teil, wurde 1876 Direktor der Privatsternwarte in Dunecht, 1889 Direktor der Sternwarte in Edinburgh, starb als solcher am 27. Okt. 1905. Vgl. auch Leopoldina **41**, 101-102. Lp.

A. Thaer. Nachruf auf Jos. Diekmann. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 316-318.

Geboren 1848 zu Höxter i. W., gestorben 22. März 1905; besuchte das Gymnasium in Paderborn, studierte in München und Göttingen, war

Lehrer an den Gymnasien in Wesel und Essen, übernahm 1880 die Leitung der höheren Bürgerschule in Viersen, erweiterte sie zum Progymnasium mit Realabteilung, trat als Direktor dieser Anstalt 1898 wegen Krankheit in den Ruhestand, unterrichtete aber noch an den Gymnasien zu Aachen und München-Gladbach, sowie am Progymnasium zu Wipperfürth. „Einer der besten Schriftsteller auf dem Gebiete der Schulmathematik“; unter anderem Herausgeber der Geometrie von Koppe. Lp.

AD. SCHMIDT. Nachruf auf Johannes Edler. Verh. Deutsche Phys. Ges. 7, 398-402.

Geboren am 23. September 1860 in Königsberg i. N., gestorben am 2. Juli 1905 in Potsdam. Edler besuchte das Gymnasium seiner Vaterstadt, studierte bei Oberbeck in Greifswald, war fünf Jahre sein Assistent, war seit 1894, abgesehen ein Assistentenjahr an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin, am Magnetischen Observatorium in Potsdam angestellt, das er ein Jahr lang nach dem Tode Eschenhagens leitete. Seine Haupttätigkeit war der magnetischen Vermessung von Norddeutschland gewidmet; nach dieser Richtung bewegen sich seine wichtigsten Arbeiten. Lp.

LE PAIGE. F. Folie (1833-1905). Revue des qu. scient. (3) 7, 698-700.

François J. Ph. Folie, geboren zu Venloo 11. Dezember 1833, gestorben zu Lüttich am 29. Januar 1905, Astronom, Verf. sehr zahlreicher Noten und Abhandlungen über die tägliche Nutation. In der reinen Mathematik stammen von ihm Untersuchungen über die Bewegung eines starren Körpers und über die Kurven, deren Gleichung in die Form gebracht werden kann $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n = k \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n$, wo die δ_k und Δ_k in den kartesischen Koordinaten x und y linear sind. — Vgl. Astr. Nachr. Nr. 4003. Mn. (Lp.)

P. DE HEEN. Discours prononcé aux funérailles de Fr. Folie. Belg. Bull. Sciences 1905, 60-63. Mn.

E. LAMPE. Guido Hauck †. Gedächtnisrede. (Mit Bildnis.) Deutsche Math. Ver. 14, 289-311.

E. LAMPE. Guido Hauck. Rede zur Gedächtnisfeier für Guido Hauck am 17. Mai 1905 in der Halle der Technischen Hochschule zu Charlottenburg. Gehalten von E. L. in Berlin. Nebst der Rede am Sarge von A. Parisius in Großbeeren. (Mit einem Bildnis.) Leipzig: B. G. Teubner. 32 S. gr. 8°.

Guido Hauck wurde am 26. Dezember 1845 zu Heilbronn geboren, besuchte 1863 die Stuttgarter polytechnische Schule, 1865-1870 die Universität Tübingen, wurde 1872 Lehrer an der Realanstalt und der Oberrealschule zu Tübingen und zugleich Dozent für darstellende Geo-

metrie und Elementarmathematik an der Universität und erhielt 1877 einen Ruf an die Bauakademie zu Berlin, die bald darauf mit der Gewerbeakademie zur Technischen Hochschule vereinigt wurde. Über 27 Jahre gehörte er der Berliner Technischen Hochschule als Lehrer der darstellenden Geometrie an. Er starb am 25. Januar zu Berlin. Die Rede Lampes schildert die wissenschaftliche Tätigkeit Haucks und sein Wirken als Lehrer. Es folgt ein Verzeichnis von 48 Schriften über darstellende Geometrie, Perspektive, Verwandtschaft ebener Systeme, künstlerische Probleme und Fragen des höheren Unterrichts. Vgl. auch Leopoldina **41**, 38. M.

G. Hessenberg. Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Guido Hauck †. Zentralbl. d. Bauverw. **25**, 72-73.

Der kurze Nachruf aus der Feder eines dankbaren Schülers schildert die gewinnende Persönlichkeit, die Verdienste als Lehrer, das Streben nach Einfachheit und künstlerischer Schönheit in dem Wirken Haucks. M.

W. E. P(lummer). Obituary of M. Paul Henry. Nature **71**, 302.

Paul Henry, Astronom, Bruder von Prosper Henry (F. d. M. **34**, 35, 1903), geboren 21. August 1848, gestorben 4. Januar 1905. Vgl. auch Leopoldina **41**, 38. Lp.

Nécrologie. J. C. V. Hoffmann. Ens. math. **7**, 147.

M. C. Paraira. Corneille Louis Landré (1838-1905). (Mit Bildnis.) Nieuw Archief (2) **7**, 1-6.

Der durch seine Arbeiten über Versicherungsmathematik bekannte holländische Mathematiker Corneille Louis Landré wurde am 31. Aug. 1838 zu Utrecht geboren. Er war Autodidakt, interessierte sich besonders für Naturphilosophie, trat 1876 bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft zu Dordrecht ein, dann bei einer solchen zu Amsterdam, und ward Mitglied der Wiskundig Genootschap. Er starb am 10. Febr. 1905. Ins Deutsche übersetzt wurde sein Werk: „Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung", 2. Auflage Jena 1901. M.

Aug. Statuti. Cenno necrologico del Rev. Prof. P. Teofilo Pepin. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti **58**, 210-216.

Teofilo Pepin wurde am 14. Mai 1826 zu Clusy, Ober-Savoyen, geboren. Er studierte zuerst, in den Orden der Jesuiten aufgenommen, Philosophie und Theologie, später zu Paris Mathematik. Als Titularprofessor im Kollegium von St. Michael zu St. Etienne bei Lyon redigierte er das Bulletin scientifique der Revue des Études. Die Seiten 213-216

enthalten ein Verzeichnis von 52 Abhandlungen Pepins, meist aus dem Gebiete der Zahlentheorie. M.

F. Rudio. Wilhelm Schmidt (1862-1905). Bibl. Math. (3) **6**, 354-386 (mit Porträt).

Wilhelm Schmidt, geboren zu Harderode in Braunschweig am 25. August 1862, besuchte von 1874 bis 1877 eine Vorbereitungsanstalt für das Lehrerseminar in Wolfenbüttel, in der Absicht sich zum Volksschullehrer auszubilden, ging aber 1877 zum Gymnasium daselbst über und bezog 1882 nach bestandenem Abiturientenexamen die Universität in Leipzig, um sich dem Studium der klassischen Philologie zu widmen. Er setzte seine Studien 1883 bis 1884 in Göttingen, später in Berlin fort und trat im Herbst 1885 in den praktischen Schuldienst als Hilfslehrer am Realgymnasium in Braunschweig. Nach 1888 bestandener Staatsprüfung wurde er daselbst 1890 als Gymnasiallehrer fest angestellt, promovierte 1893 in Göttingen und wurde 1896 etatsmäßiger Oberlehrer in Braunschweig. Zwei Jahre später wurde er indessen aus Gründen, die schwer zu verstehen sind, zwangsweise an das Gymnasium in Helmstedt versetzt und starb daselbst nach längerer Kränklichkeit am 7. August 1905.

Wilhelm Schmidt ist in erster Linie durch die von ihm begonnene Ausgabe von Herons Werken unter den Historikern der Mathematik bekannt; aber er hat auch viele andere wertvolle Beiträge zur Geschichte der Mathematik veröffentlicht, von denen die meisten in der „Bibliotheca Mathematica“ erschienen; fast alle sind durch seine Heron-Studien veranlaßt worden und beschäftigen sich auch fast ausschließlich mit der Geschichte der griechischen Mathematik oder mit der Textgeschichte griechischer mathematischer Arbeiten.

Rudio berichtet sehr ausführlich über die von Wilhelm Schmidt herausgegebenen Bände von Herons Werken und gibt auch genaue Auskunft über seine übrigen mathematisch-historischen Schriften.

„Gewissenhaftigkeit und Sachlichkeit, Schlichtheit und Ehrlichkeit“, schließt Rudio, „waren die Grundzüge von Schmidts Wesen und von seiner wissenschaftlichen Arbeit.“ E.

H. Helmert. Generalleutnant Dr. Oscar Schreiber. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **40**, 303-310.

Geboren am 17. Februar 1829 zu Stolzenau a. d. Weser in Hannover, gestorben 14. Juli 1905 zu Hannover, „allen Geodäten wohlbekannt als der Schöpfer der trigonometrischen Grundlage der preußischen Landesaufnahme“. Schon als hannoverscher Offizier wurde Schreiber beim Beginn seiner Laufbahn in der Vermessung seines Landes beschäftigt. Nach der Einverleibung Hannovers in Preußen wurde er zu der preußischen Landestriangulation kommandiert und rückte, in dieser Stellung unausgesetzt verbleibend, vom Hauptmann des trigonometrischen Bureaus im

Generalstabe allmählich bis zum Generalleutnant und Chef der Landesaufnahme vor, von 1874 an auch als Lehrer der Geodäsie an der Königlichen Kriegsakademie nebenamtlich tätig. Im April 1893 auf seinen Wunsch zur Disposition gestellt, zog er sich nach Hannover zurück und widmete sich seinen Studien. Die Berliner Universität ernannte ihn wegen seiner hohen Verdienste um die Wissenschaft der Geodäsie 1903 ehrenhalber zum Doktor der Philosophie. Bei der eingehenden Würdigung der wissenschaftlichen Arbeiten und der praktischen Leistungen rühmt Helmert den Verstorbenen als einen Gelehrten, der mit vollem Verständnis die Gaußschen Methoden fortgebildet habe. „Seine wissenschaftlichen Abhandlungen zählen zu denjenigen, die jeder Geodät genau kennen muß, um auf der Höhe seiner Wissenschaft zu stehen, und sie haben auch im Nachbargebiete der Astronomie Anregung zu bedeutsamen Untersuchungen gegeben.“ Lp.

M. NYRÉN. Nekrolog Otto Wilhelm Struve. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **40**, 286-303.

Geboren am 7. Mai 1819 in Dorpat als Dritter von 18 Geschwistern, begann Otto Struve mit 15 Jahren das Studium der Astronomie auf der Universität seiner Vaterstadt, wurde 1839 bei der Eröffnung der Sternwarte zu Pulkowa Gehilfe des Direktors, seines Vaters Wilhelm Struve, erlangte den Grad eines Magisters der Astronomie an der Petersburger Akademie 1841 auf Grund der Abhandlung: „Bestimmung der Konstante der Präzession mit Berücksichtigung der eigenen Bewegung des Sonnensystems“, einer Arbeit, für die ihm von der Royal Astronomical Society in London 1850 die goldene Medaille zuerkannt wurde. Seit 1845 vertrat er vielfach seinen Vater in den Verwaltungsgeschäften der Pulkowaer Sternwarte; er rückte bald in das Amt eines zweiten Astronomen dieses Instituts ein, erhielt nach der schweren Erkrankung seines Vaters 1858 die Verwaltung und wurde 1862 zum Direktor ernannt. Als solcher wirkte er bis zu seiner Pensionierung 1889. Zunächst verblieb er zum Abschlusse wissenschaftlicher Arbeiten in Pulkowa, dann lebte er seiner Gesundheit wegen an verschiedenen Orten Europas, ging jedoch im Sommer meistens nach Rußland zurück. Er starb am 14. April 1905 in Karlsruhe, wo sein Leichnam zufolge einer testamentarischen Verfügung im Krematorium eingeäschert wurde. Seine Arbeiten gehören der beobachtenden Astronomie an. Er übte mit Hülfe seiner Verbindungen in vielseitiger energischer Tätigkeit einen weitgehenden Einfluß auf astronomische und geodätische Arbeiten aus, zu denen er häufig die ersten Anregungen gab. — Ein anonymer Nachruf steht auch in Nature **72**, 61. Lp.

E. MILLOSEVICH. Pietro Tacchini. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **40**, 213-214.

Obituary of Prof. Pietro Tacchini. Nature **71**, 564.

R. MELDOLA. The late Prof. Tacchini. Nature **71**, 583.

Der Astronom Pietro Tacchini, geboren zu Modena am 21. März 1838, gestorben zu Spilamberto bei Modena am 24. März 1905, ist besonders bekannt durch seine lange fortgesetzten Beobachtungen der Sonnentätigkeit auf der Sternwarte des Collegio Romano, deren Direktor er war. Den mathematischen Teilen der Astronomie hat er sich nicht zugewandt. Vgl. auch Leopoldina **41**, 48. Lp.

A. B(ERBERICH). Pietro Tacchini †. Naturw. Rundsch. **20**, 285-286.

E. LORENZONI. Pietro Tacchini nei primordi della sua carriera astronomica a Padova raccommandato da Giuseppe Bianchi a Giovanni Santini. Comunicazione. Ven. Ist. Atti [(8) 7] **64**, 89-95.

Zur Erinnerung an den verstorbenen Astronomen Pietro Tacchini werden zwei Empfehlungsbriefe von Giuseppe Bianchi aus Modena an Giovanni Santini vom Jahre 1858 mitgeteilt. Tacchini, damals Beobachter am Observatorium zu Padua, wurde am 21. September 1859 Direktor des Observatoriums zu Modena. M.

Nécrologie. L. v. Tetmajer et L. Ditscheiner. Ens. math. **7**, 147-148.

L. v. Tetmajer, geboren am 14. Juli 1850 in Ungarn, gestorben am 30. Januar 1905 als Vorsteher des Versuchslaboratoriums für Materialprüfung an der Technischen Hochschule zu Wien, vorher bis 1901 Professor am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich.

Leander Ditscheiner, geboren am 4. Januar 1839, gestorben am 31. Januar 1905, als Professor der mathematischen Physik und der Krystallographie an der Technischen Hochschule zu Wien. Vgl. auch Leopoldina **41**, 37-38. Lp.

J. M. HILL. Robert Tucker. Obituary Notice. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, XII-XX.

Nach einem Aufsatz von Geoffrey T. Bennett in dem University College Magazine wird zuerst ein kurzer Lebensabriß gegeben. Robert Tucker, geboren zu Walworth, Surrey, am 26. April 1832, kam 1851 in das St. John's College zu Cambridge und war dann Lehrer an verschiedenen Schulen, so von 1859-1864 an der Schule des Rev. J. A. Wall zu Portarlington, dann am Brighton College und 1865 an der University College School als Lehrer der Mathematik zu Cambridge. In demselben Jahre wurde er Mitglied der Londoner Mathematischen Gesellschaft. Im Jahre 1871 ward er einer der Gründer der Association for the Improvement of Geometrical Teaching. 1896 ward er Honorary Fellow of the College of Preceptors. Er starb am 29. Januar 1905 zu Worthing.

Diesem Lebensabriß folgt eine Schilderung seines Wirkens als Sekretär der Gesellschaft und eine Übersicht über seine wissenschaftlichen Arbeiten, die sich in den Educational Times, in der Nature, der Academy, Saturday Review, dem Journal of Education, den Proc. Lond. Math. Soc., dem Messenger, dem Quarterly Journal, den Proc. Edinb. Math. Soc. finden. Der Tuckerkreis und die verwandten Untersuchungen aus der neueren Dreiecksgeometrie werden eingehend besprochen. M.

A. M. F. Obituary of Sir William Wharton. Nature **72**, 586-587.

William James Lloyd Wharton, geb. in London 2. März 1843, gest. in Kapstadt 29. September 1905, Marineoffizier, zuletzt Hydrograph der Admiralität, wissenschaftlich überaus tätig im Vermessungswesen zur See, dem sein erstes Werk „Hydrographical Surveying" gewidmet ist und für das er bis zu seinem Rücktritte aus dem Amte, 31. Juli 1904, unablässig praktisch und schriftstellerisch arbeitete. Zuletzt besuchte er die Versammlung der Brit. Ass. in Kapstadt, wo er Präsident der Sektion E war, erkrankte auf einem Ausfluge und starb in Kapstadt. Lp.

Obituary of Dr. Walter F. Wislicenus. Nature **73**, 57-58.

Gest. 3. Oktober 1905 im Alter von 46 Jahren; als Astronom war er zuletzt außerordentlicher Professor für Astronomie an der Universität zu Straßburg. Das größte Verdienst hat er sich durch die Bearbeitung der ersten sechs Bände des Astronomischen Jahresberichtes erworben, den er zum größten Teil selbst geschrieben hat. Vgl. auch Leopoldina **41**, 96, wo die übrigen Veröffentlichungen aufgezählt sind. Lp.

L. Boltzmann. Populäre Schriften. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. VIII u. 440 S. gr. 8°.

Diese letzte größere Veröffentlichung des geistsprühenden großen deutschen Gelehrten, welche dem Leser klar vor Augen führt, wie groß der Verlust ist, den wir durch seinen Tod erlitten haben, besteht aus 23 Artikeln physikalischen, philosophischen, historischen Inhalts, deren erste Veröffentlichung sich auf drei Jahrzehnte verteilt.

1. Über die Methoden der theoretischen Physik (1892). 2. Über Maxwells Elektrizitätstheorie (1873). 3. Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie (1886). 4. Gustav Robert Kirchhoff (1887). 5. Über die Bedeutung von Theorien (1890). 6. Über Luftschiffahrt (1894). 7. Josef Stefan (1895). 8. Ein Wort der Mathematik an die Energetik. I. Mechanik. II. Wärmelehre. III. Über Herrn Ostwalds Vortrag über den wissenschaftlichen Materialismus (1896). 9. Zur Energetik (1896). 10. Über die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft (1896). 11. Nochmals über die Atomistik

(1897). 12. Über die Frage nach der objektiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur (1897). 13. Röntgens neue Strahlen (1896). 14. Über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit (1899). 15. Zur Erinnerung an Josef Loschmidt (1895). 16. Über die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik (1899). 17. Über die Prinzipien der Mechanik (1900 u. 1902). 18. Ein Antrittsvortrag zur Naturphilosophie (1903). 19. Über statistische Mechanik (1904). 20. Entgegnung auf einen von Prof. Ostwald über das Glück gehaltenen Vortrag (1904). 21. Besprechung des Lehrbuches der theoretischen Chemie von Wilhelm Vaubel (ungedruckt). 22. Über eine These Schopenhauers (1905). 23. Reise eines deutschen Professors ins Eldorado (ungedruckt). Überall bewährt sich Boltzmann als scharfsinniger, tief eindringender Denker, als Meister in der Behandlung der deutschen Sprache, der vom ersten Satze an den Leser zu fesseln versteht, als Humorist, der mit dem einen Auge unbeirrt in die verborgensten Fragen eindringt, welche das menschliche Herz bewegen, in dessen anderem Auge der fröhliche Schalk lauert, der uns scherzend über alle Untiefen hinwegführt. Die Vorrede und die Reise eines deutschen Professors ins Eldorado sind Kabinettstücke der deutschen Literatur, welche die größte Verbreitung verdienen. Lp.

A. Cabreira. Quelques mots sur les Mathématiques en Portugal. Notice et défense des travaux de Antonio Cabreira. Avec biographie de l'auteur par Mr. le Dr. A. Santos Lucas. Lisbonne: Alfredo Julio Andrade. VIII u. 64 S. gr. 8°.

Antonio Cabreira, geb. am 30. Oktober 1868, Mathematiker und Journalist, ist durch die Kritik verletzt, welche Guimarães in dem sorgfältig gearbeiteten Werke „Les Mathématiques en Portugal au XIX° siècle" (F. d. M. **31**, 4. 1900) an den mathematischen Veröffentlichungen des jungen Schriftstellers geübt hat. Um sich vor der Mitwelt in wahrem Lichte zu zeigen, läßt Cabreira seine Verdienste auf S. I-VIII durch einen Professor des Polytechnikums von Lissabon verherrlichen, und um „jene Bemerkungen nicht länger ungestraft" zu lassen, hat er die vorliegende Schrift verfaßt, der sein Bildnis beigegeben ist; er hofft, damit „die Wahrheit der Tatsachen wiederherzustellen und jede Neigung zur Böswilligkeit zu ersticken, welche der Kritiker und der Tadler gegenwärtig oder zukünftig nähren könnte". Lp.

H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Enzyklopädie der elementaren Geometrie. Leipzig: B. G. Teubner. XII u. 604 S. gr. 8°. Mit 280 Textfiguren.

Das Buch bildet den zweiten Band der „Enzyklopädie der Elementarmathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende" von H. Weber und J. Wellstein (vgl. F. d. M. **34**, 95, 1905), mit dem Nebentitel „Elemente der Geometrie".

Die erste Abteilung des neuen Bandes über die Grundlagen der Geometrie ist von Wellstein verfaßt. In der zweiten Abteilung, welche die Trigonometrie erledigt, ist die ebene Trigonometrie und die Polygonometrie von Weber geschrieben, die sphärische Trigonometrie von Jacobsthal. Die dritte Abteilung, welche die analytische Geometrie und die Stereometrie enthält, hat Weber zum Verfasser; nur die analytische Sphärik in § 83 rührt von Jacobsthal her.

Noch weniger als beim ersten Bande entspricht bei dem zweiten der Inhalt dem Titel einer Enzyklopädie der elementaren Geometrie. Die „zahllosen Sätze und Sätzchen der Elementargeometrie über Dreieck und Kreis, Tetraeder und Kugel“ werden in der Vorrede etwas geringschätzig beiseite geschoben. „Unter Ausscheidung alles zurzeit noch Isolierten und darum Unfruchtbaren sollte nur das geboten werden, was in den Anwendungen auf Mechanik und Physik sich als nützlich erweist und auch in der höheren Mathematik fortlebt. In diesem engeren Bereiche wurde in erster Linie Vertiefung und Belebung der Gegenstände angestrebt. Vertiefung durch ausführliche kritische Behandlung nach der logischen und erkenntnistheoretischen Seite, Belebung durch Anwendungen, die für einen dritten Band vorbehalten sind.“

Da hiernach der dritte Band Anwendungen bringen soll, darf man hoffen, daß dort noch manches Platz finden wird, was der Käufer des Werks nach dem Titel desselben in dem gegenwärtigen Bande vergeblich sucht. Die beiden Leiter des Unternehmens, Weber und Wellstein, haben als Universitätslehrer den Stoff unter dem Gesichtspunkte behandelt, daß sie dem zukünftigen und dem schon im Amte befindlichen Oberlehrer den Stand der wissenschaftlichen Forschung über elementargeometrische Fragen in der Gegenwart haben darstellen wollen. Ob das Werk ebenso ausgefallen wäre, wenn die beiden Autoren selbst einige Jahre den Unterricht in der elementaren Geometrie in Gymnasien erteilt hätten, möchte Ref. bezweifeln. Um nur einen Punkt zu erwähnen: die ganze neuere Dreiecksgeometrie wird auf noch nicht zwei Seiten durch Behandlung der Brocardschen Punkte nur eben leicht gestreift. Mag man über den Wert dieser jüngsten Tochter der Elementargeometrie urteilen, wie man will; wegen der vielen Arbeiten aus den letzten Dezennien mußte wohl etwas mehr geschehen als ein Verweis auf Pascals Repertorium.

Nach dieser unumwundenen Äußerung der Bedenken, die sich auf den Mangel an Übereinstimmung zwischen Titel und Inhalt beziehen, möge nun aber auch gleich die Anerkennung folgen, daß das Werk nicht bloß den Mathematiker auf das lebhafteste interessieren wird, sondern überhaupt jeden Menschen, der etwas aus der Erkenntnislehre erfahren will, und zwar hier an dem einfachsten Beispiele, dem der Geometrie.

Von den 563 Textseiten werden nämlich die ersten 301, also über die Hälfte, durch das erste „Buch“ über die Grundlagen der Geometrie ausgefüllt; von diesen entfallen nur die Seiten 220 bis 301 auf die eigentliche Planimetrie. Die nichteuklidische Geometrie, denen die ersten 220 Seiten des Buches gewidmet sind, ist ja in dem letzten Jahrzehnt

ein besonders eifrig gepflegtes Arbeitsgebiet geworden. Diese wissenschaftliche Bewegung hat offenbar das erste, von Wellstein verfaßte Buch beeinflußt, und es ist eine Darstellung entstanden, die nichts weniger als enzyklopädisch ist, sondern in origineller Weise alle Seiten des Gegenstandes widerspiegelt und dadurch ein vollständiges Bild von ihm gibt. In Einzelheiten kann man natürlich anderer Meinung sein als der Verfasser, wie unter anderem Weber seine in bezug auf Kants Raumlehre abweichende Ansicht durch einen „Nachtrag zu den Grundlagen der Geometrie“, S. 581-591, zum Austrag gebracht hat. Die ganze Schreibweise ist jedoch so natürlich und frisch, daß die philosophische Vertiefung, auf die dieser Abschnitt berechnet ist, gewiß bei allen Lesern erreicht wird, die den Stoff selbsttätig durchdenken. Der alte Grundsatz von Descartes: de omnibus dubitare, wird mit Erfolg auf die Prinzipien der Geometrie angewandt, die man so lange als von jedem Zweifel unangefochten, als das Gewisseste im menschlichen Geiste betrachtet hatte.

Gerade wie in diesem ersten Buche die prinzipiellen Seiten der Geometrie so beleuchtet sind, wie sie gegenwärtig den sich um sie bemühenden Forschern erscheinen, so hat Jacobsthal in der sphärischen Trigonometrie, die den verhältnismäßig großen Raum von 100 Seiten einnimmt, außer der älteren Möbiusschen Auffassung die Grundgedanken der Studyschen Abhandlung aus dem Jahre 1893 über die sphärische Trigonometrie auseinandergesetzt und ist damit etwas aus dem Rahmen der Elementargeometrie herausgetreten. Obgleich diese Bereicherung des Inhaltes an sich wertvoll ist, darf man wohl fragen, ob nicht andere, unberücksichtigt gebliebene Teile der Elementarmathematik nötiger gewesen wären.

Hinsichtlich der von Weber verfaßten Abschnitte der ebenen Trigonometrie und der analytischen Geometrie sowie der Stereometrie ist aus dem Grunde weniger zu bemerken, weil sie mehr in den üblichen Grenzen gehalten sind. Die Aufnahme der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes in die Enzyklopädie der Elementarmathematik wird in der Vorrede damit begründet, daß die Kegelschnittslehre, „dieses schönste und höchste Gebiet der Elementargeometrie, von den verschiedensten Seiten her in Angriff zu nehmen“ sei. Die Grenzen, bis zu denen vorgegangen ist, sind etwa auf unseren Oberrealschulen erreichbar, während man in Frankreich in den „Classes de Mathématiques spéciales“ viel weiter geht. „Eine zusammenhängende Darstellung der Kegelschnittslehre würde über den Rahmen unseres Werkes hinausgegangen sein.“

Um mißverständlichen Auffassungen vorzubeugen, soll am Schlusse ausdrücklich erklärt werden, daß Ref. es für sehr wünschenswert, ja dringlich erachtet, daß alle Lehrer der Elementargeometrie sich mit den prinzipiellen Erörterungen dieses Bandes der Enzyklopädie bekannt machen. Natürlich ist damit durchaus nicht gemeint, daß diese Erörterungen zum Gegenstande des Schulunterrichts gemacht werden sollen. Lp.

M. A. Tichomandritzky. Versuch einer Geschichte der Physiko-mathematischen Fakultät der kaiserlichen Universität in Charkow in den ersten 100 Jahren ihres Bestehens. Charkow Univ. 1904 Nr. 4, 1-80; 1905 Nr. 1, 1-80. (Russisch.)

Das hundertjährige Jubiläum der Universität Charkow im Jahre 1905 hat eine Reihe von Schriften über ihre Schicksale während dieser hundert Jahre hervorgerufen. Zu diesen Schriften gehört auch die obengenannte Untersuchung, welche die Umformungen des Unterrichts in der Physiko-mathematischen Fakultät (bis zum Jahre 1850 die zweite Abteilung der philosophischen Fakultät) unter den Statuten von 1804, 1835, 1863 und 1884 beschreibt. In der reinen Mathematik waren tätig unter anderen: Th. Ossipowsky, A. Th. Pawlowsky, E. J. Beyer, D. M. Delarue, M. Th. Kowalsky, K. A. Andrejew, M. A. Tichomandritzky, D. A. Grave, W. P. Alexejewsky. In der angewandten Mathematik: J. G. Huth, N. M. Archangelsky, N. A. Djatschenko, J. D. Ssokolov, W. P. Alexejew, W. G. Imschenetzky, A. M. Liapunow, W. A. Steklow. In der Astronomie: P. A. Sateplinsky, A. F. Szagin, A. P. Schidlowsky, J. J. Fedorenko, T. W. Lewitzky, L. O. Struve. In der Physik: A. J. Stoikowitsch, W. S. Komlischinsky, W. J. Lapschin, J. J. Morosow, A. P. Schimkow, N. D. Piltschikow, A. P. Grusintzew. Si.

Th. S. Fiske. Mathematical progress in America. Presidential address delivered before the American Mathematical Society at its eleventh annual meeting, December 29, 1904. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 238-246.

Von den drei Perioden, die Fiske in der Geschichte der Mathematik in den Vereinigten Staaten (für die er kurz Amerika setzt) unterscheidet: 1. vor der Gründung der Johns Hopkins University mit Sylvester als Mathematiker, 1876, 2. von 1876 bis 1891, wo die New York Mathematical Society einen nationalen Charakter annahm, 3. die Zeit seit 1891, wird die letzte Periode genauer geschildert. Hier wird ein Bild von dem Wachstum und der Wirksamkeit der American Mathematical Society gegeben, der es zu danken ist, wenn das mathematische Leben der Vereinigten Staaten in dieser Periode einen großartigen Aufschwung genommen hat. Die engen Beziehungen zu Deutschland, besonders zu Göttingen, werden gebührend hervorgehoben. Lp.

Weitere Literatur.

G. W. Hill. The collected mathematical works. Vol. I, II. Published by the Carnegie Institution of Washington, June, 1905. (With an introduction by H. Poincaré.) XVIII u. 363 S. 4° mit Bildnis, V u. 339 S.

Festschrift, Adolph Wüllner gewidmet zum 70. Geburtstage, 13.VI. 1905, von der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen, ihren früheren und jetzigen Mitgliedern. Mit dem Bildnis A. Wüllners in Heliogravüre. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 264 S. gr. 8°.

F. Felíu e Vegués. Algunos trabajos matemáticos. Edición publicada por sus discípulos y ofrecida al maestro en testimonio de gratitud. Con un prólogo de S. Mundé y Giró. Barcelona: Seix. XIII u. 221 S.

Z. G. de Galdeano. Echegaray, cientifico. Revista trim. de Mat. **5**, 33-35.

J. Th. Merz. A history of European thought in the nineteenth century. Vol. I, II. Edinburgh and London: William Blackwood and Sons. XIV u. 458 S., XIV u. 807 S. (1903/4). [Nature **71**, 241-243.]

G. L. Arrighi. La storia della matematica in relazione con lo sviluppo del pensiero. Torino: Paravia. XIII u. 133 S. 16mo.

Obituary notices of fellows of the Royal Society. Lond. Roy. Soc. Proc. **75**.

Kurze Nekrologe auf Mitglieder, unter ihnen S. Lie (60-68), Ch. Hermite (142-145), G. G. Stokes (199-216), H. A. Rowland (253-257), L. Cremona (277-279), J. W. Gibbs (280-296), G. Salmon (347-355), J. D. Everett (377-380). Lp.

D. E. Smith. A portfolio of portraits of eminent mathematicians. (Descartes, Pythagoras, Archimedes, Fermat, Leonardo of Pisa, Euclid, Cardano, Leibniz, Napier, Vieta, Newton, Thales.) Chicago: Open Court Publishing Company. Portfolio.

H. Macpherson. Astronomers of to-day and their work. London and Edinburgh: Gall & Inglis. 272 S. gr. 8° mit 29 Bildnissen.

Fr. Strobel. Adreßbuch der lebenden Physiker, Mathematiker und Astronomen des In- und Auslandes und der technischen Hülfskräfte. Leipzig: J. A. Barth. X u. 208 S. gr. 8°. (Vgl. F. d. M. **35**, 976, 1904.)

E. B. Wilson. The International Congress of Mathematicians at Heidelberg. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 191-217, 247-263.

E. B. Wilson. The Breslau meeting of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 263-268.

Le Congrès international des sciences de St. Louis; Section de Géométrie. Ens. math. **7**, 142-144.

A. Krazer. Bericht über die Jahresversammlung in Meran. Deutsche Math.-Ver. **14**, 516-525.

Krüse. Bericht über Abteilung I: Mathematik, Astronomie und Geodäsie (Meran). Naturw. Rundsch. **20**, 569-570.

F. N. Cole. The eleventh annual meeting of the American Mathematical Society. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 231-237.

F. N. Cole. The February meeting of the American Mathematical Society. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 347-352.

F. N. Cole. The April meeting of the American Mathematical Society. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 461-472.

F. N. Cole. The twelfth summer meeting of the American Mathematical Society. Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 53-63.

F. N. Cole. The October meeting of the American Mathematical Society. Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 107-111.

Th. F. Holgate. The December meeting of the Chicago Section. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 352-358.

J. W. Young. The April meeting of the Chicago Section. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 472-482.

G. A. Miller. The February meeting of the San Francisco Section. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 399-404.

G. A. Miller. The September meeting of the San Francisco Section. Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 111-116.

L. G. Weld. The fifty fourth annual meeting of the American Association for the advancement of science. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 315-319.

H. S. White. Mathematics at the St. Louis Congress, September 20, 22 and 24, 1904. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 358-363.

B. Geschichte einzelner Disziplinen.

Mor. Cantor. Einführung in die Geschichte der Mathematik; Hinweis auf neue Resultate. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelberg, 497-501.

Einleitender Vortrag von M. Cantor, dem Einführenden der V. Sektion (Geschichte der Mathematik) des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, mit Hinweis auf Beziehungen zwischen mathematischer Geschichtsforschung und Altertums- und Sprachforschung, auf neuere Fortschritte, auf vorhandene Zeitschriften über Geschichte der Mathematik nebst persönlichen Bemerkungen. P.

G. Eneström. Welcher Platz gebührt der Geschichte der Mathematik in einer Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften? Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelberg, 546-550.

Nach Ansicht des Verf. soll eine Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften nicht nur in den Spezialartikeln historische Notizen bringen, sondern noch dazu eine Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik enthalten. Als zu berücksichtigende Punkte werden hervorgehoben: 1. Fragen, die zu verschiedenen Zeiten vorzugsweise die Mathematiker beschäftigt haben. 2. Innerer Zusammenhang zwischen den gleichzeitig oder nacheinander behandelten Fragen. 3. Benutzte Methoden zur Erledigung der Fragen, nebst Erfolg. 4. Nebenbei erhaltene Resultate, die für die Entwicklung der Mathematik wertvoll geworden sind. Lp.

G. Eneström. Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung. Bibl. Math. (3) 6, 1-8.

Der Verf. bemerkt zuerst, daß in der mathematischen Geschichtsschreibung Hypothesen eigentlich in viel größerer Anzahl benutzt werden, als man anzunehmen geneigt ist, weil man in der Tat, sobald man ohne weiteres eine Notiz aus zweiter Hand entnimmt, die Hypothese macht, daß die Quelle zuverlässig ist. Ein kritischer Forscher versucht natürlich, soviel als möglich Hypothesen der fraglichen Art zu vermeiden; aber nicht selten ist dies unmöglich, und der Verf. erläutert an einem Beispiel, wie schwierig es ist, zu entscheiden, ob man in einem gewissen Falle die aus zweiter Hand entnommene Notiz ausdrücklich als bisher unbestätigt bezeichnen soll oder nicht.

Dann werden die eigentlichen Hypothesen in Betracht gezogen, d. h. die Annahmen, die man macht, um eine Reihe von Tatsachen für einen gewissen Zweck zu ordnen oder zu ergänzen. Ohne solche Hypothesen ist es oft nicht einmal möglich, eine chronologisch geordnete Aufzählung der mathematischen Entdeckungen zu geben, und für eine Entwickelungsgeschichte der Mathematik sind sie durchaus notwendig. Schon aus diesem Grunde ist die Anwendung von Hypothesen auf dem mathematisch-historischen Gebiete berechtigt, und der Verf. lenkt die Aufmerksamkeit darauf, daß sie zuweilen nützlich sein können auch in solchen Fällen, in denen sie nicht notwendig sind.

Hierauf geht der Verf. zu der Frage über, unter welchen Bedingungen Hypothesen berechtigt sind, und hebt als solche Bedingungen in erster Linie hervor, daß jede Hypothese ausdrücklich als solche bezeichnet und erst nach eingehendem Studium der Tatsachen, um deren Erklärung es sich handelt, aufgestellt wird; er zeigt dann an Beispielen, daß auch die von hervorragenden Fachgenossen herrührenden Hypothesen nicht immer diesen anscheinend selbstverständlichen Bedingungen genügen. Ferner betont er, daß Hypothesen unter allen Umständen mit Vorsicht und Sparsamkeit benutzt werden sollen, und macht auf die Übelstände aufmerksam, die eine allzu häufige Anwendung von Hypothesen mit sich führen kann, nicht nur für eine gewisse mathematisch-historische Arbeit, sondern auch für die künftige wissenschaftliche Wirksamkeit des Verf. dieser Arbeit. Besonders warnt er vor allgemeinen Hypothesen, z. B. solchen, die vom kulturhistorischen Gesichtspunkte aus aufgestellt werden. E.

G. Eneström. Über den Nutzen der Begründung eines Mathematikerarchivs. Bibl. Math. (3) 6, 97-100.

Als Zweck eines Mathematikerarchivs bezeichnet der Verf. das Sammeln und Aufbewahren des literarischen Nachlasses von verstorbenen Mathematikern. Er hebt hervor, daß dieser Nachlaß jetzt sehr oft verloren geht, obgleich derselbe in vielen Fällen für die Zukunft von großem Interesse sein könnte. Besonders wird der wissenschaftliche Briefwechsel eines ver-

storbenen Mathematikers nicht selten vernichtet, und dennoch kann ein solcher Briefwechsel wertvolle Beiträge zur Geschichte der Entwickelung der mathematischen Theorien enthalten.

Der Verf. gibt ferner an, wie ein Mathematikerarchiv seines Erachtens begründet und geordnet werden sollte, und schlägt vor, daß die Deutsche Mathematikervereinigung diese Frage auf die Tagesordnung setze. E.

H. G. Zeuthen. Gebrauch und Mißbrauch historischer Benennungen in der Mathematik. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 536-542.

Wenn ein Satz, eine Formel, eine Methode usw. mit dem Namen eines Mathematikers verknüpft wird, so sollte eine solche Bezeichnung auch durch den geschichtlichen Zusammenhang begründet sein. Das ist häufig aber nicht der Fall. Bei Benennungen, wie Pythogoreischer Satz oder Nepersche Logarithmen läßt sich der hinzugesetzte Eigenname rechtfertigen. Irreführend ist dagegen die Bezeichnung Apolloniusscher Satz für einen Satz aus der Theorie der Kegelschnitte, der sich bei Archimedes findet, die Bezeichnung Newtonscher Satz für einen solchen, der von Apollonius vielfach benutzt ist und von Newton auf alle algebraischen Kurven erweitert wurde. Während die Bezeichnung Pascalscher Satz als Fundamentalsatz in der Theorie der Kegelschnitte in jeder Hinsicht berechtigt ist, verhält es sich anders mit dem Spezialfall, der in den Grundlagen der Geometrie eine fundamentale Rolle spielt. Die grundlegenden geometrischen Voraussetzungen sollten als Postulate und nicht als Axiome bezeichnet werden. Das sogenannte Axiom des Archimedes, das wahrscheinlich von Eudoxos herrührt, tritt bei Euklid in einer Definition auf; dagegen würde es sich empfehlen, gewisse andere Voraussetzungen über die Meßbarkeit von krummen Linien und Oberflächen als Archimedische Postulate zu bezeichnen. P.

G. Lazzeri. Sull' utilità ed importanza della storia delle matematiche. Prolusione al Corso libero di „Storia della Geometria“ letta nella R. Università di Pisa il 14 gennaio 1905. Periodico di Mat. (3) 2, 145-162.

Nützlichkeit und Bedeutsamkeit der geschichtlich-mathematischen Studien werden in dieser Universitätsvorlesung (Pavia, Januar 1905) in verschiedener Hinsicht gewürdigt; auch wird die Ausdehnung des heutigen bezüglichen Hochschulunterrichtes mitgeteilt (S. 8f.). Tn.

J. C. Branner. The omission of titles of addresses on scientific subjects. Nature 72, 534.

Die Unsitte, den Gegenstand einer wissenschaftlichen Begrüßungsrede auf Kongressen im Titel nicht anzudeuten, wird gerügt; der Leser

muß wissen, ob er für seine Spezialstudien von solchen Artikeln Kenntnis nehmen muß. Lp.

A. P. Trotter. The omission of titles of addresses on scientific subjects. Nature 72, 581.

Den Reports of the Brit. Ass. wird der Abdruck der bloßen Titel gehaltener Vorträge als unnütz vorgehalten. Lp.

A. R. Forsyth. Opening address of Section A. Mathematics and Physics. Brit. Ass. Rep. South Africa 1905, 307-318; Nature 72, 372-378.

Das Jahr der Versammlung gibt dem Redner den Anlaß, auf drei Zentenarfeiern hinzuweisen. Im Jahre 1605 veröffentlichte Bacon „The Advancement of Learning". 1705 wurde die Vorhersage des Wiedererscheinens des periodischen Kometen von Halley gedruckt. 1805 erschien der vierte Band der „Mécanique céleste" von Laplace und „Application de l'Algèbre à la Géométrie" von Monge. An die beiden ersten Daten knüpft Forsyth Betrachtungen über den Einfluß von Bacon und Halley auf den Fortschritt der exakten Wissenschaft; bei dem zweiten wird besonders der wohltätig fördernde Einfluß Halleys auf Newton gebührend gewürdigt. Im Gegensatz zu diesen mehr den Personen geltenden Abschnitten des Vortrags dient die Erwähnung der beiden Werke von 1805 nur dazu, den Übergang zu einer kurzen Schilderung der mathematischen Bestrebungen im 19. Jahrhundert zu bilden. Lp.

A. Schülke. Vom mathematischen Unterricht im Jahre 1811. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 36, 22-23.

1. Verfügung in Ostpreußen, durch welche den Studierenden, welche sich früher oder später dem Schulfache zu widmen gedenken, ein eifriges Studium der Mathematik dringend empfohlen wird. 2. Herbart behandelt in seinem Pädagogium Abschnitte aus der Differential- und Integralrechnung. Lp.

E. Kasner. Galileo and the modern concept of infinity. Amer. M. S. Bull. (2) 11, 499-501.

Englische Übersetzung einer Stelle aus den Discorsi e dimostrazioni, wo die Menge aller natürlichen Zahlen mit der ihrer Quadrate verglichen wird. „Die Definition einer unendlichen Menge als einer solchen, in welcher ein Teil existiert, der mit dem Ganzen in eine eineindeutige Beziehung gesetzt werden kann, von den Mathematikern und Philosophen in den Erörterungen der Neuzeit als fundamental anerkannt, wird gewöhnlich mit den Namen Bolzano, Cantor, Dedekind verknüpft." Der Zweck der Note ist, auf diese bekannte Stelle bei Galilei aufmerksam zu machen; vgl. Goldbeck, „Galileis Atomistik und ihre Quellen" in Bibl. Math. (3) 3, 66, 1902. Lp.

G. L(AZZERI). I calcoli numerici degli antichi Greci. Suppl. al Period. **8**, 33-37.

H. BURKHARDT. Wie man vor Zeiten rechnete. (Rathausvortrag, gehalten in Zürich, den 14. XI. 1904.) Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 9-20.

P. TANNERY. Un traité grec d'arithmétique antérieur à Euclide. Bibl. Math. (3) **6**, 225-229.

Dieser Artikel des allzu früh hingeschiedenen Verf. ist der erste Teil eines längeren Aufsatzes, den er einige Wochen vor seinem Tode begann, aber nicht beendigen konnte.

In der bekannten Schrift „De institutione musica" des Boëtius hat Tannery eine Stelle aufgefunden, die einen interessanten Beitrag zur Geschichte der Arithmetik vor Euklides bietet. Zuerst weist er darauf hin, daß die Angabe, Hippasos habe über Arithmetik und Musik geschrieben, ohne Zweifel aus einer wenig glaubwürdigen Quelle, nämlich aus einer Schrift des Alexandriners Eubulides entnommen ist. Dann lenkt Tannery die Aufmerksamkeit darauf, daß sich bei Boëtius ein Fragment eines arithmetischen Traktates von Archytas findet, worin bewiesen wird, daß ein Verhältnis von der Form $(n+1):n$ nicht durch Einschaltung irgend einer Zahl in zwei gleiche Verhältnisse geteilt werden kann. Aber dieser Beweis setzt eine Reihe von anderen Sätzen voraus, und Tannery schließt hieraus, daß vor Archytas ein Lehrbuch der Arithmetik existierte, worin diese Sätze vorkamen. In betreff des von Boëtius aufbewahrten Fragments ist Tannery der Ansicht, daß es einer Schrift wesentlich musikalischen Inhalts entstammte, die aber Boëtius nicht selbst zur Hand hatte, sondern nur aus Apuleius kannte. E.

G. ENESTRÖM. Über den Bearbeiter oder Übersetzer des von Boncompagni (1857) herausgegebenen „Liber algorismi de pratica arismetrice". [Anfrage 121.] Bibl. Math. (3) **6**, 114.

Der von Boncompagni im Jahre 1857 herausgegebene Traktat „Joannes Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice" wird in einer Handschrift dem Gherardo Cremonese zugeschrieben, und andere Handschriften des Traktats sind anonym. Außerdem fehlt in den meisten Handschriften der Schluß der Boncompagnischen Ausgabe, der eine Sammlung von Exzerpten enthält und in keinem Zusammenhange mit dem eigentlichen Traktate steht. Es wird darum bemerkt, daß eine nähere Untersuchung der Frage über den Verf. des „Liber algorismi de pratica arismetrice" sowie über den Ursprung des Schlusses der Boncompagnischen Ausgabe erwünscht sei. E.

P. DUHEM. Sur l'Algorithmus demonstratus. Bibl. Math. (3) **6**, 9-15.

Angeregt durch einen Artikel von G. Eneström (Bibl. Math. (3) **5**, 9-14; vgl. F. d. M. **35**, 56, 1904), hat sich Herr Duhem mit der Frage

beschäftigt, ob Jordanus Nemorarius wirklich der Verf. des von J. Schöner im Jahre 1534 herausgegebenen „Algorithmus demonstratus“ ist. Zuerst hat er konstatiert, daß dieser Traktat identisch mit dem „Algorismus magistri Gernardi in integris et minuciis“ ist, von dem bisher zwei Handschriften bekannt waren; Duhem hat noch eine anonyme Handschrift dieses Algorismus aufgefunden, welche aus dem 13. Jahrhundert stammt. Daß der sonst unbekannte Gernardus mit Jordanus identisch ist, hält Duhem für wenig wahrscheinlich; im Gegenteil ist er der Ansicht, daß der „Algorithmus demonstratus“ späteren Datums als die Algorismus-Schrift des Sacrobosco ist, und daß Gernardus ein Zeitgenosse des Campanus war. E.

N. M. Bubnow. Die echte Schrift von Gerbert über den Abacus. Philologische Studie in dem Gebiete der Geschichte der Mathematik. Kiew. Univ. Nr. 7, 10, 11, S. 1-106. (Russisch.)

Der Herausgeber der Opera Mathematica Gerberti, postea Silvestri II Papae, Berlin 1899 (F. d. M. **30**, 3, 1899), widmet der Schrift von Gerbert „De numerorum abaci rationibus“ eine besondere Abhandlung. Im Kap. I bespricht er den Text von Gerberts Schrift über den Abacus, ihre Handschriften und Ausgaben. Sämtliche vorhandene Handschriften (mit Ausnahme zweier) wurden von Bubnow selbst untersucht, und die Meinungsverschiedenheit wird deshalb von ihm auf Grund sorgfältiger Forschung aufgeklärt. Im Kap. II bespricht er den Ursprung von Gerberts Schrift, ihren echten Titel, die Zeit und die Umstände, unter welchen sie geschrieben war. Er kommt zum Schluß, daß zwei Redaktionen existierten. Der Text von Gerberts Schrift ist nicht selbständig erhalten, wohl aber im Zusammenhang mit der älteren Sammlung der Abacisten, in welche er um 995 aufgenommen wurde, und in welcher er alle Phasen seiner Entwicklung nacheinander durchlief, nicht ohne den Einfluß anderer Bestandteile der Sammlung. So war die zweite Redaktion unter dem Einfluß des Kommentars auf Gerbert entstanden, welcher um 999-1003 geschrieben und erst später in die Sammlung einverleibt wurde. Si.

H. Dressler. Zur Entwicklungsgeschichte einer angewandten Gleichungsaufgabe. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 82-83.

Der Verf. nimmt aus der bekannten Aufgabensammlung von Heis eine Aufgabe und stellt sie mit ähnlichen Aufgaben späterer Sammlungen zusammen. Der interessantere Weg der Verfolgung dieser Aufgabe, einer bekannten Aufgabe der Gesellschaftsrechnung, bis ins Altertum rückwärts ist nicht eingeschlagen, obschon eine Bemerkung in Baumeisters Handbuch den richtigen Fingerzeig gegeben hätte. Tropfkes Geschichte der Elementarmathematik **1**, 115-119, hätte dem Verf. den Ausdruck „Aufgaben aus den Pandekten“ erklärt. In Schuberts Sammlung von arith-

metischen und algebraischen Aufgaben (1. Aufl., Potsdam 1883) sind, gerade wie bei Heis, viele solche historische Aufgaben enthalten. Bei Bachet de Méziriac, Problèmes plaisants et délectables, steht im Supplément als Problème I eine gleichwertige Aufgabe. Lp.

H. Suter. Über die Bedeutung des Ausdruckes „regula coeci". Bibl. Math. (3) **6**, 112.

Qosta B. Luqa und Ibn el-Haitam haben Abhandlungen über „el-talaqi" geschrieben, und da dieses arabische Wort „das Zusammenkommen" bedeutet, so ist Suter der Ansicht, daß sich die fraglichen Abhandlungen auf die „regula coeci" beziehen, denn „coeci" ist nach ihm eine Verstümmelung von „coeti" (coetus = Zusammenkunft). Eine Bestätigung seiner Meinung findet Suter in dem Umstande, daß „el-talaqi" dem türkischen „sikisch" entspricht, und die „regula coeci" in der Tat von einem Verfasser des 17. Jahrhunderts „regula sikisch" genannt worden ist. E.

G. Eneström. Über den Ursprung des Termes „ratio subduplicata". [Antwort auf die Anfrage 108.] Bibl. Math. (3) **6**, 410.

Die Benennung „ratio subduplicata", durch welchen Term die Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts bezeichneten, daß zwei Größen sich wie die Quadratwurzeln zweier anderen verhielten (vgl. F. d. M. **34**, 49, 1903), scheint zuerst von Wallis in seiner Schrift „Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum" (1657) benutzt worden zu sein. E.

G. Eneström. Über zwei ältere Benennungen der fünften Potenz einer Größe. [Anfrage 124.] Bibl. Math. (3) **6**, 324-325, 410.

Am Ende des Mittelalters wurde x^5 teils „sursolidum" teils „primo relato" benannt. Statt „sursolidum" wurde später zuweilen „surdesolidum" oder „supersolidum" gesetzt, aber wahrscheinlich nur um das unverständliche Wort „sursolidum" zu erklären. Für „primo relato" gab es bisher gar keine befriedigende Erklärung. Es wird darum gefragt, wie die zwei Terme entstanden sind. E.

A. A. Björnbo. Gerhard von Cremonas Übersetzung von Alkwarizmis Algebra und von Euklids Elementen. Bibl. Math. (3) **6**, 239-248.

1. Björnbo macht darauf aufmerksam, daß der von Boncompagni im Jahre 1851 herausgegebene „Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabala translatus a magistro Giurardo Cremonense in Toleto de arabico in latinum" wahrscheinlich eine unrichtige Überschrift bekommen hat; der Traktat ist nämlich kaum eine direkte Übersetzung

aus dem Arabischen, sondern vielmehr eine freie Bearbeitung. Noch dazu gibt es einen anderen lateinischen Traktat, der den Titel „Liber Maumeti filii Moysi Alchoarismi de algebra et almuchabala“ hat und der eine wirkliche Übersetzung von Alkwarizmis Algebra zu sein scheint. Dieser Traktat, der von Libri herausgegeben ist, wird in einer Handschrift als „translatus a magistro Gerardo Cremonensi in Toleto de arabico in latinum“ bezeichnet, und es ist höchst wahrscheinlich, daß er wirklich die Gherardosche Übersetzung enthält, während der andere Traktat von einem anderen mittelalterlichen Mathematiker bearbeitet wurde.

2. Björnbo hat eine mittelalterliche lateinische Übersetzung der Elemente entdeckt, die von der Atelhartschen und der Campanoschen verschieden ist, und die wahrscheinlich von Gherardo Cremonese verfertigt wurde. Freilich sind alle von Björnbo aufgefundenen Handschriften derselben anonym; aber man weiß, daß Gherardo eine solche Übersetzung verfertigt hat, und Björnbo weist nach, daß die Terminologie derselben mit der von Gherardo in anderen bekannten Übersetzungen angewendeten übereinstimmt. E.

G. Eneström. Über die Entdeckung des Zusammenhanges zwischen den Wurzeln einer Gleichung und der Gleichungskonstante. [Anfrage 125.] Bibl. Math. (3) 6, 409-410.

Man hat zuweilen behauptet, daß der Satz, daß das Produkt der Wurzeln einer Gleichung = der Gleichungskonstante ist, schon vor Viète dem französchen Mathematiker J. Peletier (1560) wenigstens zum Teil bekannt war; aber diese Behauptung beruht auf einem Mißverständnis. Es wird gefragt, ob das Vorkommen des Satzes vor Viète nachweisbar ist.

E.

T. Havlíček. Geschichte der Gleichungen. Dritter Teil. Die Auflösung der algebraischen Gleichung vierten Grades. Pr. Gymn. in Mistek. 20 S. (Böhmisch.) Pe.

T. Hayashi. Tait's problem with counters in the Japanese mathematics. Bibl. Math. (3) 6, 323.

Das bekannte Problem Taits: „vier Sovereigns und vier Schillinge folgen in ungeordneter Reihe aufeinander; sie sollen in vier Zügen so umgelegt werden, daß die vier Sovereigns zusammenliegen und ebenso die vier Schillinge, wenn in einem Zuge immer nur zwei aufeinanderfolgende Stücke zusammen umgelegt werden dürfen, und zwar so, daß die beiden dabei ihre relative Lage nicht ändern“, ist schon seit dem 18. Jahrhundert in Japan bekannt und in verschiedenen Büchern behandelt worden, von denen das älteste bisher aufgefundene im Jahre 1743 verfaßt wurde.

E.

C. Runge. Über die Leibnizsche Rechenmaschine. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 737-738.

Der Verf. hat auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß in Heidelberg die noch erhaltene Leibnizsche Rechenmaschine vorgeführt. Sie stimmt im wesentlichen mit der modernen Rechenmaschine von Thomas überein, nur daß bei ihr die Zehnerübertragung weit unvollkommener ist. Es ist zweifelhaft, ob sie wegen ihrer technisch mangelhaften Ausführung jemals funktioniert hat; sie würde aber bei guter Ausführung durchaus brauchbar sein. P.

G. Eneström. Über eine von Euler aufgestellte allgemeine Konvergenzbedingung. Bibl. Math. (3) **6**, 186-189.

A. Pringsheim. Über ein Eulersches Konvergenzkriterium. Bibl. Math. (3) **6**, 252-256.

R. Reiff hat 1889 behauptet, daß die Cauchysche Konvergenzbedingung

$$\lim_{n=\infty} | S_{n+m} - S_n | = 0 \text{ für die Reihe } S_\nu = a_0 + a_1 + \ldots + a_\nu$$

schon in einer Abhandlung von Euler aus dem Jahre 1740 vorkommt. Dagegen hat A. Pringsheim geltend gemacht, daß die Eulersche Abhandlung nur eine Divergenzbedingung enthält. Eneström weist aber nach, daß in dieser Abhandlung wirklich eine Konvergenzbedingung vorkommt, nämlich $\lim_{n=\infty} | S_{kn} - S_n | = 0$.

Pringsheim erkennt die Richtigkeit der Tatsache an, lenkt aber die Aufmerksamkeit darauf, daß die Eulersche Konvergenzbedingung nicht hinreichend ist, so daß Euler nur zufällig auf Grund derselben ein richtiges Resultat fand. Pringsheim zeigt auch, wie man das Eulersche Kriterium verbessern muß, um dasselbe richtig zu machen; man bekommt dann gerade die Cauchysche Konvergenzbedingung. E.

P. Tannery. Pour l'histoire du problème inverse des tangentes. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 502-514.

Ein umgekehrtes Tangentenproblem ist zuerst von Debeaune (1601-1652, Oberlandesgerichtsrat in Blois) gestellt und von Descartes gelöst worden. Der Verf. hat in der Wiener Hofbibliothek einige Originalbriefe von Debeaune an Mersenne und Roberval aufgefunden (in Bd. V der Correspondance de Descartes veröffentlicht), aus denen hervorgeht, daß Debeaune auf sein Problem wahrscheinlich durch Lektüre von Galileis Nuove Scienze (1638) gekommen ist. Auch sonst werden durch die Auffindung dieser Briefe manche Einzelheiten aufgeklärt.

P.

A. von Braunmühl. Zur Geschichte der Differentialgleichungen. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 551-555.

1. Eine Pfaffsche Differentialgleichung bei Newton (Methodus fluxionum et serierum infinitarum, Probl. II). Diese lautet in unserer Schreibweise $2\,dx - dz + x\,dy = 0$ und wird durch Annahme einer willkürlichen Relation $x = y^2$ von Newton gelöst. Da Newton die Willkürlichkeit dieser Annahme betont, hat er den Charakter der Aufgabe erkannt, offenbar aber aus Mangel an einer geeigneten Bezeichnung die allgemeine Lösung nicht aufgestellt. Erst Monge ist zur geometrischen Auffassung solcher Gleichungen und damit zu ihrer wahren Bedeutung vorgedrungen.

2. Die ersten partiellen Differentialgleichungen treten bei der Behandlung von Kurven auf, in deren Gleichungen ein variabler Parameter (Modul) auftritt (Trajektorienproblem), weshalb diese Differentialgleichungen zuerst Modulargleichungen genannt werden. Als erstes Beispiel wird angeführt bei Euler (De infinitis curvis ejusdem generis, Comm. Ac. Petrop. 1734-35, Petrop. 1740), in jetziger Bezeichnung geschrieben:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = P \frac{\partial R}{\partial z} + R \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Systematisch werden partielle Differentialgleichungen von Euler und d'Alembert 1762 behandelt. Lp.

Ph. E. B. Jourdain. On two differential equations in Lagrange's „Mécanique analytique". Bibl. Math. (3) **6**, 350-353.

Der Verf. weist nach, daß Lagrange, freilich mehr im Vorübergehen, als Bedingungsgleichungen eines mechanischen Problems auch nicht-integrierbare lineare Differentialgleichungen angegeben hat, und daß die „Mécanique analytique" auch Fälle behandelt, in denen die Bedingungsgleichungen eines Problems die Zeit t explizit enthalten. E.

É. Picard. Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences. Conférences faites en Amérique. Paris: Gauthier-Villars. VIII u. 168 S. 8°.

Der Inhalt dieses Büchleins setzt sich aus den folgenden, bereits früher veröffentlichten Teilen zusammen:

I. Conférences faites à Clark-University (1899). Sur le développement depuis un siècle de quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique. Diese Vorträge sind in der Revue générale des sciences 1900 erschienen und dann zu einem Büchelchen von 91 Seiten bei Colin in Paris als Sonderausgabe vereinigt worden (Darboux Bull. (2) **24**, 281, 1900); außerdem sind sie in dem der Zehnjahrfeier der Clark-University gewidmeten Buche abgedruckt worden. Die Titel der drei einzelnen Vorträge sind: 1. Sur l'extension de quelques notions mathématiques et en particulier de l'idée de fonction depuis un siècle. 2. Quelques vues générales sur la théorie des équations différentielles. 3. Sur la théorie

des fonctions analytiques et sur quelques fonctions spéciales. Im Jahrbuche für 1900 konnten nur die drei Titel wiedergegeben werden. Als Rückblicke auf eine hundertjährige Entwicklung der Analysis von einem berufenen Vertreter dieses Faches besitzen diese meisterhaft abgefaßten Reden einen dauernden Wert und sind in der neuen Ausgabe jetzt für jeden Mathematiker leicht zugänglich gemacht.

II. Sur le développement de l'analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres sciences. Über diesen in St. Louis gehaltenen Vortrag ist nach dem Abdruck in Darboux Bull. (2) **28** in F. d. M. **35**, 58, 1904, referiert worden. Lp.

É. Picard. On the development of mathematical analysis and its relation to certain other sciences. Translated, with the author's permission by Professor M. W. Haskell. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 404-426; Math. Gazette **3**, 193-201, 218-228.

Vgl. F. d. M. **35**, 58, 1904.

H. Burkhardt. Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen. 1.-5. Lieferung. Deutsche Math.-Ver. **10**; Nr. 1, 1-176, 1901; Nr. 2, 177-400, 1902; Nr. 3, 401-768, 1903; Nr. 4, 769-1072, 1904; Nr. 5, 1073-1392, 1906.

Beim Erscheinen der ersten Lieferung, welche damals als „erste Hälfte" bezeichnet wurde, schrieben wir F. d. M. **32**, 388, 1901: „Das Referat wird erfolgen, wenn die Veröffentlichung vollständig vorliegt". Auf dem Umschlage des neuesten, 1906 ausgegebenen Heftes werden nun noch „voraussichtlich" drei bis vier weitere Lieferungen angekündigt. Unter diesen Umständen halten wir es für nötig, von diesem Werke, das eine Fülle von Belehrung in sich schließt und ein Zeugnis von dem erstaunlichen Spürsinn und Fleiße des Verf. ist, die genauere Inhaltsangabe hier wiederzugeben.

Erster Hauptteil. Die Ausbildung der Methode der Reihenentwicklung an physikalischen Problemen.

I. Die Hauptschwingungen eines Massensystems. — § 1. Systeme mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden. § 2. Grenzübergang von Systemen diskreter Punkte zu kontinuierlichen Systemen. § 3. Direkte Bestimmung der Hauptschwingungen eines kontinuierlichen Systems durch Differentialgleichungen. Die Probleme der schwingenden Saite und der schwingenden Lamelle.

II. Der Streit über das Problem der Saitenschwingungen. — § 4. d'Alemberts Behandlung des Problems. § 5. Eulers Behandlung des Problems. § 6. Polemik zwischen d'Alembert und Euler. § 7. Die Begründung der Methode der Reihenentwicklungen durch Daniel Bernoulli. § 8. Debatte über D. Bernoullis Auffassung. § 9. Eulers Untersuchung über Schallfortpflanzung in der Luft. § 10. Lagranges erste Abhandlung. § 11. Lagranges zweite Abhandlung.

§ 12. Debatte über Lagranges Auffassung. § 13. Nachklänge des Streites über die Saitenschwingungen.

III. Die Entwicklung analytischer Funktionen in harmonische trigonometrische Reihen. — § 14. Allgemeine Untersuchungen von Euler und Lagrange. § 15. Entwicklung rationaler ganzer Funktionen. § 16. Entwicklung von trigonometrischen und Exponentialfunktionen. § 17. Entwicklung der Potenzen von $1-n\cos\varphi$. § 18. Die Darstellung der Koeffizienten harmonischer trigonometrischer Reihen durch bestimmte Integrale. § 19. Weitere Untersuchungen über die Entwicklung der Potenzen von $1-n\cos\varphi$. § 20. Trigonometrische Reihen in der Theorie der elliptischen Bewegung. § 21. Asymptotische Werte der Koeffizienten dieser Reihen für große Werte des Index. § 22. Die klassische Entwicklung der Störungsfunktion. § 23. Neuere Methoden der Entwicklung der Störungsfunktion. A. Darstellung der Entwicklungskoeffizienten durch bestimmte Doppelintegrale und funktionentheoretische Diskussion derselben. B. Vorbereitung der definitiven Entwicklung durch Entwicklung nach Potenzen eines Korrektionsgliedes. C. Vorbereitung der definitiven Entwicklung durch Entwicklung nach Potenzen des Verhältnisses der Radienvektoren oder nach den Kosinus der Vielfachen der scheinbaren Distanz. D. Entwicklung nach den Vielfachen des einen Winkels auf analytischem Wege, nach denjenigen des andern durch mechanische Quadratur (Méthode mixte). E. Entwicklung nach partiellen Anomalien. F. Einführung elliptischer Funktionen. G. Gruppenstörungen. § 24. Asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten der Entwicklung der Störungsfunktion. § 25. Interpolation durch trigonometrische Entwicklungen. A. Ausbildung der allgemeinen Methoden an astronomischen Problemen. B. Der Streit über den täglichen Gang der Temperatur. C. Ausgestaltung der Interpolation durch trigonometrische Funktionen für spezielle geophysikalische Fragen. D. Harmonische Analyse der Vokalklänge. E. Separation superponierter periodischer Erscheinungen. F. Aufsuchung versteckter Periodizitäten. G. Graphische und instrumentelle Hülfsmittel zur Berechnung der Koeffizienten trigonometrischer Entwicklungen.

IV. Verschiedene Ansätze zu anderen Reihenentwicklungen. — § 26. Die Differentialgleichung der Saitenschwingungen unter anderen Grenzbedingungen. § 27. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten; unhomogene Saiten und nicht-zylindrische Pfeifen. § 28. Die frei herabhängende Kette. § 29. Schwingende Lamellen. § 30. Ansätze zur Behandlung von Problemen, in denen außer der Zeit mehr als eine Raumkoordinate auftritt.

V. Die Gestalt der Himmelskörper und die Entwicklung nach Kugelfunktionen. — § 31. Die Legendreschen Polynome. § 32. Die Kugelfunktionen von zwei Veränderlichen. § 33. Diskussion über den Gültigkeitsbereich dieser Reihen. § 34. Interpolation durch Kugelfunktionen.

VI. Integration partieller Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale. — § 35. Die ersten Untersuchungen von Laplace. § 36. An Laplace sich anschließende Untersuchungen. § 37. Spätere Untersuchungen von Laplace.

VII. Fouriers Theorie der Wärmeleitung und die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Reihen, die nach oszillierenden Funktionen fortschreiten. — § 38. Harmonische trigonometrische Reihen. § 39. Unharmonische trigonometrische Reihen. § 40. Entwicklungen nach Zylinderfunktionen.

VIII. Darstellung willkürlicher Funktionen durch bestimmte Integrale. Fortbildung der Reihenentwicklungen. — § 41. Vorbemerkungen. § 42. Die Fourierschen Integrale. § 43. Cauchys Abhandlung über Wasserwellen. § 44. Poissons Untersuchungen über Wasserwellen. § 45. Schwingungen von Platten. § 46. Diskussion zwischen Fourier, Poisson und Cauchy über Wasserwellen und Schwingungen von Platten. § 47. Die Schlußabschnitte von Fouriers Théorie analytique de la chaleur. § 48. Poissons Auffassung der trigonometrischen Reihen. § 49. Poissons Abhandlungen über Wärmeleitung. § 50. Laplaces Untersuchungen über Wärmeleitung. § 51. Weitere Untersuchungen von Poisson über bestimmte Integrale und Reihensummierung. § 52. Die Diskussion über die Realität der Wurzeln der transzendenten Hülfsgleichungen. § 53. Fouriers spätere Arbeiten über Wärmeleitung. § 54. Poissons Lehrbücher. § 55. Spezialuntersuchungen zur Wärmeleitung aus der Zeit von 1820-1840.

IX. Die Anfänge der Elastizitätstheorie und die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen. — § 56. Die grundlegenden Untersuchungen von Navier. § 57. Der Einfluß der Undulationstheorie des Lichtes auf die Ausbildung der Elastizitätstheorie. § 58. Die Begründung der Kinematik und Statik der Kontinua durch A. Cauchy. § 59. Cauchys von molekulartheoretischen Vorstellungen ausgehende Untersuchungen. § 60. Poissons Untersuchungen. § 61. Lamé und Clapeyron. § 62. Spätere Untersuchungen von Cauchy. Zirkularpolarisation. § 63. Ebene Wellen in elastischen Medien. § 64. Die allgemeine Integration der elastischen Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale. Poisson und Ostrogradski. § 65. Spezielle Probleme der Hydrodynamik und der Elastizitätstheorie.

X. Einwirkung der Theorie der Funktionen komplexen Arguments. — § 66. Cauchys Abhandlung von 1822. § 67. Weitere Verwendung der Fourierschen Integrale durch Cauchy. § 68. Cauchys Abhandlungen über die Anwendung der Residuenrechnung auf Fragen der mathematischen Physik. § 69. Fortbildung dieser Untersuchungen mit Hülfe anderer als rechteckiger Integrationswege. § 70. Anwendungen auf die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie und der Optik. § 71. Untersuchungen von Blanchet. Diskussion zwischen Cauchy und Blanchet. § 72. Spätere Untersuchungen Cauchys. § 73. Diskontinuitätsfaktoren.

XI. Allgemeine Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen. — § 74. Die Ansätze von Pagani. § 75. Die grundlegenden Abhandlungen von Sturm. § 76. Die drei Abhandlungen Liouvilles über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den V. § 77. Ausdehnung der Sturm-Liouvilleschen Methoden auf Differentialgleichungen höherer Ordnung. § 78. Spezialuntersuchungen Liouvilles. § 79. Ansätze zu

Entwicklungen von gleicher Allgemeinheit für Funktionen von mehreren Variabeln. § 80. Die allgemeinen Formulierungen von Hoëne-Wronski. § 81. Die Interpolationsmethode von Cauchy. § 82. Die Untersuchungen von Tschebyscheff. § 83. An Tschebyscheff sich anschließende Untersuchungen. § 84. Entwicklungen nach den Kugelfunktionen höherer Ordnung und nach den Polynomen von Jacobi. § 85. Entwicklungen für ein unbegrenztes Intervall. § 86. Verschiedene spezielle Entwicklungen für Funktionen einer Variable. § 87. Entsprechende Entwicklungen von Funktionen mehrerer Variabeln. § 88. Verwendung der Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen zu mechanischen Quadraturen. § 89. Allgemeine Integraldarstellungen.

XII. Entwicklungen von Funktionen mehrerer Variabeln nach Produkten von Funktionen je einer Variable. § 90. Lamés früheste Abhandlungen. § 91. An Lamé sich anschließende französische Untersuchungen. § 92. Lamés Lehrbuch der Elastizitätstheorie. § 93. An Lamés Lehrbuch der Elastizitätstheorie sich anschließende Abhandlungen. § 94. Lamés spätere Lehrbücher.

XIII. Einführung der mathematischen Physik in England. — § 95. Die Cambridger Analytical Society. § 96. John Challis und seine literarischen Fehden. § 97. Andere Untersuchungen der älteren englischen Schule. § 98. Die Einführung von Poissons Elektrostatik und Magnetostatik in England durch Green und Murphy. § 99. Umkehrung bestimmter Integrale. § 100. Die Einführung der analytischen Optik Cauchys in England. § 101. Selbständige englische Untersuchungen zur Optik. Green und Mac Cullagh. § 102. Die Einführung der Fourierschen Wärmeleitungstheorie in England durch P. Kelland und W. Thomson. § 103. Weitere allgemeine Untersuchungen über Wärmeleitung. § 104. Geophysikalische Anwendungen der Lehre von der Wärmeleitung. § 105. Wärmeleitung in zwei Dimensionen; Beziehungen zur Theorie der analytischen Funktionen komplexen Argumentes. § 106. Wärmeleitung in Kristallen. § 107. Fortschreiten des Frostes. § 108. Untersuchungen über die Gesetze der Leitung elektrischer Ströme.

Das nächste Heft soll die Lehre von der Elektrizitätsleitung zu Ende führen und in entsprechender Weise die Probleme der Hydrodynamik und der Elastizität behandeln, ein folgendes Optik und Elektromagnetismus, das letzte die abstrakt mathematischen Formulierungen. Lp.

Ph. E. B. Jourdain. The theory of functions with Cauchy and Gauß. Bibl. Math. (3) 6, 190-207.

Der Hauptzweck dieses Artikels ist, nachzuweisen, daß einige der wichtigsten Entdeckungen von Cauchy auf dem Gebiete der Funktionentheorie schon in seiner Abhandlung vom Jahre 1814 angedeutet worden sind, besonders das später sogenannte Cauchysche Theorem. Hinsichtlich der Frage, ob dieser Nachweis dem Verf. gelungen ist, werden sicherlich nicht alle Leser mit ihm einig sein, und besonders fraglich

scheint es, ob Jourdains Behauptung, der von Cauchy im Jahre 1851 gegebene Beweis des bekannten Theorems gehe auf die alten Ideen von 1814 zurück, wirklich belegt worden ist.

Ferner werden die verwandten funktionentheoretischen Sätze von Gauß aus den Jahren 1811 und 1816 erwähnt, und zuletzt wird darauf aufmerksam gemacht, daß Cauchys Begriff der analytischen Funktion auf einer geometrischen Grundanschauung beruhte und darum nicht scharf genug präzisiert werden konnte.

Nachträglich sind noch Bemerkungen hinzugefügt in betreff des Artikels von P. Stäckel: „Integration durch imaginäres Gebiet" (Bibl. Math. (3) **1**, 1900, S. 109-128; vgl. F. d. M. **31**, 43, 1900), welchen Artikel Jourdain bei der Bearbeitung seines Aufsatzes noch nicht kannte.

E.

L. Schlesinger. Über den Begriff der analytischen Funktion bei Jacobi und seine Bedeutung für die Entwicklung der Funktionentheorie. Bibl. Math. (3) **6**, 88-96.

Schlesinger weist nach, daß sich Jacobis Begriff der analytischen Funktion nicht mit dem Weierstraßschen deckt, weil für Jacobi die Grundeigenschaft einer analytischen Funktion die ist, daß die Gesamtheit der Werte der unabhängigen Variable, für welche die Funktion ein und denselben Wert annimmt, keine in der ganze Ebene überall dichte Menge bildet. Hieraus konnte Jacobi unmittelbar folgern, daß die Umkehrung eines einzigen hyperelliptischen Integrals keine analytische Funktion sein kann, und daß man zwei hyperelliptische Integrale in Betracht ziehen muß, um durch Umkehrung eine analytische Funktion zu bekommen.

An diesen Begriff der analytischen Funktion für Funktionen von mehr als einer Variable hat L. Fuchs später seine Untersuchungen über die Verallgemeinerung des Umkehrproblems angeknüpft, und die moderne Theorie der linearen Differentialgleichungen wurzelt also auch gewissermaßen in den Arbeiten Jacobis. E.

A. Favaro. Bonaventura Cavalieri e la quadratura della spirale. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 358-372.

Enthält eine ausführliche Untersuchung der Frage, die Favaro sehr kurz in der Note „Cavalieri ed il teorema dell' area delle spirali" (Bibl. Math. (3) **5**, 415, 1904; vgl. F. d. M. **35**, 63, 1904) behandelt hatte. Daß Cavalieri in betreff der Spiralenquadratur von Grégoire de St. Vincent abhängig sein konnte, ist, wie Favaro nachweist, durchaus unmöglich. Ob auf der anderen Seite Grégoire de St. Vincent von Cavalieri abhängig war, kann nicht entschieden werden. E.

G. Loria. Sopra una trasformazione di contatto ideata da Fermat. Bibl. Math. (3) **6**, 343-346.

Es handelt sich um eine bei Fermat vorkommende Transformation, die zwar nicht eine Berührungstransformation im Lieschen Sinne, aber sehr nahe damit verwandt ist. Aus einer rektifizierbaren Kurve $y_0 = f(x)$, wo also

$$s_0 = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

eine explizite Funktion von x ist, leitet Fermat durch $(n-1)$-malige Anwendung der Transformation

$$x_1 = x,\ y_1 = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

eine andere Kurve her, deren Bogenlänge

$$s_{n-1} = \int_0^x \sqrt{n + [f'(x)]^2}\, dx$$

ebenfalls gefunden werden kann. Als x-Kurve benutzt Fermat eine Parabel, und je nachdem die Gleichung derselben $y^2 = 2\,px$ oder $x^2 = 2\,qy$ geschrieben wird, findet man verschiedene rektifizierbare Kurven. Freilich hat Fermat nicht bemerkt, daß die Transformation in gewissen Fällen kein Resultat gibt, weil man immer auf die ursprüngliche Kurve zurückkommt. E.

C. Segre. La geometria d' oggidi e i suoi legami coll' analisi. Palermo Rend. **19**, 81-93; Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 109-120.

Die enge Verknüpfung zwischen Analysis und Geometrie rührt zum größten Teil daher, daß die Objekte, mit denen sie sich beschäftigen, dieselben sind. Ihr Unterschied besteht in den Problemen, die sie stellen, und in den Methoden, mit deren Hülfe sie diese lösen. In der heutigen Geometrie geht die Abstraktion und Allgemeinheit der Begriffe so weit, daß die Anschauung eliminiert und an deren Stelle die logische Deduktion getreten ist. Als Hauptgebiete, wo Geometrie und Analysis in enge Verknüpfung treten, werden unter anderem folgende Untersuchungen angeführt: die Bestimmung der Vielfachheit von Lösungen, die abzählende Geometrie, die Gruppen birationaler Transformationen, die Untersuchungen von Brill und Noether über algebraische Funktionen und ihre Anwendung auf Geometrie, die von Enriques und Castelnuovo über algebraische Oberflächen, die hyperalgebraischen Mannigfaltigkeiten, die Untersuchungen von Minkowski über Geometrie der Zahlen, von Study über Geometrie der Dynamen, von Poincaré über arithmetische Eigenschaften algebraischer Kurven. P.

C. Segre. Die moderne Geometrie und ihre Beziehungen zur Analysis. Wiad. Mat. **9**, 7-21.

Polnische Übersetzung des in der dritten allgemeinen Sitzung des internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg am 13. August 1904 gehaltenen Vortrags (vgl. das vorstehende Referat). Dn.

P. ALIBRANDI. Di un preteso errore geometrico contenuto nella Sacra scrittura. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **23**, 1-10.

Der Verf. sucht einen Irrtum in R. Balls Geschichte der Math. nachzuweisen, da hier aus den Maßen des „ehernen Meeres" $\pi = 3$ abgeleitet wird; die in der Bibel angegebenen Maße seien anders zu deuten (vgl. übrigens F. d. M. **35**, 68, 1904). Tn.

G. VAILATI. Intorno al significato della differenza tra gl' assiomi ed i postulati nella geometria greca. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 575-581.

Verf. bespricht ausführlich eine Stelle im Kommentar des Proklus zu Euklid, in der drei verschiedene Auffassungen über den Unterschied zwischen Axiomen und Postulaten mitgeteilt werden. Nach der ersten von Geminus angenommenen Ansicht kommt der Unterschied darauf hinaus, daß die Postulate die Existenz geometrischer Objekte mit gegebenen Eigenschaften behaupten, während die Axiome eine solche Existenz verneinen. Die zweite Auffassung erblickt in den Axiomen solche allgemeinen Voraussetzungen, die auch außerhalb der Geometrie ihre Gültigkeit haben, während die Postulate auf die Geometrie beschränkt sind. Gegen die dritte, auf die Autorität des Aristoteles gestützte Ansicht, daß die Axiome grundlegende Sätze seien, die mit Notwendigkeit aus den Grundbegriffen folgen, wird eingewandt, daß es sich hierbei nur um beweisbare Sätze oder um Definitionen handeln könne. P.

E. KASNER. The present problems of geometry. Address delivered before the Section of geometry of the International Congress of arts and sciences, St. Louis, September 24, 1904. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 283-314.

Diese höchst eingehende und von tiefem Studium zeugende Rede gehört zu denen, welche, wie die Vorträge von Darboux und Picard in St. Louis, einen Rückblick auf die neuere mathematische Forschung in einzelnen Gebieten geben. Der Verf. kennzeichnet für die verschiedenen Zweige der Geometrie die Arbeitsrichtungen, welche sich in den letzten Jahrzehnten gezeigt haben, und spricht am Schlusse jeder Übersicht diejenigen Fragen aus, deren Beantwortungen noch ausstehen. Nach der Einleitung, in welcher die allgemeinen treibenden Gedanken erörtert sind, folgt eine Übersicht über die leitenden Probleme oder Gruppen von Problemen in gewissen ausgewählten Gebieten der gegenwärtigen Forschung, nämlich: 1. Grundlagen der Geometrie. 2. Der Kurvenbegriff. Analysis

Situs. 3. Algebraische Oberflächen und birationale Transformationen. 4. Geometrie multipler Formen. 5. Transzendente Kurven. 6. Natürliche Geometrie. 7. Geometrie im Großen (Gegensatz zu Geometrie im Kleinen, Differentialgeometrie). 8. Kurvensysteme. Differentialgleichungen. 9. Allgemeine Theorie der Transformationen. Speziell: a) Kartographie. b) Mathematische Theorie der Elastizität. c) Vektorfelder. d) Nomographie.

Wegen der Menge der besprochenen Probleme ist es unmöglich, Einzelheiten herauszuheben. Wir müssen uns damit begnügen, auf den Reichtum der besprochenen Fragen hinzuweisen. Lp.

E. Kasner. Die gegenwärtigen Probleme der Geometrie. Wiad. Mat. **9**, 181-216.

Polnische Übersetzung des in den wissenschaftlichen Sitzungen des internationalen Kongresses zu St. Louis am 24. September 1904 gehaltenen Vortrags (vgl. das vorstehende Referat). Dn.

G. Darboux. A survey of the development of geometric methods. Address delivered before the Section of geometry of the International Congress of arts and science, St. Louis, September 24, 1904. Translated by H. D. Thompson. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 517-543.

G. Darboux. The development of geometrical methods. Math. Gazette **3**, 100-106, 121-128, 157-161, 169-173.

G. Darboux. Progrès de la géométrie élémentaire. Mathesis (3) **5**, 41-42.

Vgl. F. d. M. **35**, 61, 1904.

N. Reinoso. Traductores españoles de los Elementos de Euclides. Revista trim. de Mat. **5**, 25-26.

A. B. Sulla formula che esprime l'area di un triangolo in funzione dei lati. Suppl. al Period. **8**, 65-69.

A. B. Notizie storiche relative alla formula di Erone sull' area del triangolo. Ibid. 83.

F. Rudio. Die Möndchen des Hippokrates, sowie Nachtrag. Zürich. Naturf. Ges. **50**, 177-200, 224.

Als Beitrag zur Geschichte der Kreisquadratur gibt hier Rudio eine geschichtliche Würdigung des Simplicius-Berichtes (um 520 n. Chr.), auch eine nach den neuesten Forschungen festgestellte Übersetzung des

eingeschobenen Eudemus-Bruchstückes; insbesondere verteidigt er, gegenüber den vielfachen Verkennungen, den Simplicius als einen „Gelehrten von umfassendem und gediegenem Wissen“. Tn.

F. Rudio. Notizen zu dem Berichte des Simplicius. Zürich. Naturf. Ges. **50**, 213-223.

Enthält nach den neuesten Forschungen, insbesondere von W. Schmidt, die richtigen Texte verschiedener Stellen des Simplicius-Berichtes und weist, zumal gegenüber Tannery, die „angebliche Ungeschicklichkeit und den Irrtum“ des Simplicius zurück. Tn.

Max C. P. Schmidt. Die Herkunft des Wortes Hypotenuse. Naturw. Wochenschrift **4**, Nr. 14. [Poske Zs. **18**, 236-237.]

Das Wort wird als „aufgespannte Harfensaite“ gedeutet. Lp.

T. Hayashi. Die magischen Kreise in der japanischen Mathematik. Bibl. Math. (3) **6**, 347-349.

In Europa wurden magische Kreise zuerst von B. Franklin (1769) behandelt, aber schon um die Mitte des 17. Jahrhunderts beschäftigten sich japanische Mathematiker mit solchen Figuren. Hayashi berichtet über einige hierher gehörende Schriften, von denen die erste im Jahre 1660 von Y. Isomura verfaßt wurde, und setzt die von diesem Mathematiker angewendete Methode auseinander. E.

G. Eneström. Über einen Näherungswert für cos x. [Anfrage 123.] Bibl. Math. (3) **6**, 323-324.

Eine bei den indischen Mathematikern vorkommende Regel für die Berechnung der Seite eines regelmäßigen Polygons führt zu den Näherungsformeln

$$\cos x = \frac{1-\frac{2x^2}{5}}{1+\frac{x^2}{10}}, \quad x^2 = 10\,\frac{1-\cos x}{4+\cos x}.$$

Es wird gefragt, ob diese Näherungsformeln irgendwo vorgekommen sind. E.

H. Suter. Zu dem Buche „De superficierum divisionibus“ des Muhammed Bagdadinus. Bibl. Math. (3) **6**, 321-322.

Es wird allgemein angenommen, daß John Dee eine arabische Handschrift des Traktates des Muhammed Bagdadinus über Teilung

von geradlinigen Figuren entdeckt und dann den Traktat ins Lateinische übersetzt hat. Suter weist indessen nach, daß diese Annahme ohne Zweifel auf einem Mißverständnis beruht, und daß Dee nur eine mittelalterliche lateinische Übersetzung abschrieb, die allem Anschein nach von Gherardo Cremonese herrührt. E.

K. Hunrath. Zu Albrecht Dürers Näherungskonstruktionen regelmäßiger Vielecke. Bibl. Math. (3) **6**, 249-251.

Der Artikel beschäftigt sich mit den Dürerschen Näherungskonstruktionen des Dreizehnecks und des Neunecks. Inbetreff des Dreizehnecks bemerkt Hunrath, daß die gewöhnliche Angabe, Dürer habe ziemlich ungenau als Seite desselben $\frac{1}{4}$ des Kreisdurchmessers benutzt, zwar mit dem Wortlaut der betreffenden Stelle bei Dürer übereinzustimmen scheint, daß aber die Figur einen viel genaueren Wert andeutet, nämlich $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{24}=\frac{23}{96}$. Hinsichtlich des Neunecks weist Hunrath darauf hin, daß Schwenter wesentlich dieselbe Konstruktion benutzt hat, obgleich er dieselbe sein Eigentum nennt. E.

G. Eneström. Woher haben Leonardo Pisano und Jordanus Nemorarius ihre Lösungen des Problems der Würfelverdoppelung entnommen? [Anfrage 122.] Bibl. Math. (3) **6**, 214-215.

Leonardo Pisano hat in seiner Geometrie drei Lösungen des Problems der Würfelverdoppelung mitgeteilt, von denen die zweite wörtlich und die erste wesentlich, aber nicht gerade wörtlich mit je einer der zwei bei Jordanus Nemorarius vorkommenden Lösungen übereinstimmt. Auf der anderen Seite stimmt die dritte Lösung des Leonardo wörtlich mit einer Lösung des „Liber trium fratrum de geometria" und die erste Lösung des Jordanus ebenso wörtlich mit einer anderen Lösung desselben Traktates überein. Es wird gefragt, wie man diese Umstände erklären soll. E.

H. Bosmans. Analyse de trois ouvrages d'Adrien Romain. Brux. S. sc. **29** A, 68-79.

1. „Problema Apolloniacum". Lösung der Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Kreise berührt. 2. „Chordarum arcubus circuli primariis, quibus videlicet is in triginta dirimitur partes, subtensarum resolutio." Berechnung gewisser Quadratwurzeln, die man bei der Bestimmung der trigonometrischen Zahlen braucht, auf 220 Dezimalen. 3. „Mathematicae analyseos triumphus, in quo lateris enneagoni inscripti ad radium circuli exhibetur ratio." Berechnung der Seite eines regelmäßigen Neunecks. Der Autor wirtschaftet mit furchtbaren Zahlen und wendet die abgekürzte Multiplikation an. Mn. (Lp.)

J. S. Mackay. Bibliography of the envelope of the Wallace line (the three-cusped hypocycloid). Edinb. M. S. Proc. 23, 80-88.

Eine Bibliographie dieser Linie ist erschienen im Intermédiaire des Mathématiciens 3, 166-168, 1896; in dem vorliegenden Artikel wird jene Bibliographie beträchtlich erweitert. Vgl. F. d. M. 23, 38, 1891.
Gbs. (Lp.)

W. J. Kagan. Historische Übersicht der Entwicklung der Lehre über die Grundlagen der Geometrie. Spaczinskis Bote Nr. 387, 49-57; 391, 153-156; 392, 169-176; 395, 248-253; 396, 272-278; 402, 121-128; 403, 145-150. (Russisch.)

Fortsetzung (vgl. F. d. M. 35, 493, 1904). Der Verf. bespricht die Arbeiten von N. J. Lobatschewsky, die Äußerungen von Gauß über sie, die minder wichtigen, aber einflußreicheren Untersuchungen von Legendre, die Ideen von H. Graßmann, die an Gauß' „Disquisitiones generales" sich anlehnenden Arbeiten von F. Minding, F. Casorati, E. Beltrami, D. Codazzi und die Popularisierung der Leistungen von Gauß, Bolyai und Lobatschewsky durch Houël und Battaglini.
Si.

R. Bonola. Un teorema di Giordano Vitale da Bitonto sulle rette equidistanti. Loria Boll. bibl. 8, 33-36.

Als berichtigende Ergänzung zu den Angaben von Stäckel und Engel, „Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauß" (1895), S. 33, zeigt Bonola, daß bei Vitale 1680 ein Satz bewiesen ist, der 53 Jahre später bei Saccheri ausführlich erörtert ist, nämlich daß, wenn in einem einzigen gleichschenkligen Viereck mit zwei rechten Winkeln die anderen beiden Winkel rechte sind, sie in jedem andern gleichschenkligen Viereck mit zwei rechten Winkeln auch rechte sind. Die Priorität dieses Gedankens gehöre also Vitale.
Lp.

G. Loria. Unicuique suum. Loria Boll. bibl. 8, 65-67.

Im Jahre 1801 erschien in Paris ein Buch „Élémens de géométrie par J. J. Rousseau". Dies ist eine Neuausgabe der Schrift des P. Rossignol, erschienen zu Mailand 1774. Der Name Rousseau als Autor ist vom Buchhändler benutzt worden, damit der Absatz gesichert werde. Dies ist zuerst nachgewiesen von Quérard, „Les supercheries littéraires dévoilées", Paris 1882, T. III, p. 160.
Lp.

M. Simon. Über den sogenannten Brocardschen Punkt. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 9, 206.

Außer bei Crelle ist dieser Punkt behandelt von H. Hoffmann im Archiv d. Math. u. Physik **9**, 280 (1847) und vorher von C. F. A. Jacobi in seiner Dissertation, Leipzig 1825. Lp.

W. SCHIDLOWSKI. Kurzer Überblick über die Geschichte der sphärischen Trigonometrie. Spaczinskis Bote Nr. 389, 106-113. (Russisch.) Si.

G. LORIA. Pour une histoire de la géométrie analytique. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 562-574.

Der Vortrag gibt einen Auszug aus den interessanten Studien des Verf. zu einer Geschichte der analytischen Geometrie und soll dazu anregen, daß jemand, der die Gelegenheit zu einer bequemen Benutzung großer Bibliotheken hat, die Abfassung eines zusammenhängenden Werkes über diesen Gegenstand unternimmt. Zwei Epochen werden unterschieden, deren erste die Zeit von Descartes bis Lagrange umfaßt. Die Leistungen der wichtigsten Autoren dieser Epoche werden kurz geschildert: Descartes, Fermat, Roberval, La Hire, Newton, Gua de Malves, Euler, Cramer. „Allen ist die Möglichkeit verborgen geblieben, die Koordinaten auf die Erforschung der Figuren der elementaren Geometrie anzuwenden, wie Winkel, Abstände, Dreiecke" usw. „Für Cramer ebensowohl wie für Euler scheint als Zweck der analytischen Geometrie die Aufstellung und die Diskussion der Kurvengleichungen zu sein."

Diejenige Schrift, welche die zweite Epoche der analytischen Geometrie einleitet, ist die Abhandlung von Lagrange: „Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires", Nouv. Mém. Ac. Berlin 1773. Den analytischen Grundgedanken der Mécanique céleste folgend, verfaßte Lacroix 1797 den großen Traité de calcul différentiel et de calcul intégral; hier schlägt Lacroix den Namen „Géométrie analytique" vor, der also verhältnismäßig jung ist. Der Essai de géométrie analytique von Biot (1802) ist dann das erste Lehrbuch der analytischen Geometrie im jetzigen Sinne des Wortes und hat die Einbürgerung des Namens bewirkt. Lp.

F. AMODEO. I trattati delle Sezioni Coniche da Apollonio a Simson. Discorso inaugurale della catedra di Storia delle Scienze Matematiche della Regia Università di Napoli (16 dicembre 1905). Annali del R. Ist. Tecnico **23** (1905). Napoli: Fr. Giannini & Figli, 51 S. gr. 8°.

Zuerst wird eine Übersicht über den Unterricht in der Geschichte der Mathematik an den Universitäten gegeben, ähnlich wie in der Antrittsrede von Lazzeri (vgl. oben S. 48). Danach folgt eine Darstellung der Geschichte der Arbeiten über Kegelschnitte. Nach Erwähnung der akademischen Schule des Plato, der peripatetischen des Aristoteles wird über die bezüglichen Leistungen von Eudoxus aus Knidos berichtet,

ebenso über Menächmus, Aristäus, Euklides, Archimedes. Eine genauere Schilderung wird dem Werke des Apollonius aus Pergae zuteil (S. 9-16). Die Arbeiten von Pappus, Eutokins und Serenus aus der nachchristlichen Zeit der griechischen Mathematik werden auf S. 16-18 besprochen. Nach kurzer Erwähnung der arabischen Übersetzer des Apollonius werden die Übersetzungen desselben Autors im 16. Jahrhundert aufgezählt. Als bisher nicht genügend gewürdigtes Werk wird unter den Schriften des Maurolykus spezieller besprochen „De lineis horariis“ aus den Opuscula Mathematica (1575). Aus Keplers Buch Ad Vitellionem paralipomena quibus Astronomiae pars Optica traditur (1604) werden die auf die Kegelschnitte bezüglichen Lehren im Auszuge mitgeteilt (S. 22-24). Aus dem „glorreichen Jahre 1639“ werden die an Entdeckungen reichen Schriften von Mydorge, Desargues und Pascal vorgeführt (S. 24-37) und gebührend bewundert. Die ihnen folgenden Gregorius von Sanct Vincentius, van Schooten, Cavalieri, Jan de Witt, John Wallis, Borelli, Viviani, Guarini werden auf zwei Seiten erledigt. Dagegen wird über Philippe de la Hire viel genauer berichtet, ebenso über Jacques Le Poivre. Nun ist über Newton, de l'Hospital, Maclaurin, Guido Grandi der Weg geöffnet zu Robert Simson, dessen Sectionum conicarum libri quinque (1750) der Verf. eine Rettung zuteil werden läßt gegen die abfällige Beurteilung von Chasles, dem auch Moritz Cantor gefolgt ist. „Abgesehen von den Namen, waren alle Begriffe der neueren Geometrie damit aufgestellt.“

Lp.

H. Wieleitner. Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890-1904. Progr. Gymn. Speyer; Leipzig: G. J. Göschen. 58 S. gr. 8°.

Die Schrift bringt die Titel der hierher gehörigen Schriften, abschnittweise geordnet nach dem französischen Index du Répertoire, innerhalb jedes Abschnittes alphabetisch nach den Autoren, nach Angabe der Vorrede. Die Quellen, aus denen der Verf. geschöpft hat, sind in der Einleitung angegeben. Wer je in der Lage gewesen ist, sich die Literatur über einen Gegenstand zusammensuchen zu müssen, wird den Wert einer solchen Arbeit zu schätzen wissen und wird einzelne Versehen nicht besonders scharf tadeln. Vermißt hat Ref. die Anführung aller hierher gehörigen Schriften aus der kinematischen Geometrie, wie z. B. die Principes et développements de géométrie cinématique von Mannheim (1894). Offenbar ist der bezügliche Abschnitt des Jahrbuchs (X, Kap. 2) gar nicht benutzt worden. Überhaupt ist ja in vielen Arbeiten aus der Mechanik, besonders in Lehrbüchern, manches enthalten, was zur Kurventheorie im allgemeinen und speziell zur Theorie der algebraischen Kurven gehört. Ebenso ist die Literatur über darstellende Geometrie, über Vektoranalysis, Quaternionen und Ausdehnungslehre nicht berücksichtigt worden. Während z. B. die neue Ausgabe von Plückers Werken angeführt ist, fehlt die Erwähnung der Ausgabe von Graßmanns Werken,

in der doch für die Erzeugung von algebraischen Kurven so vieles steht. Endlich ist zu erwähnen, daß außer den vom Verf. benutzten Hülfsmitteln noch manche andere herbeigezogen werden konnten, so die Literaturnachweise und Rezensionen neuer Werke im Archiv der Mathematik und Physik, im Bulletin des sciences mathématiques, im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in den Monatsheften für Mathematik und Physik, im Bulletin of the American Mathematical Society usw. Daß die Kritik bei der Aufnahme der Titel keine allzu scharfe gewesen ist, zeigen gleich unter 1a auf der ersten Seite die eingestellten Artikel von Andrade und Delassus, welche nicht zur Theorie ebener algebraischer Kurven gehören, sondern zu derjenigen der Raumkurven. Wenn ferner der Cours d'Analyse von Jordan auf S. 53 erwähnt wird, so hätte wohl jedes Lehrbuch der Differentialrechnung aus 1890-1904, das geometrische Anwendungen bringt, ebenfalls genannt werden müssen. Durch Stichproben hat Ref. herausgebracht das Fehlen von Ruth Gentry, On the forms of plane quartic curves. New York, R. Drummond. 74 S. 8°. 1896. — K. Doehlemann, Geometrische Transformationen. I. Leipzig. G. J. Göschen. VII u. 322 S. 8°. 1902.

Zum Schlusse muß Ref. das Jahrbuch gegen die in der Einleitung erhobenen Angriffe verteidigen. Der Verf. sagt selbst, er habe manche Quellen, wie Aufgabensammlungen, unberücksichtigt gelassen; dagegen sind die Titel des Intermédiaire aufgenommen und mitgezählt worden. Trotz des unbestreitbaren Interesses, das sich an die Artikel des Intermédiaire knüpft, sind diese im Jahrbuche bisher nicht erwähnt, weil die Kürze der Artikel nicht gut ein Referat rechtfertigt; auch die Revue semestrielle bringt ja nur die Titel. Die „Wiskondige Opgaven" der „Wiskundige Genootschap" in Amsterdam werden ja trotz ihrer oft sehr interessanten Lösungen weder im Jahrbuche, noch in der Revue semestrielle besprochen. Wenn also der Verf. mehr Titel herauszählt, als im Jahrbuch stehen, so ist dies leicht erklärlich. Dabei dürfen aber nicht Übertreibungen unterlaufen, wie die, daß jährlich durchschnittlich 50 Titel des betrachteten Gebietes im Jahrbuch fehlen. Die Literatur des Verf., welche sich über 15 Jahre erstreckt, umfaßt nach seiner Angabe 1400 Titel, davon sollen im Jahrbuche jährlich 50 fehlen, d. h. 750, es soll also noch nicht die Hälfte der nötigen Titel bringen! Die wirkliche Auszählung für das Jahr 1896 ergab, daß außer den Artikeln des Intermédiaire 8 Titel der vorliegenden Schrift im Jahrbuche vermißt werden.

Ungeachtet eines solchen unberechtigten Angriffes gegen das Jahrbuch wiederholt Ref., der in der Arbeit für das Jahrbuch seine Kräfte erschöpft und daher besser den Wert einer hingebenden Sammelarbeit zu schätzen weiß als der Verf. in seinem noch jugendlichen Ungestüm, daß auch die vorliegende Bibliographie der höheren algebraischen Kurven allen Mathematikern, die auf diesem Gebiete arbeiten, gute Dienste leisten, ihnen also sehr willkommen sein wird. Lp.

E. Sós. Zur Geschichte der natürlichen Geometrie. Bibl. Math. (3) **6**, 408-409.

Als Ergänzung des Wölffingschen Berichtes „Über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten" (vgl. F. d. M. **31**, 51, 1900) erwähnt Sós zwei im Jahre 1844 in ungarischer Sprache erschienene Abhandlungen von K. Taubner und V. Fest, wo natürliche Koordinaten angewendet wurden, und berichtet hier über deren wesentlichen Inhalt. E.

P. Duhem. Les origines de la statique. Revue des qu. scient. (3) **7**, 462-524; **8**, 115-201, 508-558.

Vgl. F. d. M. **35**, 65, 1904. Fortsetzung. 13. Die französische Statik. Salomon de Caus, Mersenne, Hérigone, Roberval. 14. Descartes. 15. Die mechanischen Eigenschaften des Schwerpunktes von Albertus de Saxonia bis Evangelista Torricelli. Mn. (Lp.)

P. Duhem. Les sources des Théories physiques. Les origines de la statique. Tome premier. Paris: A. Hermann. IV u. 360 S. gr. 8°.

Das ungemein interessante Werk (abgesehen von den letzten 8 Seiten ein Abdruck aus Rev. des qu. scient. (3) **4**, 462-516, 1903; (3) **5**. 560-596, 1904; (3) **6**, 9-66, 394-473, 1904; (3) **7**, 96-149, 1905) ist in 14 Kapitel geteilt, denen drei Noten folgen. Die einzelnen Kapitel sind betitelt: I. Aristoteles und Archimedes. II. Lionardo da Vinci. III. Hieronymus Cardanus. IV. Die Unmöglichkeit der unaufhörlichen Bewegung. V. Die Alexandrinischen Quellen der Statik des Mittelalters. VI. Die Statik des Mittelalters. Jordanus Nemorarius. VII. Die Schule des Jordanus. VIII. Die Statik des Mittelalters und Lionardo da Vinci. IX. Die Schule des Jordanus im XVI. Jahrhundert. X. Die Reaktion gegen Jordanus. Guido Ubaldo. Benedetti. XI. Galileo Galilei. XII. Simon Stevin. XIII. Die französische Statik. Roberval. XIV. René Descartes.

Da Moritz Cantor in seinen Vorlesungen über Geschichte der Mathematik die angewandte Mathematik ausgeschlossen hat, so fehlt zurzeit eine zusammenhängende Darstellung der Geschichte der Mechanik. Duhem liefert in dem vorliegenden Bande einen Beitrag hierzu und zeigt, daß auch auf diesem Gebiete viel Früchte dem historischen Forscher winken.

„Nicht nur hatte das Mittelalter des Okzidents teils direkt, teils durch die Vermittlung der Araber die Überlieferung mancher hellenischen Theorien bezüglich des Hebels und der römischen Wage erhalten, sondern seine eigene intellektuelle Tätigkeit hatte eine vom Altertum nicht geahnte, selbständige Statik hervorgebracht. Seit dem Beginne des 13. Jahrhunderts, vielleicht noch früher, hatte Jordanus Nemorarius das Hebelgesetz aus dem folgenden Postulate hergeleitet: Man braucht dieselbe Kraft, um verschiedene Gewichte zu heben, wenn die Gewichte in umgekehrten Verhältnisse der durchmessenen Wege stehen."

„Der Gedanke, dessen erster Ansatz in dem Tractatus von Jordanus sich vorfand, war kraft einer stetigen Entwicklung durch die Schriften der Schüler des Jordanus hindurch gewachsen, ferner durch die von Lionardo da Vinci, Cardano, Roberval, Descartes, Wallis, um seine vollkommene Gestalt in dem Briefe von Joh. Bernoulli an Varignon zu erhalten, in der Mécanique analytique von Lagrange, in dem Lebenswerk von Willard Gibbs. Die Wissenschaft, auf die wir heute mit Recht so stolz sind, floß nach einer Entfaltung, deren stufenmäßige Gestalten anzugeben uns vergönnt war, aus der Wissenschaft, deren Geburt um das Jahr 1200 erfolgte . . . . . Die vermeintlichen geistigen Umwälzungen sind zumeist nur langsame Entfaltungen aus langer Vorbereitungszeit gewesen, die sogenannten Wiederbelebungen oft nur ungerechte und unfruchtbare Reaktionen. Die Achtung vor dem Überlieferten ist eine wesentliche Bedingung des wissenschaftlichen Fortschrittes."

Das Buch trägt auf dem Titel die Überschrift: „Les sources des théories physiques." Hoffen wir, daß die zu erwartenden folgenden Bände ebenso reiche Belehrung bringen, und daß auch andere Forscher sich bemühen, unsere Kenntnisse über das als dunkel verschrieene und verkannte Mittelalter zu vermehren. Lp.

P. Duhem. Sur les origines du principe des déplacements virtuels. C. R. **141**, 525-527.

Als eine Frucht der historischen Forschungen, deren Ergebnisse Duhem zusammenhängend in dem Werke „Origines de la statique" darstellt, wird eine Skizze über das Prinzip der virtuellen Verrückungen gegeben. „Die Geschichte der stufenmäßigen Entwicklung dieses Axioms kann ohne Unterbrechung von Jordanus Nemorarius (13. Jahrhundert) bis zu Descartes verfolgt werden; es ist ganz leicht, sie hernach über Wallis und Joh. Bernoulli bis zu Lagrange und später bis J. Willard Gibbs fortzuführen. Die Geschichte des Prinzips der virtuellen Verrückungen bietet uns ein merkwürdiges Beispiel von der Langsamkeit und der Stetigkeit, mit denen sich die meisten großen Prinzipien der Mechanik entwickelt haben." Lp.

K. Scheel, R. Assmann. Halbmonatliches Literaturverzeichnis der „Fortschritte der Physik". Dargestellt von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. Redigiert von K. S. u. R. A. Vierter Jahrgang 1905. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn. 444 S. gr. 8°.

Dieses Literaturverzeichnis, das unmittelbar nach dem Erscheinen der Schriften zusammengestellt und gemäß der in den „Fortschritten der Physik" festgesetzten Einteilung geordnet wird, erfreut sich einer wachsenden Beliebtheit, weil es jedem ermöglicht, die neuesten Erscheinungen aus dem eigenen Arbeitsgebiete zu verfolgen. Die „Beiblätter" der Physik haben aus diesem Grunde ja darauf verzichtet, ebenfalls ein solches Ver-

zeichnis zu geben, wie das früher geschehen ist. Für die Mathematiker kommen natürlich nur diejenigen Teile in Betracht, welche der mathematischen Physik angehören. Wegen der Kleinheit des Leserkreises, auf den in der Mathematik gerechnet werden kann, hat die Redaktion des Jahrbuchs es nicht gewagt, mit einem ähnlichen Unternehmen vorzugehen. Da die Größe des bloßen Titelverzeichnisses in der Physik schon 444 Seiten während eines Jahres beträgt, erhält man dadurch ein Bild von der Massigkeit der vorhandenen Literatur. Lp.

G. H. Darwin. Inaugural address by the President of the Association. Brit. Ass. Rep. South Africa 1905, 3-32; Nature **72**, 439-445.

Als Sohn des berühmten Vertreters der Entwicklungslehre in der organischen Natur behandelt Darwin den Entwicklungsgedanken in allgemeinerem Sinne. „Entwicklungslehren bezüglich der unbelebten Natur, obschon von viel älterem Datum als die das Leben betreffenden, sind von dem großen erwähnten Anstoße stark beeinflußt worden. So ist es gekommen, daß der Ursprung und die Geschichte der chemischen Elemente und der Sternsysteme jetzt einen viel breiteren Raum im wissenschaftlichen Denken einnehmen, als früher der Fall war.“ Die über diese beiden Punkte aufgestellten Theorien des Mikrokosmus und des Makrokosmus und ihre inneren Beziehungen zueinander sind also die vom Redner mit großer Sachkenntnis behandelten Fragen. Lp.

O. Zanotti-Bianco. Il metro ed il minuto secondo nella geofisica moderna. Rivista di Topografia e Catasto **17**; Torino, 16 S. gr. 8°.

Dieser vor der Gesellschaft der Ingenieure und Architekten zu Turin am 25. März 1905 gehaltene Vortrag entwickelt in verständlicher Form die Gründe, welche dazu geführt haben, das praktische Maßsystem auf die Normalmaße in Breteuil zu gründen, ferner die Ursachen, welche es verhindern, ein unveränderliches Zeitmaß aufzustellen. Lp.

P. Duhem. Le principe de Pascal. Essai historique. Rev. générale des sc. **16**, 599-610.

Ist die Bewunderung gerechtfertigt, welche den Schriften Pascals über das Gleichgewicht der Flüssigkeiten, als Typen durchaus persönlicher Forschungen, als Mustern der Methode, gezollt wird? 1. Einige Auszüge aus dem „Traité de l'équilibre des liqueurs“. 2.-7. Einfluß von Marin Mersenne, Simon Stevin, Giovanni Battista Benedetti, Galilei, Descartes, Torricelli. 8. Was bezweckte Pascal mit der Abfassung des erwähnten Werkes? (Nach Revue semestrielle $\mathbf{14}_1$, 79.) Lp.

A. E. HAAS. Über die Originalität der physikalischen Lehren des Johannes Philoponus. Bibl. Math. (3) **6**, 337-342.

Zweck des Artikels ist, nachzuweisen, daß Johannes Philoponus (6. Jahrh. n. Chr.) seine physikalischen Lehren wenigstens zum größten Teil, vielleicht sogar gänzlich, aus den Schriften früherer Philosophen und Astronomen entnommen hatte, so z. B. die Lehren über die Fallbewegung, über die natürliche Bewegung und die Schwere der Körper sowie über die geradlinige Bewegung als Ausdruck einer Unvollkommenheit. Als Vorgänger des Philoponus nennt der Verf. Hipparchus, Epikurus, Lucretius, Platon, Zenon und Aristoteles selbst. E.

C. DE WAARD. Descartes en de brekingswet. Nieuw Archief (2) **7**, 64-68.

Aus einem handschriftlich hinterlassenen Tagebuch des seiner Zeit bekannten Dortrechter Rektors I. Beeckman wird nachgewiesen, daß diesem Descartes am 8. Oktober 1628 sein Brechungsgesetz mitgeteilt habe, und dieses wird hier (S. 66) deutlich wiedergegeben, deutlicher als in Huygens Brief an Golius vom Juli 1629. Tn.

O. H. TITTMANN. Lo stato attuale della geodesia. (Übersetzung aus dem Engl. von O. Zanotti-Bianco.) S.-Abdr. Rivista di Topogr. e Catasto **27**, 13 S.

Bespricht nach einem Rückblick auf die Aufgaben und Leistungen des 17. und 18. Jahrhunderts betreffs der Erdgestalt die heutigen schwierigeren, mit Geophysik und Geologie in innigste Beziehung tretenden Aufgaben der Geodäsie, insbesondere Art und Umfang der Bestimmungen der Lotabweichungen, sowie das Maß der Triangulation der gesamten Erdoberfläche. Anmerkungen (S. 7-13) legen einzelnes noch genauer dar. Tn.

ED. MEYER. Ägyptische Chronologie. Berl. Abhdl. 1904, 212 S. u. 7 Taf.

Von dieser großen und gründlichen Bearbeitung der ägyptischen Chronologie kommt für das Jahrbuch nur der erste Abschnitt in Betracht: Kalender und Sothisperiode. Das Jahr, welches aus 12 Monaten zu je 30 Tagen und 5 Zusatztagen, Epagomenen, bestand, blieb wegen seiner Einfachheit durch fünf Jahrtausende in Geltung. „Wir können mit völliger Sicherheit behaupten, daß der ägyptische Kalender für denjenigen Stand der Jahreszeiten geschaffen ist, der sich uns für das Jahr 4241 v. Chr. ergeben hat.“ Die interessanten Auseinandersetzungen über die Brauchbarkeit dieses „Wandeljahres“ für alle praktischen Zwecke, insbesondere für die mit dem Anschwellen des Nils zusammenhängenden Feste, die hieraus mit großem Scharfsinn gefolgerten Anfänge des Kalenders können hier nur eben angedeutet werden. Lp.

P. TANNERY. Sur la division du temps en instants au moyen âge. Bibl. Math. (3) **6**, 111.

Im Mittelalter wurde die Stunde in 22560 „instantia“ oder „atomi“ eingeteilt, und Tannery versucht hier, diese Einteilung zu erklären. Er bemerkt zuerst, daß eine Stunde = 40 „momenta“ war, so daß nur die Einteilung des „momentum“ in 564 „instantia“ erklärt werden muß. Nun ist $564 = 12 \cdot 47$, und da auf der anderen Seite die Zahl der Monate des Metonschen Zykels $235 = 5 \cdot 47$ ist, vermutet Tannery, daß man aus diesem Grunde für die Anzahl der kleinsten Teile der Stunde ein Multipel von 47 gewählt hat.

Tannery erwähnt, daß die Ansicht, die Stunde sei aus einer endlichen Anzahl von unteilbaren Elementen zusammengesetzt, auf Martianus Capella zurückgeht, daß aber Beda der erste Verfasser ist, der nachweislich die Zahl 22560 angegeben hat. E.

R. T. GLAZEBROOK. Progress of optical science and manufactures. Nature **72**, 112-115.

Die zur Eröffnung des optischen Kongresses in Clerkenwell am 30. Mai 1905 gehaltene Rede gibt einen Abriß der Geschichte der Fortschritte in der Verfertigung optischer Instrumente während der letzten zwei Jahrhunderte und weist nachdrücklich auf die enge Verbindung von Theorie und Praxis hin. Vor englischen Hörern sprechend, betont der Redner die Verdienste Englands wohl mehr, als von einem unbefangen urteilenden Historiker zugestanden werden kann. Lp.

A. WEGENER. Die astronomischen Werke Alfons X. Bibl. Math. (3) **6**, 129-185.

Nach einigen Notizen über den König Alfons X († 1284) und sein Zeitalter wird zuerst Auskunft gegeben über die von ihm verfaßten oder in seinem Auftrage redigierten Schriften, von denen die meisten astronomischen Inhalts in den Jahren 1863-1867 von M. Rico y Sinobas unter dem Titel „Libros del saber de astronomia del Rey D. Alfonso X“ herausgegeben wurden. Eigentlich enthält diese Ausgabe neben den astronomischen Tabellen nur ein einziges Werk, nämlich ein Lehrbuch der astronomischen Instrumente; aber dieses Lehrbuch besteht selbst aus vielen kleineren Schriften, die im Auftrage des Königs hauptsächlich aus dem Arabischen übersetzt und später mehr oder weniger umgearbeitet wurden. Als Einleitung dient ein Traktat über die Sternbilder, dessen arabische Vorlage eine anderweitig bekannte Schrift von el-Sufi ist. Für die übrigen Abteilungen des Lehrbuches sind Abhandlungen von Kosta ben Luka, Zarkali und anderen genannten oder ungenannten Verfassern benutzt worden, und darum hat man durch Mißverständnis angenommen, daß Alfons in Cordova ein Kollegium von Astronomen versammelt hatte; in Wirklichkeit scheint er nur einige Übersetzer, von denen freilich ein

paar astronomische Kenntnisse hatten, zur Verfügung gehabt zu haben. Die einzelnen Abteilungen des Lehrbuches sind: Die vier Bücher über die Sternbilder; das Buch vom Himmelsglobus; das Buch von den Armillen; das Buch vom sphärischen Astrolabium; das Buch vom ebenen Astrolabium; das Buch vom Ataçir (Instrument für astrologische Zwecke); das Buch von der Universal-Lamina (eine Abart des ebenen Astrolabiums); das Buch von der Açafeha (ein dem vorigen ähnliches Astrolabium); zwei Bücher von den Laminas der 7 Planeten (Äquatorium); das Buch vom Quadranten; fünf Bücher von den Uhren. Wegener berichtet mehr oder weniger ausführlich über den Inhalt dieser Abteilungen und bekommt dabei Gelegenheit, viele Mißverständnisse früherer Historiker zu berichtigen.

Inbetreff der astronomischen Tafeln des Alfons hat Rico y Sinobas den Originaltext aufgefunden, aber die Originaltafeln sind verschollen, und die von Rico y Sinobas zum Abdruck gebrachten Tafeln sind nur eine Art von „Calendarium perpetuum", dessen Angaben gar nicht zu dem Texte passen. Dagegen wurden die wirklichen Alfonsinischen Tafeln schon im Mittelalter von Johannes de Saxonia bearbeitet und in dieser Form von E. Ratdolt (1483) veröffentlicht; aber aus dem Originaltexte geht hervor, daß die Bearbeitung wesentlich von ihrer Vorlage abweicht, ohne daß es möglich war, den Grund dieses Umstandes zu ermitteln. Von der Bearbeitung gibt es übrigens viele neue Auflagen (die letzte erschien im Jahre 1641), die von Wegener verzeichnet und ausführlich beschrieben werden.

Der Schluß der Abhandlung von Wegener enthält eine Untersuchung über die Abweichungen der Bearbeitung des Johannes de Saxonia gegen die Originaltafeln, sofern diese Abweichungen auf Grund des Originaltextes festgestellt werden können. Es ergibt sich dabei, daß sich dieselben nicht nur auf die Tabulierung der mittleren Bewegungen sowie auf die Fundamentalepoche, sondern auch auf die Präzessionstheorie beziehen. Dagegen beruht die Angabe, die Alfonsinischen Tafeln seien im Jahre 1252 verfertigt und vier Jahre später umgerechnet worden, auf einem Mißverständnis; denn die Tafeln wurden zuerst um 1272 fertig, und die vermeintliche Umrechnung vom Jahre 1256 bezieht sich auf die Übersetzung des Werkes von el-Sufi. E.

A. A. Björnbo. Walter Brytes Theorica planetarum. Bibl. Math. (3) 6, 112-113.

Es gibt zwei Redaktionen des Traktats „Theorica planetarum", der gewöhnlich dem Gherardo da Sabbionetta zugeschrieben wird, nämlich eine kürzere, die im Mittelalter handschriftlich sehr verbreitet war, und eine ausführlichere, von der nur wenige Handschriften bekannt sind. Jene hält Björnbo für die wirklich von Gherardo da Sabbionetta verfaßte, während diese seiner Ansicht nach eine Bearbeitung von Walter Bryte ist, der in einer Handschrift als Verfasser genannt wird. E.

B. Carrara. L'unicuique suum nella scoperta delle macchie solari. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. 23, 191-287

B. Carrara. Presentazione e sunto di una sua memoria: „L'unicuique suum nella scoperta delle macchie solari.“ Rom. Acc. P. d. N. L. Atti 58, 161-168.

Das erstere ist der erste Teil einer ausführlichen Abhandlung über die Geschichte der Entdeckung der Sonnenflecken und Sonnenfackeln, das zweite ein kurzer Auszug daraus. Betreffs der viel behandelten Sonnenflecken entscheidet sich Carrara für die Reihenfolge Fabricius. Scheiner. Galilei. Tn.

Th. Moreux. Histoire d'une conquête astronomique. La mesure de la distance de la Terre au Soleil. Revue des qu. scient. (3) 8, 476-507.

Bericht über die jüngsten Untersuchungen betreffs der Sonnenparallaxe. Mn. (Lp.)

T. Hayashi. A list of some dutch astronomical works imported into Japan from Holland. Nieuw Archief (2) 7, 42-47.

Der um die Geschichte japanischer Mathematik verdiente Verf. gibt hier ein Verzeichnis von 26 holländischen, in den Jahren 1770 bis 1882 erschienenen Werken. die in Japan, zum Teil übersetzt, gebraucht wurden und werden. Tn.

W. F. Wislicenus. Astronomischer Jahresbericht. Mit Unterstützung der Astronomischen Gesellschaft herausgegeben. VI. Band, enthaltend die Literatur des Jahres 1904. Berlin: Georg Reimer. XXXVIII u. 612 S. gr. 8°.

Dieser Band bleibt mit seinen 2280 Referaten um 302 Nummern gegen den fünften Band zurück. Nach Einrichtung und Anordnung schließt er sich seinem unmittelbaren Vorgänger direkt an; nur in dem alphabetischen Verzeichnis der Zeitschriften ist der Genauigkeit halber außer der Bandnummer auch die Jahreszahl hinzugesetzt, was wegen der unregelmäßigen Ausgabe besonders der Sammelschriften gelehrter Gesellschaften sehr nützlich ist. In der Vorrede spricht Wislicenus sich über manche Sorgen des Herausgebers eines solchen Jahresberichts aus. Es war das letzte Mal, daß er seine Leser im Vorworte anreden konnte. Der Ruhm, ein Werk mit wunderbarer Energie auf sichere Basis gestellt zu haben, bleibt ihm für immer gesichert. Lp.

G. Maix. Pytheas von Massilien und die mathematische Geographie. Teil I. Marburg a. D. 34 S. 8° mit 1 Taf.

Kapitel 2.

Philosophie, Mengenlehre und Pädagogik.

A. Philosophie.

E. MACH. Erkenntnis und Irrtum. Skizzen zur Psychologie der Forschung. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. XII u. 461 S. gr. 8°.

Das Buch ist aus einer Vorlesung über Psychologie und Logik der Forschung hervorgegangen (1895/96), in welcher die Psychologie der Forschung auf autochthone Gedanken der Naturwissenschaft zurückgeführt wurde. „Der Naturforscher kann zufrieden sein, wenn er die bewußte psychische Tätigkeit des Forschers als eine methodisch geklärte, verschärfte und verfeinerte Abart der instinktiven Tätigkeit der Tiere und Menschen wiedererkennt, die im Natur- und Kulturleben täglich geübt wird. . . . Ich habe schon ausdrücklich erklärt, daß ich gar kein Philosoph, sondern nur Naturforscher bin . . . . Es gibt keine Machsche Philosophie, sondern höchstens eine naturwissenschaftliche Methodologie und Erkenntnispsychologie." Diese Sätze des Vorworts kennzeichnen den Machschen Standpunkt, erklären aber auch zugleich, weshalb alle Naturforscher und Mathematiker Mach als philosophischen Führer verehren. Er behält stets festen Boden unter den Füßen, weil er sich nie von dem Tatsächlichen loslöst. So wird auch das vorliegende neue Buch des geschätzten Forschers allen seinen treuen Anhängern vielfache Belehrung und einen hohen ästhetischen Genuß verschaffen.

„Wir wollen als aufmerksame Spaziergänger, das Gebiet der Naturforschung durchstreifend, das Verhalten des Naturforschers in seinen einzelnen Zügen beobachten. Wir fragen: Durch welche Mittel ist die Naturerkenntnis bisher tatsächlich gewachsen, und wie hat sie Aussicht, noch fernhin zu gedeihen? Das Verhalten des Forschers hat sich in der praktischen Tätigkeit, im volkstümlichen Denken instinktiv entwickelt und ist von diesem nur auf das wissenschaftliche Gebiet übertragen und zuletzt zu bewußter Methodik entwickelt worden. Wir werden zu unserer Befriedigung nicht nötig haben, über das empirisch Gegebene hinauszugehen. Wenn wir die Züge in dem Verhalten des Forschers auf tatsächlich beobachtbare Züge unseres physischen und psychischen Lebens zurückführen können, welche sich auch im praktischen Leben, im Handeln und Denken der Völker wiederfinden, wenn wir nachweisen können, daß dieses Verhalten wirklich praktische und intellektuelle Vorteile herbeiführt, so wird uns dies genügen. Eine allgemeine Betrachtung unseres physischen und psychischen Lebens wird hierfür die natürliche Grundlage bilden" (S. 16-17).

Nach diesen Erklärungen des Verf., die das Programm des Buches enthalten, wollen wir das Inhaltsverzeichnis folgen lassen, um der Forderung eines objektiven Berichtes nachzukommen. 1. Vorwort.

2. Philosophisches und naturwissenschaftliches Denken. 3. Eine psychophysiologische Betrachtung. 4. Gedächtnis. Reproduktion und Assoziation. 5. Reflex, Instinkt, Wille. Ich. 6. Die Entwicklung der Individualität in der natürlichen und kulturellen Umgebung. 7. Die Wucherung des Vorstellungslebens. 8. Erkenntnis und Irrtum. 9. Der Begriff. 10. Empfindung, Anschauung, Phantasie. 11. Anpassung der Gedanken an die Tatsachen und aneinander. 12. Über Gedankenexperimente. 13. Das physische Experiment und dessen Leitmotive. 13. Ähnlichkeit und Analogie als Leitmotive der Forschung. 15. Die Hypothese. 16. Das Problem. 17. Die Voraussetzungen der Forschung. 18. Beispiele von Forschungswegen. 19. Deduktion und Induktion in psychologischer Beleuchtung. 20. Zahl und Maß. 21. Der physiologische Raum im Gegensatz zum metrischen. 22. Zur Psychologie und natürlichen Entwicklung der Geometrie. 23. Raum und Geometrie vom Standpunkt der Naturforschung. 24. Die physiologische Zeit im Gegensatz zur metrischen. 25. Zeit und Raum physikalisch betrachtet. 26. Sinn und Wert der Naturgesetze. 27. Sachregister.

Für das Jahrbuch sind natürlich besonders die letzten Abschnitte, etwa von Nr. 19 an, von hervorragender Bedeutung. Bei der Unmöglichkeit, den Gedankengang aller dieser Betrachtungen auch nur andeutend hier vorzuführen, wollen wir bloß den Schluß des Abschnitts 23 unverkürzt wiedergeben.

„Die Ergebnisse, zu welchen die hier besprochene Entwicklung geführt hat, lassen sich wie folgt zusammenfassen: 1. Die Erfahrung wurde als Quelle unserer geometrischen Begriffe erkannt. 2. Die Vielfachheit der denselben geometrischen Tatsachen genügenden Begriffe wurde klargelegt. 3. Durch die Vergleichung des Raumes mit anderen Mannigfaltigkeiten wurden allgemeinere Begriffe gewonnen, von welchen die geometrischen einen besonderen Fall darstellen. Dadurch wurde das geometrische Denken von konventionellen, für unübersteigbar gehaltenen Schranken befreit. 4. Durch den Nachweis dem Raum verwandter, von demselben verschiedener Mannigfaltigkeiten wurden ganz neue Fragen nahegelegt. Was ist der Raum physiologisch, physikalisch, geometrisch? Worauf sind dessen besondere Eigenschaften zurückzuführen, da doch andere auch denkbar sind? Warum ist derselbe dreidimensional? usw.

Mit solchen Fragen, wenn wir deren Beantwortung auch nicht heute und nicht morgen erwarten, stehen wir vor der ganzen Tiefe des noch zu Erforschenden. Von den unberufenen Urteilen der „Böoter“, die Gauß kommen sah, und die ihn so zurückhaltend stimmten, wollen wir schweigen. Was sollen wir aber zu den herben und nörgelnden Kritiken sagen, die Gauß, Riemann und deren Genossen für die gebotenen Aufklärungen von seiten wissenschaftlich hochstehender Männer erfahren mußten? Sollten es diese nie am eigenen Leibe erfahren haben, daß der Forscher an den äußersten Grenzen des Wissens manches findet, das nicht gleich glatt in jeden Kopf drein geht, das darum aber noch kein Unsinn ist? Gewiß sind solche Forscher auch dem Irrtum ausgesetzt.

Aber selbst die Irrtümer mancher Menschen sind in ihren Folgen oft fruchtbarer als die Entdeckungen anderer."

Als einen Belag der vornehmen und abgeklärten Denkweise Machs, seiner ruhigen und doch von einem warm menschlichen Hauche belebten Sprache haben wir diese die Mathematiker interessierende Stelle hergesetzt. Zur Erklärung des Titels des Buches lassen wir endlich aus dem Abschnitte 8 die Sätze folgen: „Ein selbstgefälltes oder uns mitgeteiltes Urteil, das wir dem physischen oder psychischen Befund, auf welchen es sich bezieht, angemessen, entsprechend finden, nennen wir richtig und sehen, namentlich wenn es uns neu und wichtig ist, in demselben eine Erkenntnis. Eine Erkenntnis ist stets ein uns unmittelbar oder doch mittelbar biologisch förderndes psychisches Erlebnis. Bewährt sich hingegen das Urteil nicht, so bezeichnen wir es als Irrtum und in dem schlimmeren Fall einer absichtlichen Irreführung als Lüge . . . Erkenntnis und Irrtum fließen aus denselben psychischen Quellen; nur der Erfolg vermag beide zu scheiden. Der klar erkannte Irrtum ist als Korrektiv ebenso erkenntnisfördernd wie die positive Erkenntnis." Lp.

E. A. Gopius. Die Philosophie der „Moskauer philosophisch-mathematischen Schule" und ihre Beziehung zu dem Intellektualismus der Philosophen des XVIII. Jahrhunderts und zum ökonomischen Materialismus von K. Marx. Fragen der Philosophie u. Psychologie Nr. 79, **16**, 553-586. (Russisch.)

Obwohl Kritiken und Rezensionen in der Regel in das Jahrbuch nicht aufgenommen werden, so glaubt der Ref. für die oben genannte Abhandlung eine Ausnahme machen zu dürfen, weil es Gopius gelungen ist, den Sinn und die Tragweite der Ausführungen von P. A. Nekrassow (Vgl. F. d. M. **35**, 76, 1904) zu verstehen, was bei der eigenartigen Terminologie und der Menge der erkünstelten Ausdrücke nicht leicht ist. Gopius findet es dem Entwicklungsgange der Wissenschaft ganz entsprechend, daß Nekrassow bei der Konstruktion seines philosophischen Systems mathematische Begriffe und die mathematische Terminologie einführt: Mannigfaltigkeit (Komplex), Funktion, mehrdimensionaler Raum, Wahrscheinlichkeit. Der letzte Begriff wurde in früheren Systemen fast gänzlich ignoriert, muß aber für die Philosophie eine tiefe Bedeutung gewinnen. Mit seiner Hülfe wird das Wissen in der Weise erklärt: „Wissen heißt immer, die Möglichkeit haben, nach irgend einem gegebenen Komplex irgend einen unbekannten Komplex mit Hülfe der auf dem ersten Komplex ausgeführten Gruppe der geistigen Operationen zu bestimmen." Daraus folgt eine wesentliche Umformung der Lehre von den Funktionen der logischen Gleichungen, nämlich in die sogenannte Logik. Nekrassow skizziert das Schema der allgemeinen nichtkategorischen Logik, für welche die Einführung des Fehlers als notwendiges Element charakteristisch wird. Diese Idee scheint Nekrassow anzugehören; doch ist sie von ihm nicht entwickelt. Was aber die Anwendung dieser Ideen auf die Konstruktion

der empirischen Wissenschaften betrifft, so ist sie ganz mangelhaft, wie die Kritik von Gopius ausführlich zeigt. S.

G. Hessenberg, K. Kaiser und L. Nelson. Abhandlungen der Friesschen Schule. Neue Folge. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht. 4°.

A. Wernicke. Neue naturphilosophische Bestrebungen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 407-409.

In der Anzeige der „Abhandlungen der Friesschen Schule" kennzeichnet Wernicke die mit diesem neuen Unternehmen verbundenen Absichten. Die neue Folge will „auf die vorzeitig abgebrochene Reihe Kant, Fries, Apelt hinweisen und durch sie die Reihe Kant, Fichte, Schelling, Hegel, Schopenhauer, Nietzsche ersetzen, um echte Philosophie zu verbreiten statt ihres Trugbildes". An mathematischen Aufsätzen der beiden ersten Hefte sind zu nennen: Hessenberg, Das Unendliche in der Mathematik (F. d. M. **35**, 75, 1904). — Brinkmann, Über kritische Mathematik bei Platon. — Nelson, Bemerkungen über nichteuklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Urteile. Lp.

L. Couturat. Les définitions mathématiques. Ens. math. **7**, 27-40.

Couturat sieht in den mathematischen Definitionen logische Gleichungen, aber nicht Lehrsätze. Sie gestatten, daß man das Definierte für das Definierende setzt und umgekehrt. Sie kürzen bei Entwicklung der Konsequenzen das Schlußverfahren ab. Sie sind keineswegs bloße Nominaldefinitionen; sie drücken die Gleichheit zweier Begriffe aus, von denen der eine in seiner Einheit, der andere in seiner Zusammensetzung gedacht ist, so daß es sich eigentlich nur um einen Begriff in zwei Erfassungen handelt. Sie schließen aber nie die Behauptung der Existenz in sich ein. Diese liegt nur in den Postulaten und Lehrsätzen. Sie sind auch nicht schöpferisch, aber sie bedingen die wissenschaftliche Loyalität der mathematischen Wissenschaften, die ihrem Wesen nach nur eine Fortsetzung der formalen Logik sind. Mi.

L. Couturat. Définitions et démonstrations mathématiques. Ens. math. **7**, 104-121.

Definitionen durch Postulate beziehen sich nicht auf einen einzelnen Begriff, sondern auf ein System von Begriffen. Sie bestehen darin, daß man die Fundamentalbeziehungen aufzählt, welche diese Begriffe gemeinsam haben, und welche gestatten, alle ihre Eigenschaften anzugeben. Diese Beziehungen sind Postulate oder Grundsätze einer Theorie. — Definitionen durch Abstraktion beziehen sich auf eine logische oder mathematische Funktion. Sie bestehen darin, daß man die notwendige und zureichende Bedingung bestimmt, durch die diese Funktion denselben

Wert für zwei verschiedene Werte der Variabeln annimmt. — Definitionen durch Induktion bestehen darin, daß man einen Begriff für die Zahl 0 oder 1, dann für $n+1$ als Funktion seines Wertes für n bestimmt.

Mi.

L. Couturat. Les principes des mathématiques. Avec un appendice sur la „Philosophie des mathématiques“ de Kant. Paris: Alcan. VIII u. 311 S. 8⁰.

L. Couturat. Les principes des mathématiques. Rev. de métaphys. et de morale **13**, 224-256.

Fortsetzung und Schluß der Abhandlungen, welche durch die „Principles of Mathematics“ von Russell hervorgerufen wurden (vgl. F. d. M. **35**, 82-83). Dieses Schlußkapitel ist der darstellenden und der metrischen Geometrie gewidmet.

Fe.

P. Boutroux. Correspondance mathématique et relation logique. Rev. de métaphys. et de morale **13**, 620-637.

Der Verf. untersucht aufs neue die Beziehung der Mathematik zur Logik. Jedes dieser Gebiete hat seine eigene Rolle; sie müssen deutlich voneinander getrennt werden (vgl. F. d. M. **35**, 82).

Fe.

B. Russell. Sur la relation des mathématiques à la Logistique. Rev. de métaphys. et de morale **13**, 906-917.

Kritische Untersuchung obiger Abhandlung von P. Boutroux und insbesondere des Funktionsbegriffes in der Mathematik und in der Logistik.

Fe.

H. Poincaré. Les mathématiques et la logique. Rev. de métaphys. et de morale **13**, 815-835.

Erster Teil einer den neueren Arbeiten über die Philosophie der Mathematik gewidmeten Studie. Nach einigen Autoren, vornehmlich Peano, Russell und Couturat, kann man fragen, ob es wahr ist, daß man, wenn die Prinzipien der Logik einmal zugegeben sind, alle mathematischen Wahrheiten zwar nicht entdecken, wohl aber beweisen kann, ohne abermals auf die Anschauung zurückzugreifen. Das ist die vom Verf. untersuchte Frage, die er negativ beantwortet, indem er folgeweise in diesem ersten Abschnitte die Rolle der Definitionen und der Axiome, die symbolische Sprache Peanos, die Logik Russells zergliedert, sowie die Kardinal- und die Ordinalzahl, die Grundlage der eigentlichen Arithmetik.

Fe. (Lp.)

H. Poincaré. Le definizioni generali in matematica. Periodico di Mat. (3) **2**, 193-202, 241-251.

Aus dem Französischen übersetzt. Vgl. F. d. M. **35**, 81, 1904.

P. Mansion. À quoi servent les mathématiques? Mathesis (3) **5**. 239-241.

Nach den Reden von A. Pringsheim: „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik" und F. Lindemann: „Lehren und Lernen in der Mathematik" (vgl. F. d. M. **35**, 79 u. 99, 1904). Mn.

A. Korselt. Über die Grundlagen der Mathematik. Deutsche Math. Ver. **14**, 365-389.

Korselt wendet sich in seinem Aufsatz über die Grundlagen der Mathematik gegen die wichtigsten Einwendungen, die Frege in den „Grundgesetzen der Arithmetik" bezüglich der Darstellungen moderner Mathematiker gemacht hat. Er bespricht die Grundsätze des Definierens, die Lehre Cantors von den irrationalen Zahlen, die Theorien des Irrationalen von Heine und Thomae und das Schaffen neuer Gegenstände nach Dedekind, Hankel und Stolz, von der Überzeugung ausgehend, daß für die Mathematik, deren Ergebnisse sich fortgesetzt bestätigen, eine Darstellung möglich sein muß, die auch die Grundlagen derselben über jeden Zweifel erhebt. Mi.

S. Dickstein. Über die neuesten Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik. Vortrag, gehalten in der Jahressitzung der Gesellschaft polnischer Naturforscher in Lemberg am 19. Februar 1905. Wiad. Mat. **9**, 23-45. (Polnisch.)

Kurze Übersicht über die neuesten Untersuchungen der logisch-mathematischen Schule von Peano, über Hilberts neueste Begründung der Geometrie und über die Arbeiten der amerikanischen Mathematiker Dickson, Veblen und Huntington. Dn.

H. Dingler. Zur Methodik der Mathematik. Deutsche Math. Ver. **14**, 581-584.

Definiert die Mathematik ihre Begriffe durch die Axiome, so unterscheidet sie sich nur durch die Bezeichnungsweise von der reinen Logik. Haben wir ein System A von Begriffen, welche unter sich durch eine Reihe von Aussagen verknüpft sind, und finden wir irgendwo ein logisches Gebäude, welches auf einem Begriffssystem B aufgebaut ist, das denselben logischen Zusammenhang hat wie das vorgegebene A, so brauchen wir nur festzustellen, welche Begriffe in den beiden Systemen A und B sich entsprechen. Setzen wir dann in dem logischen Gebäude statt der Begriffe B überall die entsprechenden Begriffe A, so haben wir schon die ganze Wissenschaft, welche sich auf die Begriffe A aufbauen läßt. Mi.

P. Juppont. Sur la terminologie. Toulouse Mém. (10) **5**, 247-251.

Der vorläufige Erfolg der Bemühungen des Verf. ist die Einsetzung einer Kommission, bestehend aus neun Mitgliedern der Toulouser Akademie. Mit Vorschlägen, über die sich die wenigen Herren einigen können, soll die Kommission späterhin zunächst an die übrigen gelehrten Gesellschaften Frankreichs herantreten. Alles ist als Vorbereitung für eine internationale Verständigung gedacht.

Die allgemeinen Gesichtspunkte bringen allgemein empfundene Mißstände zur Sprache. Die speziellen Vorschläge des Verf. kommen für Deutschland zum Teil nicht in Betracht — wenn bis zur Zeit der Ausführung nicht auch bei uns die Substantiva klein geschrieben werden und die Adjektiva den Substantiven nachgestellt werden dürfen. Lwt.

P. Juppont. Sur les grandeurs mathématiques. Toulouse Mém. (10) 5, 259-287.

Die Ungenauigkeiten in den Definitionen, die Vieldeutigkeit gleicher Zeichen und Bezeichnungen sind Hemmnisse der Sprache der Wissenschaft. Ausweg: feinere Unterscheidungen als üblich. Der Haß z. B. ist, trotzdem er vermehrt oder vermindert werden kann, keine Größe, sondern eine Qualität; eine durch eine gleichartige Einheit meßbare Größe ist eine Quotität. Man unterscheide die absolute, mathematische Wahrheit, die Überwahrheit, deren Gegenstände „denaturierte Realitäten" sind, von der auf Außendinge bezüglichen Wahrheit. Man unterscheide Gleichungen, Relationen und Äquivalenzen, die alle drei Verknüpfungen zwischen Quotitäten und Quantitäten sind. Man verwechsele nicht den Sinn, der dem Gleichheitszeichen in verschiedenen Fällen zukommt; man führe lieber acht verschiedene Zeichen ein. So geht es fort zu dem reinen Begriff der mathematischen Einheit, der Zelle, aus der sich die Zahl, eine Art Eigenquotität, organisch entwickelt. Über die Alquotitäten und Metriquotitäten — das sind algebraische Quotitäten mit Zahl und Vorzeichen und geometrische Quotitäten mit Zahl, Vorzeichen und Richtung — gelangt Verf. schließlich zu den mathematischen Operationen. Auch hier fehlt es nicht an Verbesserungsvorschlägen oder wenigstens neuen Namen. Die Gleichungen, welche die Regeln für die mathematischen Operationen enthalten, unterscheiden sich von der üblichen Darstellungsweise nur durch die oben erwähnten Sicherheitsventile gegen logischen Unterdruck. Man lese den Abschnitt über algebraische Multiplikation, über geometrische Multiplikation, über die imaginären Zahlen (oder besser Überzahlen) u. a.; man lese schließlich, daß dem Verf. die mathematischen Größen lange Zeit dunkel gewesen sind — und man wird finden, daß das Geständnis zu früh kommt. Lwt.

W. F. Meyer. Über das Wesen mathematischer Beweise. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 667-687.

Nimmt man einen gewissen Vorrat grundlegender Begriffe, Sätze und Methoden an, so erhebt sich die Frage, wie sich auf diesen der Besitz-

stand der Wissenschaft vermehrt. Dieser Fortschritt ist nicht mehr materieller, sondern rein formaler Art, indem er auf einer andern Anordnung, Gruppierung, Trennung und Verbindung bereits vorhandener Erkenntnisse beruht, wie an einzelnen Beispielen gezeigt wird. Da dieser Fortgang sehr verschiedenartig sein kann, so wird eine Reihe von Gesichtspunkten und Motiven angegeben, die vor allem bei der Auswahl der unbeschränkten Möglichkeiten maßgebend sind: die Forderung des Minimums und der Eindeutigkeit von Lösungen, das Prinzip der Symmetrie, die Gruppeneigenschaft, die Übertragungsprinzipien und schießlich auch der Sport und die Mode. P.

W. F. Meyer. Kant und das Wesen des Neuen in der Mathematik. Arch. der Math. u. Phys. (3) 8, 287-305.

Meyer führt die Lehre Kants von den synthetischen Urteilen der Mathematik weiter aus. indem er die Tätigkeiten der Gruppierung und der Auswahl bei der Gruppierung zugrunde legt, demnach die Mathematik in ihrem Streben nach neuen Erkenntnissen als eine Art erweiterter Kombinatorik hinstellt, die sich nicht auf farblose Elemente beschränkt, sondern die sich auf lebendige Begriffe, Methoden und Sätze erstreckt. Mi.

H. Liebmann. Notwendigkeit und Freiheit in der Mathematik. Deutsche Math. Ver. 14, 230-248.

Liebmann führt den Gedanken durch, daß die Mathematik trotz des festen Panzers der Logik, trotz der ineinandergreifenden Kettenglieder der Beweise, freie Beweglichkeit an einzelnen Beispielen ihrer Entwicklungsgeschichte, wie der Zahlbezeichnung, des Zeichensystems der höheren Analysis, der Wahl des Koordinatensystems, dem Wechsel des Raumelements, der Auswahl der Axiome an der Spitze der Geometrie, der Wahl des Raumsystems zeige. Durch ihre Freiheit in der Wahl der Werkzeuge und in der Wahl der Voraussetzungen wird die Mathematik befähigt, nicht nur als Dienerin zur Beschreibung des Beobachteten herangezogen zu werden, sondern die Hilfsmittel zu liefern, um die besten Versuchsbedingungen herauszufinden. Mi.

D. Hilbert. Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 174-185.

D. Hilbert. Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique. Ens. math. 7, 89-103.

Da die Grundlagen der Arithmetik bereits in die elementaren Fragen der Logik hineinspielen, ist die Begründung der Arithmetik, insbesondere der Nachweis der Widerspruchslosigkeit des Zahlbegriffs, nur mit einer gleichzeitigen Untersuchung der Logik selbst möglich. Es werden daher

die Operationen des Definierens und Schließens ihres gedanklichen Gehaltes bis auf den rein kombinatorischen Rest entkleidet. So bleiben gewisse einfache Gedankendinge und deren Kombinationen übrig. Diese Kombinationen müssen in zwei Klassen zerfallen, in „Seiende" und „Nichtseiende". Ein „Widerspruch" entsteht dadurch, daß eine solche Kombination zu beiden Klassen gehört. Die Prinzipien der Verteilung in die beiden Klassen sind die „Axiome", und es handelt sich daher um den Nachweis, daß aus diesen ein Widerspruch nicht entstehen kann. Wenn x, y irgend welche Kombinationen der einfachen Gedankendinge 1, =, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ sind, so sollen die Kombinationen (1) $x = x$, (3) $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{u}(\mathfrak{f}'x)$ stets zu den Seienden, (4) $\mathfrak{u}x = \mathfrak{u}y$ dann, wenn $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{f}(\mathfrak{u}y)$ zu den Seienden zählt, (2) $w(x)$ und $w(y)$ zur gleichen Klasse, wenn $x = y$ zu den Seienden zählt, und (5) $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{u}1$ stets zu den Nichtseienden gerechnet werden. Hiernach können wegen (1)-(4) nur solche Kombinationen zu den Seienden gerechnet werden, die die Form $\alpha = \beta$ haben, worin α und β aus gleichviel einfachen Dingen bestehen. Dagegen steht von der einzigen zu den Nichtseienden zu rechnenden Kombination (5) fest, daß sie rechts zwei, links mindestens drei einfache Dinge enthält. Zu einem Widerspruch können daher die fünf Axiome nicht führen.

Der Sinn des Zeichens $\mathfrak{u}$ ist „unendliche Menge", $\mathfrak{u}x$ „Element der unendlichen Menge", $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x)$ „folgendes Element", $\mathfrak{f}'$ „begleitende Operation". Durch Einführung neuer Gedankendinge entstehen neue Kombinationen, und diese erfordern neue Axiome zu ihrer Verteilung in die beiden Klassen. Hierbei tritt jede Menge zunächst als einfaches Gedankending m, jedes ihrer Elemente zunächst als Kombination $m\xi$ auf, wodurch die mengentheoretischen Widersprüche vermieden werden. So kann man die Menge m aller Dinge ξ, für die eine Kombination $a(\xi)$ zu den Seienden gehört, als widerspruchslos nachweisen, indem man zeigt, daß ein etwa vorhandener Widerspruch schon vor der Einführung von m und vor Aufstellung der m definierenden Axiome vorhanden gewesen sein muß. Hsb.

E. Schröder. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). Zweiter Band. Zweite Abteilung. Herausgegeben im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Eugen Müller. Mit einem Bildnis Ernst Schröders. Leipzig: B. G. Teubner. XXXII u. 401-606.

Bei dem Erscheinen der ersten Abteilung dieses Bandes schrieb der damalige Referent V. Schlegel: „Das Referat folgt nach dem Erscheinen der noch fehlenden Schlußkapitel des Werkes" (F. d. M. **23**, 51, 1891). Und bei dem ausführlichen Referate über die erste Abteilung des dritten Bandes (F. d. M. **26**, 74-80, 1895) gab Schlegel der frohen Erwartung Ausdruck, daß das ganze Werk, das von der Schaffensfreudigkeit Schröders zeuge, bald vollendet sein würde. Nun sind der Verf. und sein bewundernder Ref. nicht mehr unter den Lebenden, das Werk ist unvoll-

endet geblieben, und ein anderer Ref. muß über den Torso berichten, der statt des erhofften Kunstwerkes im Nachlasse vorgefunden ist.

Von der „Algebra der Logik" erschien 1890 der erste Band, 1891 die erste Abteilung des zweiten Bandes. Das Vorwort des letzteren versprach noch in demselben Jahre die zweite Abteilung nebst dem Schlusse des Werkes, dessen Inhaltsverzeichnis schon der erste Band gebracht hatte. Der in Aussicht genommene Stoff schwoll aber bei der Bearbeitung so an, daß dafür ein dritter Band bestimmt wurde, dessen erste Abteilung, über 700 Seiten stark, 1895 veröffentlicht ist.

Im Nachlasse befand sich ein ziemlich vollständig ausgearbeitetes Manuskript zum zweiten Teile des zweiten Bandes, allerdings größtenteils über ganz andere Dinge, als das früher gedruckte Inhaltsverzeichnis angab. Die Algebra der Relative (oder Beziehungsbegriffe) war ja im dritten Bande (erste Abteilung) bereits erledigt. — Die beiden ersten Paragraphen (§§ 50 und 51 der 24. Vorlesung) geben eine Reihe von Verbesserungen und Ergänzungen zum ersten Bande: „Vervollkommnung gewisser Partien des ersten Bandes. Zum Kapitel der symmetrisch allgemeinen Lösungen". Der folgende § 52 der 25. Vorlesung „Rückblick nebst Ergänzungen aus dem neuen Literaturzuwachse, Kritisches und Antikritisches", gibt einen kritischen Überblick über die gesamte Lehre und über die neuere hierher gehörige Literatur. Besonders werden in dem folgenden § 53 (26. Vorlesung), als ein lehrreiches Kapitel, die Kontroverse mit Frau Franklin-Ladd „zur Anbahnung und Verbreitung eines richtigen Verständnisses der hier vorgetragenen Aussagentheorie" ausführlich dargelegt. Hieran reiht sich in § 54 eine andere Darlegung von mehr allgemein logischem Interesse über zeitlich partikulare Urteile, Konstitution des Begriffes und „negative" Merkmale. Sodann erörtert § 55 (27. Vorlesung) die allgemeinsten Kalkule und Knüpfungen mit bestimmten formalen Eigenschaften, wie Kommutativität oder Assoziativität, Probleme, die sich mit denen aus dem ersten Bande des Lehrbuchs der Arithmetik und Algebra berühren. Der § 56, der als letzter den einzigen aus dem ursprünglichen Plane übernommenen Abschnitt enthält, behandelt die Modalität der Urteile und schließt mit dem Hinweise auf das zu erreichende Ziel: „Aus den einzeln irgendwie gegebenen Wahrscheinlichkeiten der Prämissen zu deduktiven Schlußfolgerungen durch allgemeine Methoden abzuleiten die Wahrscheinlichkeit einer jeden Art von Konklusion, die sie zu liefern vermögen, ja sogar einer jeden Aussage, die zu den Prämissen nur überhaupt in gegebener Beziehung steht! Sofern wir auch die Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln vermöchten für empirisch oder induktorisch gewonnene Erkenntnisse, werden wir, indem wir diesem Ideale zustreben, nach und nach in den Besitz eines zuverlässigen Maßstabes für den Grad der Glaubwürdigkeit aller Überzeugungen und Meinungen gelangen".

Es folgen noch zwei Anhänge, welche verschiedene Anwendungen des Logikkalkuls zum Gegenstand haben. Der eine (Anhang 7) beschäftigt sich mit der Ermittlung der neuen Grenzen vielfacher Integrale bei Abänderung der Integrationsfolge; die hierfür von McColl gefundene logisch-rechnerische Methode wird von Schröder in einem wesentlichen Punkte

verbessert und ergänzt. Im Anschluß an Kempe zeigt der zweite Anhang (Nr. 8), wie die Geometria situs mittels Rechnung nach den Gesetzen des Logikkalkuls begründet werden kann. Die betreffende Abhandlung Kempes (F. d. M. **22**, 79, 1890) „ist so durchaus eigenartig und eröffnet so merkwürdige Ausblicke, daß sie nicht bloß nebenher besprochen werden konnte, sondern daß vielmehr derselben ein besonderes Kapitel gewidmet werden muß."

Unterstützt von Lüroth, Korselt und Couturat, hat der Herausgeber sich der Mühe der Drucklegung dieses nachgelassenen Werkes Schröders unterzogen; nur bei dem zweiten Anhange war er genötigt, von S. 575 bis 592 das Fehlende möglichst im Sinne des Autors nach dem Kempeschen Originale zu ergänzen. Anmerkungen des Herausgebers (S. 593-597), ein von ihm ergänztes Literaturverzeichnis (S. 598-605) und ein Namenverzeichnis zum zweiten Bande machen den Beschluß. Der von Lüroth verfaßte Nachruf (vgl. F. d. M. **34**, 28, 1903) ist der Vorrede vorausgeschickt; ein recht gutes Bildnis Schröders ist als Titelbild dem Bande beigegeben. Lp.

L. Couturat. L'algèbre de la logique. Paris: Gauthier-Villars. 100 S. 8° (Collection Scientia; Série phys.-math.).

H. Laurent. A propos d'un livre de M. Couturat. Ens. math. 7, 305-309.

H. Laurent spricht sich über Couturats l'algèbre de la logique (Paris, 1905) aus. Er ist der Ansicht, daß die logische Algebra ein Zweig der gewöhnlichen Algebra ist und auf ihren Prinzipien beruht. Indem man von einer zutreffenden Definition der Quantität ausgeht, kann man nicht nur die reine und angewandte Mathematik auf feste Prinzipien stellen, sondern auch in die reine Mathematik oder in die Theorie der komplexen Zahlen die Logik der Algebra aufnehmen. Mi.

G. Peano. Formulario mathematico. Editio V (Tomo V de Formulario completo). Fasc. 1. Torino: Bocca. XLVII u. 391 S. u. 16 Figurenseiten. 8°.

Auch in dieser Auflage hat der Stoff der früheren (F. d. M. **33**, 73, 1902) gegenüber eine durchgreifende Umordnung erfahren; ferner wurde der Gebrauch des „latino sine flexione" (F. d. M. **34**, 78, 1903) eingeführt. Neu ist die Theorie der speziellen ebenen Kurven, welche das letzte Kapitel bildet. Vi.

R. Dedekind. Was sind und was sollen die Zahlen. Kasan Ges. (2) **15**, Nr. 2, 25-105. (Russisch.)

Russische Übersetzung unter der Redaktion von N. N. Parfentjeff. Si.

E. Wilk. Das Werden der Zahlen und des Rechnens im Menschen und in der Menschheit auf Grund von Psychologie und Geschichte. Dresden: Bleyl & Kaemmerer. 103 S. 8°.

Wilk versucht die Entstehung der Zahlen und der Rechenoperationen auf Grund psychologischer und geschichtlicher Betrachtungen festzustellen. Seine Abhandlung ist aber wesentlich spekulativ, und trotz der Berufung auf Wundt, Cantor und Kluge ist sie nur in beschränktem Maße induktiv und historisch. Er ist der Ansicht, daß das Viel und Wenig in seinen rohen Anfängen von dem Großen und Kleinen nicht unterschieden ist, die Zahl also ursprünglich räumlich ist und dann erst auch auf Zeitvorstellungen beruht. Einheitliche Zahlbilder des Raumes und der Zeit sind der Doppelursprung der Zahlauffassungen sowohl in der Seele des Kindes, als in der Menschheit. Nur die einfachen Zahlvorstellungen von 1 bis 4 entstehen auf natürliche Weise durch Wirkung und Gegenwirkung der Außenwelt und Seele. Sie allein haben einen Wert für die Entstehung der Zahlen. Die Zahl als abstrakte Vorstellung beruht erst auf vielfacher Wiederholung von irgend etwas an verschiedenen Punkten. Das Zählen beruht auf der Zahl, nicht die Zahl auf dem Zählen. Die Fünfergruppierung ist für die ersten Anfänge der Zahlverbindung eine psychische Notwendigkeit gewesen. Zur Gewinnung eines reinen Zehnersystems hat wesentlich die Sprachkraft mitgewirkt. Mi.

W. Lorey. Über die Wohltat und das Werden der Zahl. Progr. (Nr. 226). Gymn. Augustum Görlitz. 10 S.

Die bei Gelegenheit einer Schulfeier gehaltene Festrede gibt einen kurzen Überblick über die allmähliche Entwicklung und Erweiterung des Zahlbegriffs. F.

R. Achsel. Über den Zahlbegriff bei Leibniz. Progr. (Nr. 98). Bismarck-Gymn. Wilmersdorf. 20 S.

Die Zahl ist nach Leibniz („Nouveaux essais") eine intellektuelle Vorstellung, die nicht von den Dingen der Außenwelt herrührt, sondern von dem denkenden Subjekte selbst hervorgebracht wird. Die Erfahrung ist bei der Erwerbung der Zahlvorstellung nicht unbeteiligt; aber sie gibt nur die Veranlassung zur Apperzeption der schon vorhandenen, noch unbewußten eingeborenen Vorstellungen. Die Weiterentwicklung der Vorstellung findet unabhängig von der Erfahrung durch die Selbstbetätigung des Geistes statt. Die Zahlen sind Relationen, also abstrakte Vorstellungen rein begrifflichen Ursprungs und rein begrifflicher Existenz. Die mathematischen Sätze sind analytische Urteile, und die Arithmetik ist eine begriffliche Wissenschaft, deren Sätze aus den Definitionen und den identischen Wahrheiten bewiesen werden können und müssen. Mi.

O. JAHN. Einiges vom Zahlbegriff. Progr. (Nr. 282). Stadt-Gymn. Halle a. S. 25-40.

Darstellung und Besprechung der Ansichten, welche neuere Philosophen (Mill, Sigwart, Husserl) und Mathematiker (P. du Bois-Reymond, Helmholtz, Kronecker, Cantor, Stolz) über das Wesen der natürlichen Zahl entwickelt haben. F.

N. N. PARFENTJEFF. Idee der Kontinuität und der Diskontinuität. Rede, gehalten in der Jahressitzung der Phys.-mathematischen Gesellschaft Kasan am 20. III. (2. IV.) 1905. Kasan Ges. (2) 15, 1-24. (Russisch.)

Es wird die mit den Namen von Bugajew, Nekrassow usw. verbundene arithmologische Denkweise widerlegt. Der Verf. resumiert seine Ausführungen mit den Worten: „Wie die Idee der Kontinuität, so wohnt auch die der Diskontinuität unserem Bewußtsein inne, und beide sind mächtige Hebel in dem Streben des menschlichen Denkens nach Wahrheit. Der Natur scheint die Idee der Kontinuität innezuwohnen; was aber die der Diskontinuität betrifft, so ist dies noch fraglich." Si.

H. POINCARÉ. Cournot et les principes du calcul infinitésimal. Rev. de métaphys. et de morale 13, 293-306.

Die Revue de Métaphysique et de Morale hat der kritischen Besprechung der Cournotschen Ideen eine besondere Nummer gewidmet. Poincaré erörtert besonders die auf die Infinitesimalrechnung bezüglichen Vorstellungen Cournots. Sie gründen sich auf den Glauben an die Einfachheit der Natur; dieser Glaube selbst beruht auf dem Prinzip vom hinreichenden Grunde. Fe. (Lp.)

P. MILAU. Beitrag zur Untersuchung des erkenntnistheoretischen Wertes der verschiedenen analytisch möglichen Raumformen. Arch. der Math. u. Phys. (3) 9, 151-171, 345-357.

P. Milau sucht nachzuweisen, daß der apriorische Charakter des Raumes und seiner Qualitäten, wie ihn Kant festgestellt hat, durch die neuere Theorie der verschiedenen Raumformen keine Einbuße erlitten hat. Die begriffliche Aufstellung anderer Raumformen als der euklidischen ist durchaus berechtigt, aber dieselben haben nur eine analytische Bedeutung, und logisches Denken liefert nicht allein die Bedingungen für mögliche Erfahrung. Es muß daneben auch der reinen Raum- und Zeitanschauung eine ebenso streng beeinflussende Stellung eingeräumt werden. Der Raum ist subjektives apriorisches Eigentum unseres Geistes. Ob er daneben auch Objektivität besitzt, wie Lotze annimmt, ist nicht genügend geklärt. Mi.

S. Bogomolow. Kants Raumlehre und Lobatschewskys Pangeometrie. Fragen d. Philos. u. Psychologie Nr. 80 (**16**, Nr. 5), 683-694. (Russisch.)

Der Verf. bestreitet die Ansicht, daß zwischen den Folgerungen aus den Arbeiten von Kant und von Lobatschewsky unversöhnlicher Widerspruch bestehe, und daß die von dem letzteren gewonnenen Resultate den besten Beweis der Unrichtigkeit der Anschauungen Kants liefern. Dem entgegen ist der Verf. überzeugt, die Pangeometrie könne mit den Ideen der transzendentalen Ästhetik in Übereinstimmung gebracht werden, obgleich sie Fragen berührt, welche in der letzteren nicht betrachtet wurden. Was der russische Gelehrte tat, die Einführung anderer Axiome statt der euklidischen, konnte auch ein überzeugter Kantianer tun; denn die Axiome sind synthetische Urteile, und es ist also ein anderer Zusammenhang zwischen den in ihnen auftretenden Begriffen möglich. Kant berührte nicht die Frage nach dem Ursprung der Axiome; es kann sich also nur um ihre Rechtfertigung handeln. Die Methode von Kant, welche von den Grundbedingungen unserer Erkenntnis ausgeht, kann die Geometrie nur als das System der allgemeinen und notwendigen Wahrheiten rechtfertigen. In den sogenannten Beweisen des XI. Axioms handelt es sich immer um die Betrachtung der Unendlichkeit als einer gegebenen Größe; hierzu haben wir aber kein Recht, wie dies in der Kritik der reinen Vernunft, Abteilung über Antinomien, ausführlich erörtert ist. In der theoretischen Vernunft (im Kantschen Sinne des Wortes) finden wir keine Gründe, um ein für allemal eine der drei logisch gleichberechtigten geometrischen Systeme von Euklid, Lobatschewsky und Riemann zu wählen. Es bleiben also nur sozusagen praktische Gründe zur Wahl: größere Einfachheit oder Allgemeinheit usw.

Si.

W. J. Wernadski. Kant und die Naturwissenschaft des XVIII. Jahrhunderts. Fragen d. Phil. u. Psychologie Nr. 76, 36-70. (Russisch.)

Rede gehalten in der Sitzung der Moskauer psychologischen Gesellschaft, gewidmet dem Andenken Kants, 28. Dezember 1904 (10. Jan. 1905).

Si.

A. J. Batschinsky. Briefe über die Philosophie der Naturwissenschaften. II. Über den möglichen Einfluß der mathematischen Methoden auf die Züge der wissenschaftlichen Weltanschauung. (Dem Andenken meines Lehrers N. W. Bugajew.) Fragen d. Philosophie u. Psychologie Nr. 76 (**16** Nr. 1), 86-110. (Russisch.)

Die wissenschaftliche Weltanschauung des Momentes als Sieb für die damit nicht verträglichen Naturerscheinungen. Die Wissenschaft strebt in ihren Schlüssen nach Genauigkeit und Bestimmtheit; ihre Werkzeuge sind Zahl und Maß. Die Mathematik ist die Wissenschaft von der Zahl und dem Maße. Die Infinitesimalrechnung operiert nur mit den sogenannten

kontinuierlichen Funktionen; zur Bedingung der kontinuierlichen Variation wird manchmal noch die Bedingung der Eindeutigkeit hinzugefügt. Es ist kein Zufall, daß gerade Leibniz, der Entdecker der Infinitesimalrechnung, die Lex continui formulierte. Und seit seiner Zeit ist es Gewohnheit geworden, die Welttheorie sub specie continuitatis zu konstruieren, die verschiedenen Wirkungen der Natur als Resultat der Addition der unendlich vielen einzelnen verschwindend kleinen Wirkungen anzuschauen. Die integralen oder summatorischen Gesetze sind anschaulicher als die differentiellen; doch sind die letzteren geeignet, die Anzahl der Grundsätze, deren Entwicklung die Wissenschaft bildet, aufs äußerste zu verringern. Die Periode des ungestörten Herrschens der Nahewirkungstheorie war von kurzer Dauer. Die Elektronentheorie, — jetzt in Mode, — operiert wieder mit den kleinsten elektrischen Ladungen, welche nach dem Coulombschen Gesetz aufeinander wirken. Gedrängte Analyse der Formen, unter welchen die Idee der Kontinuität in verschiedenen Wissenszweigen auftritt (Transformismus in der Biologie): Laplacescher idealer Verstand. Analytische Weltanschauung. Assoziationstheorie. Theorie des psycho-physischen Parallelismus. Anwendung auf die Soziologie.

Si.

K. Frenzel. Über die Grundlagen der exakten Naturwissenschaften. Sechs Vorlesungen. Leipzig und Wien: Franz Deuticke. VI u. 145 S. gr. 8°.

In diesen auf Veranlassung des Vereins zur Abhaltung volkstümlicher Hochschulkurse ausgearbeiteten Vorträgen schildert der Verf. die Wandlungen in der philosophischen Naturbetrachtung von den ersten Anfängen bei den Griechen bis zur Jetztzeit unter den Überschriften: Allgemeine Betrachtungen, die Erfahrung, Kausalität, Hypothesen, naturwissenschaftliche Prinzipe, die Erkenntnis. Die Auffassung schließt sich hauptsächlich an Mach an, der vielfach wörtlich zitiert wird. Außerdem neigt Frenzel aber auch zu den Vorstellungen von Ostwald und schmückt seine Rede mit den Aussprüchen dieses extremsten Vertreters der Energetik. Abgesehen von manchen recht störenden Druckfehlern, sind auch offenbare Irrtümer untergelaufen. Kirchhoff sagt nicht: „Die Aufgabe der Physik sei es, die Tatsachen in möglichst einfacher und vollkommener Weise zu beschreiben“ (S. 46). In der Vorrede zu den Vorlesungen über Mechanik lautet die berühmte Stelle: „Aus diesem Grunde stelle ich es als Aufgabe der Mechanik hin, die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen zu beschreiben, und zwar vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben.“ Trotz der Rücksicht auf die mangelhafte mathematisch-physikalische Vorbildung der Zuhörer hätte sich manches schärfer und weniger unbestimmt aussprechen lassen. In der Frische und dem leichten poetischen Gewande wird jedoch das Buch Interesse erwecken und vielleicht manchen dazu anregen, sich um die Prinzipien der Erkenntnislehre umzutun.

Lp.

J. Classen. Über die Grenzen des Naturerkennens. (Nach einem Vortrag, gehalten im Naturwissenschaftlichen Verein in Hamburg.) Jahrb. Hamb. Wissensch. Anst. **23**, 1905. Hamburg: Lucas Gräfe & Sillem. 16 S. gr. 8°.

Der Verf. führt den Begriff der „Dominante" ein, die drei Bedingungen zu erfüllen hat: 1. Es muß ein Gesetz empirisch gefunden sein. 2. Das Gesetz muß so formuliert sein, daß es sich niemals aus mechanischen Zusammenhängen folgern läßt. 3. Die Anerkennung dieses Gesetzes muß sich für die Naturwissenschaft fruchtbar zum Auffinden neuer Beziehungen erweisen, so daß es nicht entbehrt werden kann. — Hiernach ist der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie eine Dominante in der anorganischen Welt. An Stelle der letzten Grenze des Naturerkennens, die E. du Bois-Reymond in seinem bekannten Leipziger Vortrage von 1872 zugeben will, würden nach dem heutigen Stande der Naturwissenschaft derartige Dominanten zu setzen sein, die also bereits im eigensten Gebiete der Physik vorkommen. Die Frage nach der Natur der lebenden Wesen führt vielleicht zur Anerkennung einer anderen Dominante des Lebens. Dieselbe genügt den beiden ersten Forderungen; aber es kann noch nicht festgestellt werden, ob es wissenschaftlichen Nutzen bringen kann, das Wesen des Lebens als eine Dominante aufzufassen. Lp.

W. Voigt. Über Arbeitshypothesen. Gött. Nachr., Geschäftl. Mitt. 1905, 98-116 †.

Diese in der öffentlichen Sitzung der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften am 11. November 1905 gehaltene Rede beleuchtet in allgemein verständlicher Weise den Wert der „Arbeitshypothesen, d. h. der Bilder, die wir uns von dem Mechanismus eines Vorganges machen können", schildert die „Entwicklung gewisser hypothetischer Vorstellungen, die in der Physik eine große Rolle gespielt haben, und deren Wechsel, Auftauchen und Verschwinden dem Fernerstehenden den Eindruck eines unsicheren Herumtastens erwecken könnte, und setzt die Bedeutung auseinander, welche dieser Wechsel faktisch für die Wissenschaft besitzt". Den größten und den interessantesten Teil bildet die Skizze der Geschichte der Optik und der Elektrodynamik von Huygens bis auf die jüngste Zeit. Lp.

J. Schultz. Die Bilder von der Materie. Eine psychologische Untersuchung über die Grundlagen der Physik. Göttingen: Vanderhoeck & Ruprecht. VII u. 201 S. gr. 8°.

In geistvoller und anregender Darlegung mustert Schultz die Ansichten vom Wesen der Materie, um als Psychologe, nicht als Physiker zu der Ansicht zu gelangen, daß alles Geschehen in der unorganischen Natur auf Zug und Stoß von Kraftzentren zurückgeführt werden kann. Von der Wirklichkeit außer uns liegt darin kein Wissen über das Frühere hinaus, aber das Wesen des Denkens wird dadurch in klareres Licht gesetzt. Das Buch wird jeden Leser interessieren, auch wenn er anderer Überzeugung sein sollte. Mi.

S. Oppenheim. Über das Verhältnis des Koppernikanischen Weltsystems zu dem Ptolemäischen. Poske Zs. 18, 12-15.

Für die Vorausberechnung einer Planetenephemeride sind beide Systeme identisch. Aber das „Bild“, das sie dem Geiste bieten, ist ein wesentlich anderes. „Nach Ptolemäus konnte man sich von den Entfernungen der Planeten von der Sonne keine Vorstellung machen. Die Koppernikanische Auffassung machte die obwaltenden Verhältnisse mit einem Schlage klar, sie gab Distanzen und damit ein wohlgeordnetes Ganzes. Dort eine vollständige Regellosigkeit — hier ein geregelter Mechanismus. Lp.

Th. Newest. Die Gravitationslehre ein Irrtum! Einige Weltprobleme. Wien: Carl Konegen. 93 S. 8°.

Von keinem mühselig erworbenen Schulwissen belastet, ist der Verf. in der beneidenswert glücklichen Lage, eine neue Theorie der Zentration und der Kontrazentration entdeckt zu haben, in deren Besitz er über alle in Vorurteilen befangenen sogenannten Gelehrten siegessicher triumphiert. Er hofft aus der Schar ähnlich groß gewordener Menschenkinder eine Anzahl Jünger zu gewinnen, während er die armen Leute, deren Blick durch Schulweisheit getrübt ist, humorvoll und mitleidig bedauert. Lp.

H. Fehr. L'enquête de „l'Enseignement Mathématique“ sur la méthode de travail des mathématiciens. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 603-607.

H. Fehr. Notre enquête sur la méthode de travail du mathématicien. Ens. math. 7, 239-240, 387-395, 473-478.

Vgl. Ens. math. **4**, 208-211 (F. d. M. **33**, 81, 1902) und das nachstehende Referat. P.

E. Maillet. Les rêves et l'inspiration mathématiques (enquête et résultats). Soc. Philom. Bull. (9) 7, 19-62.

Ob ein besonderer Geisteszustand bestehe beim Finden mathematischer Wahrheiten, und ob mathematische Ergebnisse im Traum gefunden werden — das suchte Maillet durch Umfrage festzustellen. Er teilt (S. 22-55) die 66 Antworten zum Teil berühmter Mathematiker mit und stellt deren Ergebnisse übersichtlich zusammen (S. 55-62). Tn.

Weitere Literatur.

Brinkmann. Über kritische Mathematik bei Platon. Abhdl. d. Friesschen Schule 1.

J. R. Miller. Significance of the mathematical elements in the philosophy of Plato. Chicago. 96 S. 8°.

E. S. Haldane. Descartes, his life and times. New York: Dutton. XXVIII u. 398 S. 8°.

L. Brunschwicg. Spinoza et ses contemporains. Rev. de métaphys. et de mor. **13**, 673-705.

B. Petronievics. Prinzipien der Metaphysik. Heidelberg: Carl Winter. Bd. I, Teil 1. XXXI u. 444 S. [Nature **72**, 75-76.]

A. Rist. La philosophie naturelle intégrale et les rudiments des sciences exactes. I. Paris: A. Hermann. VI u. 132 S. (1904). [Nature **72**, 313.]

Huber. Der Denkprozeß von Mensch und Tier. Als Schluß der Darwinschen Theorie. Neue, mit mathematischer Genauigkeit bewiesene Theorie des positiven und negativen Denkprozesses, der Projektion der Gedankenbilder, der elektrischen Apparate in Gehirn und Körper, der elektrischen Seele von Mensch und Tier, des Schlafes, Traumes, Fiebers, Todes usw. Rev. v. Malten. 2. verb. Aufl. Leipzig: J. H. Robolsky. 120 S. gr. 8°.

É. Picard. La science moderne et son état. Paris 12mo (Bibliothèque de philosophie scientifique).

Sur les définitions et les propriétés caractéristiques. L'éducation math. 8, 1.

D. Hilbert. On the foundation of logic and arithmetic. Translated by G. B. Halsted. The Monist, July 1905, 338-352.

É. Le Roy. Sur la logique de l'invention. Rev. générale des Sc. **16**, 193-223.

M. Winter. Métaphysique et logique mathématique. Rev. générale des Sc. **16**, 589-619.

F. Mentré. Les racines historiques du probabilisme rationnel de Cournot. Rev. générale des Sc. **16**, 485-508.

Nelson. Bemerkungen über nichteuklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit. Abhdl. d. Friesschen Schule **2**.

R. de Saussure. Les grandeurs spatiales. Arch. sc. phys. et nat. (4) **19**, 301-302.

G. Milhaud. Matière et mouvement. Bases d'une mécanique objective opposée à la mécanique classique. Rev. générale des Sc. **16**, 797-798.

G. Berndt. Moderne Anschauungen über die Konstitution der Materie. Berlin. 14 S. gr. 8°.

O. v. Kraft. Äther, Atom, Raum. Eine Glosse zu Häckels Welträtseln. Dresden: E. Pierson. 12 S. 8°.

W. Ostwald. Vorlesungen über Naturphilosophie. 3. verm. Aufl. Leipzig: Veit & Co. XVI u. 520 S. gr. 8°.

C. J. Keyser. The universe and beyond; the existence of the hypercosmic. The Hibbert Journal **3**, 300-314.

C. J. Keyser. The axiom of infinity. The Hibbert Journal **3**, 380-383.

R. Avenarius. Der menschliche Weltbegriff. Zweite, nach dem Tode des Verf. herausgegeb. Aufl. Leipzig: O. S. Reisland. XXIV u. 134 S. gr. 8°.

C. Braun. Über Kosmogonie vom Standpunkt christlicher Wissenschaft nebst einer Theorie der Sonne und einigen darauf bezüglichen philosophischen Betrachtungen. 3. vermehrte u. verb. Aufl. Münster: Aschendorff. XXIII u. 491 S. gr. 8°.

E. Lieckfeldt. Die Entstehung und Entwicklung des Weltalls. Berlin: 27 S. gr. 8°.

R. B. Arnold. Scientific fact and metaphysical reality. London: Macmillan and Co. XXIII u. 360 S. (1904). [Nature 71, 505-506.]

B. Mengenlehre.

E. W. Hobson. On the general theory of transfinite numbers and order types. Lond. M. S. Proc. (2) 3, 170-188.

Eine lange Erörterung über den von anderer Seite schon früher bemerkten Widerspruch, daß nämlich der Reihe aller transfiniten Ordnungszahlen, ob sie auch eine wohlgeordnete Reihe ist, keine Ordnungszahl zukommen darf. Burali-Forti (Una questione sui numeri transfiniti. Palermo Rend. **11**, 154-164; F. d. M. **28**, 62, 1897) hat gezeigt, daß der Widerspruch sich dadurch heben läßt, daß man auf den Satz verzichtet, nach welchem zwischen zwei beliebigen Ordnungszahlen α, β eine der drei Beziehungen $\alpha \gtreqless \beta$ notwendig bestehen muß. Jourdain (On the transfinite cardinal numbers of well-ordered aggregates, Phil. Mag. (6) **7**, 61-75; F. d. M. **35**, 89, 1904) gibt die Existenz wohlgeordneter Mengen zu, welchen keine Ordnungszahl zukommt, welche folglich keine Alefzahl als Kardinalzahl besitzen, und nennt dieselben inkonsistente Mengen. Hobson findet den Grund des Widerspruches darin, daß eine unendliche Menge nur dann als definiert angesehen werden darf, wenn eine Norm existiert, durch welche man logisch entscheiden kann, ob ein Ding der Menge angehört oder nicht.

Es scheint aber eine wichtige, die Einwände von Burali-Forti betreffende Tatsache Hobson entgangen zu sein. Wie Burali-Forti (Sulle classi ben ordinate, Palermo Rend. **11**, 260; F. d. M. **28**, 62, 1897) selbst erkannte, und Ref. in seinem Berichte betont hat, sind die von ihm als vollkommen geordnet bezeichneten Mengen nicht immer wohlgeordnet, woraus folgt, daß seine gemeinten Ordnungszahlen zwar wohl Ordnungstypen, nicht aber Ordnungszahlen zu sein brauchen, und der bezweifelte Satz unberührt bleibt. Vi.

E. Lindelöf. Remarques sur un théorème fondamental de la théorie des ensembles. Acta Math. **29**, 183-190.

Lindelöf beweist auf eine von dem Begriff der transfiniten Zahl unabhängige Weise die folgenden Sätze: Ist (P) eine in einem Raume von endlicher Dimensionszahl liegende, nicht abzählbare Punktmenge und bezeichnet man als „Verdichtungspunkt" von (P) jeden Punkt, in dessen Umgebung eine nicht abzählbare Teilmenge von (P) liegt, so bilden die Verdichtungspunkte von (P) eine perfekte Menge (C), und die der Menge (C) nicht angehörigen Punkte von (P) eine abzählbare Menge (R). Ist (P) insbesondere abgeschlossen, so ist (C) eine Teilmenge von (P), und es folgt dann:

$$(P) = (C) + (R),$$

ein längst bekanntes Resultat.

Ist (P) eine in einem Raume von endlicher Dimensionszahl liegende Punktmenge, und ordnet man jedem Punkte P eine Kugel um P zu, so läßt sich eine abzählbare Menge von Kugeln derart wählen, daß jeder Punkt von (P) im Innern von einer derselben liegt.

Ist (P) eine in einem Raume von endlicher Dimensionszahl liegende Punktmenge, und läßt sich zu jedem Punkte P eine Kugel um diesen Punkt annehmen, welche nur eine abzählbare Teilmenge von (P) umfassen möge, so ist (P) abzählbar. Vi.

J. König. Zum Kontinuumproblem. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 144-147.

Es ist $\aleph_y^{\aleph_a} > \aleph_y$, wenn $\aleph_y$ auf eine Reihe Alefs unmittelbar folgt, deren Ordnungstypus eine Limeszahl von der Mächtigkeit $\aleph_a$ ist. Verf. beweist diesen Satz für $\aleph_a = \aleph_0$, also für Reihen vom Typus ω. Durch die zu enge Fassung der Voraussetzung in dem Ansatz $y = \mu + \omega$ macht er aber die spezielle Anwendung auf die Mächtigkeit $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ des Kontinuums ($\mathfrak{c} > \aleph_0$) unverständlich. — Der Beweis erfolgt durch eine allgemeine Betrachtung. Ist $\mathfrak{s}$ die Summe, $\mathfrak{p}$ das Produkt einer Reihe von Mächtigkeiten, die den Typus ω besitzt, so ist $\mathfrak{p} \gtreqless \mathfrak{s}^{\aleph_0}$. (Übrigens ist auch $\mathfrak{s} \gtreqless \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{s}^{\aleph_0} = \mathfrak{p}^{\aleph_0}$, sofern $\mathfrak{p}$ transfinit ist, d. h. sofern wenigstens eine Mächtigkeit der Reihe selbst transfinit oder eine transfinite Anzahl von ihnen größer als 1 ist.) Ist ferner jede der Mächtigkeiten der Reihe größer als die vorhergehenden, so ist $\mathfrak{s} < \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{s} < \mathfrak{s}^{\aleph_0}$. Wählt man die Reihe speziell als $\aleph_\mu, \aleph_{\mu+1}, \aleph_{\mu+2}, \ldots$, so wird $\mathfrak{s} = \aleph_{\mu+\omega}$, und es ergibt sich der genannte Satz:

$$\aleph_{\mu+\omega}^{\aleph_0} > \aleph_{\mu+\omega}.$$

Mit dem Kontinuumproblem in Zusammenhang tritt er durch die Formel $\aleph_x^{\aleph_0} = \aleph_x \cdot \mathfrak{c}$, die aus einem allgemeineren Satz von Bernstein folgt. (Untersuchungen zur Mengenlehre. Diss. Göttingen 1901, Math.

Ann. Bd. **61**, 117ff.). Sie gilt für jedes endliche x. Ist $\mathfrak{c}$ ein Alef, $\aleph_\mu$, so folgt wegen $\aleph_\mu + \omega \cdot \aleph_\mu = \aleph_{\mu+\omega}$ für $y = \mu + \omega$ aus dem Königschen Satz

$$\aleph_{\mu+\omega}^{\aleph_0} > \aleph_{\mu+\omega} \cdot \mathfrak{c}.$$

Also gibt es sicher transfinite Zahlen x, für die der Bernsteinsche Satz nicht richtig ist. Gilt dagegen Bernsteins Satz auch für alle transfiniten x, so ist $\mathfrak{c}$ größer als alle Alefs, und umgekehrt, wodurch dieser Satz trivial wird.

In seiner ersten Veröffentlichung hat Bernstein die Beschränkung auf endliche x nicht angegeben, so daß König in seinem Vortrag den Schluß auf die Unmöglichkeit zog, das Kontinuum wohlzuordnen. In der Form der Zurücknahme dieses Schlusses und in dem Hinweis auf den Zusammenhang des Kontinuumproblems mit dem Gültigkeitsbereich des Bernsteinschen Satzes liegt meines Erachtens nichts, was Bernsteins gereizte Entgegnung in den Math. Ann. rechtfertigt. Hsb.

J. König. Zum Kontinuumproblem. Math. Ann. **60**, 177-180.

Das Kontinuum kann keiner wohlgeordneten Menge äquivalent sein, für die eine unmittelbar vorhergehende wohlgeordnete Menge nicht existiert. Wäre ferner ein gewisser Bernsteinscher Satz richtig, wogegen der Verfasser Bedenken erhebt, so wäre das Kontinuum keiner wohlgeordneten Menge äquivalent, während es im entgegengesetzten Falle einer wohlgeordneten Menge äquivalent sein müßte. Vi.

J. König. Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem. Math. Ann. **61**, 156-160.

König bemüht sich zu beweisen, daß das Kontinuum nicht wohlgeordnet werden kann. Sein Beweis scheint uns aber nicht klar, vielleicht auch nicht ganz stichhaltig. Vi.

F. Bernstein. Zur Mengenlehre. Deutsche Math.-Ver. **14**, 198-199.

Bernstein gibt zu, daß ein von F. Hausdorff (Der Potenzbegriff in der Mengenlehre. Deutsche Math.-Ver. **13**, 569-571; F. d. M. **35**, 89, 1904) gegen eine von ihm aufgestellte Gleichung erhobener Einwand zutreffend ist, bemerkt aber, daß die Unrichtigkeit auf die Folgen dieser Gleichung keinen Einfluß übt. Vi.

F. Bernstein. Die Theorie der reellen Zahlen. Deutsche Math.-Ver. **14**, 447-449.

Eine kurze Skizze des für die Math. Ann. bestimmten Beweises des folgenden mengentheoretischen Hauptsatzes: Das Kontinuum ist von der

zweiten Mächtigkeit und läßt sich in eine durch Zahlen der zweiten Zahlenklasse abzählbare wohlgeordnete Reihe umwandeln. Vi.

F. BERNSTEIN. Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen. Math. Ann. **60**, 187-193.

Es ist schon längst von mehreren Seiten bemerkt worden, daß der von sämtlichen Ordnungszahlen gebildeten wohlgeordneten Reihe W keine Ordnungszahl zukommen darf, da eine solche Ordnungszahl, wenn sie überhaupt existierte, der Reihe W nicht angehören könnte; und manche Autoren haben sich bemüht, diesen Widerspruch zu heben. Einen neuen Versuch in dieser Richtung macht Bernstein hier. Vi.

F. BERNSTEIN. Zum Kontinuumproblem. Math. Ann. **60**, 463-464.

Richtigstellung eines Satzes der Dissertation: Untersuchungen aus der Mengenlehre (F. d. M. **32**, 73, 1901). Vi.

F. BERNSTEIN. Untersuchungen aus der Mengenlehre. Math. Ann. **61**, 117-155.

Ein fast unveränderter Abdruck der im Jahre 1901 unter gleichem Titel erschienenen Dissertation (F. d. M. **32**, 73, 1901). Vi.

E. V. HUNTINGTON. The continuum as a type of order: an exposition of the modern theory. Annals of Math. (2) **6**, 151-184; **7**, 15-43.

Der Verf. bemerkt, daß, während die älteren Definitionen der stetigen Menge auf dem Größenbegriff begründet sind, die Dedekind-Cantorsche Theorie nur den Ordnungsbegriff gebraucht, und setzt sich vor, diese Theorie in einer Form vorzutragen, welche selbst den Nicht-Mathematikern zugänglich sein soll. Dieser Zweck ist unserer Meinung nach völlig erreicht worden; die Darstellung ist klar und ausführlich, und die sachgemäß gewählten Beispiele sind dazu recht geeignet, zu dem Verständnis der Theorie wesentlich beizutragen.

In den sechs Kapiteln, aus welchen die Abhandlung besteht, werden nacheinander die Mengen im allgemeinen, die einfach geordneten, die diskreten, die überalldichten und die stetigen ein- und mehrdimensionalen Mengen behandelt; ein Anhang ist den wohlgeordneten Mengen und den transfiniten Zahlen gewidmet. Vi.

A. SCHOENFLIES. Über wohlgeordnete Mengen. Math. Ann. **60**, 181-186.

E. BOREL. Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles. Math. Ann. **60**, 194-195.

J. Hadamard, R. Baire, H. Lebesgue, E. Borel. **Cinq lettres sur la théorie des ensembles.** S. M. F. Bull. **33**, 261-273.

Über die Note von E. Zermelo: „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann" (Math. Ann. **59**, 514-516; F. d. M. **35**, 88, 1904). Vi.

Ph. E. B. Jourdain. **On a proof, that every aggregate can be well-ordered.** Math. Ann. **60**, 465-470.

Ein neuer Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Vgl. Zermelo, „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann", in Math. Ann. **59**, 514-516; F. d. M. **35**, 88, 1904. Vi.

Ph. E. B. Jourdain. **The definition of a series similarly ordered to the series of all ordinal numbers.** Messenger (2) **35**, 56-58.

Zunächst wird der Cantorsche Begriff der „Zahlenklasse" verallgemeinert als Klasse für eine wohlgeordnete transfinite Reihe W. Dann lautet die verlangte Definition: Wenn a ein beliebiges Element von W ist und A die dem a entsprechende Klassencharakteristik, sobald die durch a begrenzte Reihe auf der Reihe der Klassencharakteristiken von W dargestellt ist, dann ist a in einem von A begrenzten Segment der Reihe enthalten. Lp.

Ph. E. B. Jourdain. **On transfinite cardinal numbers of the exponential form.** Phil. Mag. (6) **9**, 42-56.

Verf. macht den Versuch, durch Ordnung nach dem Prinzip der wohlgeordneten Reihe zu einem Beweise des Satzes zu gelangen, daß die Belegung von 2 mit einer Menge von der niedrigsten Kardinalzahl zu einer Menge von der nächsten Kardinalzahl führe, findet aber den Beweis auf diesem Wege unmöglich. Als Ordnungsprinzip wird dabei das nach rationalen Funktionen benutzt. Dieses negative Resultat führt zu einigen Überlegungen über die zweckmäßige Definition des Begriffes der analytischen Funktion vom Standpunkt der Mengenlehre aus und zu einigen weiteren, damit nicht im direkten Zusammenhang stehenden Fragen. Es wird z. B. ausgeführt, daß zwar der Gesamtheit aller Mächtigkeiten keine Mächtigkeit mehr zukomme, daß sie aber trotzdem auch in der Mengenlehre eine begriffliche Bedeutung haben könne. Br.

A. E. Harward. **On transfinite numbers.** Phil. Mag. (6) **10**, 439-460.

Die Arbeit enthält, wenn sie auch gegen den Schluß auf Einzelheiten eingeht, im Grunde genommen eine Darstellung der Fundamente der Mannigfaltigkeitslehre. Verf. führt den Ausdruck „Klassen" ein, als unbestimmte Bezeichnung für irgend eine Anhäufung von Vorstellungs-

objekten und unterscheidet zwischen unbegrenzten Klassen, bei denen es nicht möglich sein soll, die Anhäufung als eine Einheit aufzufassen (der dialektische Beweis dafür scheitert an der Tatsache, daß dies ganz im Belieben des einzelnen steht), und begrenzten Klassen, bei denen es als möglich vorausgesetzt ist. Die letzte Kategorie wird noch nicht ganz mit Mannigfaltigkeiten gleich gesetzt, sondern es wird für diese noch als Bedingung aufgestellt, daß man die Häufung nicht nur als Einheit, sondern auch als Gesamtheit der Teile auffassen kann; der hierin liegende Unterschied wird aber, als für die Entwicklungen bedeutungslos, außer acht gelassen. In ähnlicher Weise erfahren auch die etwas spezialisierteren Begriffe der Mengenlehre eine entsprechende Kritik und eine etwas andere Darstellung, über die sich im einzelnen naturgemäß nicht referieren läßt. Neue Resultate sind in der Arbeit nicht enthalten. Br.

J. Richard. Les principes des mathématiques et le problème des ensembles. Rev. générale des Sc. **16**, 541-542.

Die Note bezieht sich auf gewisse Widersprüche, die in der Mengenlehre auftreten, und von denen in einer Notiz des Briefkastens (S. 241 bis 242) die Rede ist bei Gelegenheit der Besprechung der Beweise von König und Zermelo. Richard beschäftigt sich mit einem neuen Beispiel, das er vollständig aufklärt. Fe. (Lp.)

G. Faber. Über die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen. Math. Ann. **60**, 196-203.

Die Abzählbarkeit der Menge der rationalen Zahlen ist schon längst nachgewiesen worden. Faber gibt aber eine Abzählungsmethode an, welche es erlaubt, die einer vorgegebenen rationalen Zahl zukommende Nummer, sowie die eine bestimmte Nummer tragende rationale Zahl mit leichter Mühe zu bestimmen. Dazu ordnet er der rationalen Zahl:

$$x = \frac{a_1}{2!} + \frac{a_2}{3!} + \cdots + \frac{a_n}{(n+1)!}$$

die ganze Zahl:

$$y = a_1 + 2!\, a_2 + 3!\, a_3 + \cdots + n!\, a_n$$

zu, wobei

$$0 \leqq a_i < (i+1)!, \; 0 \leqq b_i \leqq (i+1)!$$

ist. Die Koeffizienten a_i, b_i lassen sich durch trigonometrische Reihen ausdrücken. Vi.

F. Sibirani. Insiemi numerabili di punti uniformemente densi sopra linee od in aree assegnate. Batt. G. **43** [(2) **12**], 156-171.

Der Verf. bildet Punktmengen von der im Titel angegebenen Beschaffenheit und wendet die Ergebnisse seiner Untersuchungen auf die Aufstellung von Lückenfunktionen an. Vi.

W. H. YOUNG. Zur Theorie der nirgends dichten Punktmengen in der Ebene. Math. Ann. **61**, 281-286.

A. SCHOENFLIES. Bemerkung zu dem vorstehenden Aufsatz des Herrn Young. Math. Ann. **61**, 287-288.

Schoenflies („Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten". Deutsche Math.-Ver. 8_2, 1-250; F. d. M. **31**, 70, 1900) hat behauptet, daß die Projektion einer ebenen, nirgends dichten abgeschlossenen Punktmenge, die keine Strecke und kein Kurvenstück enthält, auf einer Geraden nirgends dicht und abgeschlossen ist. Young zeigt durch ein Beispiel, daß der Satz nicht immer stattfindet. Dazu bemerkt Schoenflies, daß Baire ihn schon vor längerer Zeit auf sein Versehen aufmerksam gemacht hätte, und teilt ein von diesem angegebenes Beispiel mit. Vi.

W. H. YOUNG. Ordinary inner limiting sets in the plane or higher space. London M. S. Proc. (2) **3**, 371-380.

Ist eine endliche oder abzählbar unendliche Reihe von Mengen von Bereichen gegeben, so bildet der Inbegriff sämtlicher Punkte, deren jeder im Innern wenigstens eines Bereiches jeder Menge liegt, eine „gewöhnliche innere Grenzmenge" („an ordinary limiting set"). Auf solche Mengen erstreckt der Verf. die früher („Zur Lehre der nicht abgeschlossenen Punktmengen". Leipz. Ber. **55**, 287-293; F. d. M. **34**, 77, 1903. — „On sequences of sets of intervals containing a given set of points". London M. S. Proc. (2) **1**, 262-266; F. d. M. **35**, 91, 1904) von ihm für lineare innere Grenzmengen aufgestellten Sätze. Vi.

W. H. YOUNG. Linear content of a plane set of points. London M. S. Proc. (2) **3**, 461-477.

Der Inhalt einer ebenen Punktmenge (P) ist bekanntlich der Grenzwert für $d=0$ der Fläche $F(d)$ des von den um die Punkte P mit dem Radius d beschriebenen Kreisen bedeckten Ebenenteils. Als „linearen Inhalt" von (P) bezeichnet aber Young $\lim_{d=0} \frac{F(d)}{d}$, sobald ein solcher Grenzwert überhaupt existiert.

Der lineare Inhalt einer auf einer Geraden oder auf einer Kreislinie liegenden Intervallmenge ist die Summe ihrer Längen. Dagegen kann wohl der lineare Inhalt einer Menge von Kreisbogen von der Summe ihrer Längen verschieden sein, wenn diese Bogen unendlich vielen Kreislinien

angehören, wie der Verf. durch ein Beispiel nachweist. Durch weitere Beispiele wird gezeigt, daß der lineare Inhalt einer abzählbaren zweidimensionalen Punktmenge von Null verschieden und selbst unendlich sein kann.

Da der Grenzwert von $\frac{F(d)}{d}$ nicht immer existiert, so schlägt Young noch eine andere, in allen Fällen gültige Definition des linearen Inhalts vor, welche mit der ersten selbstverständlich nicht übereinstimmt, welche aber dieselben paradoxen Erscheinungen wie diese aufzeigt. Vi.

W. H. Young. The potencies of closed and perfect sets. Quart. J. **36**, 280-284.

Neue Beweise einiger bekannten Eigenschaften der abgeschlossenen und perfekten Punktmengen. Vi.

W. H. Young. On regions and sets of regions. Quart. J. **37**, 1-35.

Der Verf. setzt sich vor, die Theorie der ebenen Bereiche auf festen Grund zu bauen. Die etwas komplizierte Terminologie macht es uns unmöglich, ihm ins einzelne zu folgen, und wir begnügen uns also damit, die Hauptbegriffe hervorzuheben.

Ein „Bereich“ („region“) ist ein bei der Bewegung eines Dreiecks von veränderlicher Form bedeckter Ebenenteil. Ein Bereich zerlegt die Punkte der Ebene in „äußere Punkte“, „innere Punkte“ und „Randpunkte“ („edge points“). Die Randpunkte bilden, zusammen mit gewissen äußeren Punkten, den hier nicht näher zu bezeichnenden „äußeren Grenzpunkten“ („external limiting points“), die „Begrenzung“ („boundary“) des Bereiches. Die Punkte der Begrenzung bilden eine abgeschlossene Punktmenge. Diese Begriffe reichen hin, um die Haupteigenschaften der Punkt- und Intervallmengen auf die Mengen von Bereichen zu übertragen. Auch der Begriff einer ebenen Kurve wird präzisiert; es wird als solche eine derartige ebene, nirgends dichte Punktmenge bezeichnet, daß der von den um die Punkte derselben mit dem Radius δ gezogenen Kreisen bedeckte Ebenenteil innerhalb keines Parallelstreifens von mit δ unbeschränkt abnehmender Breite liegt. Es ergibt sich, daß eine solche Kurve, sobald ihre Punkte eine abgeschlossene Menge bilden, was nicht immer der Fall ist, als die Grenze einer Polygonallinie angesehen werden kann. Vi.

W. H. Young. On a perfect plane set. Messenger (2) **34**, 160.

Beispiel einer ebenen vollkommenen Punktmenge, welche gerade Linien oder Kurven nicht enthält. Lp.

F. Riesz. Sur un théorème de M. Borel. C. R. **140**, 224-226.

E. Borel. Sur une propriété des ensembles fermés. C. R. **140**, 298-300.

Es handelt sich hier um das gewöhnlich als Heine-Borelscher Satz bezeichnete Theorem: Gibt es eine solche abzählbare Intervallmenge, daß jeder Punkt eines Intervalles $a \dots b$ innerhalb wenigstens eines dieser Intervalle liegt, so gibt es auch eine endliche Intervallmenge, welche dieselbe Eigenschaft besitzt. Es wird nachgewiesen, daß die Bedingung der Abzählbarkeit überflüssig ist; ferner wird das Intervall $a \dots b$ durch eine abgeschlossene Punktmenge ersetzt und der Satz auf ein mehrdimensionales Gebiet ausgedehnt.

Borel bemerkt, daß die Überflüssigkeit der Bedingung von der Abzählbarkeit schon früher von H. Lebesgue (Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris: Gauthier-Villars, 1904; F. d. M. **35**, 377, 1904) und kürzlich auch von R. Baire bemerkt worden ist; er erwähnt auch, daß die im besprochenen Theoreme angegebene Eigenschaft für die abgeschlossenen Mengen charakteristisch ist, und verweist darüber auf seine Schrift: Contribution à l'analyse arithmétique du continu (Journ. de Math. (5) **9**, 329-375; F. d. M. **34**, 239, 1903) und auf die Note von O. Veblen: The Heine-Borel theorem (American M. S. Bull. (2) **10**, 436-439; F. d. M. **35**, 389, 1904). Vi.

F. Riesz. Sur les ensembles discontinus. C. R. **141**, 650-653.

Eine Menge heißt „einstückig" („d'un seul tenant"), wenn sie sich auf keine Weise in zwei Teilmengen derart zerlegen läßt, daß kein Punkt oder Grenzpunkt der einen derselben ein Grenzpunkt der anderen ist. Enthält eine Menge keine einstückige Teilmenge, so ist sie „unstetig". Eine „einfache n-dimensionale Menge" ist eine Menge, welche in ein n-dimensionales Rechteck durch stetige eindeutige Transformationen übergeführt werden kann. Eine beliebige Menge heißt „n-dimensional", wenn sie Teilmengen besitzt, die in einfachen n-dimensionalen Mengen, keine aber, die in einfachen $(n+1)$-dimensionalen Mengen überalldicht sind. — Die Dimension jeder unstetigen Menge ist 0. Vi.

F. Riesz. Über mehrfache Ordnungstypen. I. Math. Ann. **61**, 406-421.

Der Verf. stellt eine rein arithmetische Theorie der mehrfachen transfiniten Ordnungstypen auf. Die Wörter: Umgebung, Häufungsstelle, abgeschlossen, zusammenhängend, perfekt, Gebiet, Bereich werden auf passende Weise erläutert, und die bekannten Sätze der Mengenlehre werden, mit gehörigen Veränderungen und ohne Hülfe irgend welcher geometrischen Begriffe, auf mehrfache Ordnungstypen übertragen. Vi.

M. Fréchet. Les ensembles de courbes continues. C. R. **141**, 873-875.

Eine „stetige Linie“ ist der Inbegriff der Punkte:

$$(1) \qquad x=f(t),\ y=g(t),\ z=h(t),$$

wo $0 \leqq t \leqq 1$ ist und f, g, h stetige Funktionen bezeichnen. Eine Folge von stetigen Linien:

$$x=f_n(t),\ y=g_n(t),\ z=h_n(t) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

hat die Linie (1) als Grenze, wenn $f_n(t)$, $g_n(t)$, $h_n(t)$ im Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ nach $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ gleichmäßig konvergieren. Kann in einer Linienmenge E eine Linienfolge gewählt werden, welche eine Linie C als Grenze haben möge, so heißt C eine „Grenzlinie“ von E. Ist C eine Grenzlinie für jede Teilmenge von E, die sich von E um eine abzählbare Linie unterscheidet, so heißt C eine „Verdichtungslinie“ von E. Besitzt jede Teilmenge von E Grenzlinien, so ist E „kompakt“. Von diesen Definitionen ausgehend, spricht Fréchet einige Sätze aus, von welchen zwei angeführt werden mögen: a) In einer perfekten Linienmenge P kann man eine solche abzählbare Menge D wählen, daß $P=D'$. — b) Eine kompakte Menge besitzt immer Verdichtungslinien.

Man vergleiche damit die viel älteren Untersuchungen über Grenzlinien von G. Ascoli („Le curve limite di una varietà data di curve“. Rom. Acc. L. Mem. (3) **18**, 521-586; F. d. M. **16**, 342, 1884). Vi.

C. Pädagogik.

F. Amodeo. Sul corso di storia delle scienze matematiche nella R. Università di Napoli. Bibl. Math. (3) **6**, 387-393.

In Italien sind seit beinahe 30 Jahren Vorlesungen über Geschichte der Mathematik gehalten worden; aber die erste offizielle Vorlesung dieser Art begann im Dezember 1905 an der Universität in Neapel, nachdem Amodeo vom italienischen Kultusministerium beauftragt worden war, solche Vorlesungen zu halten. Die Vorlesungen sind dreistündig, und Amodeo beabsichtigt die ganze Geschichte der Mathematik im Laufe von zwei Jahren zu behandeln. Er teilt das vorläufige Programm dieser zwei Jahre mit und bringt zum Abdruck den Schluß seiner Antrittsvorlesung über die Geschichte der Kegelschnitte von Apollonius bis Simson, woraus der Zweck seiner Vorlesungen ersichtlich wird. E.

A. Bonolis. Sull' insegnamento della storia delle matematiche in Russia. Periodico di Mat. (3) **3**, 103-118.

Nach einem Hinweise auf die Wichtigkeit von Universitätsvorlesungen über Geschichte der Mathematik folgt die italienische Übersetzung des ausführlichen Programms der Vorlesungen, welche Bobynin 1888/89

und 1889/90 an der Moskauer Universität gehalten hat (vgl. F. d. M. **22**, 87, 1890). Lp.

P. STÄCKEL. Über die Notwendigkeit regelmäßiger Vorlesungen über elementare Mathematik an den Universitäten. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 608-614.

Obwohl die praktische Ausbildung der Lehramtskandidaten nicht der Universität zugewiesen werden kann, sollte die letztere die bestehende Kluft zwischen Wissenschaft und Unterricht außer durch Ferien- und Informationskurse besonders durch Berücksichtigung der Anwendungen und durch Vorlesungen über Elementarmathematik überbrücken. Diese müssen am Schlusse des Studiums stattfinden und die Elemente von einem höheren Gesichtspunkt und mit besonderer Berücksichtigung des literarisch-historischen Moments behandeln. P.

A. GUTZMER. Über die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 586-593.

Verf. stimmt im wesentlichen den Thesen von Stäckel (Deutsche Math.-Ver. **11**, 26-37, 1902; **13**, 313-341, 1904) zu, tritt aber für die Abzweigung der darstellenden Geometrie von der angewandten Mathematik in dem Sinne ein, daß letztere für die Ausbildung der mathematischen Oberlehrer überhaupt obligatorisch gemacht wird, wofür dann das Gebiet der angewandten Mathematik auf Festigkeitslehre, Elastizitätstheorie, Thermodynamik, Elektrotechnik usw. zu erweitern ist. P.

F. KLEIN. Über die Aufgabe der angewandten Mathematik, besonders über die pädagogische Seite. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 396-397.

Eröffnungsworte in der Sektion IV des Kongresses und Begleitworte bei der Überreichung der Schrift: „Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts" usw. (F. d. M. **35**, 100, 1904.) Lp.

P. PAINLEVÉ. Une leçon d'ouverture. Ens. math. 7, 231-233.

Einleitung der Antrittsrede bei der Übernahme der Vorlesungen des zurückgetretenen Léauté an der École Polytechnique. Lp.

G. H. BRYAN. Fictitious problems in Mathematics. Nature **72**, 56, 102, 175.

C. B. CLARKE. Fictitious problems in Mathematics. Nature **72**, 56, 102.

E. J. ROUTH. Fictitious problems in Mathematics. Nature 72, 78, 127-128.

A. B. BASSET. Fictitious problems in Mathematics. Nature 72, 78.

In einer Anzeige des Treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies von Whittaker (F. d. M. **35**, 682, 1904) hatte Bryan bei der Erwähnung der Übungsaufgaben, die aus den Prüfungsaufgaben an der Universität Cambridge ausgewählt sind, sich gegen die Behandlung erkünstelter Bedingungen ausgesprochen (Nature **71**, 602) und insbesondere bemängelt, daß der Ausdruck gebraucht wird „ein“ Körper sei vollkommen rauh oder vollkommen glatt; die gemeinte Eigenschaft könne nur von „zwei“ Körpern bezüglich der gegenseitigen Reibung ausgesagt werden. Über diese pädagogischen Fragen setzen die Einsender der Briefe ihre Meinungen auseinander. Lp.

E. PAYART. L'enseignement polytechnique supérieur industriel et commercial. Assoc. Franç. Grenoble **33**, 1469-1476.

Hinsichtlich des höheren technischen Unterrichts ist Frankreich rückständig. Payart empfiehlt dringend die Errichtung einer größeren Anzahl technischer Hochschulen, indem er auf das Beispiel Deutschlands hinweist. Lp.

R. FRICKE. Bemerkungen über den mathematischen Unterricht an den technischen Hochschulen in Deutschland. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 615-621.

Da das zentrale Lehrgebiet der technischen Hochschulen die technische Mechanik ist, so muß auf der letzteren die Mathematik soweit vorgetragen werden, als sie zu deren Verständnis und wissenschaftlicher Fortentwicklung erforderlich ist. Verf. ist gegen die Einführung der technischen Mechanik an den Universitäten und wünscht eine selbständigere Ausgestaltung der allgemeinen Abteilung der technischen Hochschulen, der auch die technische Mechanik zuzuweisen sei. Auch der Einführung der Infinitesimalrechnung auf höheren Schulen steht er ablehnend gegenüber. P.

J. ANDRADE. L'enseignement scientifique aux écoles professionnelles et les mathématiques de l'ingénieur. Ens. math. 7, 21-27.

Kennzeichnet die vom gewohnten „rein“ wissenschaftlichen Betrieb abweichende Art des Unterrichtes an der höheren Uhrmacherschule zu Besançon und gibt einige pädagogisch sehr bedeutsame Ergebnisse solches Unterrichtes. Tn.

J. ANDRADE. L'enseignement scientifique aux écoles professionnelles et les „Mathématiques de l'ingénieur“. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 622-626.

Verf. hat an der Universität zu Besançon einen Unterrichtskursus für Uhrmacher eingerichtet, die keine weitere als fachliche Vorbildung hatten, bei denen also keine besonderen mathematischen Kenntnisse vorausgesetzt werden durften. Er legt an einem speziellen Beispiele dar, wie er gewisse Probleme, die auf Differentialgleichungen führen, durch ein anschauliches Verfahren zum Verständnis gebracht hat, und hofft, daß eine ähnliche Unterrichtsweise auch für den Schulbetrieb in Zukunft von Nutzen sein könne. P.

S. L. Penfield. On crystal drawing. Amer. Journ. of Sc. (4) **19**, 39-75.

Der Artikel entwickelt einfache Vorschriften für das Entwerfen von Projektionen der Krystallformen nach verschiedenen Methoden je nach den Zwecken, die bei der Benutzung der Zeichnung verfolgt werden.

Lp.

A. G. Greenhill. Teaching of mechanics by familiar applications on a large scale. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 582-586.

Befürwortung von Experimenten im Laboratorium und Heranziehung allgemein vorhandener praktischer Beispiele zur Erläuterung der Lehren der Mechanik beim Unterricht. Lp.

F. Schilling. Welche Vorteile gewährt die Benutzung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht? Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 751-755.

Vortrag, in welchem der Verf. dem dritten Mathematiker-Kongreß an mannigfachen Beispielen die von ihm ersonnenen und im mathematischen Unterricht der Göttinger Universität angewandten speziellen Methoden für den Gebrauch des Projektionsapparates darlegt. Sk.

J. Hadamard. Réflexions sur la méthode heuristique. Rev. générale des Sc. **16**, 499-504.

Im Verfolg der Erörterungen, welche 1904 im Musée pédagogique über den wissenschaftlichen Unterricht stattgefunden haben, hat sich der Verf. veranlaßt gesehen, die Vorteile und Nachteile der heuristischen Methode zu beleuchten. Er kommt zu dem Schlusse, daß ein passender Gebrauch dieser Methode immer dann zu machen sei, wenn der Gegenstand sich dazu eignet. Fe. (Lp.)

J. Chaumié. I. La réforme des programmes d'admission aux grandes écoles. II. Programme de la classe de mathématiques spéciales. Ens. math. **7**, 66-76.

Gibt in Fortsetzung des früher (F. d. M. **35**, 96-97, 1904) Mitgeteilten die amtlich festgestellten Lehraufgaben für Mathematik in

der französischen „Classe de mathématiques spéciales“ (vom 27. Juli 1904). Tn.

Modifications apportées au plan d'études des lycées et des collèges de garçons en France. Ens. math. 7, 491-497.

In Frankreich wurden durch Verfügung vom Mai 1902 die mathematischen Lehrpläne der Lycées und Collèges abgeändert. Hier liegen nur die zugehörigen allgemeinen methodologischen Erläuterungen vor. Tn.

G. Loria. **Sur l'enseignement des mathématiques en Italie.** Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 594-602.

Eine Übersicht über die Entwicklung der Elementarmathematik auf den höheren Schulen Italiens, die sich hier mehr als anderswo unter dem Einfluß von Cremona als Unterrichtsminister nach dem Vorbilde der Elemente des Euklid vollzog und dadurch auch zu einer Reihe von Lehrbüchern strengerer Darstellung Veranlassung gab. P.

G. Loria. **Sur l'enseignement des mathématiques élémentaires en Italie.** Ens. math. 7, 11-20.

A. Guldberg. **L'enseignement des mathématiques en Norvège.** Ens. math. 7, 433-436.

A. V. Šourek. **L'enseignement mathématique en Bulgarie.** Ens. math. 7, 257-270.

Nr. 1 würdigt die Verdienste und Reformbestrebungen von Cremona und De Paolis betreffs eines vertieften Unterrichtes und das allmähliche Unabhängigwerden von Lehrbüchern des Auslandes. Darauf werden noch zwei Fragen behandelt: die nach der Scheidung zwischen ebener und räumlicher Geometrie, d. i. der Kampf zwischen „Fusionisten“ und „Separatisten“, und die Frage der Berücksichtigung der Anwendungen.

Nr. 2 gibt die Gestaltung des norwegischen Schulwesens von Vorschule bis Universität und die in den einzelnen Abteilungen zu erledigenden mathematischen Lehren.

Nr. 3 bietet ein mehr kulturgeschichtlich als mathematisch interessantes Bild bulgarischer Zustände vor und nach Befreiung vom türkischen Joch — „kannte man doch vor 50 Jahren in Bulgarien nur das Addieren und Subtrahieren“. — Dann werden die Lehraufgaben der einzelnen Schulstufen dargelegt. Tn.

A. V. Šourek. **Über den mathematischen Unterricht in Bulgarien.** Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 651-666.

Verf. gibt eine geschichtliche Übersicht über die Entwicklung des mathematischen Unterrichts in Bulgarien, genaue Angaben über die ver-

schiedenen Lehrpläne für die Knaben- und Mädchengymnasien, über die Art der Vorlesungen an den Universitäten, über den mathematischen Verein und über die mathematische Zeitschrift. P.

A. B. W. Kennedy. The academic side of technical training. Nature 72, 256-258.

Diese Rede beleuchtet den Wert höherer akademischer Ausbildung des Ingenieurs, der nicht bloß das Minimum dessen zu lernen habe, was praktisch brauchbar ist. Zur Verkürzung des Lehrgangs können manche Forschungsergebnisse weniger streng abgeleitet werden. Nicht die Methode der Herleitung sei die Hauptsache, sondern die Fragstellung, das Bewußtsein von der Tragweite des erhaltenen Resultates in seiner Abhängigkeit von den gewählten Voraussetzungen. Lp.

F. Klein. Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 26, 451-465.

Angeknüpft an die „Vorschläge betreffend den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht unserer neunklassigen höheren Schulen" der Unterrichtskommission für die Naturforscherversammlung in Meran. I. Mathematik und Physik als Hülfswissenschaften. II. Von der Ausbildung der Lehramtskandidaten für Mathematik und Physik. III. Anhang. Lp.

F. Klein. Bemerkungen zum mathematischen und physikalischen Unterricht. Verh. Naturf. Ges. Breslau 1, 130-144.

K. Fricke. Die heutige Lage des naturwissenschaftlich-mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen. Verh. Naturf. Ges. Breslau 1, 107-130.

F. Klein. Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts. Deutsche Math.-Ver. 14, 477-492.

H. Fehr. Der Funktionsbegriff im mathematischen Unterricht der Mittelschule. Verh. d. Ver. d. Math. Lehrer an schweizerischen Mittelschulen. Zürich: Art. Inst. O. Füssli. 14 S.

H. Fehr. La notion de fonction dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes. Ens. math. 7, 177-187.

La rédaction. Réformes à accomplir dans l'enseignement des mathématiques. Ens. math. 7, 382-387, 462-472.

Die Um- und Neugestaltung, bzw. Vertiefung des mathematischen und besonders des naturkundlichen Unterrichtes steht auf der Tagesordnung: Zeuge dessen die vorstehenden Schriften.

Nr. 1 ist der im Sinn des Casseler Beschlusses (1903) gehaltene Vortrag zu Breslau. Nach einem Rückblick auf die bezüglichen Einzelbestrebungen von Lehrern der Göttinger Universität berichtet F. Klein über die neueren Bestrebungen und die hervortretenden Bedürfnisse im genannten Unterricht: es werden behandelt die genetische Methode, die Pflege der Raumanschauung, die Berücksichtigung der Anwendungen, die Durchdringung des Unterrichts mit funktionentheoretischer Denkweise und so die Überleitung zur Einbeziehung der Grundgedanken der sogenannten höheren Mathematik. — Betreffs des physikalischen Unterrichtes wird eine Vermehrung der Stundenzahl, Beschaffung ausreichender Sammlungen, Einführung von Schülerübungen verlangt. Die Frage der Lehrerbildung wird kurz berührt.

Nr. 2 schildert den schon lange währenden harten Kampf des naturkundlichen Unterrichts um seine Anerkennung, die Schäden infolge ungenügender Beachtung, die Forderungen, die künftighin zu stellen und zu erfüllen sind.

Nr. 3 knüpft an die Meraner Beschlüsse (1905) an und erinnert betreffs der jetzt in den Hochschulen durchzuführenden neuen Lehrgestaltung an die ähnlichen Verhältnisse bei Beginn des 19. Jahrhunderts; es werden deshalb neben den die beste Vorbildung der Studenten voraussetzenden einleitenden Vorlesungen auch ergänzende Vorlesungen gefordert, die zu dem höheren Kenntnisstand hinüberleiten. Hierzu habe eine spezifische Ausgestaltung der Anfangsvorlesungen je nach der Studienrichtung der Zuhörer hinzuzutreten. Ein weiterer Teil des Vortrages bespricht die künftige Ausbildung der betreffenden Lehrer.

Nr. 4, den parallel gehenden Bestrebungen in der Schweiz gewidmet, verlangt als Vorstufe die Einbeziehung des Funktionsbegriffes und seiner einfachsten Anwendungen in den Unterricht und macht bestimmte Vorschläge zur Ausführung, weiter aber wird die Herbeiziehung des Begriffes der Derivierten verlangt und die Verwertung der Schreibweise $f'(x)$ empfohlen. Anschließend werden die neueren einschlägigen französischen Lehrvorschriften mitgeteilt. Eine rege „Diskussion" (S. 7-13) ergibt im wesentlichen völlige Zustimmung, ebenso wie den Wunsch nach stärkerer Berücksichtigung des geschichtlichen Elementes im mathematischen Mittelschulunterricht.

Nr. 5 ist eine, wenn auch nicht wörtliche, Wiedergabe von Nr. 4.

Nr. 6 bringt die Ansichten von fünf Lehrern an höheren Schulen Frankreichs und der Vereinigten Staaten betreffs der von der Schriftleitung aufgeworfenen Frage betreffs der durchzuführenden Fortschritte in der Gestaltung des mathematischen Lehrplans, der Lehrerbildung und der Anpassung des mathematischen Unterrichtes an die Bedürfnisse der anderen reinen und angewandten Wissenschaftszweige. Tn.

A. Gutzmer. Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 533-580; auch sep. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 48 S. gr. 8°.

A. Gutzmer. Allgemeiner Bericht der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte über ihre Tätigkeit. Verh. Naturf.-Ges. Meran **1**, 142-153.

Bericht, betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. Verh. Naturf.-Ges. Meran **1**, 154-165.

Auf der Naturforscher- und Ärzteversammlung zu Breslau (1904) war ein Zwölferausschuß ernannt worden, der für die Besserung und Neugestaltung des mathematischen und naturkundlichen Unterrichtes der deutschen höheren Schulen „bestimmte, abgeglichene Vorschläge“ machen sollte. Diese Vorschläge liegen hier vor, wie sie der Meraner Versammlung (1905) vorgelegt wurden. Sie enthalten 1. den allgemeinen, Übersicht und die Hauptgesichtspunkte gewährenden Bericht von A. Gutzmer (S. 1-11. — auch im Sonderabdruck erschienen —), ferner von dem Ausschuß erstattet 2. den Bericht über den mathematischen Unterricht (S. 11-21. — ebenfalls im Sonderabdruck erschienen —), 3. den über den physikalischen Unterricht (S. 21-32), endlich 4. den Bericht über den Unterricht in der Chemie (nebst Mineralogie) und in der Zoologie (nebst Anthropologie), Botanik und Geologie (S. 32-48) an den neunklassigen höheren Lehranstalten. Die Berichte enthalten für die einzelnen Klassen ausführlich gearbeitete Lehrpläne. Tn.

F. Klein. Bericht an die Breslauer Naturforscherversammlung über den Stand des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Deutsche Math.-Ver. **14**, 33-47.

Der Vortrag berichtet „über die neueren Bestrebungen und die hervortretenden Bedürfnisse“ der genannten Unterrichtszweige im allgemeinen und kennzeichnet die Ziele, denen diese zuzustreben haben. Auch die Frage der Lehrerbildung und der so anregenden Ferienkurse wird besprochen. Tn.

G. Holzmüller. Bemerkungen über den Unterricht und die Lehramtsprüfung in der angewandten Mathematik. Deutsche Math.-Ver. **14**, 249-274.

In seinen „Vorbemerkungen“ (S. 249-253) stellt der Verf. die Forderungen zusammen, die in der sog. angewandten Mathematik an den angehenden Lehrer und an den bezüglichen Unterrichtsvortrag zu stellen sind. Weiter wird der für Lehrerbildung sich empfehlende Unterrichtsgang in dem „niederen Teil“ (S. 253-265) und dem „höheren Teil“ der darstellenden Geometrie (S. 265-269) angegeben, auch werden „die mathematischen Methoden der technischen Mechanik“ behandelt (S. 269-273)

und (S. 273 f.) die „Elemente der niederen und höheren Geodäsie“, zugleich mit Vorschlägen über die Abänderung der preußischen Lehrerprüfung. Tn.

F. Ebner. Zu den Bemerkungen usw. des Herrn Holzmüller. Deutsche Math.-Ver. **14**, 339.

Im vorhin besprochenen Aufsatz Holzmüllers war den Fachschulen für Maschinenbau empfohlen, „die unentbehrlichen Elementarmethoden nicht zu vernachlässigen“. Hiergegen wendet sich Ebner in der Meinung, „daß mit der zum Verständnis der sogenannten elementaren Ableitungen nötigen Geistesarbeit und Zeitvergeudung mindestens ebensogut die Elemente der Infinitesimalrechnung bewältigt werden können“. Hieraus ergeben sich denn auch andere Wünsche betreffs der Lehrerausbildung. Tn.

G. Holzmüller. Zu den Bemerkungen des Herrn Ebner. Deutsche Math.-Ver. **14**, 395-396.

F. Ebner. Zu den Bemerkungen von Herrn Holzmüller. Deutsche Math.-Ver. **14**, 454-455.

Die erstere „Bemerkung“ stellt eine schiefe Auffassung richtig und wendet sich gegen den Vorschlag Ebners, in den bestehenden Maschinenbau-Fachschulen höhere Mathematik zu lehren. Dagegen behauptet Ebner, die ganze betreffende „höhere“ Mathematik bestehe in der Betrachtung von ax^n, $a \sin(bx + c)$ und ae^{bx}, und zwar diese nach Art Perryscher Behandlung — auch die Zeichen für Differenzieren und Integrieren dürfe und solle man einführen. Tn.

G. Kewitsch. Höhere Analysis in der Schule. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 29-31.

Der Verf. verlangt, daß auf den Realanstalten in Prima ein volles Jahr der Differential- und Integralrechnung eingeräumt werde, ein anderes der analytischen Geometrie. „Die höhere Analysis muß der Schlußstein der Schulmathematik werden.“ Lp.

G. Loria. Programmi del passato e programmi per l'avvenire. Lettura fatta il 22 Aprile 1905, in occasione della riunione regionale tenuta a Milano da insegnanti di matematica, sotto gli auspicî dell' Associazione „Mathesis“. Bull. dell' Ass. Mathesis, 11 S. gr. 8°.

Der Vortrag bewegt sich etwa in dem Gedankenkreise, den die Unterrichtskommission der deutschen Naturforschergesellschaft vertritt, erhebt daher die nämlichen Forderungen für den Unterricht in der Mathematik an den Mittelschulen und macht Vorschläge, wie durch Abänderung des bisherigen Betriebes die nötige Zeit zu gewinnen ist. Lp.

M. Krause. Über die Reformbestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts auf höheren Schulen seit 1890, insbesondere über die Einführung der Differentialrechnung in dieselben. Abh. naturw. Ges. Isis 1904, 106-120.

Der Vortrag berichtet über die Bestrebungen der letzten Jahrzehnte in objektiver Weise. Alles Materielle ist im Jahrbuch Gegenstand der Referate gewesen. Lp.

H. Schotten. Zur Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 227-233, 311-316, 340-344.

Bericht über die bezüglichen Verhandlungen auf der Breslauer Naturforscherversammlung 1904. Lp.

H. Schotten. Welche Aufgabe hat der mathematische Unterricht auf den deutschen Schulen und wie passen die Lehrpläne zu dieser Aufgabe? Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 627-638.

Verf. legt das Hauptgewicht auf eine Ausgestaltung und freie Entwicklung des mathematischen Unterrichts und wirft den Lehrplänen vor, daß sie zuviel Gewicht auf bestimmte Einzelkenntnisse legen, zu deren gründlicher Durchnahme vielfach die Zeit fehlt. Bei den realistischen Anstalten, an denen bei uns der Sprachunterricht überwiegt, hält er eine Annäherung an die französischen Lehrpläne für wünschenswert. P.

F. Pietzker. Die Person des Lehrers im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 45-51.

Die Ausführungen des Verf. sollen zeigen, daß und wie auf dem Gebiete der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer „für die Auswirkung der Lehrerpersönlichkeit“ Platz ist. Lp.

H. Thieme. Wirkung der wissenschaftlichen Ergebnisse auf den Unterricht in der elementaren Mathematik. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 641-650.

Vor allem müssen alteingebürgerte fehlerhafte Definitionen und Beweise aus dem Unterricht verschwinden. Obwohl der Verf. von jedem Lehrer verlangt, daß er die neuere Entwicklung der Elementargeometrie kennt, ist er doch aus pädagogischen Gründen dafür, in der Forderung nach strenger Begründung nicht allzuweit zu gehen. P.

Bastian Schmid. Naturwissenschaften und philosophische Propädeutik. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 74-79.

Der Vortrag, gehalten in Jena auf der Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften, handelt von der Wichtigkeit der Behandlung philosophischer Fragen, auch auf der Mittelschule, und fordert „philosophisch gerichteten Unterricht und philosophische Propädeutik als eigenes Unterrichtsfach“.

Lp.

A. Höfler. Philosophische Elemente in allen Unterrichtsfächern, philosophische Propädeutik als eigenes Fach. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 97-102.

„Neben und über den philosophischen Elementen bedürfen wir in allen einzelnen Fächern noch einer philosophischen Propädeutik als eigenes Fach zum Abschlusse unserer Bildungsarbeit an den höheren Schulen.“

„Wir Lehrer der Naturwissenschaften haben ein Interesse daran, daß der Schüler mit der ganzen Natur, nicht nur der physischen, sondern auch der psychischen Natur, in wissenschaftlich grundlegender Weise bekannt gemacht werde. Der Inbegriff der Wissenschaft von der psychischen Natur aber ist es, mit dem sich die Philosophie als Wissenschaft zum Teil deckt. Zu einer solchen Anschauung und einem solchen Begriff von dem Ganzen der Welt eine Propädeutik zu geben, dürfen also gerade wir Lehrer der exakten Wissenschaften für eine unverbrüchliche wissenschaftliche Pflicht der höheren Schulen erklären.“ Lp.

O. Utescher. Der Rechenunterricht an höheren Lehranstalten. Progr. Oberrealsch. Freiburg i. Schles. 1905, 45 S.

Die Programmabhandlung bringt eine große Zahl von Bemerkungen zur Methodik des Rechenunterrichtes. Wenn Ref. naturgemäß auch nicht gerade allen Ansichten und Vorschlägen zustimmt, so kann er doch das meiste angehenden Rechenlehrern zur Beachtung empfehlen. F.

M. Simon. Über komplexe Zahlen; über den Lehrgang in der sphärischen Trigonometrie; literarisch-historische Notizen. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 639-640.

Die komplexen Zahlen sind erst bei den kubischen Gleichungen einzuführen. Die Polardreiecke führt der Verf. auf Grund trigonometrischer Rechnung ein. Die Einführung der Supplementwinkel zur Erzielung größerer Symmetrie geht auf Cornelius Keogh (Nouv. Ann. **2**, 304) zurück. P.

M. Nath. Zur Methodik des geometrischen Anfangs-Unterrichts. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 1-8.

Kurze historische Skizze der auf einen propädeutischen geometrischen Unterricht abzielenden Bestrebungen und Erörterung des Inhalts und des Nutzens eines solchen Lehrganges. Lp.

Ernst Schultz. **Über den einleitenden geometrischen Unterricht in Quarta.** Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 11-13.

„Nach meiner Methode müssen die Schüler den geometrischen Lehrsatz erst aus der Figur ablesen, um dann das Resultat als Behauptung mathematisch zu formulieren und schließlich den Satz streng mit Hülfe der Grundsätze zu beweisen." Lp.

C. Bourlet. **Note sur la géométrie de M. Méray.** Ass. Franç. Grenoble **33**, 62-66.

Chevallier. **Quelques remarques sur l'enseignement de la géométrie par la méthode de M. Méray, à l'École normale d'instituteurs de Lyon.** Ass. Franç. Grenoble **33**, 66-69.

G. Combebiac. **Sur le choix des principes dans l'enseignement de la géométrie.** Ass. Franç. Grenoble **33**, 69-73.

In F. d. M. **35**, 494, 1904, ist nach einem Aufsatze von Méray über die Gedanken berichtet worden, welche ihn bei Abfassung seines Lehrbuchs der Geometrie (1874) geleitet haben. Nach dem ersten der drei Artikel liegt das Wesentliche der Mérayschen Methode in der Benutzung der Elementarbegriffe über die Bewegung eines starren Körpers, Begriffe, welche als an sich klar von vornherein benutzt werden und später zu der Gruppe aller Bewegungen führen. Hiermit hängt es zusammen, daß die Planimetrie und die Stereometrie nicht getrennt werden, daß also nur eine Geometrie gelehrt wird. Der zweite Artikel berichtet über die über Erwarten erfreulichen Erfolge, welche durch Anwendung dieser Methode in der genannten Schule erzielt worden sind. Die Selbsttätigkeit der Schüler sei aufs lebhafteste angeregt worden. Combebiac macht im dritten Artikel Vorschläge, wie man in derselben Richtung noch weiter gehen solle; zu diesem Zwecke setzt er die in seinem vorjährigen Artikel entwickelten Prinzipien (F. d. M. **35**, 496, 1904) mit der methodischen Behandlung Mérays in Verbindung unter den Abschnitten: Allgemeine Geometrie und Analysis Situs, projektive Geometrie, metrische Geometrie. Lp.

A. Höfler. **Das Mathematische im physikalischen Unterricht.** Poske Zs. **18**, 1-12.

Der Verf. wendet selbst das Goethesche Wort an: „Alles Gute ist schon vor uns gesagt worden; man muß nur den Mut haben, es noch einmal zu sagen." Lp.

K. Dunker. **Forderungen für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht und seine Vertreter.** Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 52-54.

K. Dunker. **Vorschläge für die Hebung der Stellung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts und seiner Vertreter.** Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 106-108.

Vorschläge, welche die Gleichstellung der Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaften mit denen für die historischen und sprachlichen Fächer in der Schulhierarchie bezwecken. Lp.

H. Dressler. Besprechung von Lehrmitteln zur Mathematik. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 56-60, 442-446.

1. Eine Pythagoreische Tafel auf einem Schweizer Pennal. 2. Ein Höhenmesser von Winckelmann in Berlin. 3. Ein Winkelmesser für Landwirte und Förster von Leykam in Graz. 4. Ein neuer Transporteur von Kreuschmer, käuflich bei J. Ehrhard & Co. in Bensheim. 5. Modelle zur Verzahnungstheorie von Fr. Schilling, bei Martin Schilling in Halle a. S. 6. Höhenmesser von C. Leiß in Steglitz, Wilhelm Apel in Göttingen, Fr. Ackermann in Weinheim. 7. Flächenmodelle zum Pythagoras von Hans Barbisch bei A. Pichlers Wwe. & Sohn in Wien. 8. Instrumente für Perspektive bei derselben Firma usw. Lp.

Weitere Literatur.

R. Fricke. Über die Bedeutung der allgemeinen Abteilungen der technischen Hochschulen. Deutsche Math.-Ver. **14**, 175-186.

Vgl. F. d. M. **35**, 94, 1904.

G. Hauck. Über angewandte Mathematik. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 149-156.

Abdruck aus Sitzber. Berl. Math. Ges. **3**, 1-8; vgl. F. d. M. **35**, 99, 1904.

La Rédaction. L'enseignement des mathématiques à l'université. Ens. math. **7**, 238.

F. Marotte. L'enseignement des sciences mathématiques et physiques dans l'enseignement secondaire des garçons en Allemagne. Paris: Imprimerie nationale. 120 S.

A. Mannheim. Sur l'enseignement de la géométrie. Ens. math. **7**, 309-310.

M. Zwerger. Studien im Gebiete der elementaren Mathematik. Progr. Würzburg. 44 S. 8°.

G. Ehrig. Über Stoff und Methode des mathematischen Unterrichts an Baugewerkschulen. Leipzig. 78 S. 8°.

C. Hecht. Über Notwendigkeit und Gestaltung des Unterrichts in der elementaren Mathematik an der höheren Mädchenschule. Vortrag. Bielefeld: Velhagen. 24 S. 8°.

Gemeinsame Sitzung der Abteilung für Mathematik, Astronomie und Geodäsie mit den Abteilungen für Physik, für angewandte Mathematik und Physik (Ingenieurwissenschaften) sowie für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Verh. Naturf.-Ges. Breslau **2**$_1$, 15-18.

Besprechung von Unterrichtsfragen.

F. Pietzker. Bericht über den Stand der Arbeiten der von der Breslauer Naturforscherversammlung eingesetzten Schulkommission, der Hauptversammlung in Jena erstattet. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 84-86.

Der Meraner Bericht der Kommission für die Neugestaltung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 107-109.

R. Walckling. Bericht über die XIV. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften in Jena, Pfingsten 1905. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 385-390, 465-474, 582-585.

Bericht über die vierzehnte Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften zu Jena in der Pfingstwoche 1905. Im Auftrage des Vorstandes. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 86-90.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Kapitel 1.

Gleichungen, universale Algebra und Vektoranalysis.

A. Gleichungen.

Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transzendente Gleichungen.

H. B. Fine. A college algebra. Boston: Ginn & Company. VIII u. 589 S. 8°.

Das Buch enthält mehr, als es nach dem Titel scheinen könnte. Der Verf. beginnt mit einer Analyse des Zahlbegriffs. Auf dem formalen Standpunkte stehend, auf welchem man alle nicht positiven ganzen Zahlen als bloße Zeichen auffaßt, definiert er der Reihe nach die natürlichen, die negativen, die gebrochenen, die irrationalen (diese nach Dedekindscher Art als „Schnitt") und die imaginären Zahlen. Der Hauptteil des Buches ist eine Einführung in die höhere Algebra und die Analysis. Es werden behandelt die ganzen rationalen Funktionen (insbesondere die symmetrischen), die gebrochenen rationalen, Wurzeln, Logarithmen, unendliche Reihen (speziell die Binomial-, die Exponential- und die logarithmische Reihe) ohne Benutzung der Differentialrechnung. Außer den grundlegenden Sätzen der allgemeinen Gleichungstheorie (namentlich Transformation und Anzahl der reellen Wurzeln) werden die Auflösungsmethoden der Gleichungen der vier ersten Grade ausführlich erörtert. Überall zeigt sich der Verf. bemüht, wissenschaftliche Strenge mit pädagogischen Rücksichten in Einklang zu bringen; diesem Zwecke entsprechend hat er manche Entwicklungen eigenartig gestaltet. F.

H. Padé. Sur les formules de Sylvester. Bordeaux Procès-verb. 1905, 24-25.

Es sei $f(x) = S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \cdots + S_p x^p + \cdots$ eine Taylorsche Reihe; man setze $T_p = S_p + x T_{p+1}$, $\mathfrak{T}_p = S_p - x S_{p+1}$, wo $T_0 = f(x)$ und ein S mit negativem Index gleich Null anzunehmen ist; wird ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} S_\nu \cdots & S_{\nu+\mu+1} \\ \vdots & \\ S_{\nu+\mu-1} & S_{\nu+2(\mu-1)} \end{vmatrix}$$

mit $\Delta_{\mu\nu}(S)$ bezeichnet und ein Divisionsprozeß eingeführt von der Art:

$$V_{\mu\nu} f(x) - U_{\mu\nu} = x^{\mu+\nu+1} R_{\mu\nu}(x),\ V_{\mu\nu}(0) = 1,$$

so bestimmen sich $V_{\mu\nu}$ und $R_{\mu\nu}$ durch die Formeln:

$$\Delta_{\mu\nu}(S) \cdot V_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu}(\mathfrak{T}),\ \Delta_{\mu\nu}(S) \cdot R_{\mu\nu} = (1)^\mu \Delta_{\mu+1,\nu+1}(T).$$

Dies wird auf den besonderen Fall angewendet, wo $f(x)$ eine rationale Funktion ist:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-m} x^{n-m} + \frac{M_1}{1 - \alpha_1 x} + \cdots + \frac{M_m}{1 - \alpha_m x}.$$

Dann liefert der Ausdruck für $R_{\mu\nu}$ als ganz speziellen Fall die Formeln von Sylvester für die Polynome, die beim Sturmschen Satze auftreten; $f(x)$ reduziert sich dabei auf die gebrochenen Terme:

$$\frac{1}{1 - \alpha_1 x} + \frac{1}{1 - \alpha_2 x} + \cdots + \frac{1}{1 - \alpha_m x}.$$

My.

Ch. Michel. Sur les méthodes d'approximation. Revue de Math. spéc. **15**, 89-90, 113-115.

J. Richard. Sur la méthode d'approximation de Newton. Revue de Math. spéc. **15**, 137-138.

An den üblichen Näherungsverfahren nach Newton und der Regula falsi vermißt Michel die Möglichkeit, die Größe des Fehlers nach einer beliebigen Anzahl von Schritten abzuschätzen. Er schlägt daher vor, beide Methoden gleichzeitig anzuwenden, wodurch sowohl die obere als auch die untere Grenze dem wahren Wert angenähert wird und die Größe des Intervalls, in dem die Wurzel liegt, sich der Null unbeschränkt nähert, ein Verfahren, das übrigens schon in die Lehrbücher übergegangen ist. (Vgl. H. Weber, Lehrbuch der Algebra I, 379; 2. Aufl.) Eine leichte Verallgemeinerung der Methode führt den Verf. auf das von Jablonski (Sur le calcul approché d'une racine par les parties proportionnelles) im Bull. des Math. spéc. 1895 dargelegte Verfahren.

Richard zeigt dagegen, daß die Newtonsche Methode bei genügender Kleinheit des Ausgangsintervalls doch sehr wohl die Größe der

erreichten Annäherung abzuschätzen gestattet, und daß die von Michel befürwortete Verschmelzung mit der Regula falsi praktisch unvorteilhaft wäre. Auch E. Cahen gibt (Question 1375, Lösung Rev. de Math. spéc. **16**, 339) dem Fehler der Newtonschen Methode eine Form, die sich mit wachsendem n der Null nähert. Sk.

F. Giudice. Metodo di Newton perfezionato e nuovo metodo pel calcolo asintotico delle radici d' equazioni. Torino Atti **40**, 105-113.

Giudice kommt zunächst auf die von ihm Batt. G. **41**, 14-20 gegebene Methode zur näherungsweisen Berechnung der reellen Wurzeln beliebiger Gleichungen zurück und zeigt an einigen Beispielen, daß der daselbst aufgestellte Satz (F. d. M. **34**, 102, 1903) auch mit Vorteil zur Trennung der Wurzeln benutzt werden kann. Sodann teilt er für die angenäherte Berechnung der Wurzeln von $f(x) = 0$ die folgende neue Vorschrift mit, die auch dann noch gültig ist, falls $f(x)$ in dem betrachteten Intervall keine Ableitung besitzt: „Wenn $f(x)$ eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen x ist, welche wenigstens einmal verschwindet, wenn x von α bis β zu- oder abnimmt, und wenn der Quotient $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ für alle Werte von x in dem Intervall $(\alpha \dots \beta)$ zwischen den beiden von Null verschiedenen Werten p, q liegt, so ist wenigstens eine der beiden Zahlen $\alpha - \frac{f(\alpha)}{p}$ oder $\alpha - \frac{f(\alpha)}{q}$ zwischen α und der α am nächsten liegenden Wurzel des Intervalls $(\alpha \dots \beta)$ enthalten, und diese Wurzel liegt zwischen den beiden genannten Zahlen, falls p und q gleiches Vorzeichen haben.“ F.

R. de Montessus. La résolution numérique des équations. S. M. F. Bull. **33**, 26-33.

Die Note erinnert an ein vor etwa 90 Jahren von H. Wronski in seiner Abhandlung „Résolution générale des équations de tous les degrés“ (Messianisme, T. III) gegebenes Verfahren zur numerischen Lösung der Gleichungen. Nach Ansicht des Ref. unterscheidet sich dasselbe aber nicht wesentlich von der schon von Bernoulli aufgestellten und dann von Euler und Jacobi weiter ausgebildeten Methode. (Vgl. z. B. Netto, Vorlesungen über Algebra I, § 251, §§ 255-257). Besonders zweckmäßig ist bei Wronski möglicherweise die Wahl von n willkürlich zu bestimmenden Größen, wofür er gewisse symmetrische Funktionen der Wurzeln setzt, die er als Funktionen Alef bezeichnet, und die wenigstens in seinen Beispielen zu einer schnellen Konvergenz führen sollen. F.

M. Lerch. Sur l'approximation des racines d'équations numériques. Ens. math. **7**, 300-304.

Zusammenstellung einiger Methoden zur näherungsweisen Lösung numerischer Gleichungen. F.

L. Deny. Note sur la représentation géométrique des polynomes algébriques. Nouv. Ann. (4) 5, 193-211.

Ähnlich, wie es früher schon Sill (Nouv. Ann. 6, 359, 1867) und Arnoux (S. M. F. Bull. 21, 1893) getan haben, veranschaulicht Deny eine ganze rationale Funktion durch einen gebrochenen Linienzug, dessen einzelne Strecken unter rechten Winkeln zusammenstoßen und durch ihre Länge die Größe der Koeffizienten repräsentieren. Diese graphische Darstellung führt ihn dazu, die reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung m-ten Grades als Schnittpunkte eines Kreises und einer Kurve $(m-1)$-ter Ordnung zu finden, welche im Koordinaten-Anfang, durch den auch der Kreis hindurchgeht, einen $(m-2)$-fachen Punkt besitzt. Es gelingt ihm auch, notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingungen dafür aufzustellen, daß alle Wurzeln der Gleichung reell sind. F.

G. Lery. Nouvelles démonstrations du théorème de d'Alembert. Première démonstration. Nouv. Ann. (4) 5, 385-387.

Durchläuft die Variable z in der komplexen Zahlenebene eine geschlossene Kurve C, so beschreibt auch $w=f(z)=a_0 z^m+\cdots+a_m$ in der w-Ebene eine geschlossene Kurve C'. Nur wenn letztere den Nullpunkt umschließt, kann sich das Argument von $w=f(z)$ geändert haben. Durchläuft z einen Kreis mit hinreichend großem Radius um den Nullpunkt, so ändert sich das Argument von $f(z)$ um $2m\pi$. Daß innerhalb dieses Kreises wenigstens eine Wurzel von $f(z)=0$ liegt, schließt der Verf., indem er eine Reihe von Konturen bestimmt, deren jede innerhalb der vorhergehenden liegt, die also einen gewissen Punkt z_0 zur Grenze haben. Die Annahme, daß $f(z_0)$ von Null verschieden ist, führt auf einen Widerspruch. F.

E. Pomey. Deuxième démonstration (du théorème de d'Alembert). Nouv. Ann. (4) 5, 388-394.

Die Wurzelexistenz wird zunächst für die binomischen Gleichungen, erst ungeraden und dann geraden Grades, mit reellen oder komplexen Koeffizienten bewiesen. Der Nachweis des allgemeinen Satzes stützt sich auf die Behauptung, daß $|f(x+iy)|^2$, die Summe der Quadrate zweier ganzen rationalen Funktionen der reellen Variablen x, y, welche negative Werte nicht besitzt, für wenigstens ein Wertsystem x_0, y_0 einen kleinsten Wert annimmt. Es ist dann unter Benutzung des vorausgeschickten Satzes leicht zu zeigen, daß dieses Minimum Null ist. F.

M. Bauer. Zur Theorie der irreduziblen Gleichungen. Ungar. Ber. **20**, 30-33.

Beweis des Satzes: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Primzahlmoduls, nach welchem eine Gleichung n-ten Grades, deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind, und die im Bereiche der rationalen Zahlen irreduktibel ist, irreduktibel bleibt, ist, daß die Galoissche Gruppe der Gleichung auch solche Substitutionen enthält, die aus einem einzigen n-gliedrigen Zykel bestehen, und Mitteilung einer Verallgemeinerung dieses Satzes. F.

M. Bauer. Beitrag zur Theorie der irreduziblen Gleichungen. J. für Math. **128**, 298-301.

In den Berl. Ber. von 1894 und im J. für Math. **115** hat Koenigsberger Verallgemeinerungen des Eisensteinschen Satzes über die Irreduzibilität von Gleichungen hergeleitet. Bauer zeigt in der vorliegenden Note, daß die Koenigsbergerschen Sätze sich mittels der Idealtheorie der allgemeinen algebraischen Größen mit einem Schlage beweisen lassen (vgl. den Hinweis von Hilbert in seinem Referate F. d. M. **25**, 147), wobei es gleichgültig ist, ob die Koeffizienten Zahlen sind oder auch beliebig viele Unbestimmte enthalten. Das Ergebnis, zu dem er gelangt, spricht er folgendermaßen aus:

„Es sei

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

eine Gleichung, deren Koeffizienten aus dem holoiden Bereiche (vgl. F. d. M. **34**, 93, 1903) $[(A), x_1, x_2, \ldots, x_m]$ oder aus dem holoiden Bereiche $[(1), x_1, x_2, \ldots, x_m]$ entstammen. Es sei ferner

$$n = \prod_{s=1}^{r} n_s,$$

wo je zwei der Zahlen n_s relativ prim zueinander sind. (Der Fall $r = 1$ sei auch erlaubt.) Es sollen ferner die Größen $P_1, P_2, \ldots, P_r$ verschiedene Primgrößen des holoiden Bereiches bezeichnen und das Zeichen $E\left(\frac{a}{b}\right)$ soll die größte in der Zahl $\frac{a}{b}$ enthaltene rationale ganze Zahl bedeuten; endlich sollen die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ positive rationale ganze Zahlen sein. Dann gilt der folgende Satz: Wenn die Koeffizienten c_i in der Form

$$c_i = \prod_{s=1}^{r} P_s^{E\left(\frac{i \cdot \alpha_s - 1}{n_s}\right)+1} C_i$$

darstellbar sind, wo die Größen C_i aus dem ursprünglichen holoiden Bereiche entstammen, wenn ferner im Sinne der Äquivalenz

$$(C_n, \prod_{s=1}^{r} P_r) = 1, \qquad (a_s, n_s) = 1$$

ist, dann ist die Gleichung $f(z) = 0$ irreduktibel." F.

O. Perron. **Über eine Anwendung der Idealtheorie auf die Frage nach der Irreduzibilität algebraischer Gleichungen.** Math. Ann. **60**, 448-458.

Um die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen zu untersuchen, zerlegt Perron gewisse rationale Primzahlen in einem der durch die gegebene Gleichung definierten algebraischen Körper in ihre idealen Faktoren und zieht dann aus dieser Zerlegung Schlüsse auf den Grad des betreffenden Körpers, wobei er hauptsächlich die beiden folgenden Hülfssätze benutzt: 1. Eine rationale Primzahl kann in einem algebraischen Körper n-ten Grades in höchstens n Faktoren zerfallen; 2. eine rationale Primzahl kann in einem algebraischen Körper nur dann die n-te Potenz eines Ideals sein, wenn der Grad des Körpers durch n teilbar ist.

Nach dieser Methode, die bereits Dedekind (Vorlesungen über Zahlentheorie, § 185) auf die Kreisteilungsgleichung angewendet hat (vgl. auch das vorstehende Ref. über: „M. Bauer, Beitrag zur Theorie der irreduziblen Gleichungen"), beweist Perron zunächst den bekannten Eisensteinschen Satz und dann die folgende Verallgemeinerung der von Koenigsberger (J. für Math. **115**; F. d. M. **26**, 116, 1895) aufgestellten Kriterien: „Die algebraische Gleichung

$$x^n + p_1^{\left[\frac{e_1}{n}\right]+1} \cdots p_k^{\left[\frac{e_k}{n}\right]+1} a_1 x^{n-1} + \cdots$$
$$+ p_1^{\left[\frac{(n-1)e_1}{n}\right]+1} \cdots p_k^{\left[\frac{(n-1)e_k}{n}\right]+1} a_{n-1} x + p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k} a_n = 0,$$

wo $a_1, \ldots, a_n$ beliebige ganze rationale Zahlen bedeuten, deren letzte zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ prim ist, wo ferner die $k+1$ Zahlen $n, e_1, e_2, \ldots, e_k$ keinen gemeinsamen Teiler haben, ist irreduzibel."

In ähnlicher Weise werden dann noch eine Reihe weiterer, auf die Irreduzibilität von algebraischen Gleichungen bezüglichen Sätze, unter anderem die von Netto (Math. Ann. **48**; F. d. M. **27**, 64, 1896) aufgestellten Theoreme bewiesen. Zum Schlusse bemerkt der Verf., daß das angewendete Verfahren auch gestattet, entsprechende Sätze für einen beliebigen algebraischen Rationalitätsbereich herzuleiten. F.

F. Mertens. **Über zyklische Gleichungen.** Wien. Ber. **114**, 105-148.

Daß die Wurzeln jeder zyklischen Gleichung, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind, sich rational durch Einheitswurzeln ausdrücken

lassen, hat zuerst Kronecker (Berl. Ber. 1853) ausgesprochen, ohne aber einen vollständigen Beweis zu geben. Zum erstenmal bewiesen worden ist der Satz von H. Weber (Acta Math. 8; Lehrbuch d. Algebra II, 23. Abschn.), dann später auch von D. Hilbert (Gött. Nachr. 1896). Mertens gibt hier für diesen außerordentlich wichtigen und interessanten Satz einen neuen umfassenden Beweis, welcher sich stützt auf die von Kronecker eingeführte Komposition Abelscher Gleichungen, auf Kroneckers Ausdruck für die allgemeine Gestalt der Wurzeln zyklischer Gleichungen, deren Grad eine ungerade Primzahl ist, und auf gewisse, von Kummer herrührende Formeln aus der Theorie der komplexen, aus Einheitswurzeln gebildeten Zahlen. F.

F. Mertens. Über den Dedekindschen Beweis der Irreduktibilität der Gleichung für die primitiven n-ten Einheitswurzeln. Wien. Ber. **114**, 1293-1296.

Bedeutet $F_n = 0$ die Gleichung für die primitiven n-ten Einheitswurzeln, so läßt sich der in der Überschrift genannte Beweis für den natürlichen Rationalitätsbereich in einfacher Weise mit Hülfe des Satzes führen, daß die Funktion $F_n(x^m)$ durch $F_n(x)$ algebraisch teilbar ist, wenn m und n relativ prim sind. Mit geringen Änderungen ist derselbe Beweis auch auf die Gleichungen der Lemniskatenteilung anwendbar.
F.

F. Mertens. Über die Irreduktibilität der binomischen Gleichung. Wien. Ber. **114**, 1297-1299.

Bekanntlich ist die Funktion $x^n - A$ in einem beliebigen Rationalitätsbereiche R irreduktibel, außer wenn entweder p ein Primfaktor von n und A in R eine p-te Potenz ist, oder wenn n ein Vielfaches von 4 und $-4A$ eine vierte Potenz in R ist. Setzt man diesen Satz als richtig voraus, wenn n eine Primzahl bedeutet (und für diesen Fall hat ihn Abel bereits bewiesen), so kann man ihn, wie es Mertens in vorliegender Note tut, durch Induktion allgemein beweisen, indem man zeigt, daß, wenn der Satz für irgend einen Exponenten richtig ist, er auch noch gilt, falls dieser Exponent mit einer Primzahl multipliziert wird. F.

F. Mertens. Die Kummersche Zerfällung der Kreisteilungsresolvente. Wien. Ber. **114**, 1359-1375.

Bedeutet λ eine ungerade Primzahl, α eine imaginäre λ-te Einheitswurzel und p eine nach dem Modul λ zum Exponenten t gehörende Primzahl, $\mathfrak{p}(\alpha)$ einen Primfaktor von p in dem Körper der λ-ten Einheitswurzeln, dann gibt es stets eine primitive Kongruenzwurzel g von $\mathfrak{p}(\alpha)$, für welche

$$g^{\frac{1}{\lambda}(p^t-1)} \equiv \alpha \,(\text{mod. } \mathfrak{p}\alpha).$$

Indem zunächst $t = 1$ vorausgesetzt wird, sei

$$L(\alpha) = \Sigma \alpha^{-\operatorname{ind} s} \cdot r^s \qquad (s = 1, 2, \ldots, p-1),$$

wo r eine primitive p-te Einheitswurzel bezeichnet und das Zeichen ind s auf g zu beziehen ist. Während Kummer die in α ganze Zahl $L(\alpha)^\lambda$ mittels der Jacobischen Ausdrücke $\psi_i(\alpha)$ in Faktoren zerlegt hat, führt Mertens diese Zerfällung an $L(\alpha)^\lambda$ selbst durch. Ebenso wird die für $t > 1$ gebildete verallgemeinerte Zahl $L(\alpha)^\lambda$ als Produkt dargestellt. Schließlich leitet Mertens direkt aus dem Ausdrucke $L(\alpha)^\lambda$ [nicht wie Kummer mittels $\psi_i(\alpha)$] den Wert des verallgemeinerten Legendreschen Zeichens $\left(\frac{E_n}{\mathfrak{p}}\right)$ für die Kreisteilungseinheit

$$E_n = \Pi e(\alpha^{\gamma_h})^{\gamma^{-2nh}} \qquad (h = 0, 1, \ldots, \tfrac{1}{2}(\lambda-1)-1)$$

ab. γ bezeichnet hier eine primitive Kongruenzwurzel von λ, γ_h den Rest der Potenz γ^h in bezug auf λ und $e(\alpha)$ die Einheit:

$$e(\alpha) = \alpha^{(\gamma-1)\cdot\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)} \cdot \frac{1-\alpha^\gamma}{1-\alpha}.$$

F.

G. Kober. Die transformierte Kreisteilungsgleichung und ihre Reduktion auf eine Gleichung, deren Grad nicht mehr teilbar ist. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **9**, 194-196.

Der Verf. zeigt, wie man für eine Gleichung $x^p = 1$, wo p eine Primzahl ist, die Gleichungen niederen Grades, von denen die Lösung der Kreisteilungsgleichung abhängt, schnell aufstellen kann. Er erläutert das Verfahren an den Fällen $p = 13$ und $p = 17$. Lp.

W. Scheibner. Zur Theorie der Tschirnhaus-Transformation. Leipz. Ber. **57**, 87-106.

In Fortsetzung seiner früheren Arbeiten über die Theorie der linearen Transformation (F. d. M. **35**, 121, 1904) behandelt der Verf. vornehmlich die Tschirnhaus-Transformation in der Form, die ihr von Hermite (C. R. 1858; vgl. auch Weber, Algebra I, § 68 u. ff.) gegeben worden ist. Er beweist zunächst den Hermiteschen Satz, daß die Anwendung dieser Transformation auf eine Gleichung $f(y) = 0$ vom m-ten Grade zu einer Gleichung m-ten Grades $\psi(w) = 0$ führt, in welcher der Koeffizient von w^{m-1} Null ist und alle übrigen Koeffizienten simultane Invarianten von f und einer Funktion $(m-2)$-ten Grades g sind. Nach Angabe verschiedener Methoden zur Bildung von $\psi(w)$ (Aufstellung einer Determinante für $\psi(w)$, sukzessive Elimination) wendet sich Scheibner speziell zur Gleichung fünften Grades in der kanonischen Form $f(y) = y^5 + Cy^3 + Ey + F = 0$ und untersucht, auf welche Weise man es erreichen kann, daß

die durch Transformation aus ihr hervorgehende Gleichung $\psi(w)=0$ entweder auch die kanonische Form hat oder eine Hauptgleichung wird oder auch die Bring-Jerrardsche Gestalt annimmt. F.

R. E. MORITZ. **Some physical solutions of the general equation of the nth degree.** Annals of Math. (2) **6**, 64-78.

Ausführliche und elementare Besprechung verschiedener, auf Sätzen der Statik, der Hydrodynamik und der Elektrizitätslehre beruhenden Mechanismen, die zur Auflösung von Gleichungen beliebigen Grades dienen, und deren Prinzipien von Rowning, Lille, Boys, Grant, Meslin und Lucas stammen (vgl. Enzyklopädie der Math. Wissensch. **1**, 1067). F.

HJ. ANÉR. **Om generaliseradt diskriminantbegreff som grundval för ekvationslösning.** Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. **2**, No. 9, 1-10.

Eine Gleichung mit $m+1$ gleichen Wurzeln wird vom Verf. als eine Gleichung mit der „Multiplizität" m bezeichnet. Ein von den Wurzeln gebildeter Ausdruck, dessen Verschwinden das Kennzeichen der Erhöhung der Multiplizität von $m-1$ zu m ist, wird eine „Diskriminante von der Ordnung m" genannt. Damit die Gleichung $m+1$ gleiche Wurzeln habe, müssen also m Diskriminanten gleichzeitig verschwinden. Es wird mitgeteilt, in welchen Fällen die Berechnung der Diskriminanten möglich ist. Das Resultat scheint hauptsächlich dasselbe zu sein, das Baur (Math. Annalen **50**) früher erhalten hat. Der vorliegende Aufsatz endet mit einer Darstellung der Wurzeln der allgemeinen Gleichungen dritten und vierten Grades durch die zugehörige Diskriminante. Msn.

G. CANDIDO. **Su d' un' applicazione delle funzioni U_n, V_n di Lucas.** Periodico di Mat. (3) **2**, 281-285.

Die quadratische Gleichung $x^2-px+q=0$ habe die Wurzeln α und β; dann sind die Lucaschen Funktionen U_n, V_n definiert durch die Gleichungen:

$$\alpha^n+\beta^n=V_n=p^n-\frac{n}{1}p^{n-2}q+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}p^{n-4}q^2$$

$$+\cdots+(-1)_h\frac{n}{h}C^{h-1}_{p-h-1}p^{n-m}q^h_{\cdot}+\cdots,$$

$$\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=U_n=p^{n-1}-C^1_{n-2}p^{n-3}q+\cdots$$

$$+(-1)^r C^r_{n-r-1}p^{n-r-1}q^r+\cdots,$$

mit den Anfangsbedingungen $U_1=1$, $U_2=p$; $V_0=2$, $V_1=p$. Die Bedingungen dafür, daß das Polynom

$$f(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_n$$

durch das Trinom $x^2 - px - q = (x-\alpha)(x+\beta)$ teilbar sei, sind, in den U_i ausgedrückt:

$$U_{n-1} + A_1 U_{n-2} + \cdots + A_{n-3} U_2 + A_{n-2} U_1 + \frac{A_n}{q} = 0,$$
$$U_n + A_1 U_{n-1} + \cdots + A_{n-2} U_2 + A_{n-1} U_1 = 0,$$

oder aber in U_i und V_i:

$$V_n + A_1 V_{n-1} + A_2 V_{n-2} + \cdots + A_{n-1} V_1 + A_n V_0 = 0,$$
$$U_n + A_1 U_{n-1} + A_2 U_{n-2} + \cdots + A_{n-2} U_2 + A_{n-1} U_1 = 0,$$

von denen die letzte auch ersetzt werden kann durch die Ableitungen V' der V in bezug auf p:

$$\frac{1}{n} V'_n + \frac{A_1}{n-1} V'_{n-1} + \frac{A_2}{n-2} V'_{n-2} + \cdots + \frac{A_{n-2}}{2} V'_2 + \frac{A_{n-1}}{1} V'_1 = 0.$$

Um die Teilbarkeitsbedingungen von $f(x)$ durch $(x^2 - px - q)^k$ zu erhalten, braucht man nur die obigen Bedingungen auf die Polynome $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(k-1)}(x)$ anzuwenden. Unter den Anwendungen der Sätze auf das Binom $x^n + 1$ wird zuerst der Satz bewiesen, daß $x^n + 1$ einen trinomischen Faktor $x^2 - px + 1$ besitzt, wenn die Gleichung $V_n + 2$ eine Doppelwurzel p zuläßt. Hieraus werden die Zerlegungen von $x^5 + 1$ und $x^6 + 1$ abgeleitet (vgl. F. d. M. **33**, 203, 1902).

Lp.

G. Candido. Le equazioni reciproche in senso generale. Periodico di Mat. (3) **3**, 76-80.

Nach G. de Longchamps wird die Gleichung $f(x) = 0$ vom n^{ten} Grade reziprok genannt, wenn

$$f(x) = \lambda x^n f\left(\frac{k}{x}\right)$$

für passend gewählte Werte von λ und k ist (vgl. Studnička im Arch. d. Math. u. Phys. (3) **3**, 16—20). Ist n eine gerade Zahl, so kann die Gleichung in die Gestalt gebracht werden:

$$a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_2 \lambda^{n-2} x^2 + a_1 \lambda^{k-1} x + \lambda^k a_0 = 0,$$

und sie geht durch die Substitution $x + \lambda/x = y$ in eine Gleichung $\varphi(y) = 0$ vom Grade k über. Die reziproke Gleichung für ein ungerades n läßt sich so schreiben:

$$a_0(x^n + \mu^n) + a_1 x(x^{n+2} + \mu^{n+2}) + a_2 x^2 (x^{n-4} + \mu^{n-4}) + \cdots + a_{\frac{1}{2}(n-1)} x^{\frac{1}{2}(n-1)}(x + \mu) = 0.$$

Sie hat eine Wurzel $x = -\mu$ und kommt nach Absonderung des Faktors $x + \mu$ auf eine reziproke Gleichung zurück, deren Grad eine

gerade Zahl ist. Hiernach werden die allgemeinen reziproken Gleichungen der Grade 3, 4, 5 behandelt. Lp.

G. Candido. Sulla equazione reciproca di quarto grado. Suppl. al Period. 8, 84-85.

Genaue Diskussion der Wurzeln. Lp.

R. Occhipinti. Equazioni a radici in progressione geometrica. Periodico di Mat. (3) 2, 173-181.

G. Sannia. Equazioni le cui radici formano una progressione geometrica. Periodico di Mat. (3) 3, 22-32.

In dem ersten Aufsatze wird behauptet, die Lösung einer algebraischen Gleichung n-ten Grades, deren Wurzeln die Zahlen $r, r\varrho, r\varrho^2, \cdots, r\varrho^{n-1}$ sind, komme auf die Lösung einer kubischen Gleichung zurück. Sannia weist mit Recht darauf hin, daß die Unrichtigkeit dieses Satzes schon aus der wohlbekannten Theorie der Kreisteilungsgleichung $x^n = 1$ ersichtlich ist, und zeigt, welche Fehlschlüsse zu der Aufstellung des falschen Satzes geführt haben. Sodann ermittelt er aber die wahren Bedingungen zwischen den Koeffizienten der Gleichung

$$(1)\quad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

wenn die Wurzeln dieser Gleichung Folgeglieder einer geometrischen Reihe sind, und spricht das Ergebnis in dem Satze aus: Damit die Gleichung (1), in der a_{n-1} von Null verschieden sei, ihre Wurzeln in geometrischer Progression habe, ist es notwendig und hinreichend, 1. daß a_1 und a_n nicht Null sind; 2. daß

$$a_s a_{n-1}^s = a_1^s a_{n-s} a_n^{n-1} \qquad (s = 2, 3, \ldots, k, n;\ k = [\tfrac{1}{2} n]);$$

3. daß, wenn $\varphi(y) = 0$ die Gleichung ist, welche aus (1) durch die Transformation

$$x = y \sqrt{\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}}$$

hervorgeht, die Gleichungen:

$$\varphi(y) = 0,\ \varphi(y^3) = 0, \ldots, \varphi(y^{2k-1}) = 0, \text{ falls } n = 2k,$$
$$\varphi(y) = 0,\ \varphi(y^2) = 0, \ldots, \varphi(y^k) = 0, \text{ falls } n = 2k + 1,$$

die nämliche Wurzel gemeinsam haben. Die dritte Bedingung kann auch durch die folgende ersetzt werden:

Bezeichnet man mit z_1 eine gewisse Wurzel der Gleichung k-ten Grades $\psi(z) = 0$, auf welche $\varphi(y) = 0$ durch die Transformation $y + 1/y = z$ erniedrigt wird, so sind die anderen Wurzeln $z_2, z_3, \ldots, z_k$, falls $n = 2k + 1$, oder $z_3, z_5, \ldots, z_{2k-1}$, falls $n = 2k$, wo allgemein z_s die-

jenige ganze rationale Funktion s-ten Grades in z_1 ist, welche aus der rekurrenten Beziehung $z_s = z_{s-1} z_1 - z_{s-2}$ $(z_0 = 2)$ folgt. — Ist dagegen $a_{n-1} = 0$, so muß $f(x) = x^n$ sein oder $= x^n + a_1 x^{n-1}$, oder aber, falls a_s der erste nicht verschwindende Koeffizient ist,

$$f(x) = \left(x^s + \frac{s}{n} a_s\right)^{n/s},$$

wo s ein Teiler von n ist größer als 1.

Nach Aufstellung dieser Kriterien werden die hierhergehörigen Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades ermittelt. Zuletzt wird gezeigt, wie man im allgemeinen Falle der Gleichung n-ten Grades die Zahlen r und ϱ finden kann. Lp.

A. Auric. Résolution graphique de l'équation $X^2 - pX + q = 0$, p et q étant quelconques. Nouv. Ann. (4) 5, 514-518.

Einfache, elegante Konstruktion der Wurzeln von $X^2 - pX + q = 0$ in der komplexen Zahlenebene; p, q bedeuten beliebige komplexe Koeffizienten. F.

L. Matthiessen. Auflösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten mittels Determinanten. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 9, 357-360.

Auflösung des Gleichungssystems

$$x^2 + xy + y^2 = a,\ y^2 + yz + z^2 = b,\ z^2 + zx + x^2 = c$$

nach einer ganz speziellen Methode und Erweiterung dieser Methode auf eine größere Anzahl von Gleichungen und Unbekannten. Lp.

H. I. Thomsen. Graphical solution of cubic and quartic equations. Nature 72, 295.

Nimmt man die Wurzeln von $z^3 + qx + 1 = 0$ in der Form an $-2y$, $y + \sqrt{x}$, $y - \sqrt{x}$, so ist

$$3y^2 + x = -q,\ y^3 - xy - \tfrac{1}{2} = 0.$$

Ebenso kann man die Wurzeln von $z^4 + qz^2 + z + s = 0$ unter der Form $v \pm \sqrt{w_1}$, $-v \pm \sqrt{w_2}$ erhalten aus

$$2v^2 + w_1 + w_2 = q,\ 2v(w_1 - w_2) = -1,$$
$$v^4 - (w_1 + w_2)v^2 + w_1 w_2 = s,$$

oder aber für $4v^2 = y$, $(w_1 - w_2)^2 = x$ aus

$$xy = 1,\ (y + q)^2 - (x + 4s) = 0.$$

Lp.

W. Godt. Über den sogenannten irreduziblen Fall der kubischen Gleichung. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **9**, 213-214.

Behandlung ohne Hereinziehung des Imaginären und ohne unsymmetrische Bevorzugung einer Wurzel, wie dies vorher nach einer Anmerkung der Redaktion schon von Stoll (1876), Matthiessen (1902) geschehen ist. Der Verf. verweist wegen der geometrischen Deutung seiner Lösung auf seine Programmabhandlung: Über einige sogenannte merkwürdige Punkte des Dreiecks (F. d. M. **34**, 559, 1903). Lp.

A. Krahé. Les centres isodynamiques dans la résolution des équations du troisième degré. Mathesis (3) **5**, 61-66.

Die Wurzeln der Hessiane einer binären kubischen Form entsprechen den isodynamischen Zentren des Dreiecks, dessen Ecken die Wurzeln der binären kubischen Form darstellen. Mn. (Lp.)

P. Pinkerton. The turning-values of cubic and quartic functions and the nature of the roots of cubic and quartic equations. Edinb. M. S. Proc. **23**, 43-48.

Die allgemeine kubische Funktion $z^3 + a_1 z^2 + b_1 z + c_1$ wird zuerst in $x^3 + 3qx + r$ umgeformt, und dann wird die Kurve $y = x^3 + 3qx + r$ betrachtet; die Natur der Kurve in einem beliebigen Punkte (h, k) wird durch Verlegung des Ursprungs nach jenem Punkte ermittelt. Graphische Überlegungen führen zur Bestimmung des Charakters der Wurzeln. Ähnliche Methoden werden auf die biquadratische Form angewandt; die Kurvenuntersuchung wird auf die Form $y = x^4 + 6qx^2 + 4rx + s$ bezogen. Für elementare Lehrgänge ist die Methode sehr zweckmäßig. Gbs. (Lp.)

W. P. Ermakow. Über die allgemeine Form der Radikalausdrücke von 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 Werten. Kiew Univ. Nr. 10 (Ber. 1904 der Phys.-Math. Ges. Kiew), 1-36. (Russisch.)

Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, die allgemeine Form des Radikalausdruckes von n Werten aufzustellen. Die allgemeine Theorie ist zu verwickelt. Der Verf. betrachtet die genannten Spezialfälle. Die Substitutionen sind nicht zu umgehen; wohl aber wird ohne Hülfe der Gruppentheorie und der Galoisschen Resolvente für jene Werte von n die allgemeine Form aufgestellt, und das Resultat wird zur Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichung benutzt. Nur um das notwendige und hinreichende Merkmal der Auflösbarkeit der Gleichung fünften Grades in Radikalen auszusprechen, wird der Begriff der metazyklischen Gruppe eingeführt. Si.

G. DARBI. Su alcune proprietà delle equazioni normali di 3°, 4° e 5° grado. Batt. G. **48** [(2) **12**], 97-116.

1. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Normalgleichung (d. h. eine Gleichung, deren sämtliche Wurzeln sich rational durch eine von ihnen ausdrücken lassen) dritten Grades, die in einem gewissen, die Koeffizienten enthaltenden Rationalitätsbereiche K irreduzibel ist, die Eigenschaft besitzt, daß jede rationale Funktion ihrer Wurzeln des Bereiches K sich linear durch die Wurzeln darstellen läßt mit Koeffizienten, die K angehören, besteht darin, daß sie nicht die Form hat $(x+\alpha)^3=\beta$, wo α, β Zahlen des Bereiches K bedeuten."

2. Als Bedingung für die entsprechende Eigenschaft einer Normalgleichung vierten Grades ergibt sich, daß sie nicht eine der Formen besitzt

$$(x^2+px+q)^2+r(x^2+px+q)+s=0$$

oder

$$(x^2-2bx+a^2\alpha)^2=\alpha(2ax-2ab+1)^2,$$

wo die sämtlichen Koeffizienten wieder dem Rationalitätsbereiche K angehören.

3. Die Normalgleichung fünften Grades hat sicher die gleiche Eigenschaft, falls der Bereich K nicht die fünften Einheitswurzeln enthält. Kommen diese in K vor, so ist notwendig und hinreichend, daß für $i=1, 2, 3, 4, 5$

$$x_i=A_iy_i^4+B_iy_i^3+C_iy_i^2+D_iy_i+E_i,$$

wo keiner der Koeffizienten A_i, B_i, C_i, D_i Null sein darf und die y_i die Wurzeln einer binomischen Gleichung $y^5=c$ bedeuten. F.

G. VIVANTI. Aperçu sur la théorie de l'équation du cinquième degré. Nouv. Ann. (4) **5**, 5-36.

G. VIVANTI. Cenni sulla teoria delle equazioni di quinto grado. Atti Acc. Peloritana **19**, 104-133.

Übersetzung der „Übersicht der Theorie der Gleichungen vom fünften Grade" aus dem Arch. d. Math. u. Phys. (3) **8**, 53-63, 120-130 (F. d. M. **35**, 116, 1904). Lp.

M. WEILL. Sur une classe d'équations irréductibles du cinquième degré, résolubles par radicaux. S. M. F. Bull. **33**, 82-87.

Die Untersuchung von Fünfecken, welche einem Kegelschnitte ein- und einem andern umbeschrieben sind, führt zu Gleichungen fünften Grades, bei denen man von vornherein weiß, daß durch zwei Wurzeln die übrigen rational ausdrückbar sind, so daß der Verf. die beiden folgenden Sätze aussprechen kann:

1. „Die Gleichung

$$t^5 - t^4(2a+b) + ct^3 - at^2(2c - ab - b^2 - 3a^2) - a^2t(2a^2 + ab - c) + a^4(a-b) = 0,$$

in welcher a, b, c drei beliebige Größen bedeuten, ist durch Wurzelzeichen auflösbar."

2. „Die Gleichung

$$t^5 - act^4 + (t^3 - ct^2)\sqrt{a^3 - 2a^2 + 5a} + at - c = 0,$$

in welcher a, c zwei unabhängige Parameter bedeuten, ist durch Wurzeln aus rationalen Funktionen von a, c auflösbar." F.

W. Scheibner. Zur Auflösung der Ikosaedergleichung. Leipz. Ber. **57**, 372-387.

Der erste Teil behandelt als Ergänzung historischer Bemerkungen in einer früheren Arbeit (vgl. F. d. M. **35**, 121, 1904) die Reduktion der bikubischen Ikosaederresolvente auf die Brioschische Resolvente fünften Grades. Ein Zahlenbeispiel, das die bequeme Anwendbarkeit der entwickelten Formeln erläutern soll, führt den Verf. zur Ansicht, daß in der von H. Weber (Algebra II, § 114) angegebenen Lösung der Ikosaedergleichung durch hypergeometrische Reihen eine noch nicht aufgeklärte Ungenauigkeit enthalten sein müsse. Der zweite Teil enthält Zusätze zu einzelnen Stellen der in den Leipz. Ber. vom 6. Juli 1903 veröffentlichten Arbeit (vgl. F. d. M. **34**, 116, 1903). F.

F. Klein. Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen. Math. Ann. **61**, 369-371.

Wären die Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_{60}$ der Ikosaedergleichung mittels Wurzelzeichen durch den Parameter Z der Gleichung darstellbar, so müßte sich nach einem bekannten Abelschen Satze der Wurzelausdruck auf eine solche Form bringen lassen, daß die innerste Wurzel $\sqrt[p]{R(z)}$, wo p eine Primzahl und R eine rationale Funktion von Z bedeutet, gleich einer rationalen Funktion $r(z_1, z_2, \ldots, z_{60})$ der 60 Wurzeln wäre. Die Unmöglichkeit einer solchen Gleichung ergibt sich nun aber einfach daraus, daß $\sqrt[p]{R(z)}$ eine Verzweigung besitzt, die mit der charakteristischen Verzweigung, welche $z_1, z_2, \ldots, z_{60}$ und deshalb auch $r(z_1, z_2, \ldots, z_{60})$ als Funktionen von Z haben, sicher nicht übereinstimmt. F.

F. Klein. Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades. J. für Math. **129**, 150-174; Math. Ann. **61**, 50-71.

Um die Analogie zwischen den Auflösungsmethoden für die allgemeinen Gleichungen fünften Grades und für die sechsten Grades deutlich hervortreten zu lassen, gibt F. Klein zunächst, unter präziser Hervorhebung der Hauptgesichtspunkte und mit algebraischer Begründung, eine Übersicht über die Ikosaedertheorie der Gleichungen fünften Grades, die nicht bloß eine Methode neben anderen sein soll, sondern das Wesen aller früheren Untersuchungen darzustellen bestimmt ist. Die Ikosaedergleichung ist die nächstliegende Verallgemeinerung der reinen Gleichung: an Stelle der „unären“ Substitution $x' = xe^{\frac{2\pi ik}{n}}$, welche die Wurzeln einer reinen Gleichung untereinander verknüpft, treten 120 „binäre“ lineare Substitutionen zweier homogenen Variabeln x_1, x_2, und die Hauptaufgabe besteht darin, aus den 5 veränderlichen Größen $z_1, z_2, \ldots, z_5$ (den Wurzeln der vorgelegten Gleichung) zwei Funktionen x_1, x_2 zu bilden, deren Verhältnis bei den 60 geraden Vertauschungen der $z_1, z_2, \ldots, z_5$ diese 120 homogenen binären Ikosaedersubstitutionen erleidet. Rationale Funktionen der z, welche diese Forderung erfüllen, gibt es nicht; man gelangt aber zum Ziel, wenn man eine Quadratwurzel aus einer geeigneten rationalen Funktion der z zu Hülfe nimmt. Bei Einführung einer solchen „akzessorischen“ Irrationalität bespricht Klein die Beziehungen seiner Auflösungsmethode zur Kroneckerschen. Das Verhältnis $x_1 : x_2$ der so bestimmten Funktionen genügt der Ikosaedergleichung, die von nur einem Parameter abhängt, wegen dessen Berechnung aus den Koefficienten der Gleichung fünften Grades Klein auf seine „Vorlesungen über das Ikosaeder“ verweist. Von dem bisher behandelten algebraischen Teil der Aufgabe ist scharf zu trennen der transzendente, nämlich die Berechnung der Wurzeln der Ikosaedergleichung durch unendliche Prozesse, wobei Klein auseinandersetzt, in welchem Sinne man nur von einer Lösung durch elliptische Funktionen sprechen könne. Indem er nunmehr zu den Gleichungen sechsten Grades übergeht, zeigt er, wie die zweckentsprechende Weiterbildung der soeben dargelegten Hauptgesichtspunkte zur naturgemäßen Auflösung dieser Gleichungen führt. Ist eine Gleichung sechsten Grades nebst der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante gegeben (so daß also ihre Gruppe aus den 360 geraden Vertauschungen der $z_1, z_2, \ldots, z_6$ besteht), so kommt es darauf an, die kleinste Zahl homogener $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ zu benutzen, bei denen eine mit diesen 360 Vertauschungen isomorphe Gruppe linearer Substitutionen möglich ist. Mit rationalen Funktionen der $z_1, \ldots, z_6$ kommt man nicht aus; man muß wieder akzessorische Irrationalitäten zu Hülfe nehmen. Während nun Klein sich ursprünglich zu diesem Zwecke eine Gruppe quaternärer Kollineationen konstruiert hatte, ist er später, nachdem Valentiner 1889 eine ternäre Gruppe linearer Substitutionen entdeckt hatte, die mit den 360 geraden Vertauschungen von 6 Dingen isomorph ist, in einer in den Rom. Acc. L. Rend. 1899 veröffentlichten Note „Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado“ (vgl. F. d. M. **30**, 103, 1899) zu der „Valentinergruppe“ übergegangen, und die weitere Ausführung dieser Note ist der eigentliche Zweck der vorliegenden Arbeit. Mittels der Theorie der ebenen Kurven

dritter Ordnung und ihrer Wendepunkte gelingt es, die Hauptaufgabe zu lösen, aus den Veränderlichen $z_1, \ldots, z_6$ unter Adjunktion akzessorischer Irrationalitäten elementaren Charakters Größen $x_1 : x_2 : x_3$ zu bilden, welche bei den geraden Vertauschungen der z die 360 Kollineationen der Valentinergruppe erleiden. Die beiden Fundamentalinvarianten v, w dieser Gruppe lassen sich darstellen als rationale Funktionen der Koeffizienten der Gleichung sechsten Grades, der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante und der inzwischen eingeführten akzessorischen Irrationalitäten. Auf die Berechnung der $x_1 : x_2 : x_3$ aus den Invarianten v, w ist die Auflösung der Gleichung sechsten Grades zurückgeführt, also auf ein Problem mit zwei Parametern, dessen sämtliche 360 Lösungssysteme sich aus einem beliebigen durch die 360 Kollineationen der Valentinergruppe ergeben. Die wirkliche Ausrechnung von $x_1 : x_2 : x_3$ durch v, w, der transzendente Teil der Aufgabe, ist in neuester Zeit in Arbeiten von Lachtin und Gordan geleistet worden. F.

P. Gordan. Über die Auflösung der Gleichungen sechsten Grades. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 140-143.

Angabe der Resultate, zu denen der Verf. durch Ausführung der von F. Klein (Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado, Rendiconti dell' Accademia dei Lincei; F. d. M. **30**, 103, 1899 und vorstehendes Referat) vorgeschlagenen Methode gelangt ist, und die inzwischen in Math. Ann. **61**, 453-526 mit ausführlichen Rechnungen veröffentlicht sind. P.

A. Wiman. Die metazyklischen Gleichungen neunten Grades. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 190-193.

Vorläufige Angabe der Resultate, die inzwischen im Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik **1**, 665-680 genauer dargelegt sind, und über welche in F. d. M. **35**, 117, 1904 referiert worden ist. P.

M. d'Ocagne. Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques. Histoire et description sommaire des instruments et machines à calculer, tables, abaques et nomogrammes. Seconde édition, entièrement refondue et considérablement augmentée. Paris: Gauthier-Villars. VIII u. 228 S. gr. 8°.

Seitdem die erste Auflage dieses Werkes erschienen ist (1894), hat derselbe Gegenstand in dem Enzyklopädieartikel über numerisches Rechnen von Mehmke eine ausgezeichnete und gründliche Bearbeitung erfahren (Bd. **1**, S. 938-1079). Da außerdem in dem Katalog der Münchener Ausstellung ebenfalls ein gut geordnetes Material gedruckt vorliegt und inzwischen noch manche anderen Artikel erschienen sind, welche neue Beiträge zur Sache liefern, ist es begreiflich, daß der Umfang des Buches sich verdoppelt hat. Reichhaltiger ist der Mehmkesche

Artikel in der durch die Eigenart der Enzyklopädie bedingten Knappheit. Angenehmer lesbar ist das gegenwärtige Buch, in dem aber vieles, was Mehmke in möglichster Vollständigkeit zusammengetragen hat, gar nicht erwähnt oder nur flüchtig gestreift wird.

Das Buch zerfällt in die folgenden Abschnitte: I. Die Recheninstrumente (S. 7-23). II. Die Rechenmaschinen (S. 24-95). III. Die logarithmischen Instrumente und Maschinen (S. 96-128). IV. Die Rechentafeln oder Rechenknechte (S. 129-135). V. Das graphische Rechnen (S. 136-144). VI. Die graphischen Tafeln, Abake oder Nomogramme. Das nomographische Rechnen (S. 145-195). Zusammenfassung und Schlüsse (S. 196-197). Anhang. I. Beschreibung und Gebrauch der Rechenmaschine mit stetiger Bewegung von Tschebyscheff (S. 199-212). II. Note über die Differenzenmaschine, Systeme G. und E. Scheutz (S. 213-218).

Schon aus dieser Übersicht geht hervor, daß die Rechentafeln und das graphische Rechnen in IV und V nur kurz berührt sind, daß dagegen die Rechenmaschinen in II und die Nomographie in VI sich einer liebevolleren Behandlung erfreuen. Die letztere Disziplin verdankt ihre Ausbildung ja den wiederholten gründlichen Arbeiten des Verf. Gute Abbildungen schmücken den elegant ausgestatteten Band und erleichtern das Verständnis. Die Literaturnachweise sind in die zahlreichen und ausführlichen Noten verwiesen. Ein alphabetisches Namenverzeichnis am Ende hilft, einen gesuchten Namen zu finden.

Wenn auf S. 102 in Anmerkung (4) der Thesaurus von Vega als eine „Kopie von Vlacq“ bezeichnet ist, so heißt dies doch dem fleißigen und braven Vega, der sonst in der „Digression über die Geschichte der Logarithmen“ (S. 100-105) nicht erwähnt, auch sonst nirgends genannt wird, ein Unrecht tun. Glaisher findet bei Vlacq 171 Fehler in den ersten 7 Stellen; dagegen sind bei Vega nur noch 5 vorhanden. Dies zeigt an sich schon, daß Vega nicht bloß kopiert hat; wahrscheinlich hat d'Ocagne den Thesaurus nie gesehen. Auch Bürgi ist in dieser historischen Skizze nicht genannt. Lp.

Weitere Literatur.

H. Anér. Vereinfachte Wurzelformen metazyklischer Gleichungen fünften, siebenten und elften Grades. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. **2**, No. 3, 1-3.

W. S. Burnside and A. Panton. Theory of equations. Introduction to the theory of binary algebraic forms. New edition. Vol. I, II. London. Vgl. F. d. M. **13**, 62, 1881.

G. de J. Caballero. El cálculo y las ecuaciones químicas. Mem. Soc. „Antonio Alzate“ Mexico **22**, 119-123.

L. E. Dickson. On the cyclotomic functions. Amer. Math. Monthly **12**, 86-89. Kreisteilungsgleichungen.

M. del Giudice. Sulle equazioni algebriche di grado $2n$ la cui risoluzione si riconduce alla risoluzione, mediante equazioni di grado n, a quella di n equazioni quadratiche. Nota I e II. Napoli: Trani. 16 u. 16 S. 4°. (1904.)

A. Grévy. Traité d'algèbre. Paris. 502 S. 8°.

A. Krahe. Ecuaciones armónicas. Rev. Real Ac. Madrid 2, 388-392.

F. H. Loud. Solution of numerical cubic equations. Colorado Coll. Publ. 11, 219-224.

G. La Marca. Sulle equazioni di 2° e 3° grado. Boll. di Mat. Bologna 4, 54-61.

C. A. Marcou and E. S. Craig. Oxford questions in algebra. Papers set in pass moderations. Answers by C. A. Marcou and E. S. Craig. Third series, from Michaelmas term, 1899, to Michaelmas term, 1904. London: Simpkin. 12mo.

J. E. Mayer. Das mathematische Pensum des Primaners. Ein Hülfsbuch für d. Primaner humanist. u. realist. Gymnasien, sowie für d. Selbststudium. 16. Heft. Von den Funktionen u. Gleichungen im Allgemeinen. Kubische Gleichung, biquadratische Gleichungen. Leipzig: M. Schäfer. 56 S.

J. Ruiz-Castizo Ariza. Resolución algébrica de la ecuación de cuarto grado. Revista trim. de Mat. 5, 11-16.

B. Universale Algebra und Vektoranalysis.

E. Jahnke. Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. 32 Textfig. Leipzig: B. G. Teubner. XII u. 235 S. 8°.

Dieses Lehrbuch der Vektoranalysis gibt den Inhalt von Vorlesungen wieder, welche der Verf. wiederholt an der Technischen Hochschule in Charlottenburg gehalten hat. Der Zweck der Vorlesungen bestand vornehmlich darin, die Hörer möglichst schnell in das neue Gebiet einzuführen und ihnen die vielseitige Verwendbarkeit des Vektor-Begriffes zu zeigen. Den theoretischen Entwicklungen sind deshalb von Anfang an zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben, teils mit, teils ohne Lösung, beigefügt. Um die Vektorrechnung für Anwendungen nicht nur aus der theoretischen Physik, sondern auch aus der Geometrie nutzbar zu machen, hat sich Jahnke mehr dem Graßmannschen als dem Hamiltonschen Gedankengange angeschlossen. Er geht aus von der Summe zweier Punkte, definiert den „freien Vektor“ sodann als Differenz zweier Punkte, den „gebundenen Vektor“ oder „Stab“ als Produkt zweier Punkte, für welches das kommutative Gesetz nicht mehr gültig ist. Die Regeln für die Multiplikation zweier beliebigen Vektoren ergeben sich aus den betreffenden

Formeln für die Multiplikation der Einheitsvektoren, durch welche sich jeder Vektor linear darstellen läßt. Bei der Definition der Rechenoperationen wird überall das Prinzip der Permanenz formaler Gesetze zugrunde gelegt. Um dem Anfänger das Studium zu erleichtern, werden im ersten Hauptabschnitte ausschließlich die ebenen Vektoren behandelt, während im zweiten die räumlichen Vektoren mit ihren vielfachen Anwendungen auf die Geometrie, die Statik und Kinematik starrer Körper, die Mechanik deformierbarer Körper, die Elektrizitätslehre usw. folgen. Die Vektoren sind durch fett gedruckte kleine Buchstaben dargestellt, und zwar die freien Vektoren durch lateinische, die gebundenen durch deutsche Buchstaben. Für die Bezeichnung des äußeren Produktes sind die von Graßmann eingeführten eckigen Klammern gewählt, die in vielen Fällen, wo kein Mißverständnis möglich ist, weggelassen worden sind. F.

A. H. Bucherer. Elemente der Vektoranalysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. VIII u. 103 S. 8°.

In der neuen, zweieinhalb Jahre nach der ersten erschienenen Auflage ist im wesentlichen die Bezeichnungsweise zur Verwendung gekommen, welche in der Enzyklopädie angenommen worden ist. Der Beweis für den Fundamentalsatz der Vektorenrechnung, welchen Referent als nicht einwandfrei bezeichnen mußte (vgl. des Ref. Vorlesungen über Vektorenrechnung, S. 105), ist durch einen andern ersetzt worden. Doch auch dieser Beweis dürfte nach des Referenten Ansicht den Leser nicht vollauf befriedigen. Der Verf. benutzt nämlich bei seinem Beweise einen Satz vom sphärischen Viereck, der vektoriell so lautet:

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}] = (\mathfrak{A}\,\mathfrak{C})\,(\mathfrak{B}\,\mathfrak{D}) - (\mathfrak{A}\,\mathfrak{D})\,(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C});$$

dieser kann aber erst aus dem zu beweisenden Satz

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\;(\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}) - \mathfrak{A}\;(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$$

durch vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{D}$ gewonnen werden — wenigstens bei vektorieller Herleitung, auf die der Verf. selber besonderen Wert zu legen auffordert.

In den Anwendungen auf die theoretische Physik, über welche bereits bei Gelegenheit der ersten Auflage berichtet worden ist, hat sich nichts geändert. Jhk.

R. Gans. Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Leipzig, B. G. Teubner. X u. 98 S. 8°.

Das vorliegende Buch behauptet seinen Platz neben den Elementen der Vektoranalysis von Bucherer durchaus. Unterscheidet es sich doch von diesem durch seine Anwendungen auf Gebiete, die gegenwärtig im Vordergrunde des physikalischen Interesses stehen: das sind Elektrodynamik und Elektronentheorie. Dazu kommt eine klare Sprache und

strenge Beweisführung, die das Buch in physikalischen und mathematischen Kreisen schnell beliebt gemacht haben.

Die beiden ersten Kapitel enthalten die elementaren Operationen sowie die Differentialoperationen und Integralsätze der Vektoranalysis. Es folgt ein Kapitel über krummlinige Koordinaten und Vektorzerlegungen mit Anwendung auf mechanische Deformationen. Und das letzte Kapitel behandelt die Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik, die Helmholtzschen Wirbelsätze, die elektrolytischen Verschiebungen, die Maxwellschen Gleichungen und ihre Integrale, die partiellen Differentialgleichungen für den elektrischen und den magnetischen Vektor, die Hertzschen Gleichungen für bewegte Medien, die ponderomotorischen Kräfte der Maxwell-Hertzschen Theorie, die Induktion in einer rotierenden Kugel, die Lorentzsche Elektronentheorie, die Umformung der Lorentzschen Gleichungen und die retardierten Potentiale.

In der Bezeichnungsweise hat sich der Verf. der Enzyklopädie angeschlossen. Jhk.

A. Macfarlane. **New contributions to the literature of vector-analysis.** Intern. Ass. for Promot. the Study of Quatern. and allied syst. of Math. 1905, 17-21.

A. Macfarlane. **A discussion of the notation and fundamental principles of vector-analysis.** Intern. Ass. Quaternions. 1905, 22-28.

Die erste Notiz gibt Literaturnachweise aus den Jahren 1902-1905. In der zweiten berichtet der Verf. über diejenigen Arbeiten, welche sich, in Antwort auf die von Prandtl gemachten Vorschläge, mit der Bezeichnung und den Grundlagen der Vektoranalysis beschäftigen. Es sind dies die Arbeiten von Mehmke, Prandtl, Macfarlane, Wilson, Collins und Knott. Jhk.

L. E. Dickson. **On finite algebras.** Gött. Nachr. 1905, 358-393.

Nachdem die Theorie der „endlichen Körper" (finite field), d. h. der endlichen Größensysteme, die denselben Gesetzen gehorchen wie die komplexen Zahlen, soweit sie nicht durch die endliche Anzahl der Elemente ausgeschlossen sind, eine genaue Durchbildung erfahren hat (vgl. L. E. Dickson, Linear Groups, Leipzig 1901), und nachdem Wedderburn (Amer. Math. Soc. Trans. **6**, 349-352, vgl. das folgende Referat) gezeigt hat, daß für endliche Größensysteme das kommutative Gesetz der Multiplikation eine notwendige Folge der übrigen Axiome ist, daß also ein Analogon zu Hamiltons Quaternionen nicht existiert, nimmt der Verf. die Aufgabe in Angriff, alle „Algebren" aufzustellen, die sich von den endlichen Körpern dadurch unterscheiden, daß entweder das kommutative Gesetz der Multiplikation zugleich mit dem distributiven Gesetz linker Hand oder das assoziative Gesetz der Multiplikation nicht gilt. In beiden Fällen muß, wie bei den endlichen Körpern, die Anzahl der Elemente des Größensystems eine Primzahlpotenz p^n sein. Eine

Algebra der erstgenannten Art ist dann und nur dann vorhanden, wenn $p^n - 1$ und n nicht teilerfremd sind. Jedoch gelingt eine erschöpfende Aufstellung aller dieser „nicht-kommutativen" Algebren nur für diejenigen Werte von n und p, für die n ungerade ist und überdies ein gewisser Satz über die Existenz einer invarianten Untergruppe in einer abstrakten Gruppe der Ordnung $p^n - 1$ gilt.

Ein wesentliches Mittel zur Konstruktion solcher Algebren besteht darin, daß in Systemen hyperkomplexer Zahlen den Parametern anstatt aller reellen oder aller komplexen Zahlenwerte alle Werte eines endlichen Körpers (Galoisschen Körpers) erteilt werden, und daß die Koeffizienten der Definitionsgleichungen des Zahlsystems noch in einfacher Abhängigkeit von den Parametern angenommen werden. T.

J. H. MACLAGAN-WEDDERBURN. A theorem on finite algebras. American M. S. Trans. **6**, 349-352.

Der Verf. zeigt, daß das Galoissche Feld die einzige linear assoziative Algebra ist, welche eine endliche Zahl von Elementen besitzt. Jhk.

L. E. DICKSON. On hypercomplex number systems. American M. S. Trans. **6**, 344-348.

In Fortsetzung seiner Untersuchungen aus dem vierten Bande derselben Zeitschrift stellt der Verf. eine weitere Verallgemeinerung für den Begriff des Systems höherer komplexer Zahlen auf. Jhk.

L. E. DICKSON. A general theorem on algebraic numbers. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 482-486.

$r_1, \ldots, r_n$ mögen einem Felde F angehören, und

$$\varrho^n = \sum_{i=1}^{n} r_i \varrho^{n-i} \tag{1}$$

möge in F irreduzibel sein. Eine Multiplikationstafel

$$\varrho^{n-i} \varrho^{n-k} = \sum_{s=1}^{n} \gamma_{iks} \varrho^{n-s}, \tag{2}$$

wo $i, k = 1, 2, \ldots, n$, setzt uns in den Stand, das Produkt aus x und y, wo

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varrho^{n-i}, \quad y = \sum_{k=1}^{n} y_k \varrho^{n-k} \tag{3}$$

(x_i, y_k in F) in der Form auszudrücken:

$$z = \sum_{s=1}^{n} z_s \varrho^{n-s}, \quad z_s \equiv \sum_{i,\,k}^{1,\ldots,n} \gamma_{iks}\, x_i\, y_k \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Theorem. Jede der $3n$ Determinanten (Schnitte der kubischen Anordnungen γ_{iks} durch Ebenen parallel zu den Seiten):

$$(5) \qquad C_i \equiv |\gamma_{iks}|, \quad C'_k \equiv |\gamma_{iks}|, \quad C''_s \equiv |\gamma_{iks}|$$

ist von Null verschieden. Wir haben die Auswertungen:

$$(6) \qquad C_i = (-1)^{i(n-i)}\, r_n^{n-i}, \quad C'_k = (-1)^{k(n-k)}\, r_n^{n-k},$$
$$C''_1 = \theta_n, \quad C''_n = \theta_{n-1}\, r_n^{n-1},$$

wo $\theta_m = +1$ ist, wenn m von der Form $4l$ oder $4l+1$, aber $\theta_m = -1$, wenn m von der Form $4l+2$ oder $4l+3$; außerdem ist für $1 < s < n$, abgesehen vom Vorzeichen, C''_s die Resultante der Gleichungen

$$(7) \qquad \varrho^{s-1} = \sum_{i=1}^{s-1} r_i\, \varrho^{s-1-i}, \quad 0 = \sum_{i=s}^{n} r_i\, \varrho^{n-i},$$

die man durch Zerfällen der Gleichung (1) in zwei Teile erhält. Lp.

I. Schur. Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen. J. für M. **130**, 66-76.

Es wird bewiesen, daß die Ordnung einer kommutativen Gruppe von Matrizen n-ten Grades, d. h. die maximale Anzahl von linear unabhängigen Matrizen n-ten Grades, von denen je zwei vertauschbar sind, gleich $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$ ist, d. h. gleich $\frac{n^2}{4}+1$ für gerades n, gleich $\frac{n^2-1}{4}+1$ für ungerades n, und eine Methode angegeben, alle derartigen Systeme vollständig zu bestimmen. T.

S. Epsteen and H. B. Leonard. On the definition of reducible hypercomplex number systems. American J. **27**, 217-242.

H. B. Leonard. On the definition of reducible hypercomplex number systems. II. American J. **27**, 381-405.

In einer gleichbetitelten Arbeit (F. d. M. **35**, 223, 1904) war S. Epsteen eine Vereinfachung der Definitionsgleichungen für die Reduzibilität eines Systems hyperkomplexer Zahlen durch die einschränkende Annahme der Existenz eines Moduls gelungen. Die Verf. gelangen zu weiteren Verschärfungen dieser Definitionsgleichungen, indem sie sowohl die Forderung des assoziativen Gesetzes der Multiplikation, als auch die Forderung der Existenz eines Moduls in analoge Forderungen für die Teilsysteme $(e_1, \ldots, e_m)$ und $(e_{m+1}, \ldots, e_n)$ zerspalten, in die das reduzible Zahlsystem zerfällt. So ziehen sie also z. B. statt der einzigen Forderung des assoziativen Gesetzes alle die Teilforderungen in Betracht, daß je ein Element des ersten und zwei des zweiten Teilsystems dem assoziativen Gesetz genügen, usw. Die mannigfache Kombination dieser Teilforderungen führt sie zu 78 verschiedenen, bis

zur Unabhängigkeit verschärften Systemen von Forderungen, deren jedes eine Definition der Reduzibilität enthält. Die zweite Arbeit fügt weitere 96 Definitionen sowie einige Berichtigungen zu § 5 der ersten Arbeit hinzu. T.

J. W. Young. On the use of hypercomplex numbers in certain problems of the modular group. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 363-367.

Unter der modularen Gruppe Γ ist die Gesamtheit der Substitutionen $v(z) = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$ verstanden, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen sind, welche die Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ erfüllen. Eine alte Aufgabe besteht in der arithmetischen Definition der Untergruppen von Γ; mit Ausnahme der zyklischen und der sogenannten Kongruenz-Untergruppen ist sie ein noch ungelöstes Problem. Der Verf. deutet eine Methode zur Angriffnahme solcher Probleme an, auf die sie bisher nicht angewandt zu sein scheint. Durch Anwendung dieser Methode auf einen besonderen Fall gelangt er zur Definition der zyklischen Untergruppen von Γ und der Kongruenzgruppen, welche den zyklischen Quotientengruppen entsprechen, und zwar für die letzteren in einer früher noch nicht gegebenen expliziten Form. Das Resultat lautet: Die drei Paare von Kongruenzen:

$$\left.\begin{matrix}\alpha \equiv \delta \\ \gamma \equiv \lambda\beta\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\alpha \equiv \delta \\ \beta \equiv 0\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\beta \equiv \mu(\alpha - \delta) \\ \gamma \equiv \nu(\alpha - \delta)\end{matrix}\right\} \pmod{p},$$

wo λ, μ, ν ganze Zahlen sind, definieren drei sich gegenseitig ausschließende Systeme von Untergruppen, und diese drei bilden zusammen die zyklischen Untergruppen von $G_{\frac{1}{2}p(p^2-1)}$. Ihre Anzahl ist ersichtlich $p^2 + p + 1$; die Ordnung der Untergruppe ist p, wenn $\lambda \equiv 0$, wenn $4\mu\nu + 1 \equiv 0$, und im zweiten Paar; die Ordnung ist $\frac{1}{2}(p-1)$, wenn λ oder $4\mu\nu + 1$ ein quadratischer Rest von p; die Ordnung ist $\frac{1}{2}(p+1)$, wenn λ oder $4\mu\nu + 1$ ein Nichtrest von p. Lp.

H. Taber. The scalar functions of hypercomplex numbers. Am. Acad. Proc. **41**, 59-70.

Der Verf. findet, daß bei den hyperkomplexen Zahlen zwei verschiedene Skalarfunktionen einzuführen sind, die nur in dem Falle $n = 4$ zusammenfallen und dann mit der üblichen Definition der Skalarfunktion bei den Quaternionen übereinstimmen. Es werden die Haupteigenschaften dieser beiden Skalarfunktionen entwickelt unter Benutzung der eigentümlichen Bezeichnung von B. Peirce, Am. J. **4**, 104, 115. Jhk.

E. B. Wilson. On products in additive fields. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 202-215.

Der Herausgeber von Gibbs' Vectoranalysis legt in klarer und präziser Weise dar, von welchen Gesichtspunkten sich Gibbs hat leiten

lassen, als er über Graßmanns System der Ausdehnungslehre hinausging: Zum Ausgangspunkt seines Systems nimmt Gibbs das formale Produkt, womit er nur den Graßmannschen Gedanken des offenen Produktes weiter entwickelt hat. Dadurch gewinnt er den Vorteil, daß er nicht nötig hat, wie Graßmann, die lineare Funktion als Bruch darzustellen. Er nimmt Graßmanns Begriffe der äußeren und inneren Multiplikation auf; aber nicht zufrieden damit, entwickelt er eine Theorie der Doppelprodukte, wobei er sich von der Geometrie und der Matrizentheorie leiten läßt. Auf diese Weise erlangt er „a great wealth of multiplicative relations between these multiple quantities. I say „wealth of multiplicative relations" designedly, for there is hardly any kind of relations between things which are the objects of mathematical study, which add so much to the resources of the student as those which we call multiplicative", wie sich Gibbs in seiner berühmten Ansprache als Vize-Präsident der American Association for the Advancement of Science ausdrückt.

Andrerseits entnimmt Gibbs dem System von B. Peirce, welches von der Forderung ausgeht, daß das Produkt zum Größengebiet der Faktoren gehören soll, die Vorstellung, daß Graßmanns System nur eines der vielen möglichen Systeme von Vektoralgebren (multiple algebras) sei.

Auf diesen beiden Gesichtspunkten baut Gibbs sein System der Vektoranalysis auf, wobei er das Ziel hat, ein System zu schaffen, das in erster Linie dem Physiker von Nutzen sein möchte. Jhk.

O. Blumenthal. Über die Zerlegung unendlicher Vektorfelder. Math. Ann. **61**, 235-250.

Ein wohlbekannter Satz der Vektoranalysis besagt, daß ein überall endliches und stetiges, im Unendlichen verschwindendes Vektorfeld stets in zwei einfache Komponenten, ein wirbelfreies (lamellares) und ein quellenfreies (solenoïdales) Feld, zerlegbar ist. Die bekannten Beweise dieses Satzes setzen eine spezielle Art des Verschwindens im Unendlichen voraus. Sie benutzen nämlich Raumintegrale $\int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{u}}{r} d\tau$ und $\int \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{u}}{r} d\tau$, deren Existenz nur dann feststeht, wenn das Feld $\mathfrak{u}$ im Unendlichen weder Quellen, noch Wirbel besitzt oder wie $\frac{1}{r^2}$ verschwindet. Der Verf. teilt einen allgemeingültigen Beweis mit, der nur die Annahme benutzt, daß das Feld und seine Ableitungen im Unendlichen verschwinden. Dabei ergibt sich ihm die überraschende Tatsache, daß im allgemeinen Falle die komponierenden Felder im Unendlichen selbst unendlich werden, aber nur von einer bestimmten niedrigen Maximalordnung, während sie in den bisher betrachteten Fällen gleichfalls im Unendlichen verschwinden. Jhk.

E. Rath. **Anwendung der Graßmannschen Ausdehnungslehre auf n-fache Orthogonalsysteme.** Arch. der Math. u. Ph. (3) **9**, 196-202.

Im Anschluß an die Arbeiten von Burali-Forti werden die Haupteigenschaften und Formeln der n-fachen Orthogonalsysteme in eleganter Weise abgeleitet, auf einem andern Wege als es in den Darbouxschen Leçons sur les systèmes orthogonaux geschehen ist. Jhk.

C. H. Knott. **Hamilton's quaternion vector analysis.** Deutsche Math. Ver. **14**, 167-171.

Der Verf. ist Hamiltonianer und spricht sich gegen die Stellung aus, welche man jetzt fast allgemein dem Graßmannschen äußeren Produkt zuerkannt hat.

Wenn übrigens der Verf. mehrfach von Peanos Bivektor **ab** spricht, so muß doch betont werden, daß von Peano nur die Bezeichnung „Bivektor" herrührt. Jhk.

O. Manville. **Théorème sur les vecteurs et théorème de Varignon.** Bordeaux Proc. Verb. 1904/5, 62-68.

Der Verf. legt sich die Frage vor, nach welchem Gesetz sich aus einem gegebenen Vektor MN ein Vektor PQ ableiten läßt, wofern ich vorschreibe, daß ich zu dem gleichen Resultat kommen soll, wenn ich statt der Vektoren die Komponenten nehme. Wird noch die Bedingung gestellt, daß der Vektor PQ auf der Ebene $[MNP]$ senkrecht stehen soll, dann findet der Verf. unter gewissen Hypothesen als allgemeinstes Gesetz die drei Relationen:

$$\varphi = \varrho(a, b, c)\,[Yc - Zb],$$
$$\chi = \varrho(a, b, c)\,[Za - Xc],$$
$$\psi = \varrho(a, b, c)\,[Xb - Ya],$$

wo a, b, c die Koordinaten des Punktes P und X, Y, Z die Komponenten des Vektors MN bedeuten. Für $\varrho = -1$ geht aus diesen Relationen der Varignonsche Satz hervor, daß die Summe der Momente mehrerer Vektoren in bezug auf eine Achse gleich dem Moment des resultierenden Vektors in bezug auf dieselbe Achse ist. Jhk.

J. V. Collins. **Correlation of vector analysis notations.** Deutsche Math. Ver. **14**, 164-167.

Der Verf. macht Vorschläge, die den Streit um die Vektorenbezeichnung zwischen den Graßmannianern und Gibbsianern beilegen sollen. Unter anderem schlägt er vor, für das äußere Produkt stets die eckigen Klammern Graßmanns beizubehalten, um die Gibbssche Bezeichnung $a\,b$ für das unbestimmte Produkt aus a und b zu retten. Jhk.

R. W. Genese. On the development of the „Ausdehnungslehre“ according to the principles of statics. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 433-445.

Der Verf. legt dar, wie sich die Gleichungen für progressive und regressive Produkte in die Sätze der elementaren Statik umdeuten lassen.

Jhk.

Weitere Literatur.

E. Barbette. Demostración de un teorema clásico por la geometria vectorial. Revista trim. de Mat. 5, 135-137.

K. Eichler. Beitrag zur Graßmannschen Punktrechnung. Festschr. 48. Philol.-Vers. Hamburg, 73-96.

Ch. J. Joly. A manual of quaternions. London: Macmillan and Co. XXVII u. 320 S. [Nature 72, 121-122.]

J. H. Maclagan-Wedderburn. On a theorem in hypercomplex numbers. Edinb. R. S. Proc. 26, 48-50.

V. H. O. Madsen. Note om Rumtal. Nyt Tidsskr. 16, 31-35.

Referat in Abschnitt IX, Kapitel 1.

Kapitel 2.

Theorie der Formen (Invariantentheorie).

A. Theorie der algebraischen Formen.

H. Poincaré. Sur les invariants arithmétiques. J. für Math. 129, 89-150.

Diese Abhandlung knüpft an zwei frühere desselben Verfassers an (F. d. M. **11**, 146, 1879; **13**, 146, 1881) und führt eine Reihe dort neu eingeführter Ideen weiter aus. Eine lineare Form $ax+by$ besitzt keine algebraische Invariante, wohl aber arithmetische Invarianten, d. h. eindeutige Funktionen von a, b, die sich nicht ändern, wenn die lineare Form ersetzt wird durch ihre vermöge einer linearen Substitution mit ganzzahligen Koeffizienten hervorgehende Transformierte. Eine solche arithmetische Invariante ist z. B. die bekannte Reihe

$$\Phi_k = \Sigma \frac{1}{(am+bn)^k} \tag{I}$$

(wo m, n alle ganzen Zahlen (exkl. $m=0$, $n=0$) durchlaufen), die für $k>2$ absolut konvergiert. Diese Reihen hängen eng mit den ellip-

tischen Funktionen zusammen. Bei Benutzung der Weierstraßschen Bezeichnungen hat man für $a = 2\omega$, $b = 2\omega'$, sukzessive $\Phi_4 = \frac{g_2}{3\cdot 4\cdot 5}$, $\Phi_6 = \frac{g_3}{4\cdot 5\cdot 7}$, $\Phi_8 = \frac{g_2^2}{400\cdot 3\cdot 7}$, $\Phi_{10} = \frac{g_2 g_3}{80\cdot 3\cdot 7\cdot 11}$, usf. Allgemeiner sei $\varphi(a, b)$ eine (eindeutige) Invariante, so daß $\varphi(a,b) = \varphi(a\alpha + b\beta, a\gamma + b\delta)$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. φ ist eine eindeutige Funktion von g_2, g_3, und umgekehrt. Im besondern sei φ homogen in a, b (wie oben Φ_k), so wird

$$\text{(II)} \qquad \varphi\left(\frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}, 1\right) = (\gamma a + \delta)^k \varphi(a, 1).$$

Ist also k eine positive ganze gerade Zahl, so stellt $\varphi(a, 1)$ eine Thetafuchssche Funktion dar, die zu der Fuchsschen Modulargruppe gehört.

Läßt sich diese Funktion $\varphi(a, 1)$ durch eine der Thetafuchsschen Reihen des Verf. darstellen? Zunächst werden die in Betracht kommenden Thetafuchsschen Reihen nebst ihren Konvergenzbedingungen aufgestellt. Die aufgeworfene Frage läßt sich im allgemeinen bejahen, und man gewinnt so eine allgemeine Darstellungsform für die arithmetischen Invarianten. Dagegen zeigen die obigen speziellen Funktionen $\Phi_k(a, 1)$ ein eigentümliches Grenzverhalten; sie lassen sich nicht direkt durch Thetafuchssche Reihen darstellen, trotzdem aber unter einem gewissen Gesichtspunkt als eine Ausartung solcher Reihen auffassen. Man bilde die Reihe

$$\text{(III)} \qquad \Theta(z, \xi) = \Sigma \frac{1}{[(\alpha z + \beta) - \xi(\gamma z + \delta)]^{2k}},$$

so würde diese für $\lim \xi = 0$ zu der Funktion $\Phi_k(a, 1)$ werden, aber die Reihe ist dann nicht mehr gleichmäßig konvergent. Dieser Übelstand läßt sich indessen dadurch umgehen, daß man die Glieder der Reihe geeignet zusammenfaßt, nämlich immer diejenigen, die im Grenzfalle einander gleich werden. Man wird dann auf eine Reihe von der Gestalt

$$\text{(IV)} \qquad \Sigma \frac{1}{(a + bm)^{2k}}$$

geführt, wo m alle ganzzahligen Werte durchläuft; ihre Summe hat den Wert

$$-\frac{1}{b^{2k}}(2k-1)!\; F_k\left(\frac{a}{b}\right),$$

unter $F_k(x)$ die $(2k-1)^{\text{te}}$ Ableitung von $\pi \operatorname{cotg} x\pi$ verstanden.

Es ergibt sich nunmehr

$$\Theta(z, \xi) = A_k \frac{e^{-2i\pi\xi}}{\xi^{2k}} \Sigma \frac{1}{(\alpha z + \beta)^{2k}} e^{2i\pi \frac{\gamma z + \delta}{\alpha z + \beta}},$$

wo A_k eine nur von k abhängende Konstante bedeutet und die ganzen Zahlen α, β zueinander teilerfremd sind.

Die damit eingeführte Reihe

$$\text{(V)} \qquad \Sigma \frac{1}{(a\alpha + b\beta)^{2k}} e^{2i\pi \frac{\gamma a + \delta b}{\alpha a + \beta b}}$$

stellt einen neuen wichtigen Typus arithmetischer Invarianten dar.

Die bisher betrachteten Reihen lassen sich auch in Funktion von g_2 und g_3 darstellen, oder auch durch die Fuchssche Funktion

$$x = f(z) = f\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2}$$

und ihre Ableitung. Hierbei stößt man auf die bemerkenswerte Tatsache, daß es unter den Reihen (V) solche gibt, die identisch verschwinden. Überdies ist zu betonen, daß die obigen Reihen für arithmetische Invarianten versagen, wenn $\frac{a}{b}$ reell ist, oder auch wenn k nicht eine gerade ganze Zahl ist. (Bei ungeradem ganzem k würde Φ identisch verschwinden.)

Das oben aufgeworfene Problem der expliziten Darstellung der Reihen durch x und $\frac{dx}{dz}$ wird zwar nicht völlig gelöst, aber es werden wesentliche Hilfsmittel dazu entwickelt. Dahin gehören in erster Linie Beziehungen zu den Fuchsschen Funktionen.

Es wird an die früher (F. d. M. **14**, 338, 1882) vom Verf. eingeführten Funktionen

$$\text{(VI)} \qquad \Delta(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \frac{\Pi(x - a_i)^{\mu_i}}{Q}$$

angeknüpft; hier ist $x = f(z)$ eine Fuchssche Funktion von z, h, und die μ_i sind ganze Zahlen, Q ein ganzes Polynom in x, die a_i sind die singulären Punkte der $f(z)$ definierenden Differentialgleichung. Für den vorliegenden Fall kommen nur drei singuläre Punkte $a_i = 0, 1, \infty$ in Betracht; z. B. wird für $h = 1$ einfach $\Delta(z) = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{x(x-1)}{x - x_1}$, unter x_1 eine Konstante verstanden; für beliebiges $h : \Delta(z) = \left(\frac{dz}{dx}\right)^h \frac{x^\lambda (x-1)^{\lambda_1}}{F(x)} R(x)$, wo $F(x)$, $R(x)$ eine gewisse ganze, resp. rationale Funktion bedeuten.

Die Thetafuchsschen Funktionen der ersten Gattung sind von der Gestalt

$$\text{(VII)} \qquad \Theta(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1} \frac{F(x)}{x^\lambda (x-1)^{\lambda_1}}.$$

Wird der Faktor von $\left(\frac{dz}{dx}\right)^h$ in $\Delta(z)$ mit X bezeichnet, und sind x und X Fuchssche Funktionen, so ergibt sich, daß zwischen den Residuen

von $\Delta(z)$ ebensoviel lineare Relationen bestehen, als es Thetafuchssche Funktionen erster Art von der Form $\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1} X$ gibt. Wird weiter $\frac{d^{2h+1}\Delta}{dz^{2h+1}} = Y\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1}$ gesetzt, so ist auch Y eine Fuchssche Funktion. Sei jetzt irgend eine Thetafuchssche Funktion Θ vorgelegt, und $(2h+1)$-malige Integration derselben liefere $M(z)$. Setzt man $M = X\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}$, $\Theta(z) = Z\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1}$, so wird $Y = Z$. Hier greift nun eine bemerkenswerte Analogie mit der Theorie der Abelschen Integrale ein. Die von den Funktionen Θ abhängenden rationalen Funktionen Z spielen die Rolle der algebraischen Integranden, und die M die der Abelschen Integrale selbst, endlich die Polynome P die der Perioden. Dabei entstehen die P durch die Beziehung $X' = X + \left(\frac{dx}{dz}\right)^h P$, wo der Akzent das Resultat der Ausführung der Substitution $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ bezeichnet. Die Anzahl der unabhängigen Abelschen Integrale erster Gattung ist genau so groß wie die derjenigen zweiter Gattung, nämlich gleich $p-1$, und die Anzahl der willkürlichen Koeffizienten in den Perioden ist doppelt so groß. Konstruiert man die Funktionen

$$\text{(VIII)} \qquad \Phi(z, a) = \Sigma \frac{1}{z - \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}} \frac{1}{(\gamma a + \delta)^{2h+2}},$$

so repräsentieren diese Integrale zweiter Gattung bezüglich z und zugleich Thetafuchssche Funktionen von a. Dieses Reziprozitätsgesetz ist eine Art von Verallgemeinerung des Satzes über die „Vertauschung von Parameter und Argument“. Im folgenden Abschnitt werden die Invarianten der definiten quadratischen Formen in Betracht gezogen. Sind $j_1, \ldots, j_p$ Invarianten einer ersten Linearform $A = ax + by$, $j'_1, \ldots, j'_q$ solche einer zweiten $A' = a'x + b'y$, so ist sicher jede eindeutige Funktion der j und j' eine Simultaninvariante beider Linearformen A, A'. Aber dies sind nur spezielle Invarianten der in Rede stehenden Art, da sie auch ungeändert bleiben, wenn die beiden Linearformen A, A' verschiedenen Substitutionen unterworfen werden. Um zu weiteren Simultaninvarianten zu gelangen, bilde man eine Reihe linearer Kombinationen $F_i = (ax + by) + \xi_i(a'x + b'y)$ $(i = 1, \ldots, p)$; sind $j_1, \ldots, j_p$ Invarianten von $F_1, \ldots, F_p$, so ist wiederum jede eindeutige Funktion der j eine Invariante von A, A'.

Noch zweckmäßiger ist die Bildung der quadratischen Form

$$Q = (ax + by)(a'x + b'y) = aa'x^2 + (ab' + ba')xy + bb'y^2;$$

jede Funktion von aa', $ab' + ba'$, bb', die eine arithmetische Invariante von A, A' ist, ist auch eine solche der quadratischen Form Q, und umgekehrt.

Nach Analogie des Früheren betrachte man insbesondere Invarianten $F(z, z')$, die nur von den beiden Verhältnissen $\frac{a}{b} = z$, $\frac{a'}{b'} = z'$ abhängen, so daß

$$\text{(IX)} \qquad F\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}\right) = F(z, z')$$

wird.

Unter diesen Funktionen sind solche, die in z und z' symmetrisch sind, Invarianten von Q. Man könnte zunächst glauben, daß es Funktionen $F(z, z')$ gäbe, die nur solche singulären Punkte besitzen, für die z und z' zugleich reell sind; aber solche Funktionen existieren nicht. Man bilde jetzt zunächst das Analogon zu den Thetafuchsschen Reihen:

$$\text{(X)} \quad \Sigma H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}\right) \cdot (\gamma z + \delta)^{-2m} (\gamma z' + \delta)^{-2m},$$

wo $H(z, z')$ eine rationale Funktion bedeutet, und stelle deren Konvergenzbedingungen auf. Ist $H(z, z')$ symmetrisch in z, z', so erhält man durch

$$\text{(XI)} \quad \Theta(a, b, a', b') = \Sigma H(\alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b, \alpha a' + \beta b', \gamma a' + \delta b')$$

eine Invariante von Q. Eine andere Gattung von Invarianten wird repräsentiert durch die Reihen

$$\text{(XII)} \qquad \Sigma \frac{1}{(\gamma a + \delta b)^s (\gamma a' + \delta b')^s},$$

wo γ, δ alle ganzen Zahlen (exkl. 0, 0) durchlaufen, und s (> 1) eine beliebig gegebene ganze Zahl ist. Schwierig ist die Untersuchung der wesentlich singulären Stellen solcher und ähnlicher Reihen; es zeigt sich, daß diese Stellen im allgemeinen „lacunäre" Gebiete bilden. Sodann erhebt sich die fundamentale Frage nach den Beziehungen zwischen derartigen Reihen. Sind z. B. Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 vier Reihen von der Gestalt (XI) mit demselben M; existiert dann, in Analogie zu einem Satze über die Thetafuchsschen Reihen, eine homogene algebraische Relation

$$\text{(XIII)} \qquad F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4) = 0?$$

Die Folge würde sein, daß z. B. das Verhältnis $\frac{\Theta_3}{\Theta_4}$ unverändert bliebe, wenn a, b und a', b' identische oder auch verschiedene lineare Substitutionen erlitten, was ersichtlich nicht eintreten kann. Somit kann im allgemeinen eine algebraische Relation zwischen den Θ nicht existieren.

Aus den bisher erhaltenen Invarianten der Linearformen A, A' lassen sich vermöge der bekannten Differentiationsprozesse der formalen Invariantentheorie weitere arithmetische Invarianten gewinnen. Unter diesen befindet sich auch eine Klasse von solchen, die auf elliptische Funktionen führen. Im ganzen erkennt man, daß die Invarianten der quadratischen Formen eine weit umfassendere Mannigfaltigkeit bilden, als

die der einzelnen Linearform. Im besonderen ist zu beachten, daß, während bei den damaligen Reihen der Exponent k eine ganze Zahl sein mußte, gegenwärtig z. B. bei der Reihe (XII) der Exponent s ein beliebiger Bruch sein darf, wenigstens dann, wenn $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ konjugiert komplex sind.

Der nächste Abschnitt ist weiteren Beziehungen zu den Abelschen Funktionen gewidmet. Den Ausgang bildet die auch oben (in etwas anderer Bezeichnung) unter (XII) aufgeführte Dirichletsche Invariante

$$\text{(XII')} \qquad J(s) = \Sigma \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}.$$

Allgemeiner wird an deren Stelle gesetzt $\Sigma\varphi\,(am^2 + 2bmn + cn^2)$, bei beliebiger Funktion φ, und insbesondere

$$\text{(XIII)} \qquad F(q) = \Sigma q^{am^2 + 2bmn + cn^2}.$$

Diese Invariante würde genau so, wie die spezielle (XII'), zur Untersuchung der Klassenanzahlrelationen für die quadratischen Formen (a, b, c) dienen können. Andererseits erscheint $F(q)$ als spezieller Fall der Θ-Funktion

$$\text{(XIV)} \qquad \Theta = \Sigma e^{i(mx + ny)} q^{am^2 + 2bmn + cn^2},$$

nämlich für $x = y = 0$. Für das Folgende wird das Verhalten von Θ für Werte von q in der Nachbarschaft von 1 von Wichtigkeit, wobei als Hülfssatz benutzt wird, daß für $q = e^{-t}$ die Reihe (XIV) der Differentialgleichung

$$\text{(XV)} \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}$$

genügt, und physikalische Vorstellungen herangezogen werden. Es ergibt sich für Werte von q nahe an 1, daß $F(q) = \frac{2\pi}{t(\alpha\delta - \beta\gamma)}$ wird, somit $F(q)$ nur von der Determinante $b^2 - ac = -\frac{1}{4}(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$ der quadratischen Form abhängt. Dies ist genau das Analogon zu der von Dirichlet mit großem Erfolge benutzten Eigenschaft seiner Funktion $J(s)$. Man setze $\alpha\delta - \beta\gamma = E$, $t = 2i\pi u$, $F(e^{-t}) = \Phi(u)$, so besitzt $\Phi(u)$ die beiden Eigenschaften

$$\text{(XVI)} \qquad \Phi(u) = \frac{-i}{Eu}\Phi\left(\frac{-1}{E^2u}\right),\ \Phi(u+1) = \Phi(u).$$

Somit ist $\Phi^2(u)$ eine Thetafuchssche Funktion derjenigen Fuchsschen Gruppe, die durch die beiden Substitutionen $(u, u+1)$ und $\left(u, -\frac{1}{E^2u}\right)$ erzeugt wird. Es wird gezeigt, wie diese Betrachtungen in die Untersuchungen von Dirichlet über die Darstellungen von Zahlen durch quadratische Formen eingreifen und sie umfassen.

Sodann wendet sich der Verf. zu den Invarianten der indefiniten quadratischen Formen. Die bisherigen Invarianten waren stetige Funktionen der Koeffizienten einer Form (a, b, c) und blieben ungeändert gegenüber einer beliebigen linearen Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten, gleichgültig ob die Determinante der Form eine ganze oder gebrochene Zahl ist. In diesem Sinne läßt sich der Begriff der Invariante für indefinite Formen nicht aufrecht erhalten. Die Koeffizienten der eigentlich primitiven indefiniten Form $F(m, n) = am^2 + 2bmn + cn^2$ seien ganzzahlig, und ebenso deren Determinante $D = b^2 - ac$ eine bestimmte ganze Zahl, so lassen sich nach dem Vorgang von Dirichlet unstetige Funktionen jener Koeffizienten bilden, die im übrigen den Charakter arithmetischer Invarianten besitzen. Die Pellsche Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$ besitzt bekanntlich unendlich viele, durch $x \pm y\sqrt{D} = (t \pm u\sqrt{D})^\mu$ dargestellte Lösungen, und F geht in sich über durch die lineare ganzzahlige Transformation $T: [m, n;\ (t - bu)m - cun,\ aum + (t + bu)n]$. Dies läßt sich auch so darstellen, daß F als die Norm eines Ausdruckes von der Form $Am + Bn$ erscheint, wo A, B als irgend zwei komplexe Zahlen $\alpha + \alpha'\sqrt{D}$, $\beta + \beta'\sqrt{D}$ $(\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$ aufgefaßt werden. Man stelle eine komplexe Zahl $x + y\sqrt{D}$ durch einen Punkt mit den Koordinaten x, y dar und betrachte die darstellenden Punkte der Zahlen $Am + Bn$, wo m, n alle ganzzahligen Werte durchlaufen; sie bilden ein Gitter und lassen sich auf unendlich viele Arten in unendlich viele Parallelstreifen zerlegen, entsprechend den obigen linearen Transformationen. Andererseits läßt sich aber auch die Ebene nach einem ähnlichen Prinzip in unendlich viele Winkelfelder ω einteilen.

Versteht man jetzt unter $\varphi(x)$ irgend eine eindeutige Funktion von x, so konstruiere man die Reihe $\sum \varphi\,[F(m, n)]$, erstreckt über alle Gitterpunkte innerhalb eines gewissen Ausgangs-Winkelfeldes ω_0. Unter der Voraussetzung der Konvergenz stellt jene Reihe (bei ganzzahligen a, b, c) eine arithmetische Invariante von F dar. Man nehme nunmehr $\varphi(x) = \frac{1}{x^s}$ für $x > 0$, $\varphi(x) = 0$ für $x < 0$, so konvergiert die Invariante

$$\text{(XVII)} \qquad I(s) = \sum \frac{1}{F^s} \quad \text{für } s > 1.$$

Weiter werden, wie früher, die Reihen untersucht von der Form

$$\text{(XVIII)} \qquad \sum q^{am^2 + 2bmn + cn^2} x^m y^n = \psi(x, y;\ m, n),$$

nur daß die Form $F(m, n)$ jetzt indefinit ist; für gewisse Ungleichheiten, die den m, n aufzuerlegen sind, konvergiert die Reihe. Durch geeignete Kombination solcher Reihen erhält man andere, die sich durch elliptische Funktionen ausdrücken lassen. Verfolgt man diesen Weg weiter, so gelangt man auch zu Invarianten gewisser Kongruenzgruppen, die in der ursprünglichen als Untergruppen enthalten sind. Auch diese Untersuchungen treten in speziellerer Form schon bei Dirichlet auf. So erscheint die

vorliegende Abhandlung in eigentlichem Sinne als eine Weiterführung der grundlegenden Begriffe und Methoden Dirichlets in der Theorie der quadratischen Formen. My.

G. Pick. **Zur Theorie der Differentiationsprozesse der Invariantentheorie.** Wien. Ber. **114**, 1589-1597.

In den neueren Endlichkeitsbeweisen, besonders denen von Hilbert (F. d. M. **22**, 133, 1890; **25**, 173, 1893/94), spielt der Cayleysche Ω-Prozeß eine wesentliche Rolle, insofern er den Übergang von einer beliebigen Form F zu einer Invariante I gleichen Grades bewirkt. Dabei werden in F Transformationskoeffizienten eingeführt, um dann durch die Operation Ω wieder entfernt zu werden. Hilbert verwendet daher bei binären Urformen einen direkt auf die Koeffizienten von F ausgeübten Differentiationsprozeß. Für Formen mit mehr Variabeln sind analoge Prozesse von Story (F. d. M. **25**, 176, 1893) angegeben worden, und in noch weiterem Umfange von Maurer (F. d. M. **34**, 117, 1903). Der Verf. legt sich die Frage vor nach dem direkten Zusammenhange zwischen dem Ω-Prozesse und jenen Prozessen anderer Art und entwickelt zu dem Behuf ein einfaches Hülfsprinzip. Die a_i seien die Koeffizienten einer binären Urform $f(x, y)$, $F(a)$ eine beliebige Form g-ten Grades der a, ferner die a' die Koeffizienten der durch die Substitution $\binom{\alpha\beta}{\gamma\delta}$ transformierten Urform f. Es soll das Endresultat der auf $F(a')(\alpha\delta-\beta\gamma)^h$ bis zum Ausfalle der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wiederholten Operation $\Omega = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\delta} - \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\gamma}$ zu ermitteln sein. Es läßt sich indessen zeigen, daß man das nämliche Schlußresultat auch erhält, wenn man für die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Spezialwerte 1, 0, 0, 1 einsetzt. Es ist also nur die Aufgabe zu lösen, den Wert $[\Omega\{F(a')(\alpha\delta-\beta\gamma)^h\}]_0$ zu berechnen, wo der Index 0 andeutet, daß für die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jene Spezialwerte einzuführen sind.

Man ziehe jetzt mit Lie die Theorie der infinitesimalen Substitutionen heran, setze also $\alpha - 1 = \varepsilon_1$, $\beta = \varepsilon_2$, $\gamma = \varepsilon_3$, $\delta - 1 = \varepsilon_4$, wo die ε unendlich klein sind, so ergeben sich als erzeugende infinitesimale Substitutionen: $A(f) = -xp$, $B(f) = -yp$, $C(f) = -xq$, $D(f) = -yq$, und die allgemeinste infinitesimale Transformation der Gruppe ist

$$H(f) = \lambda A(f) + \mu B(f) + \nu C(f) + \varrho D(f),$$

und daher die allgemeine endliche Transformation f' derselben:

$$f' = f + \frac{H(f)}{1} + \frac{H^2(f)}{1\cdot 2} + \frac{H^3(f)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

Hieraus lassen sich beliebige Differentialquotienten von f' nach den $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ für die Nullwerte derselben entnehmen. Man hat dann nur noch die Differentialquotienten nach den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch die nach $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ auszudrücken, und die eingangs gestellte Aufgabe ist gelöst.

My.

P. W. Wood. On the reducibility of covariants of binary quantics of infinite order. Lond. M. S. Proc. (2) **2**, 352-370; (2) **3**, 316-333.

Es handelt sich um die Reduzibilität von Kovarianten ersten Grades in den Koeffizienten irgend einer Anzahl binärer Formen unbegrenzter Ordnung. Eine Kovariante heißt hier reduzibel, wenn es möglich ist, sie als Summe von Produkten von Kovarianten niedrigerer Totalgrade auszudrücken.

Die gemeinte Aufgabe für irgend eine Kovariante des Grades $\delta+1$ hängt ab von der Auswertung eines algebraischen Ausdrucks, der in $2^\delta-1$ Linearfaktoren zerfällt. Theoretisch läßt sich so durch Entwicklung jenes Ausdrucks stets feststellen, ob eine Kovariante reduzibel ist oder nicht. Praktisch stößt indessen dieses Verfahren auf große Schwierigkeiten, und der Verf. bedient sich daher einer von ihm früher ausgebildeten indirekten Methode, die auf der Anwendung gewisser linearer partieller Differentialoperatoren beruht (F. d. M. **35**, 123, 1904).

Die Kovariante vom Grade $\delta+1$ sei auf die Normalform gebracht: $(a_1\,a_2)^{\lambda_1}(a_2\,a_3)^{\lambda_2}\ldots(a_\delta\,a_{\delta+1})^{\lambda_\delta}$. Soll sie reduzibel sein, so muß der Ausdruck $x_1{}^{\lambda_1}x_2{}^{\lambda_2}\ldots x_\delta{}^{\lambda_\delta}$ verschwinden, wenn man ihn der Reihe nach den $2^\delta-1$ Operatoren $\frac{\partial}{\partial x_{\nu_1}}-\frac{\partial}{\partial x_{\nu_2}}+\cdots+(-1)^{\varepsilon-1}\frac{\partial}{\partial x_{\nu_\delta}}$ unterwirft, wo die ν irgend ε der Suffixe $1, 2, \ldots, \delta$ sind $(\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_\delta)$. Das Produkt dieser $2^\delta-1$ Operatoren sei mit Π_δ bezeichnet. Dann darf Π_δ kein Glied von der Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\mu_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\mu_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_\delta}\right)^{\mu_\delta}(\lambda_1\geqq\mu_1,\ \lambda_2\geqq\mu_2,\ \ldots,\ \lambda_\delta\geqq\mu_\delta)$$

enthalten.

Mit diesen Hülfsmitteln gelangt der Verf. zu zwei allgemeinen Klassen reduzibler Kovarianten, die aus folgenden beiden Sätzen hervorgehen: Die Kovariante $(a_1\,a_2)^{\lambda_1}(a_2\,a_3)^{\lambda_2}\ldots(a_\delta a_{\delta+1})^{\lambda_\delta}$ ist reduzibel, wenn es 1. die Kovariante $(b_1\,b_2)^{\lambda_{\nu_1}}(b_2\,b_3)^{\lambda_{\nu_2}}\ldots(b_\varepsilon b_{\varepsilon+1})^{\lambda_{\nu_\varepsilon}}$ ist, wo die Indizes ν die obige Bedeutung haben; 2. wenn die Summe von k der Indizes $\lambda_1, \ldots, \lambda_\delta$ gleich 2^k-1 ist, und überdies die Summe der Indizes in irgend einer der Gruppen, in die die δ Indizes nach Entfernung jener k Indizes eingeteilt werden, ungerade ist. Im besondern wird eine vollständige Untersuchung über die Reduzibilität der Kovarianten vom Grade 5 gegeben: $(a_1\,a_2)^{\lambda_1}(a_2\,a_3)^{\lambda_2}(a_3\,a_4)^{\lambda_3}(a_4\,a_5)^{\lambda_4}$ sowie der Jacobischen Kovarianten $[(a_1\,a_2)^{\lambda_1}(a_2\,a_3)^{\lambda_2}(a_3\,a_4)^{\lambda_3}(a_4\,a_5)^{\lambda_4},\ a_6]$ vom Grade 6. My.

F. Junker. Die Invarianten und Semiinvarianten einer binären Form. Math. naturw. Mitt. (2) **7**, 52-71.

Der Verf. hat früher (F. d. M. **25**, 230, 1893/94) die Bedingungen, durch die das Zerfallen einer Kurve n-ter Ordnung in Gerade gewähr-

leistet wird, durch die partikularen Lösungen gewisser Differentialgleichungen ausgedrückt, denen jene Bedingungen identisch genügen müssen. Bei weiterer Verfolgung dieses Ansatzes hat sich eine Reihe von Tatsachen ergeben, die auch für die binäre Invariantentheorie eine selbständige Bedeutung haben dürften. Es wird ausgegangen von der üblichen Definition der binären Invariante $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, wo die a die Koeffizienten einer linearen Form f der Ordnung n bedeuten. Gehen die a_i vermöge einer binären Substitution der Variabeln mit der Determinante $\varDelta = pq' - qp'$ über in neue Koeffizienten A_i, so soll sein $\varphi(A_i) \equiv \varDelta^{\mu}\varphi(a_i)$. Hierbei sind die Koefizienten p, q, p', q' der Substitution als ganz allgemein gedacht: genügt φ nur einer speziellen Substitution, so heißt sie Semiinvariante, z. B. $a_0 a_2 - a_1^2$, $a_0^2 a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3$. Jede Invariante φ ist isobar, vom Gewichte μ; ist ϱ der Grad von φ, so gilt $\mu = \frac{1}{2} n\varrho$, wo $\frac{1}{2} n\varrho$ der Index von φ heißt. Daraufhin läßt sich der Ausdruck einer Invariante sofort hinschreiben. Zur näheren Berechnung dienen die beiden partiellen Differentialgleichungen, denen φ genügt:

$$\delta\varphi \equiv a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \cdots + n a_{n-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_n} = 0,$$

$$\delta'\varphi \equiv n a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_0} + (n-1)a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + \cdots + a_n \frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}} = 0.$$

Eine ganze homogene Funktion φ, die nur der ersteren Gleichung allein genügt, für die also $\mu \neq \frac{1}{2} n\varrho$, ist eine Semiinvariante von f. Es wird ein einfaches Verfahren angegeben, wie man die einfachsten und unabhängigen derselben ermittelt, durch die alle übrigen dargestellt werden können. Das Verfahren beruht auf der Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen $\frac{d\varphi}{0} = \frac{da_1}{a_0} = \frac{da_2}{2a_1} = \cdots = \frac{da_n}{na_{n-1}}$. Man erhält sukzessive $n-1$ partikulare Lösungen $C_2, C_3, \ldots, C_n$, wo z. B. $C_2 = a_2 - a_1^2$, $C_3 = a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3$, etc. Die C repräsentieren $n-1$ unabhängige Semiinvarianten, und alle übrigen, wie die symmetrischen Funktionen der Wurzeldifferenzen, die Quellen der Kovarianten usf., müssen sich durch die C ausdrücken lassen. Jede Funktion ψ der C, falls sie eine Invariante von f sein soll, muß einer gewissen Differentialgleichung $\delta'\psi = 0$ genügen, die nichts anderes als eine Umformung von $\delta'\varphi = 0$ ist. Vermöge $\delta'\psi = 0$ lassen sich die Invarianten von f einfach als Funktionen der C berechnen. Man erhält $n-2$ unabhängige Invarianten $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$ von f als partikulare Lösungen von $\delta'\psi = 0$. Wird f der Transformation $x = \xi - a_1\eta$, $y = \eta$ unterworfen, so sind die Koeffizienten der transformierten Form eben die Größen C. My.

E. B. Elliott. On absolute orthogonal covariants and their sources. Quart. J. **37**, 91-105.

Sei $f_p = (a_0, a_1, \ldots, a_p)(x, y)^p$ eine binäre Form f_p der Ordnung p, $C_0 x^m + C_1 x^{m-1} y + \cdots$ eine absolute orthogonale Kovariante C von f (die also gegenüber allen Rotationen $x = X\cos\vartheta - Y\sin\vartheta$, $y = X\sin\vartheta + Y\cos\vartheta$ bis auf das Vorzeichen ungeändert bleibt), so hat Berry in den Cambridge Phil. Soc. Proc. **13**, 55-57, 1905, (ein Referat ist in diesen „Fortschritten" nicht erschienen) gezeigt, daß die Quelle C_0 von C einer spezifischen Differentialgleichung $\varphi_m(\Delta) = 0$ genügt, wo $\varphi_m(\Delta)$ den Ausdruck $(\Delta^2 + m^2)\{\Delta^2 + (m-2)^2\}\ldots(\Delta^2 + 2^2)\Delta$ bedeutet, resp. $(\Delta^2 + m^2)\{\Delta^2 + (m-2)^2\}\ldots(\Delta^2 + 1^2)$, je nachdem m gerade ist oder ungerade, und Δ den bekannten Differentialoperator $a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots + pa_{p-1}\frac{\partial}{\partial a_p} - \left(pa_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + \cdots + 2a_{p-1}\frac{\partial}{\partial a_{p-2}} + a_p \frac{\partial}{\partial a_{p-1}}\right)$. Die obige Differentialgleichung ist notwendig und hinreichend, damit C_0 die Quelle einer orthogonalen C_m ist, oder auch der Summe von zwei solchen, von denen die eine gegenüber schiefen orthogonalen Transformationen ihr Vorzeichen ändert. Um $C_1, C_2, \ldots, C_m$ aus C_0 abzuleiten, bedient sich Berry einer gewissen Kette von Gleichungen. Berrys Satz wird von besonderem Interesse durch Verbindung mit der Tatsache, daß jede rationale ganze Funktion der a_i die Quelle einer absoluten orthogonalen Kovariante ist (resp. die Summe zweier solchen, wie oben).

Dies überträgt sich auf volle Systeme linear unabhängiger ganzer Funktionen irgend eines Grades. Jede solche ganze Funktion genügt einer Differentialgleichung $\varphi_m(\Delta) = 0$ von der oben angegebenen Form. Ist i der Grad der Funktion, so sind ip und das kleinste zugehörige m entweder beide gerade oder beide ungerade.

Zuletzt wird ein Verfahren angegeben, wie man die Quellen, die genau zu einer f_m gehören, trennen kann von denen, die je genau zu einer $f_{m+2}, f_{m+4}, \ldots; f_{m-2}, f_{m-4}, \ldots$ gehören. Eine interessante Anwendung wird von den in Rede stehenden Entwicklungen auf die charakterische Gleichung einer Determinante gemacht. My.

P. W. Wood. Alternative expressions for perpetuant type forms. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 334-344.

Handelt es sich um Kovarianten, die linear sind in den Koeffizienten von δ binären Formen $a_{1_x}^{n_1}, \ldots a_{\delta_x}^{n_\delta}$, wo die Ordnungen $n_1, \ldots, n_\delta$ beliebig hoch sind, so kommen nach Grace (F. d. M. **34**, 120, 1903) nur die beiden Typen in Betracht: $(a_1 a_2)^{\lambda_1}(a_2 a_3)^{\lambda_2}\ldots(a_{\delta-1} a_\delta)^{\lambda_{\delta-1}}$ und $(a_1 a_2)^{\lambda_1}(a_1 a_3)^{\lambda_2}\ldots(a_1 a_\delta)^{\lambda_{\delta-1}}$, wo $\lambda_1 \geqq 2^{\delta-2}$, $\lambda_2 \geqq 2^{\delta-3}, \ldots, \lambda_{\delta-1} \geqq 1$. Der Verf. fragt nach weiteren Ausdrücken, die sich zur Darstellung von Typen eignen, vgl. auch Elliott (F. d. M. **35**, 309, 1904), und findet eine sehr allgemeine Klasse solcher Ausdrücke.

Zugrunde liegt der Satz: Seien $O_1, O_2, \ldots, O_\lambda$ verschiedene partielle Differentialoperatoren in den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$ mit konstanten Koeffizienten, so ist irgend eine Form C_x^ω dieser Variabeln von der Ordnung ω darstellbar in der Gestalt $z_1^{\mu_1} z_2^{\mu_2} \ldots z_k^{\mu_k} p_x^{\omega-\lambda} + \sum R$. Hier bedeuten die μ positive ganze Zahlen von der Summe λ, und die z sind verschiedene Linearfunktionen der x mit folgenden Eigenschaften: Teilt man die Operatoren O in k Reihen S_r $(r = 1, 2, \ldots, k)$, so enthält die Reihe S_r gerade μ_r Operatoren O derart, daß jeder derselben wohl $z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}$ zum Verschwinden bringt, aber nicht z_r. Ferner bedeutet $p_x^{\omega-\lambda}$ eine Form der Ordnung $\omega-\lambda$ in den Variabeln $x_1, \ldots, x_\delta$, und das Aggregat der Glieder R verschwindet bei sukzessiver Anwendung der λ Operatoren $O_1, \ldots, O_\lambda$.

Hierbei sind die Glieder des Ausdrucks $z_1^{\mu_1} z_2^{\mu_2} \ldots z_k^{\mu_k} p_x^{\omega-\lambda}$ linear unabhängig voneinander, und das gleiche gilt von den R.

Bezeichnet $P_{r_x}^\omega$ die allgemeinste Form, die den Differentialgleichungen $(r = 1, \ldots, \lambda)$ $O_r = 0$, genügt, so kann man in der obigen Darstellung der Form C_x^ω die $\sum R$ ersetzen durch $\sum_{r=1}^{\lambda} P_{r_x}^\omega$, aber diese Terme sind nicht mehr linear unabhängig, sondern durch eine gewisse Anzahl linearer Relationen verknüpft. Bei der Anwendung des obigen Satzes auf die Theorie der binären Perpetuanten zeigt sich, daß die Bestimmung jener Relationen äquivalent ist mit der der Syzygien zwischen Produkten von Perpetuanten. My.

A. Young. On certain classes of syzygies. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 62-83.

Der Verf. hat, zusammen mit Wood (F. d. M. **35**, 123, 1904), neuerdings Syzygien zwischen Perpetuanten systematisch untersucht. Die Ergebnisse werden hier ausgedehnt auf Syzygien zwischen Komitanten binärer Formen von endlicher Ordnung. Sind diese Ordnungen bekannt, so kann man bei symbolischer Schreibweise diejenigen symbolischen Faktoren, die die Variabeln enthalten, weglassen. Dann lassen sich die in der erwähnten Abhandlung verwendeten symbolischen Ausdrücke für Kovarianten von Formen unbegrenzter Ordnung unmittelbar verwenden für den Fall, daß die Ordnungen $n_1, n_2, \ldots$ dieser Formen $a_{1x}^{n_1}, a_{2x}^{n_2}, \ldots$ endlich sind; nur ist darauf zu achten, daß kein Buchstabe a_r öfter vorkommt, als die Ordnung n_r der entsprechenden Form angibt.

Dagegen sind die Bildungen, in denen der Grad von a_r größer ausfällt als n_r, einfach wegzulassen, mit Ausnahme des Falles, wo ein Faktor von der Gestalt $(a_r a_s)^\lambda (a_s a_t)^{n_s-\lambda}$ auftritt.

Es sei also $\sum P + \sum P' = 0$ eine der früher aufgestellten Syzygien zwischen Perpetuanten. Hier bedeutet $\sum P$ die Summe solcher Produkte, in denen der Buchstabe a_1 höchstens n_1-mal vorkommt, a_2 höchstens n_2-mal, etc., andererseits $\sum P'$ die Summe solcher Produkte, in denen

a_r öfter als n_r-mal auftritt. Dann existiert für die obigen Urformen eine Syzygie $\sum P = \sum Q$, wo jeder der Terme Q einen Faktor von der Gestalt $(a_r a_s)^\lambda (a_s a_t)^{n_s - \lambda}$ besitzt. Das Ergebnis wird ganz analog dem für Perpetuanten von Formen endlicher Ordnung geltenden.

Das wesentlichste Hilfsmittel besteht darin, die Strohsche Fundamental-Syzygie $\{(ab)+(cd)\}^\omega - \{(ad)+(cb)\}^\omega = 0$, die nur dann für Formen endlicher Ordnung richtig ist, wenn ω kleiner ist als die Ordnung jeder der betrachteten Urformen, durch eine entsprecheude zu ersetzen, die für jeden Wert von ω gültig bleibt. Eine solche ist in der Tat die folgende: $\sum \binom{\omega}{r} (ab)^r (cd)^{\omega-r} - \sum \binom{\omega}{r} (ad)^r (cb)^{\omega-r} = \sum Q$, wo die Q Glieder von der oben bezeichneten Art sind, und die Summen linkerhand nur auf solche Glieder auszudehnen sind, die noch fähig sind, Kovarianten der Urformen zu repräsentieren. So ist z. B. für vier Urformen in der ersten Summe $r \geqq n_1$ oder n_2, dagegen $\leqq \omega - n_3$ oder $\omega - n_4$ zu nehmen, und entsprechend in der zweiten Summe. My.

O. Spiess. Über eine Eigenschaft der binären quadratischen Formen. Arch. der Math. u. Phys. (3) 9, 340-344.

Werden bei gegebenen α_1, α_2 die Größen β_1, β_2 so bestimmt, daß für jedes t

$$(1) \qquad 2(t-\alpha_1)(t-\alpha_2) = (t-\beta_1)^2 + (t-\beta_2)^2$$

wird, so ist auch umgekehrt

$$(2) \qquad 2(t-\beta_1)(t-\beta_2) = (t-\alpha_1)^2 + (t-\alpha_2)^2.$$

Beide Formen (1) und (2) stehen also in einer Art von Reziprozität zu einander. Es werden nun zu einer beliebigen Form (ABC) alle Formen $(A'B'C')$ bestimmt, die zu ihr jene Beziehung haben. Man hat zwei Fälle, je nachdem der invariante Ausdruck $A+2B+C$ von Null verschieden ist oder nicht. In ersterem Falle ist $D^2 = D'^2$ die notwendige und hinreichende Bedingung, wo $D^2 = B^2 - AC$, $D'^2 = B'^2 - A'C'$. Im zweiten Falle ist $D = D'$ notwendig und hinreichend. Ist also $A+2B+C = A'+2B'+C'$, und $D = \pm D'$, resp. $D = D'$, so lassen sich für alle Werte von α_1, α_2 die Größen β_1, β_2 so bestimmen, daß identisch in t wird $A(t-\alpha_1)^2 + 2B(t-\alpha_1)(t-\alpha_2) + C(t-\alpha_2)^2 = A'(t-\beta_1)^2 + 2B'(t-\beta_1)(t-\beta_2) + C'(t-\beta_2)^2$, nebst der daraus durch Vertauschung der α mit den β hervorgehenden Relation. My.

E. Pascal. Sulle condizioni invariantive perchè una binaria biquadratica abbia per fattore una cubica. Lomb. Ist. Rend. (2) 38, 201-210.

Diese Note bildet eine Fortsetzung einer anderen des Verf. über das Gundelfingersche System einer biquadratischen und kubischen binären Form f_4, f_3 (F. d. M. **35**, 127, 1904). Dort war eine Kovariante Θ aufgestellt, deren Verschwinden aussagt, daß die f_4 und f_3 zwei lineare Faktoren gemein haben; mittels dieser Kovariante Θ wird jetzt der Brioschische Ausdruck für die Resultante R abgeleitet (F. d. M. **13** 102, 1881), unter Benutzung einer Gordanschen Formel, die R als Überschiebung von Θ und der Funktionaldeterminante beider Formen bildet (F. d. M. **3**, 59, 1871). Des weiteren werden noch zwei wichtige, bei Gordan auftretende Kovarianten A, B durch Formen des Gundelfingerschen Systems dargestellt. Im zweiten Teile der Note werden die Relationen zwischen Formen jenes Systems entwickelt, die bestehen müssen, damit die f_3 in der f_4 als Faktor enthalten ist, sowie, daß beide Formen einen doppelt zählenden Linearfaktor gemein haben.

My.

E. Pascal. Aggiunte ad alcuni teoremi di Clebsch relativi alla costruzione dei sistemi completi di forme invariantive. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 373-381.

Clebsch in seinem bekannten Werke über binäre Formen (F. d. M. **4**, 47, 1872) untersucht die Frage, wie sich das volle System einer oder mehrerer binärer Urformen erweitert, wenn zu jenen Formen eine weitere f_2 vom zweiten Grade hinzutritt. Man hat dann alle Überschiebungen der Potenzen von f_2 mit den Produkten der Formen des ursprünglichen vollen Systems zu bilden. Von diesen Überschiebungen erweist sich indessen eine gewisse Anzahl als überflüssig, da sie sich durch andere ganz und rational darstellen lassen. Diese Methode wird hier, unter gewissen Vereinfachungen und weiteren Reduktionen, auf den Fall des Gundelfingerschen Systems einer biquadratischen und kubischen Form angewendet. Die Reduktionen des Verf. zeigen, daß man nicht weniger als 94 invariante Bildungen weglassen kann, die nach dem direkten Verfahren von Clebsch noch bestehen bleiben würden. My.

A. B. Basset. Modern algebra. Nature **72**, 30.

Hinweis auf die Wichtigkeit und die Schwierigkeit der Theorie der Konkomitanten ternärer und quaternärer Formen in ihrem Zusammenhange mit der ebenen und räumlichen Geometrie. Lp.

E. Pascal. Contributo alla teoria della forma ternaria biquadratica e delle sue varie decomposizioni in fattori. Napoli Atti (2) **12**, 1-100.

Die Theorie der ebenen Kurven vierter Ordnung ist schon vielfach behandelt worden, weniger dagegen die Theorie der entsprechenden ternären biquadratischen Form C_4. Eine Einführung in die Aufstellung

des vollen Systems der C_4 rührt von Maisano her (F. d. M. **13**, 110, 1881), der die von Gordan bezüglich der kubischen ternären Form entwickelten Methoden (F. d. M. **2**, 64, 1869/70) anwandte. Maisano bestimmte die invarianten Bildungen der C_4 bis zum fünften Grade einschließlich, während Gordan für eine spezielle C_4, die in der Theorie der automorphen Funktionen eine Rolle spielt, das volle System angab (F. d. M. **12**, 96, 1880; **14**, 80, 1882). Die Aufgabe, für die allgemeine C_4 das volle System zu bilden, stößt auf dem Gordanschen Wege auf fast unüberwindliche rechnerische Schwierigkeiten. Nun hat aber Brioschi (F. d. M. **8**, 64, 1876) ein anderes Verfahren angegeben. Sind x_1, x_2, x_3 die Variabeln der C_4, so ordnet Brioschi die C_4 nach Potenzen etwa von x_3, so daß die Koeffizienten dieser Potenzen Binärformen in x_1, x_2 werden; dann ist jede Kovariante der Ternärform eine Kovariante des Systems jener Binärformen. Während aber bei Brioschi nur gerade Potenzen von x_3 auftreten, untersucht der Verf. den allgemeinen Fall. Hierbei gelangt der Verf. zur Lösung einer Reihe von Hülfsaufgaben, die an sich von Interesse sind; so stellt er das volle System von drei Binärformen f_2, f_3, f_4 (der Ordnungen 2, 3, 4) auf, indem er das Gundelfingersche System einer f_3 und f_4 (F. d. M. **2**, 65, 1869/70) vermöge Weiterführung einer Clebschschen Methode durch Hinzunahme der f_2 als weiterer Urform erweitert. (Vgl. das bez. Referat in diesem Jahrgange.) Auf diesem Wege ergeben sich auch die Differentialgleichungen der Kovarianten der ternären Urform C_4 in einer bequemeren Form.

Während der erste Teil der Abhandlung der ausführlichen Diskussion des vollen Systems der C_4 gewidmet ist, beschäftigt sich der zweite Teil mit den Bedingungen der Zerfällbarkeit der C_4 in Faktoren, wobei die ternäre Methode von Brill (F. d. M. **25**, 233, 1893/94) zugrunde gelegt wird, und unter anderem die Brillsche Kovariante, deren Verschwinden die Zerlegung der C_4 in Linearfaktoren gewährleistet, durch Formen des vollen Systems ausgedrückt wird.

Daneben läuft aber eine ergänzende und vielfach vereinfachende Methode, die nur im binären Gebiete bleibt.

Im besonderen wird hinsichtlich der verschiedenen Arten der Zerlegung der C_4 das Verhalten der Hesseschen Kovariante untersucht.

Bezüglich der überaus großen Fülle von Einzelheiten muß auf die Abhandlung selbst verwiesen werden (vgl. das folgende Referat). My.

E. Pascal. Contributo alla teoria della forma ternaria biquadratica e delle sue varie decomposizioni in fattori. Napoli Atti (2) **12**, N. 13, 102 S.

Diese umfangreiche Abhandlung zerfällt in zwei Abteilungen.

Die erste Abteilung ist der Bildung des vollständigen Kovariantensystems einer ternären biquadratischen Form gewidmet. Dabei befolgt

der Verf. den Ideengang von Brioschi, nach welchem die Untersuchung einer ternären Form durch diejenige des Systems der binären Formen ersetzt wird, welche die Koeffizienten ihrer Entwicklung nach den Potenzen einer der Veränderlichen bilden. Dieses System umfaßt im vorliegenden Falle drei binäre Formen von den Ordnungen 2, 3, 4; die Untersuchung eines solchen Formensystems wird dadurch ausgeführt, daß der Verf. von den bekannten, das System einer kubischen und einer biquadratischen Form betreffenden Resultate ausgeht und die Clebschsche „Erweiterungsmethode" anwendet.

Die zweite Abteilung beschäftigt sich mit der Zerlegung einer ternären biquadratischen Form in Faktoren. Das Problem wird auf zweifache Weise behandelt, und zwar zuerst auf Grund eines die Bedingung für die Zerlegbarkeit einer ternären Form in lauter lineare Faktoren angebenden Brillschen Satzes, dann mit Hülfe des folgenden Theorems: Zerfällt eine ternäre Form f in m Faktoren, so besteht ihre Hessesche Kovariante aus $m+1$ Gliedern, deren eines f als Faktor enthält, während jedes der übrigen das Produkt der Hesseschen Kovariante eines Faktors von f mit der dritten Potenz des Produktes der übrigbleibenden ist (vgl. das vorangehende Referat). Vi.

O. Chiomio. Dei covarianti ed invarianti del 4° e el 5° grado nel campo ternario. Batt. G. **43** [(2) **12**], 117-155.

Für eine allgemeine ternäre Form C_m der Ordnung m werden die Invarianten und Kovarianten vom 4ten und 5ten Grade in den Koeffizienten von C_m untersucht.

Vermöge geeigneter Reduktionsformeln werden jene Kovarianten linear durch gewisse „Fundamentalkovarianten" ausgedrückt. Es gelingt, die letzteren beim vierten Grade bis zu $m \leqq 9$ und beim fünften Grade bis zu $m \leqq 6$ aufzustellen.

Insbesondere werden unter den Kovarianten die Analoga zu den Überschiebungen im binären Gebiete betrachtet, d. h. die sogenannten S-Kovarianten vom Typus $(abc)^k a_x^{m-k} b_x^{n-k} c_x^{p-k}$, die aus den vorgelegten Formen a_x^m, b_x^n, c_x^p auch direkt durch den Cayleyschen Ω-Prozeß erhalten werden. Im Falle der Anwendung auf eine einzige Form $a_x^m = C_m$ genügt es, auf die S-Kovarianten vom dritten, vierten und fünften Grade einzugehen.

In § 1 werden die Kovarianten vierten Grades von C_m systematisch behandelt. Der allgemeine Ausdruck einer solchen Kovariante ist $C_{r_1, r_2, r_3, r_4} = (abc)^{r_1} (abd)^{r_2} (acd)^{r_3} (bcd)^{r_4} a_x^{m-s_4} b_x^{m-s_3} c_x^{m-s_2} d_x^{m-s_1}$, wo $s_i = \sum r - r_i$; ihre Ordnung ist $4m - 3\sum r$.

Es existieren der Reihe nach Kovarianten von 4, 3, 2, 1 Indizes. Als Kovariante mit einem Index tritt nur auf die S-Kovariante 3ten Grades:

$$C_\varrho = (abc)^\varrho a_x^{m-\varrho} b_x^{m-\varrho} c_x^{m-\varrho} d_x^m = (f, f, f)^\varrho \cdot f,$$

wo ϱ zur Abkürzung für $\sum r$ steht. Die Kovarianten mit zwei Indizes drücken sich linear aus durch solche mit drei Indizes und die Kovariante C_ϱ. Darauf werden die Kovarianten der sukzessiven Ordnungen $4m$, $4m-3$, $4m-6, \ldots$ einzeln diskutiert. In § 2 schließt sich eine analoge, nur verwickeltere Untersuchung an über die Kovarianten 5ten Grades, und in § 3 insbesondere über die Kovarianten S vom Typus $(S_r f^i, f^j, f^k)^2$, wo $S_r = (abc)^r a_x^{m-r} b^{m-r} c_x^{m-r}$. Wegen der Einzelergebnisse sei namentlich auf die Tabellen p. 126-127 und p. 151-152 hingewiesen. My.

R. Dedekind. Über binäre trilineare Formen und die Komposition der binären quadratischen Formen. J. für Math. **129**, 1-34.

Der Verf. hat in Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Auflage, § 182, hervorgehoben, daß im Falle der in lineare Faktoren zerlegbaren Formen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers die drei Formen, deren eine durch eine bilineare Substitution in das Produkt der beiden andern übergeht, auch umgekehrt, abgesehen von konstanten Faktoren, durch diese Substitution bestimmt sind. In dem einfachsten Falle der binären quadratischen Formen liegt der betreffende Satz bereits bei Gauß (Disquisitiones Arithmeticae, Art. 235) vor. Mit einer solchen gegebenen Substitution sind aber stets zwei andere Substitutionen und drei quadratische Formen so verbunden, daß jede der drei Formen durch eine ihr entsprechende Substitution in das Produkt der beiden andern Formen übergeht. Durch diesen Ansatz des Verf. wird das Gaußsche Problem erheblich vereinfacht, und dieser Vereinfachung ist die vorliegende Abhandlung gewidmet. Es seien (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) drei Variabelnpaare, α resp. β Zeichen für die Größen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ resp. $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, und r, s, t mögen irgend eine Permutation der drei Indizes 1, 2, 3 bedeuten. Man setze

$$F_r = F_r(x_r, y_r) = A_r x_r^2 + B_r x_r y_r + C_r y_r^2 = \begin{vmatrix} \beta_s x_r + \alpha_t y_r, & \alpha_r x_r + \beta_0 y_r \\ \alpha_0 x_r + \beta_r y_r, & \beta_t x_r + \alpha_s y_r \end{vmatrix}.$$

Dann gilt der Fundamentalsatz, daß diese drei Formen F dieselbe Diskriminante

$$\text{(I)} \quad D = B_1^2 - 4A_1 C_1 = B_2^2 - 4A_2 C_2 = B_3^2 - 4A_3 C_3$$

besitzen, und jede der drei Formen F geht durch eine gewisse bilineare Substitution in das Produkt der beiden andern über. In der Tat, wendet man auf die Matrix $\begin{vmatrix} \beta_r & \alpha_s & \alpha_t & \beta_0 \\ -\alpha_0 & -\beta_t & -\beta_s & -\alpha_r \end{vmatrix}$ die in der Geometrie so genannte Linienkoordinatenidentität an, so ergibt sich

$$A_s C_s - A_t C_t + \tfrac{1}{4}(B_t + B_s)(B_t - B_s) \equiv 0,$$

d. i. $D = B_s^2 - 4A_s C_s = B_t^2 - 4A_t C_t$. Sodann führe man die Bildungen ein:

$$\frac{\partial F_r}{\partial x_r} = 2A_r x_r + B_r y_r = 2u_r, \quad \frac{\partial F}{\partial y_r} = B_r x_r + 2C_r y_r = 2v_r,$$

so daß $u_r x_r + v_r y_r = F_r$, ferner die beiden bilinearen Funktionen

$$X_r = \beta_r x_s x_t + \alpha_s x_s y_t + \alpha_t y_s x_t + \beta_0 y_s y_t,$$
$$Y_r = -\alpha_0 x_s x_t - \beta_t x_s y_t - \beta_s y_s x_t - \alpha_r y_s y_t.$$

Hier gilt die Zusammensetzungsregel

$$\begin{pmatrix} \beta_s X_r + \alpha_t Y_r, & \alpha_r X_r + \beta_0 Y_r \\ \alpha_0 X_r + \beta_r Y_r, & \beta_t X_r + \alpha_s Y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s, & v_s \\ -y_s, & u_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t, & v_t \\ -y_t, & x_t \end{pmatrix},$$

folglich, da die Determinante des Produktes von zwei Substitutionen das Produkt aus deren Determinanten ist, die gewünschte Relation

$$\text{(II)} \qquad F_r = F_s F_t.$$

Übrigens ist diese Relation (II) die umfassendere, da sie die Relation (I) über die Diskriminanten in sich schließt.

Die acht Konstanten α, β bilden demnach immer die Koeffizienten von drei verwandten binären bilinearen Substitutionen, deren Zusammenhang wesentlich in der Identität

$$\text{(III)} \quad y_1 X_1 - x_1 Y_1 = y_2 X_2 - x_2 Y_2 = y_3 X_3 - x_3 Y_3$$

besteht, und erzeugen zugleich drei quadratische Formen, deren jede durch eine dieser Substitutionen in das Produkt der beiden andern übergeht.

Im besonderen seien jetzt die α, β ganze rationale Zahlen, also auch D und die Koeffizienten der drei Formen F_1, F_2, F_3. Ist M_r der Teiler der Form F_r und K_r der größte gemeinsame Teiler von M_s, M_t, so ist K_r auch der größte gemeinsame Teiler der oben benutzten sechs zweireihigen Determinanten. Dann folgt durch Entwicklung der Identität (II), daß $M_s M_t$ durch M_r teilbar wird, also $M_s M_t = M_r N_r$, und hieraus wiederum $M_r^2 = N_s N_t$.

Nach diesen Vorbereitungen wendet sich der Verf. zu der eingangs formulierten Aufgabe. Hierbei wird eine quadratische Form stets in der Gestalt $ax^2 + bxy + cy^2$ mit der Diskriminante $\delta = b^2 - 4ac$ geschrieben.

Sind nun $f_1(x_1, y_1)$, $f_2(x_2, y_2)$, $f_3(x_3, y_3)$ drei solche Formen mit den Diskriminanten δ_1, δ_2, δ_3, so sollen die Folgerungen entwickelt werden, die durch die Annahme bedingt werden, daß die erste Form f_1 durch eine bilineare Substitution (X_1, Y_1) in das Produkt $f_2 f_3$ der beiden andern Formen übergeht: $f_1(X_1, Y_1) = k_1 f_2 f_3$, wo k_1 ein konstanter Faktor ist. Es zeigt sich, daß die Formen f_r mit den F_r bis auf konstante Faktoren übereinstimmen:

$$\text{(IV)} \qquad F_r = n_r f_r \qquad (r = 1, 2, 3),$$

und umgekehrt folgt aus (IV) wieder $f_r(X_r, Y_r) = k_r f_s f_t$, wo $k_r = \dfrac{n_s n_t}{n_r}$. Aus (IV) ergibt sich auch noch, daß $D = \delta_r n_r^2$.

Bisher war keine Voraussetzung über die Natur der Koeffizienten der Formen f_r und X_1, Y_1 gemacht worden, so daß die obigen Sätze algebraischer Natur sind. Nun aber sollen alle Koeffizienten ganze rationale Zahlen sein und die bezüglichen zahlentheoretischen Folgerungen gezogen werden. Zunächst haben die Diskriminanten D, δ_r dasselbe Vorzeichen, und sie verhalten sich wie Quadrate ganzer Zahlen, und man hat $M_r = \varepsilon_r m_r n_r$ $(\varepsilon_r^2 = 1)$. Der Faktor k_1 werde gleich Eins gesetzt. Dann wird $\delta_1 k_1^2$ der größte gemeinsame Teiler von $\delta_2 m_3^2$ und $\delta_3 m_2^2$. Nach Gauß heißt die Form f_1 zusammengesetzt (composita) aus den beiden Formen f_2, f_3, wenn $k_1 = 1$ ist. Wird dies für das Folgende angenommen, so schließt man ohne weiteres, daß der Teiler n_1 der zusammengesetzten Form f_1 das Produkt aus den Teilern m_2, m_3 der Formen f_2, f_3 wird.

Die Identität (II) wurde oben durch unmittelbare Rechnung mit den acht Konstanten α, β auf kürzestem Wege hergeleitet. Man kann aber zu demselben Resultate und zu einem tieferen Einblick in das Ganze auf einem allgemeineren Wege gelangen, wobei die α, β gar nicht explizite in die Rechnung eintreten, sondern die in (III) auftretende binäre trilineare Form als alleiniger Ausgangspunkt der Untersuchung dient. Das Verfahren beruht auf einer Verallgemeinerung des Begriffes der totalen Differentiation.

In einem Raume $R_n(x_1, \ldots, x_n)$ sei Φ der Inbegriff aller Funktionen φ der x_i, die partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzen und der Bedingung $\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)$ genügen. Vermöge der „Operation" d werde aus jedem φ eine entsprechende, in Φ enthaltene Funktion $d\varphi$ erzeugt, so daß das Grundgesetz der totalen Differentiation erfüllt wird, d. h. daß jede Identität von der Art $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) = 0$ die andere $\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_m} d\varphi_m = 0$ nach sich zieht. Daß es solche Operationen d gibt, zeigen die gewöhnlichen Differentiale. Allgemein ist die Operation d völlig bestimmt, wenn in jedem Punkte von R_n die Werte der n Funktionen $dx_1, \ldots, dx_n$ gegeben sind. Umgekehrt kann man diese n Funktionen willkürlich aus Φ auswählen. Die Operation d ist eine invariante, d. h. sie bleibt dieselbe bei Einführung neuer Koordinaten y statt der x, wobei die dy durch die dx bedingt sind. Ferner gelten alle Regeln der gewöhnlichen Differentiation. Die damit begründete Operation soll „Vektor" heißen, die $d\varphi$ schlechtweg „Differentiale". Die partielle Derivation $\frac{\partial}{\partial x_r}$ ist offenbar ein spezieller Vektor.

Die Vektoren d fallen selbst wieder unter den noch viel allgemeineren Begriff einer „Abbildung des Systems Φ in sich selbst", die mit e bezeichnet sei. Aus jedem Element φ von Φ entsteht ein Bild $e\varphi$, und die Abbildungen e, e' fallen nur dann zusammen $(e = e')$, wenn für jedes φ die Identität $e\varphi = e'\varphi$ besteht. Zwei Abbildungen e_1, e_2 setzen sich zu einem „Produkte" $e_1 e_2$ zusammen, und es gilt das assoziative Gesetz. Summe und Differenz $e_1 \pm e_2$, sowie für λ als eine Funktion

in Φ das Produkt λe werden erklärt durch $(e_1 \pm e_2)\varphi = e_1\varphi \pm e_2\varphi$, $(\lambda e)\varphi = \lambda(e\varphi) = \lambda e\varphi$, woraus sich der Sinn einer symbolischen Gleichung von der Form $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_m e_m$ ergibt. Mit dieser gilt dann die vermöge der Vektoroperation d entstehende Gleichung $de = \sum_1^m \lambda_i de_i + \sum_1^m d\lambda_i e_i$. Im folgenden kommen indessen nur solche Abbildungen e in Betracht, die Vektoren oder Produkte von Vektoren sind. Dann ist auch jede Summe $\sum_1^m \lambda_i e_i$ wieder ein Vektor d, und d heißt dann „abhängig" von den m Vektoren d_i; dagegen heißen die letzteren „abhängig von einander", oder sie bilden ein „reduzibles System", wenn $\sum \lambda_i d_i = 0$. Entsprechend heißen die m Vektoren d voneinander unabhängig, oder sie bilden ein irreduzibles System, wenn die Forderung $d = 0$ nur durch das identische Verschwinden aller λ_i erfüllt wird. Aus zwei Vektoren d_1, d_2 entsteht eine neue Vektoroperation $(d_1, d_2) = d_1 d_2 - d_2 d_1$, und zwischen den drei Operatoren $(d_1; d_2, d_3)$, $(d_2; d_3, d_1)$, $(d_3; d_1, d_2)$ gilt die Jacobische Identität, d. h. ihre Summe ist Null.

Auch für die Wiederholungen $d^2, d^3, \ldots$ von d gelten die gewöhnlichen Regeln der Differentiation. Genügen die dx_r den partiellen Differentialgleichungen $d^2x_r = 0$, so folgt $d^2\varphi = \sum \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_r \partial x_s} dx_r dx_s$, und wenn man für φ eine ganze homogene Funktion zweiten Grades der x_i wählt, so wird $d^2F = 2F(dx_1, \ldots, dx_n)$.

Für $n = 2$ sei d ein Vektor, der den Bedingungen $d^2x = d^2y = 0$ genügt, so wird also für $F = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ die Gleichung $\frac{1}{2}d^2F = F(dx, dy)$ erfüllt.

Die vorstehenden allgemeinen Überlegungen werden auf die ursprüngliche Untersuchung angewendet. Die drei Paare (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sollen kurz die Paare z_1, z_2, z_3 heißen. Im Raume R_6 $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ wird eine binäre trilineare Form H zugrunde gelegt. Sind r, s, t wieder die Indizes 1, 2, 3, so werden die drei Vektoren d_r eingeführt durch $d_r\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\frac{\partial H}{\partial y_r} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_r}\frac{\partial H}{\partial x_r}$, wo φ jede willkürliche Funktion der x_r, y_r sein kann. Man hat $d_r x_s = d_r y_s = d_x x_t = d_r y_t = 0$, d. h. für den Vektor d_r verhalten sich die Paare z_s, z_t wie Konstanten, während $d_r x_r$, $d_r y_r$ bilineare Funktionen dieser beiden Paare sind. Sei jetzt φ homogen in bezug auf jedes Paar, so stellt sich H in der einfachen Gestalt dar: $H = y_s d_s x_s - x_s d_s y_s$, und es ergibt sich $d_r d_s x_s = x_s F_{rs}$, $d_r d_s y_s = y_s F_{rs}$, wo F_{rs} eine binäre quadratische Form des Paares z_t mit konstanten Koeffizienten ist. Man führe ferner drei neue Vektoren e_r ein durch die Forderung $e_r\varphi = x_r \frac{\partial\varphi}{\partial x_r} + y_r \frac{\partial\varphi}{\partial x_r}$, so besteht zwischen den Operatoren (d_r, d_s), e_r, e_s die Relation $(d_r, d_s)\varphi = F_{rs} e_s\varphi - F_{sr} e_r\varphi$. Nunmehr spezialisiere man die bisher ganz will-

kürliche Funktion φ zu H selbst, so folgt $F_{rs} = F_{sr}$, und man kann einfacher schreiben $d_r\, d_s\, x_s = x_s\, F_t$, $d_r\, d_s\, y_s = y_s\, F_t$. Die Form H wird mit der früher unter (III) eingeführten identifiziert, dann sind die Konstanten α_0, β_0, α_r, β_r resp. die Koeffizienten von $x_1\, x_2\, x_3$, $y_1\, y_2\, y_3$, $x_r\, y_s\, y_t$, $y_r\, x_s\, x_t$; die Größen $d_r\, x_r$, $d_r\, y_r$ fallen mit den früheren Bildungen X_r, Y_r zusammen und die Formen F_r mit den damaligen F_r.

Setzt man insbesondere $\varphi = d_t\, x_t$, so erhält man den wichtigen Satz $d_r\, F_r = d_s\, F_s$. Diese Funktion ist also symmetrisch in bezug auf alle drei Indizes 1, 2, 3 und bildet eine neue trilineare Form H', die die zu H „adjungierte" Form genannt wird. Man hat $F_r\, (d_r\, x_r, d_r\, y_r) = F_s\, F_t$, und dieses Resultat deckt sich mit dem damals auf ganz anderem Wege bewiesenen Hauptsatze. Daß die drei Formen F_r dieselbe Diskriminante D besitzen, erweist sich jetzt als selbstverständlich.

Weitere Ergebnisse erhält man durch Übertragung der letzten Untersuchung von der Form H auf die zu ihr adjungierte Form H'. Die drei entsprechenden Formen F_r' haben dieselbe Diskriminante $D' = D^3$, und die zu H' adjungierte Form unterscheidet sich von der ursprünglichen Form H nur um den Faktor $-D^2$. Hieraus lassen sich Eigenschaften der aus H und H' gebildeten linearen Schar ableiten. Zum Schluß wird noch auf die beherrschende Stellung hingewiesen, die die Diskriminante D einnimmt; aus ihren partiellen Derivierten lassen sich die Koeffizienten aller in Betracht kommenden Formen bilden. My.

C. Jordan. Mémoire sur les formes quadratiques, suivant un module premier p, invariantes par une substitution linéaire donnée. Journ. de Math. (6) **1**, 217-284.

In einer früheren Abhandlung (F. d. M. **20**, 1888, 190) hat der Verf. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür untersucht, daß bei gegebener linearer Substitution S quadratische Formen Φ existieren, die durch S nicht geändert werden. Diese invarianten Formen Φ bilden einen einzigen Typus, da sie auseinander hervorgehen durch lineare Substitutionen, die den Ausdruck von S nicht ändern. Nunmehr wird dasselbe Problem in arithmetischem Sinne gestellt; die Koeffizienten von S und Φ sind die Reste ganzer Zahlen nach einem Primzahlmodul p. Die Prinzipien der Lösung sind im wesentlichen dieselben, die Ergebnisse aber sehr verschieden von denen des algebraischen Falles.

Zwei mod. p kongruente Zahlen heißen kurz einander gleich, und das Entsprechende gilt von S und Φ. Dagegen heißen zwei S, resp. zwei Φ äquivalent (von demselben Typus), wenn man von der einen zur andern übergehen kann vermöge einer auf die Variabeln ausgeübten Substitution. Die linearen $S = |x_i, \sum a_{ik}\, x_k|$ mod. p lassen sich auf Fundamentalsubstitutionen der Form $|x_i, \lambda x_i|$ und $|x_i, x_i + x_k|$ zurückführen; die Anzahl derselben ist eine einfache zahlentheoretische Funktion von n und p.

Die Variabeln zerlegen sich in Systeme, so daß die S einer entsprechenden Reihe oder Klasse die Variabeln etwa des Systems $x_0, x_1, \ldots, x_m$ ersetzen durch $\varrho x_0, \varrho(x_1 + x_0), \ldots, \varrho(x_m + x_{m-1})$. Hier ist ϱ eine Wurzel der charakteristischen Kongruenz $\varDelta = | a_{11} - \varrho, a_{12}, \ldots, a_{1n} | \equiv 0 \bmod. p$. Ersetzt man ϱ durch die konjugierten Wurzeln $\varrho, \varrho^p, \ldots, \varrho^{p^{r-1}}$, so ergeben sich die konjugierten Reihen von S.

Die quadratischen Formen $\varPhi$ mit der Diskriminante D zerfallen bei ungeradem p in zwei Typen, entsprechend den beiden Werten ± 1 des quadratischen Charakters $\left(\frac{D}{p}\right)$. Die Form $\varPhi$ kann dann auf die kanonische Gestalt $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + a x_n^2$ gebracht werden, wo a der Relation $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)^n \left(\frac{D}{p}\right)$ genügt. Das Zeichen von $\left(\frac{D}{p}\right)$ läßt sich aus der Anzahl von Lösungen der Kongruenz $\varPhi \equiv c \bmod. p$ bestimmen, die unmittelbar hingeschrieben werden kann.

Die S, die eine gegebene Form $\varPhi$ invariant lassen, bilden eine Gruppe G, „die Gruppe von $\varPhi$". Zwei äquivalente Formen $\varPhi$, $\varPhi'$ entsprechen zwei Gruppen G, G' desselben Typus.

Die Ordnung der Gruppe G von $\varPhi$ läßt sich auf Grund eines Rekursionsgesetzes explizite ermitteln und hieraus die Anzahl der verschiedenen mit $\varPhi$ äquivalenten Formen.

Endlich wird noch der Hülfssatz benutzt, daß die schiefen bilinearen Formen $\sum c_{ik} x_i X_k$ $(c_{ik} = - c_{ki})$ in zwei Reihen von je $n = 2m$ kogredienten Variabeln x, X einem einzigen Typus $\sum_1^m (x_{2k-1} X_{2k} - x_{2k} X_{2k-1})$ äquivalent sind; hier lassen sich die oben erwähnten Anzahlen ohne weiteres hinschreiben.

Es handelt sich nunmehr um folgende sechs Hauptfragen: 1. Ist S mod. p gegeben, welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit quadratische Formen $\varPhi$ mod. p (von nicht verschwindender Diskriminante mod. p) existieren, die gegenüber S invariant sind? 2. Welches ist der allgemeine Ausdruck dieser $\varPhi$? 3. Auf welche einfachen Typen lassen sich diese $\varPhi$ reduzieren durch Änderung der Variabeln, die den Ausdruck von S invariant lassen? 4. Welches ist die Anzahl dieser Typen? 5) Welches ist die Anzahl der verschiedenen $\varPhi$, die auf jeden dieser Typen reduzierbar sind? 6. Welches ist in jedem Falle das Vorzeichen von $\left(\frac{D}{p}\right)$, resp. $\left(\frac{2}{p}\right)$?

Wir erwähnen einige der Hauptergebnisse. Die Bedingungen von 1. sind die folgenden: Jeder, von ± 1 mod. p verschiedenen Wurzel ϱ der charakteristischen Kongruenz von S ist eine Wurzel $\frac{1}{\varrho}$ derselben Kongruenz assoziiert, und die beiden, diesen Wurzeln entsprechenden Klassen C, C' enthalten gleichviel Variabeln, und deren Verteilung in

Reihen ist für beide Klassen dieselbe. Dagegen entspricht einer Wurzel ± 1 mod. p eine singuläre Klasse C; deren Reihen, soweit sie gleichviel Variabeln enthalten, werden in Unterklassen zusammengefaßt. Bei ungeradem p wird jede Unterklasse, deren Reihen eine gerade Anzahl von Variabeln enthalten, durch eine gerade Anzahl von Reihen gebildet, und das Gleiche gilt für $p = 2$ für jede Unterklasse, deren Reihen eine ungerade Anzahl von Variabeln enthalten.

Besitzt die charakteristische Kongruenz von S keine Wurzel ± 1 mod. p, so gehören die invarianten Formen Φ alle einem und demselben Typus an. Sind dagegen Wurzeln ± 1 mod. p vorhanden, so beträgt für ungerades p die Anzahl der Typen 2^k, wo k die Anzahl der in den singulären Klassen enthaltenen Unterklassen bedeutet mit einer ungeraden Anzahl von Variabeln. Besitzt endlich für $p = 2$ die charakteristische Kongruenz die Wurzel 1, und versteht man unter k die Totalanzahl der Unterklassen der singulären Klasse und unter k' die Anzahl der Unterklassen mit einer geraden Anzahl von Reihen mit einer geraden Variabelnanzahl, so ist die Anzahl der verschiedenen Typen gleich $2^{k-k'} 3^{k'}$. Ist ferner l die Anzahl der Reihen, $m + 1$ die der Variabeln in jeder Reihe, so muß für jede Unterklasse $l(m + 1 + p)$ gerade sein.

Alle Klassen, die entweder konjugiert oder assoziiert sind, werden zu einer „Familie" zusammengefaßt. Jede invariante Form Φ stellt sich dann dar als eine Summe invarianter Teilformen, deren jede nur die Variabeln einer einzigen Familie enthält.

Im letzten Abschnitt wird noch eine verwandte Frage behandelt. Eine quadratische Form Φ von $2n$ Variabeln sei auf die Gestalt $\sum_1^n x_k y_k$ reduziert. Die Gruppe G der S, die eine solche Form Φ invariant lassen, läßt sich aus gewissen Fundamentalsubstitutionen L_i, M_{ik} zusammensetzen, wo die L_i einfach von der Gestalt $|x_i, y_i;\ y_i, x_i|$ sind. Ein ähnlicher Satz gilt, wenn Φ von einem zweiten Typus ist $\Phi = x_1^2 + y_1^2 + \sum_1^n x_s y_k$, nur daß dann noch Fundamentalsubstitutionen anderer Art hinzutreten. Eine Substitution S von G heißt nun gerade oder ungerade, jenachdem sie als Produkt von Fundamentalsubstitutionen eine gerade oder ungerade Anzahl von Faktoren L aufweist. Für diese wichtige Fallunterscheidung wird ein sehr einfaches Kriterium abgeleitet: Die Substitution S ist gerade oder ungerade, jenachdem in ihrer kanonischen Form die Anzahl der durch die Variabeln gebildeten Reihen eine gerade oder ungerade ist. Die Bedeutung dieses Kriteriums liegt vor allem darin, daß es von der betrachteten Form Φ ganz unabhängig ist.

My.

E. Fischer. Über quadratische Formen mit reellen Koeffizienten.
Monatsh. f. Math. **16**, 234-249.

Seien π, ν die Anzahlen der positiven, bzw. negativen Quadrate, die in der kanonischen Darstellung $x_1^2 + \cdots + x_\pi^2 - x_{\pi+1}^2 - \cdots - x_{\pi+\nu}^2$

einer reellen quadratischen Form $f(x_1, \ldots, x_n)$ auftreten und nach dem Trägheitsgesetz unabhängig sind von der Transformation auf die kanonische Gestalt. Die algebraische Deutung dieser beiden Anzahlinvarianten an den Koeffizienten von f ist einigermaßen schwerfällig. Der Verf. stellt ihr deshalb eine „analytische“ gegenüber, die er der sehr bequemen analytischen Deutung des Falles $\pi = n, \nu = 0$, bzw. $\pi = 0, \nu = n$ durch den positiv-, bzw. negativ-definiten Charakter von f nachbildet; er deutet den „Positivrang“ π als die Stufenzahl desjenigen möglichst hochstufigen ebenen Gebildes im x-Raume, längs dessen überall $f > 0$ ist (unter Ausschluß des Gleichheitszeichens), und analog den „Negativrang“ ν, und gibt eine von der algebraischen independente Theorie. Insbesondere stellt er der bekannten Deutung der größten und kleinsten Wurzel der Gleichung $|f - tF| = 0$ (unter F eine positiv-definite Form verstanden) als Maximum, bzw. Minimum von $\frac{f}{F}$ für alle reellen $(x_1, \ldots, x_n)$ außer $(0, \ldots, 0)$ eine ähnliche „analytische“ Deutung auch der übrigen Wurzeln dieser Gleichung an die Seite, die einer Behandlung des Hauptachsenproblems der quadratischen Formen als einer Aufgabe der sukzessiven Maxima unter linearen Nebenbedingungen etwa gleichkommen würde.

T.

P. F. Smith. On the linear transformations of a quadratic form into itself. American M. S. Trans. **6**, 1-16.

Es handelt sich um das klassische Problem der Bestimmung der linearen Transformationen, die eine quadratische Form invariant lassen. Cayley und Hermite beschäftigten sich mit der „allgemeinen“ Transformation, Frobenius (F. d. M. **9**, 85, 1877) bestimmte alle eigentlichen Transformationen, Lindemann und Loewy (F. d. M. **27**, 81, 1896; **27**, 83, 1896) lösten das Problem allgemein, und Voß (F. d. M. **27**, 81, 1896) vereinfachte diese Lösung.

Der Verf. zerlegt die gemeinte Transformation nach dem Vorgange von Voß in einfache Elemente, „Zentralspiegelungen“ in bezug auf das Gebilde F_2, das durch Nullsetzen der gegebenen quadratischen Form dargestellt wird, d. h. die durch einen festen Pol und seine Polarebene bestimmte Projektivität. Jede Transformation läßt sich als ein Produkt von Zentralspiegelungen herstellen, deren Anzahl höchstens gleich der Anzahl der Variabeln ist.

Sei $f(x) = \sum a_{ik} x_i x_k \, (a_{ik} = a_{ki})$ die quadratische Form. Die homogenen x werden als Punktkoordinaten eines R_{n-1} gedeutet. Irgend r unabhängige Punkte dieses R_{n-1} $(a_i^{(1)}), \ldots, (a_i^{(r)})$ bestimmen einen linearen Unterraum M_{n-r-1} vermöge der Gleichungen $x_i = \lambda_1 a_i^{(1)} + \cdots + \lambda_r a_i^{(r)} \, (i = 1, \ldots, n)$.

Sind nun x, x' zwei vermöge der Zentralspiegelung A mit dem Pole oder Zentrum a einander (gegenseitig) entsprechende Punkte, so liegen stets die drei Punkte a, x, x' auf einer Geraden, so daß $x' = x + \lambda a$.

Da überdies, gemäß der Definition von A, $f(x') \equiv f(x)$ ist, so hat man als Darstellung der Zentralspiegelung A: $x' = x - \frac{2f(x,a)}{f(a)} a$. Die Gleichung $f(x,a) = 0$ stellt die Polare M_{n-2} des Punktes a in bezug auf das Gebilde $f(x) = 0$ dar. Für das Produkt AB zweier Zentralspiegelungen A, B kommt ohne weiteres:

$$x' = x - \frac{2f(x,a)}{f(a)} a - \frac{2f(x,b)}{f(b)} b + \frac{4f(x,a)f(a,b)}{f(a)f(b)} b.$$

Diese zusammengesetzte Zentralspiegelung ist in a und b dann und nur dann symmetrisch, wenn $f(a,b) = 0$, oder mit anderen Worten, zwei Zentralspiegelungen A und B sind dann und nur dann kommutativ, wenn ihre Zentra a, b bezüglich $f = 0$ konjugiert sind.

Sodann wird die wichtige Frage aufgeworfen, wann zwei solche Produkte AB und CD identisch sind. Ein einfacher, nach Graßmannschen Prinzipien geführter Beweis zeigt, daß ein Produkt AB auf ∞^1 Weisen als ein Produkt CD aufgefaßt werden kann, indem die Zentra c, d von C, D auf der durch a, b bestimmten Geraden liegen; eines der beiden Zentra c, d ist auf dieser Geraden willkürlich wählbar, und dann ist das andere eindeutig bestimmt. Entsprechend läßt sich ein Produkt ABC auf ∞^3 Weisen als ein Produkt DEF auffassen; eines der drei neuen Zentra, etwa d, kann auf der „Ebene" abc beliebig gewählt werden, dann ist eine Gerade dieser Ebene eindeutig festgelegt, auf der, wie vorhin, die beiden Zentra e, f noch ∞^1 Lagen annehmen können. Genauer, das Dreieck def ist ein Polardreieck einer in der Ebene abc bestimmten Korrelation. Durch vollständige Induktion gelangt man zu dem entsprechenden Satze für das Produkt von r Zentralspiegelungen. Daraus folgt, daß irgend ein Produkt von Spiegelungen, deren Zentra einer M_{r-1} angehören, auf ein solches von höchstens r Spiegelungen reduziert werden kann.

Der Verf. wendet sich nach diesen Vorbereitungen zu der Aufgabe der Zusammensetzung irgend einer orthogonalen Transformation aus Zentralspiegelungen. Die quadratische Urform wird zu dem Behuf als $\varphi(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ angenommen, dann ist die durch die Gleichungen $y_i = \sum a_{ik} x_k$ dargestellte Transformation eine orthogonale T, wenn $\varphi(y) \equiv \varphi(x)$. Für $n = 2$ ist die in Rede stehende Zerlegung ohne weiteres ersichtlich. Für beliebiges n läßt sich zeigen, daß eine orthogonale Transformation zusammengesetzt werden kann aus einer ebensolchen in $n-1$ Variabeln und einer Anzahl von Zentralspiegelungen. Mit Hülfe dieses Satzes ergibt sich nach wenigen Schritten der Fundamentalsatz, daß jede lineare automorphe Transformation einer allgemeinen quadratischen Form aus höchstens n Zentralspiegelungen zusammensetzbar ist, und daß für alle solche Transformationen die oben erwähnten Sätze gelten.

Nunmehr wendet sich der Verf. zur Aufstellung der Gleichungen für die aus n unabhängigen Zentralspiegelungen zusammengesetzten Transformationen. Hierbei wird der Hülfssatz von Bedeutung, daß sich die

aus n kommutativen Spiegelungen des R_{n-1} zusammengesetzte Transformation auf die identische reduziert. Die sich ergebenden Formeln für die Koeffizienten der in Rede stehenden Transformation stellen sich als eine direkte Verallgemeinerung der klassischen Formeln Cayleys für eine orthogonale Substitution dar. Solange das Grundgebilde $f = 0$ nicht ausgeartet ist, kann die charakteristische Gleichung der allgemeinen Transformation keine Wurzel $+1$ besitzen.

Diese Ergebnisse werden modifiziert für den Fall, wo weniger als n Zentralspiegelungen zur Zusammensetzung ausreichen.

Damit gelangt der Verf. zu einer allgemeinen Darstellung aller automorphen Transformationen der quadratischen Form $f(x)$. Es werden auch noch andere Möglichkeiten untersucht, solche automorphen Transformationen aus involutorischen zusammenzusetzen. My.

P. Muth. Über reelle Äquivalenz von Scharen reeller quadratischer Formen. J. für Math. **128**, 302-321.

Zwei Scharen $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$, $\lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \psi'$ reeller quadratischer Formen in den n Variabeln x, resp. x' (oder auch die beiden Formenpaare φ, ψ und φ', ψ' selbst) heißen „reell äquivalent", wenn durch eine reelle lineare Substitution S mit nicht verschwindender Determinante zugleich φ in φ', ψ in ψ' übergeführt werden kann. Zunächst müssen die Bedingungen für die Äquivalenz überhaupt erfüllt sein, d. h. die Weierstraßschen, resp. Kroneckerschen Invarianten beider Scharen müssen übereinstimmen. Ist dies der Fall, so werden für die reelle Äquivalenz, abgesehen von speziellen Fällen, noch weitere Bedingungen als notwendig und hinreichend hinzutreten. Dies Problem wird für ordinäre Scharen allgemein gelöst.

Es seien zunächst einige bemerkenswerte Fälle angegeben, in denen äquivalente Scharen (reeller) Formen von selbst bereits reell äquivalent sind. Dahin gehören zwei ordinäre Scharen mit lauter imaginären Elementarteilern, ferner der Fall, daß ψ, ψ' definit (aber nicht semidefinit) eines Zeichens sind. Sind dagegen für die beiden (ordinären oder singulären) äquivalenten Scharen $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$ und $\lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \psi'$ die Formen ψ und ψ' semidefinit gleichen Zeichens, so sind die Scharen reell äquivalent, wenn sie keine linearen Elementarteiler mit der Basis λ_1 besitzen; andernfalls sind die Scharen dann und nur dann reell äquivalent, wenn die Frobeniusschen Signaturen (F. d. M. **25**, 318, 1894) von φ und φ' übereinstimmen. Sei S das Zeichen für die Signatur, so ist demnach für die reelle Äquivalenz zweier Scharen $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$, $\lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \psi'$ notwendig, daß für beliebige (reelle) Werte von λ_1/λ_2 die Gleichung

$$(1) \qquad S(\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi) = S(\lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \psi')$$

besteht. Es gibt Fälle, wo aus dem Bestehen einer endlichen Anzahl von Gleichungen (I) die reelle Äquivalenz beider Scharen und damit die unbeschränkte Gültigkeit von (I) folgt.

Indessen kann die Bedingung (I) für beliebige λ_1/λ_2 erfüllt sein, ohne daß die Scharen reell äquivalent sind. Man hat also nach weiteren notwendigen Bedingungen für die reelle Äquivalenz zu suchen. Es seien φ_1, ψ_1 irgend zwei Formen der ersten Schar, φ_1' und ψ_1' die entsprechenden der zweiten Schar, so bilde man die adjungierte Form von $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\psi_1$ mittels neuer Variabeln u: $\lambda_1^{n-1}\Phi_{n-1} + \lambda_1^{n-2}\lambda_2\Phi_{n-2} + \cdots + \lambda_2^{n-1}\Phi_0$, und entsprechend für $\lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\psi_1'$. Hier sind die Φ_i und Φ_i' simultane Kontravarianten der Paare φ_1, ψ_1, resp. φ_1', ψ_1'. Man erhält nun, wie leicht zu sehen, als weitere notwendige Bedingungen für die reelle Äquivalenz die $n-1$ Gleichungen:

$$\text{(II)} \qquad S(\Phi_i) = S(\Phi_i').$$

Der Hauptnachweis besteht nun darin, daß zwei äquivalente reelle ordinäre Scharen reell äquivalent sind, wenn eine endliche Anzahl Bedingungen der Gestalt (I) und (II) erfüllt ist, womit das Problem der reellen Äquivalenz für ordinäre Scharen gelöst ist.

Dabei lassen sich die Bedingungen von der Gestalt (II) teilweise (und in besonderen Fällen ganz) durch einfachere von der Gestalt (I) ersetzen. Haben alle reellen Elementarteiler beider Scharen gerade Exponenten, so ist die Bedingung (I) überflüssig; treten auch reelle Elementarteiler mit ungeraden Exponenten auf, kann von einer gewissen Anzahl m von Bedingungen (II) eine als überflüssig wegbleiben.

Im allgemeinen ist die Anzahl der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die reelle Äquivalenz zweier äquivalenten ordinären reellen Scharen gleich der Anzahl der verschiedenen reellen Elementarteiler ihrer Determinanten. My.

J. Kürschák. Über den größten gemeinsamen Teiler zweier Formen. Math. Ann. **60**, 317-318.

J. König hat in seinem Werke über algebraische Größen (F. d. M. **34**, 93, 1903) die Frage beantwortet, wann der größte gemeinsame Teiler zweier dem vollständigen holoiden Bereiche (A) entstammenden Formen $F(x_1, \ldots, x_m)$, $G(x_1, \ldots, x_m)$ wieder eine wirkliche Form ist. Hier wird eine andere, auch für nicht reguläre Formen gültige Lösung gegeben durch den Satz: „Die Formen F, G haben dann und nur dann eine wirkliche Form zum gemeinsamen Teiler, wenn die in bezug auf λ gebildete Resultante der Formen $F_\lambda = F(x_i + \lambda y_i)$, $G_\lambda = G(x_i + \lambda y_i)$ verschwindet." Hier bedeuten die y_i und λ neue Unbestimmte. My.

F. Hočevar. Über die Bestimmung der linearen Teiler einer algebraischen Form. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 151-156.

Hier werden einige vom Verf. in einer früheren Abhandlung (F. d. M. **35**, 133, 1904) entwickelte Sätze weiter ausgeführt und ergänzt. Es handelt sich um die Aufgabe, wie man die linearen Faktoren beliebig

vorgelegter Formen — also auch solcher, die irreduzible Faktoren verschiedener Grade enthalten — bestimmen kann. Hierfür werden zwei Methoden auseinandergesetzt. Zunächst muß die Form $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, die vom Grade p sei, von ihren vielfachen Faktoren befreit werden. Man darf annehmen, daß F das Glied mit x_1^p enthält. Sei T der größte gemeinsame Teiler von F und $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, so enthält die Form $f = \frac{F}{T}$ dieselben irreduzibeln Faktoren wie F, jeden aber nur in der ersten Potenz. Man suche daher die linearen Faktoren von f und bestimme nachträglich deren Vielfachheit in F. Die erste der beiden Methoden beruht auf dem Satze I: „Kennt man ein spezielles Wertsystem $x_i = a_i$, für das ein linearer Teiler L von f verschwindet (aber kein weiterer Teiler von f), so ist $L = \sum x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{a_i}$." Für $n = 3$ bedeutet das geometrisch, daß, wenn die Kurve $f = 0$ einen geradlinigen Zweig besitzt, und (a_i) ein Punkt desselben ist, durch den kein anderer Zweig hindurchgeht, jener lineare Zweig als Tangente des Punktes (a_i) von $f = 0$ völlig bestimmt ist.

Man setze nun in $f = 0$: $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$; die n Wurzeln, die die so entstehende Gleichung in x_1 besitzt, seien $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_1^{(n)}$. Hat f einen linearen Teiler L, so verschwindet er für eines der Wertsysteme $a_1^{(\lambda)}, a_2, \ldots, a_n$, und L bestimmt sich dann gemäß I. So einfach diese Methode ist, so hängt doch der Grad der aufzulösenden Gleichung vom Grade der Form und nicht von der Anzahl der linearen Teiler ab. In dieser Hinsicht ist die zweite Methode vorzuziehen, der der Satz zugrunde liegt: II. „Jeder lineare Teiler L von f ist ein Teiler aller dreireihigen Minoren ihrer Hesseschen Determinante H", der sich zu folgendem Satze erweitern läßt: „Der größte gemeinsame Teiler von f und aller dreireihigen Minoren ihrer Hesseschen Determinante H ist das Produkt aller Linearteiler von f." Für das Zerfallen von f in lauter lineare Faktoren ist also notwendig und hinreichend, daß alle dreireihigen Minoren von $H(f)$ durch f teilbar sind. My.

O. Toeplitz. Über Systeme von Formen, deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet. Diss. Breslau. Graß, Barth & Co. 46 S.

Verschwindet die Funktionaldeterminante $F = \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|$ von p Formen $f_1, \ldots, f_p$ gleichen Grades n in p Variabeln $x_1, \ldots, x_p$ identisch, so besteht nach Jacobi zwischen den Formen f_i eine identische Relation $\omega = 0$, wo ω als eine ganze homogene Funktion der f_i angenommen werden darf. Darüber hinaus erheben sich weitere Fragen. Welche Beziehung muß eventuell zwischen $p - 1$ Formen f bestehen, damit sich zu ihnen eine p^{te} hinzubestimmen lasse, die von jenen abhängig ist? Ferner, lassen sich nicht die p Formen f vermöge einer linearen Sub-

stitution der Variabeln auf eine endliche Anzahl kanonischer Darstellungen bringen? Hierbei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß diese kanonischen Darstellungen eine Anzahl von ϱ willkürlichen Parametern $p_1, \dots, p_\varrho$ mit sich führen. Endlich kann man nach den besonderen Eigenschaften der Form ω fragen und nach dem Zusammenhange dieser Eigenschaften mit denen der Formen f_i.

So kann man z. B. nach allen Systemen von p Formen f_i fragen, zwischen denen eine quadratische Identität besteht, u. s. f. Für binäre Formen $(p = 2)$ ist die Beantwortung aller dieser Fragen sehr einfach. Auch für ternäre Formen $(p = 3)$ finden sich jene Fragestellungen in der Literatur alle beantwortet, wenn sie auch nicht gerade in den obigen Formulierungen ausgesprochen sind.

Für Formen von mehr als drei Variabeln $(p > 3)$ liegt das bekannte Spezialresultat von Gordan-Noether vor über das identische Verschwinden der Hesseschen Form (F. d. M. 8, 64, 1876).

Es gelingt dem Verf., unter andern verallgemeinernden Ergebnissen, alle Systeme von 5 abhängigen quinären quadratischen Formen aufzuzählen, wobei die Anzahl der sich ergebenden Systeme nur eine geringe ist.

Dem ersten, rein algebraischen Teile der Arbeit schließt sich ein zweiter an, der sich geometrischer Vorstellungen bedient, wodurch die im ersten Teil verwendeten Methoden in instruktiver Weise ergänzt werden. Auf das Studium der interessanten und inhaltsreichen Abhandlung sei besonders hingewiesen. My.

H. B. Phillips. Some invariant relations of linear correspondences. John Hopkins Univ. Circ. 1905, 39-49.

Diese Note schließt sich an eine voraufgehende des Verf. an (F. d. M. **35**, 144, 1904). Sind s_1, s_2 zwei Kollineationen, so ist $(s_1 s_2) = s_1 s_2 - s_2 s_1$ eine Kovariante, die sogenannte „Alternante" von s_1 und s_2. Bedeutet s_0 die identische Kollineation, so ist die Alternante auch eine Kombinante der Schar $\lambda s_0 + \mu s_1 + \nu s_2$. Schreibt man symbolisch $s_1 = a\alpha$, $s_2 = b\beta$, so wird $(s_1 s_2) = (ab)\alpha\beta - (\beta\alpha)ba$. Nun hat Pasch (F. d. M. **16**, 728, 1884) gezeigt, daß die Bedingung dafür, daß s_2 eine Kovariante von s_1 ist, die ist, daß s_2 durch s_1 in sich selbst transformiert wird. Hieraus folgt, daß die Alternante einer Kollineation und irgend einer ihrer Kovarianten identisch verschwindet.

Die invarianten Beziehungen der Alternante zu den Kovarianten von s_1 und s_2 lassen sich in zwei Theoremen aussprechen. Einmal ist sofort zu sehen, daß die Alternante apolar ist zu allen Kovarianten von s_1 oder s_2. Sei ferner $c\gamma$ irgend eine Kovariante von $a\alpha$. Unter der „Zwischenform" von $c\gamma$ mit $b\beta$ werde die Form $\overline{bc}\beta\gamma$ verstanden. „Dann ist die Alternante apolar zur Zwischenform einer der beiden Kollineationen mit irgend einer Kovariante der andern." Da alle Kovarianten von s linear durch s_0, s, s^2 darstellbar sind, so ist die Alternante $(s_1 s_2)$ apolar zu den 8 Kollineationen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_2^2$, $\overline{s_1 s_2}$, $\overline{s_1^2 s_2}$, $\overline{s_1 s_2^2}$, wo der Strich die Zwischenform andeutet, σ die zu $s = a\alpha$ reziproke Form αa bezeichnet.

Die Untersuchung kommt auf die Frage hinaus, ob jene 8 Kollineationen linear unabhängig sind. Dies hängt von der Diskriminante Δ der Alternante $(s_1\, s_2)$ ab. Ist Δ von Null verschieden, so wird man zunächst auf eine lineare Identität zwischen den obigen 8 Kollineationen und einer weiteren $\overline{s_1^2\, s_2^2}$ geführt; da aber die Alternante zu jenen 8 Kollineationen apolar ist, nicht aber zur neunten, so muß diese aus der Identität herausfallen. Dieser Schluß läßt sich in ähnlicher Weise wiederholen, und es ergibt sich, daß alle Koeffizienten der Identität verschwinden, d. h. die in Rede stehenden 8 Kollineationen sind in der Tat linear unabhängig. Daraus folgt dann, daß die 8 Apolaritätsbedingungen für die Alternante unabhängig sind und eine invariante eindeutige Bestimmung der Alternante liefern.

Verschwindet dagegen die Diskriminante Δ der Alternante, so besteht eine Identität von der obigen Art, und die Bestimmung der Alternante durch ihre Apolaritätsbedingungen ist nicht mehr eindeutig.

Daran knüpft sich eine Reihe geometrischer Interpretationen.

So ist das Verschwinden der Diskriminante der Alternante $(s_1\, s_2)$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Kollineationen eine gemeinsame apolare Polarität besitzen, oder einfacher, daß die Ecken der Fundamentaldreiecke irgend zweier Kollineationen des Büschels $\lambda s_1 + \mu s_2$ auf einem Kegelschnitt liegen.

Es sei noch der Satz erwähnt: Ist eine Kollineation apolar zu drei linear unabhängigen Kollineationen mit einem gemeinsamen Dreieckspaar, so transformiert sie das eine der Dreiecke in das andere. My.

A. B. Coble. Collineations whose characteristic determinants have linear elementary divisors with an application to quadratic forms. American J. **27**, 25-46.

Weierstraß (F. d. M. **1**, 54, 1868) hat in einer oft zitierten Untersuchung zwei ordinäre Scharen bilinearer Formen behufs Feststellung ihrer Äquivalenz simultan auf eine kanonische (normale) Gestalt gebracht. Segre (F. d. M. **16**, 693, 1884) hat mittels dieser kanonischen Gestalt die Kollineationen klassifiziert. Während die Weierstraßsche Reduktion auf die Normalform im allgemeinen nicht eindeutig ist, haben Darboux (F. d. M. **6**, 68, 1874) und Stickelberger (F. d. M. **10**, 77, 1878) die Reduktionsformeln mit gewissen Systemen von Parametern ausgestattet; indessen sind diese Parameter an gewisse Beschränkungen gebunden, deren Natur nicht näher untersucht wird. Indem sich der Verf. auf die „allgemeinen" Kollineationen beschränkt, deren charakteristische Determinanten nur lineare Elementarteiler besitzen, bildet er eine Methode aus, die es gestattet, die allgemeinste Normalform einer solchen Kollineation in Parametern hinzuschreiben; die Parameterbedingungen treten dabei in sehr einfacher Form auf. Eine bilineare Form $A \equiv \sum a_{ik}\, x_i\, u_k \equiv (ax)(ua)$ in kontragredienten Variabeln x, u, die als Punkt- und „Ebenen-" Koordinaten eines S_{n-1} gedeutet werden, stellt zugleich eine Punkt- und

eine Ebenenkollineation dar. Die Anzahl und Lage der bei A fest bleibenden Punkte und Ebenen hängt von der charakteristischen Determinante Δ von A ab, deren Wurzeln als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Verschwinden für eine Wurzel jener Determinante Δ zugleich alle Minoren vom Grade $n-p$ (aber nicht alle vom Grade $n-p-1$), so bleibt jeder Punkt einer p-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit P_p fest; und entsprechend jede Ebene einer (dualistischen) Π_p. Die festbleibenden Gebilde heißen kurz „Fixgebilde“.

Die in Betracht kommenden A lassen sich auf drei verschiedene Weisen charakterisieren: 1. Die charakteristische Determinante Δ besitzt nur lineare Elementarteiler. 2. Kein Punkt des Punkt-Fixgebildes einer Wurzel von Δ liegt auf allen Ebenen des entsprechenden Ebenen-Fixgebildes. 3. Hat Δ eine $(p+1)$-fache Wurzel, so verschwinden für dieselbe alle Minoren vom Grade $n-p$.

Die Punkt-Fixgebilde der verschiedenen Wurzeln von Δ sind nicht allein voneinander getrennt, sondern auch linear unabhängig.

Die Kollineation ist auf die „Normalform“ gebracht, wenn sie ausgedrückt ist mittels n Fixpunkte und n Fixebenen, die zusammen eine „Basis“ im S_{n-1} bilden. Gesucht wird eine allgemeinste Normalform von A, d. h. mit solchen Parametern, durch deren Spezialisierung alle überhaupt möglichen Normalformen hervorgehen.

Es sei v eine Fixebene von A, so genügt v der Identität in x: $(ax)(va) \equiv \lambda(vx)$, wo λ eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von A bedeutet. Besitzt λ die Multiplizität $p+1$, so erhält man $p+1$ lineare Gleichungen, vermöge deren $n-p-1$ von den Koordinaten v_i durch die übrigen darstellbar sind. Es kommt darauf an, die Auflösung dieser Gleichungen in einer symmetrischen Weise zu vollziehen. Daraus geht nach beliebiger Wahl von p Punkten $(x^1), \ldots, (x^p)$ eine Gleichung $W_p(\lambda) = 0$ für die durch diese p Punkte gehende Fixebene von Π_p hervor; überdies gehen in diese Gleichung p beliebige Ebenen $(u^1), \ldots, (u^p)$ durch einen Fixpunkt von P_p ein. Oder genauer, $W_p(\lambda)$ ist das Produkt eines Fixpunktes von P_p und einer Fixebene von Π_p, so daß der Fixpunkt auf p beliebig gewählten Ebenen liegt und die Fixebene durch p beliebig gewählte Punkte geht. Es enthält also $W_p(\lambda)$ je eine Reihe von Variabeln u, v und je p Reihen von Parametern (x^i), (u^i). Treten die Parameter nicht auf, so werde die Bezeichnung $W(\lambda)$, und wenn auch die Variabeln nicht auftreten, die Bezeichnung $W_0(\lambda)$ gewählt. Sei $W_0(\lambda) \equiv \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n$, so müssen $W(\lambda)$, $W_1(\lambda), \ldots, W_p(\lambda)$ durch die c und Potenzen von λ und A dargestellt werden, wobei sich ein einfaches Rekursionsgesetz ergibt. Mit diesen Formen $W_1(\lambda), \ldots, W_p(\lambda)$ ist eine Reihe von kovarianten Kollineationen verknüpft, die man erhält, indem man die bilineare Invariante in bezug auf jedes Paar von Parametern x_k und u_k nimmt, oder auch, indem man die sukzessiven Ableitungen von $W(\lambda)$ nach λ bildet:

$$W^{(k)}(\lambda) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} W(\lambda) \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Von diesen Kollineationen verschwinden $W(\lambda)$, $W^{(1)}(\lambda), \ldots, W^{(p-1)}(\lambda)$ identisch, dagegen ist $W^{(p)}(\lambda)$ eine singuläre Kollineation. Ihr singuläres Punktgebilde ist dasjenige lineare Gebilde, das durch die Fixpunktgebilde aller Wurzeln exkl. λ bestimmt ist; für das Fixpunktgebilde der Wurzel λ selbst ist $W^p(\lambda)$ die identische Kollineation. Bisher waren die p Parameterpunkte x_k in $W_p(\lambda)$ willkürlich; nunmehr sollen sie als p Punkte des Gebildes P_p gewählt werden. Dann läßt sich $W_p(\lambda)$ in die kanonische Form einer Determinante bringen, deren Elemente die Formen W^p sind, gebildet für je ein x und ein u.

Daraufhin läßt sich $W^p(\lambda)$ selbst in eine entsprechende Normalform bringen. Diese ist in der Tat die allgemeinste Normalform von $W^p(\lambda)$, der identischen Kollineation in den Räumen P_p und Π_p; die in die Form eintretenden Punkte und Ebenen liegen resp. in P_p und Π_p. Von hier gelangt man ohne weiteres zu der gewünschten allgemeinen Normalform einer Kollineation A. My.

J. Kraus. Über die Algorithmen von der Form $a^2 r_\lambda - 2ar_{\lambda+1} + r_{\lambda+2} = ka_\lambda$. Arch. der Math. u. Phys. (3) 9, 11-21.

In zwei früheren Aufsätzen (F. d. M. **24**, 346, 1892; **25**, 659, 1894) hat der Verf. den Algorithmus $ar_\lambda - r_{\lambda+1} = ka_\lambda$ arithmetisch untersucht. Dabei bedeuteten die a_λ die Ziffern und die r_λ die Reste des im Zahlensysteme mit der Grundzahl a dargestellten Bruches r_1/k. Es erwies sich als zweckmäßig, Doppelserien der betrachteten Größen einzuführen, also zwei Algorithmen von der Form $ar_{\lambda\mu} - r_{\lambda+1,\mu} = ka_{\lambda\mu}$, $a'r'_{\mu\lambda} - r'_{\mu+1,\lambda} = ka'_{\mu\lambda}$, wo a' eine beliebige andere Grundzahl ist. Falls $r_{\lambda\mu} = r'_{\mu\lambda}$, besteht die Fundamentalgleichung

$$\text{(I)} \qquad a'a_{\lambda\mu} - a_{\lambda,\mu+1} = aa'_{\mu\lambda} - a'_{\mu,\lambda+1}.$$

Die $a_{\lambda\mu}$, $a'_{\mu\lambda}$ heißen die Ziffern, die $r_{\lambda\mu}$, $r'_{\mu\lambda}$ die Reste des Bruches $\frac{r_{11}}{k} = \frac{r'_{11}}{k}$ in den Zahlensystemen (a, a'), resp. (a', a).

Durch Verallgemeinerung gelangt man zu Algorithmen von der Form

$$\text{(II)} \quad a^\nu r_\lambda - \binom{\nu}{1} a^{\nu-1} r_{\lambda+1} + \binom{\nu}{2} a^{\nu-2} r_{\lambda+2} - \cdots \pm r_{\lambda+\nu} = ka_\lambda,$$

wo ν eine beliebige ganze Zahl > 1 ist. In der vorliegenden Arbeit wird der Fall $\nu = 2$ genauer untersucht.

Bisher war der Ausdruck $ar_\lambda - r_{\lambda+1}$ als durch k teilbar vorausgesetzt. Hebt man diese Beschränkung auf, so kann man setzen

$$\text{(1)} \qquad ar_\lambda - r_{\lambda+1} = kh_\lambda - r'_\lambda.$$

Nunmehr bringe man die linke Seite von (II) für $\nu = 2$ auf die Gestalt $a^2 r_\lambda - 2ar_{\lambda+1} + r_{\lambda+2} = a(ar_\lambda - r_{\lambda+1}) - (ar_{\lambda+1} - r_{\lambda+2})$. Ist dieser Ausdruck für alle λ durch k teilbar, so folgt aus (1), daß auch $ar'_\lambda - r'_{\lambda+1}$ durch k teilbar sein muß, $= ke_\lambda$, und es wird

$$\text{(2)} \qquad a^2 r_\lambda - 2ar_{\lambda+1} + r_{\lambda+2} = k(ah_\lambda - h_{\lambda+1} - e_\lambda).$$

Tritt dagegen jene Teilbarkeit durch k nicht ein, so muß sie doch für den analogen Ausdruck $a^2 r'_\lambda - 2ar_{\lambda+1} + r'_{\lambda+2}$ gelten. Fährt man so fort, so erkennt man, daß der Faktor a_λ von k in (II) als Summe von Ausdrücken darstellbar ist, die alle von der Natur der linken Seite von (II) sind, und deren Grade sukzessive $\nu - 1, \nu - 2, \ldots, 0$ sind.

Darauf wird die Fundamentalgleichung (I) auf den Fall eines beliebigen Grades ν ausgedehnt, indem aus zwei Algorithmen der Art mit den Doppelserien von Resten $r_{\lambda\mu}, r'_{\mu\lambda}$ für $r_{\lambda\mu} = r'_{\mu\lambda}$ ein dritter analoger Algorithmus ableitbar ist.

Nunmehr wird der Fall $\nu = 2$ genauer verfolgt. Er führt auf eine gewisse Periode Δ, deren Bestimmung von dem Satze abhängt: „Ist $k = dk'$, $\delta = d\delta'$, wo δ den zu a mod. k gehörigen Exponenten und d den größten gemeinsamen Teiler von k und δ bedeutet, so ist Δ, falls $ar_\lambda - r_{\lambda+1}$ durch k teilbar ist, gleich δ; falls dagegen $ar_\lambda - r_{\lambda+1}$ prim zu k ist, gleich $k\delta'$." Für die Reste $r_{\lambda\mu}$ werden dann noch weitere Gesetze aufgestellt. My.

Weitere Literatur.

A. Berry. Note on a property of orthogonal covariants of a binary quantic. Cambr. Proc. **13**, 55-57.

R. Dölle. Orthogonale Invarianten der Zirkularkurven dritter Ordnung. Diss. Jena. 38 S. 8°.

P. A. Mac Mahon. Memoir on the orthogonal and other special systems of invariants. Part I. Cambr. Trans. **20**, 142-164.

B. Differentialinvarianten.

J. E. Wright. On differential invariants. American M. S. Trans. **6**, 286-315.

In der Theorie der Differentialgleichungen treten Ausdrücke auf, wie z. B. der bekannte Jacobi-Poissonsche Klammerausdruck, die sich gegenüber allen Berührungstransformationen invariant verhalten. Es entsteht das wichtige Problem, alle Invarianten (von Differentialausdrücken) des in Rede stehenden Typus aufzustellen. Der Verf. beschränkt sich auf folgende Fälle: 1. Die Differentialausdrücke sind entweder (a) von der ersten Ordnung mit m abhängigen und n unabhängigen Variabeln, oder aber (b) von der zweiten Ordnung mit einer abhängigen Variable; 2. Die Invarianten sollen nur von der ersten Ordnung sein, d. h. nur die ersten Ableitungen der Differentialausdrücke enthalten. Im Falle (a) seien $x_1, \ldots, x_n$ die unabhängigen, $z_1, \ldots, z_m$ die abhängigen Variabeln, $p^i_k = \partial z_i/\partial x_k$, $p^i_{kl} = \partial^2 z_i/\partial x_k\,\partial x_l$; ferner $f_\lambda(x, z, p^i_k)$ $(\lambda = 1, \ldots, r)$ die vorgelegten Differentialausdrücke, so daß

$$dz_i = \sum_{k=1}^{n} p^i_k\, dx_k, \quad dp^i_k = \sum_{l=1}^{n} p^i_{kl}\, dx_l.$$

In seiner grundlegenden Abhandlung über Differentialinvarianten (F. d. M. **16**, 91, 1884) zeigt Lie für Invarianten gewisser Typen infinitesimaler Transformationen, wie eine Reihe solcher Invarianten erhalten werden kann, die einem gewissen vollständigen System linearer Differentialgleichungen genügen. Im besonderen beschäftigt er sich mit Deformationsinvarianten von Flächen. Dieser Gegenstand ist ganz allgemein von Forsyth (F. d. M. **34**, 147, 1903; **35**, 610, 1904) aufgenommen worden, der nach Invarianten fragt, die sich bei einer ganz beliebigen auf eine Fläche ausgeübten Punkttransformation ergeben, und auf diesem Wege zu einer Theorie der Differentialinvarianten des Raumes gelangt.

Indem der Verf. diese Methoden von Lie und Forsyth (vgl. auch Żorawski, F. d. M. **24**, 737, 1892) mit geeigneten Modifikationen und Vereinfachungen anwendet, untersucht er unter den obigen Voraussetzungen Invarianten F, deren Transformierte F_1 sich von F um einen Faktor Ω unterscheiden, der allein von der Transformation abhängt. Wäre die Transformation eine allgemeine in ihren Variabeln, so würde Ω einfach eine Potenz der zur Transformation gehörigen Jacobischen Funktion werden. Aber diese Voraussetzung trifft hier nicht zu. Die Jacobiana von X_k, Z_i, P_k^i, P_{kl}^i (wo die großen Buchstaben den transformierten Größen entsprechen) in bezug auf x_k, z_i, p_k^i, p_{kl}^i zerfällt nämlich in zwei Faktoren J_1 und J_2, und wenn die Transformation eine Punkttransformation ist, zerfällt J_1 nochmals in zwei Faktoren, J_0 und J_1. Diese Faktoren können nun in verschiedenen Potenzen in Ω vereinigt sein. Es werden jetzt die Inkremente berechnet, die jene Faktoren gegenüber infinitesimalen Transformationen erleiden.

Liegt dann eine erweiterte infinitesimale Berührungstransformation vor in n unabhängigen Variabeln $x_1, \dots, x_n$ und der abhängigen Variable z, und wird für r Indizes $h, k, l, \dots$ die Differentiation $\partial^r z/\partial x_h \partial x_k \partial x_l \dots$ mit $p_{hkl\dots}$ bezeichnet, so wird das Inkrement von $p_{hkl\dots}$ gleich $(d^r \Theta/dx_h\, dx_k\, dx_l \dots)\, \delta t$, wo unter Θ der Ausdruck $\frac{dz}{dt} - \sum_1^n p_l \frac{dx_l}{dt}$ zu verstehen ist (für t als Parameter der Transformation) und die angegebene totale Differentiation von Θ so zu verstehen ist, daß die die höchsten Ableitungen von z enthaltenden Terme unterdrückt werden.

Handelt es sich nunmehr um die Bestimmung der Invarianten F von Differentialausdrücken der ersten Ordnung, so hat man die Gleichung $\frac{dF}{dt} + \mu(n+1)\,\Theta_z F = 0$. Da Θ eine völlig willkürliche Funktion der Variabeln $x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n$ ist, so muß jene Gleichung für alle Werte von Θ erfüllt sein. Setzt man also die Koeffizienten der Ableitungen von Θ gleich Null, so erhält man das System linearer partieller Gleichungen, denen F genügen muß. Daraus ergibt sich, daß F eine Funktion der Größen Z_i, P_{ik}, und $A_{ik} = X_{ik} + p_k Z_i$ werden muß. Legt man diese Tatsache umgekehrt den obigen Gleichungen zu grunde, so modifizieren sie sich derart, daß sie, bei Weglassung der ersten, ein vollständiges System bilden.

Das System dieser letzteren Gleichungen liefert nach Integration das Ergebnis, daß F eine Funktion der Poissonschen Klammerausdrücke $[f_\lambda f_\mu]$ $(\lambda,\mu=1,\ldots,\nu)$ wird; überdies hat F noch jener ersten Gleichung zu genügen. Diese sagt aber nur aus, daß F in den P_i homogen vom Grade $\mu(n+1)$ ist, und somit wird F eine homogene Funktion der $[f_\lambda f_\mu]$.

Das Gesamtergebnis ist, daß bei r Ausdrücken f die einzigen funktional unabhängigen relativen Invarianten des in Rede stehenden Typus für $\nu < 2n+1$ die Klammerausdrücke $[f_\lambda f_\mu]$ sind, während für $\nu = 2n+1$ noch eine Invariante hinzutritt, nämlich die Jacobiana der Formen bezüglich der in sie eingehenden Variabeln. Der Verf. betont, daß gerade dieser Zusatz über Lie hinausgeht.

In ähnlicher Weise wird der andere, im Eingange formulierte Fall von einer abhängigen und n unabhängigen Variabeln behandelt. Als Invarianten treten auf: 1. Ausdrücke vom Typus df; 2. algebraische In- und Kovarianten der quadratischen Formen $\sum \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} v_i v_k$, wo die Variabeln $v_k = dp_k - \sum p_{ki}\, dx_i$ sind; und 3. algebraische Invarianten der quadratischen Formen $\sum \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} y_i y_k$ und der Linearform $\sum y_i\, dx_i$, wo die y beliebige Variabeln bedeuten. My.

J. E. Wright. The differential invariants of space. American J. 27, 323-342.

Es handelt sich um die Lösung folgender drei Probleme: 1) Die Bestimmung der Differentialinvarianten aller Ordnungen des Raumes R_n; 2) die Bestimmung von Invarianten irgend einer Mannigfaltigkeit des R_n gegenüber Transformationen, die ihre „Gestalt" nicht ändern; 3) die Bestimmung von „Deformationsinvarianten" einer solchen Mannigfaltigkeit. Der Begriff „Invariante" umfaßt hier die ganze Klasse der Gaußschen Invarianten, Parameter und Kovarianten. Die Probleme gelten als gelöst, wenn eine Methode gegeben wird, die durch direkte Prozesse eine vollständige unabhängige Reihe von Invarianten aufzustellen gestattet.

So ergibt sich bei 1), daß alle Invarianten ausgedrückt werden können als algebraische Invarianten gewisser Formen, und daß letztere der Reihe nach hingeschrieben werden können. Desgleichen erscheinen bei 2) die Lösungen als die Invarianten algebraischer Formen. Auch im Falle 3) ließen sich die Parameter durch algebraische Invarianten ausdrücken, aber für die Bestimmung der Gaußschen Invarianten schlägt man besser einen direkten Weg ein. Behufs Lösung des Problems 1) zerlege man es in zwei Unterprobleme. Es seien $u_1,\ldots,u_m$ Variabeln, die als krummlinige Koordinaten eines R_m gedeutet werden. Ist dann $ds^2 \equiv \sum\sum a_{rs}\, du_r\, du_s$ das Quadrat des Linienelementes, so sollen die

$x_1, \ldots, x_m$ als Funktionen der u so bestimmt werden, daß $ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_m^2$. Versteht man unter den $x_1, \ldots, x_m$ eine erste Lösung, so erhält man ersichtlich die allgemeinste Lösung, wenn man die x einer allgemeinen orthogonalen Transformation O und einer Translation T unterwirft.

Irgend eine Invariante der in Rede stehenden Art ist eine Funktion der x und ihrer Ableitungen; diese muß gegenüber den allgemeinsten O und T ungeändert bleiben. Man hat also die beiden Unterprobleme: (A) Die Bestimmung aller Invarianten gegenüber einer allgemeinen Transformation der u unter der Bedingung, daß die x invariant sind; (B) die Auswahl derjenigen dieser Funktionen, die sich gegenüber einer allgemeinen, auf die x ausgeübten O und T invariant verhalten.

Die Aufgabe (A) verlangt die Bestimmung aller Invarianten F irgend einer Anzahl von Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ der u; hierbei treten in die Invarianten als Variabeln ein: 1. alle möglichen Ableitungen der f, 2. die u, 3. die ersten, zweiten, ... Differentiale der u. Es genügt, $r \leqq m$ zu zu nehmen. Ist F' die Transformierte von F, Ω die Jacobiana (Funktionaldeterminante) der Transformation und μ eine Zahl, so soll $F' = \Omega^\mu F$ werden. Durch irgend eine infinitesimale Transformation der vorgelegten Gruppe erleidet F die Änderung

$$\text{(I)} \qquad \frac{dF}{dt} = \mu \left\{ \sum_1^m \frac{\partial \xi_r}{\partial u_r} \right\} F, \quad \text{wo } \xi_r = \frac{du_r}{dt}.$$

Da aber die Gruppe die allgemeinste in den u sein soll, sind die ξ als willkürliche Funktionen anzusehen. Dadurch zerfällt (I) in ein „vollständiges" System von Gleichungen, und die Anzahl der funktional unabhängigen Lösungen beträgt $M - N$, wenn M die Anzahl der Variabeln und N die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen angibt. Um dies Gleichungssystem zu erhalten, verschaffe man sich nur die Inkremente der Variabeln in F. Hierbei wird der Begriff der Ordnung n einer Invariante eingeführt: die Inkremente der Variabeln dürfen dann höchstens die n-ten Ableitungen der ξ enthalten. Zwei Invarianten derselben Ordnung n heißen unabhängig, wenn sich die eine nicht durch die andere und durch Invarianten kleinerer Ordnung ausdrücken läßt. Nimmt man bereits die Invarianten bis zur Ordnung $n - 1$ als bekannt an, so bestehen diejenigen bis zur Ordnung n aus den ersteren und einer gewissen Anzahl unabhängiger Invarianten der Ordnung n. Ist F eine Invariante der Ordnung n, so hat F denjenigen Gleichungen (II) zu genügen, die aus (I) durch Nullsetzen der Koeffizienten je von den ersten, zweiten, ..., n-ten Ableitungen der ξ hervorgehen.

Offenbar sind die n-ten totalen Differentiale der f m unabhängige Lösungen von (II), und man kann hieraus alle Lösungen von (II) herleiten. Man erhält das vollständige System von Invarianten $d^\lambda f_\mu$ ($\lambda = 2, \ldots, n$; $\mu = 1, 2, \ldots, m$), zusammen mit den Lösungen der Gleichungen, die die Invarianten der ersten Ordnung liefern; diese bestehen aber aus den ersten Differentialen der f nebst der Jacobiana J der f bezüglich der u. Alle diese Invarianten sind funktional unabhängig und

absolute Invarianten, mit Ausnahme von J, das eine relative Invariante (mit $\mu = -1$) darstellt. Die allgemeinste Invariante der f ist somit eine Funktion der f und jener absoluten Invarianten, noch mit irgend einer Potenz von J multipliziert. Nunmehr lassen sich alle Invarianten eines (gewöhnlichen) R_m ermitteln. Die in Betracht kommenden Funktionen sind $f_1, \ldots, f_m, x_1, \ldots, x_m$. Die Invarianten müssen Funktionen der x und ihrer Differentiale (bis zur n-ten Ordnung), sowie irgend welcher der $f_1, \ldots, f_m$ und ihrer Ableitungen sein; sie müssen überdies bei den allgemeinsten Transformationen T und O invariant sein. Es wird dieselbe Methode eingeschlagen wie oben. Bedeuten $X_1, \ldots, X_m$ Variabeln, so leite man aus irgend einer der Formen $f_k (k = 1, \ldots, m)$ die algebraische Form n-ter Ordnung her:

$$A_{nk} \equiv \left\{ \sum_1^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}^n f_k (x_1, \ldots, x_m).$$

So entsteht ein System von mn Formen $A_{rk} (r = 1, \ldots, n)$. Dann lautet das Ergebnis: Die funktional unabhängigen Invarianten des R_m bis zur Ordnung n inkl. bestehen aus J, den orthogonalen algebraischen Invarianten der A_{rk} und der Linearform $\sum_1^m d^r x_i X_i (r = 1, 2, \ldots, n)$. Die allgemeinste Invariante des R_m ist dann eine Funktion der f_k und der obigen algebraischen Invarianten, noch multipliziert mit einer Potenz von J.

Man kann übrigens jene Linearform entbehren, wenn die invarianten Größen $d^\lambda f_\varrho (\lambda = 1, \ldots, n; \varrho = 1, \ldots, m)$ adjungiert werden. Eine leichte Modifikation erhält sodann das Ergebnis, wenn die quadratische Form $\sum_1^m X_i$ mit eingeschlossen wird.

Nunmehr wendet sich der Verf. zu irgend einer im R_m enthaltenen linearen Mannigfaltigkeit M_r. Hier sind zwei Typen von Invarianten zu unterscheiden. Die ersteren entsprechen Transformationen, die die „Gestalt" der M_r ungeändert lassen, d. h. alle Abstände in der M_r, insofern sie durch den R_m hindurch gemessen werden. Eine Unterklasse dieser Invarianten ist die der „Deformationsinvarianten" gegenüber Transformationen, die jede innerhalb der M_r selbst gemessene Länge fest lassen. Ist die M_r gegeben durch $u_{r+\lambda} = 0 (\lambda = 1, \ldots, m - r)$, so ist die erste Invariantenklasse in der allgemeinen des R_m enthalten; man hat nur die Variabeln $u_{r+\lambda}$ als $m - r$ der Funktionen f aufzufassen, so daß $du_{r+\lambda} = 0, \ldots, d^n u_{r+\lambda} = 0$. Hierbei gelangt man zur direkten Verallgemeinerung der Forsythschen „Fundamentalgrößen" der Ordnung q im R_3. Am Schlusse wird wiederum ein vollständiges System algebraisch unabhängiger Differentialinvarianten der M_r zusammengestellt.

Endlich wird noch das dritte Hauptproblem (III) erledigt. Hierbei findet ein großer Teil der oben gefundenen Resultate unmittelbare Verwendung.

Die zu der allgemeinsten Transformation der u gehörigen Invarianten enthalten als Variabeln einmal die u und deren Ableitungen nach den α, wo die α gewisse neu eingeführte invariante Variabeln sind, andererseits

die a und deren Ableitungen nach den u, unter der Bedingung, daß die quadratische Form für ds^2 invariant bleibt. Man erkennt sofort, daß $\sum_{h=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} a_{hk}\frac{\partial u_h}{\partial \alpha_\lambda}\frac{\partial u_k}{\partial \alpha_\mu}(\lambda, \mu = 1, \ldots, r)$ eine absolute Invariante ist, und daß jede absolute Invariante H die weiteren $\frac{\partial H}{\partial \alpha}$ nach sich zieht. Diese beiden Sätze führen zu einem vollständigen System der in Rede stehenden Invarianten.

Man vergleiche das vorangehende Referat über die Abhandlung „On differential invariants" desselben Verf. My.

J. E. Wright. Covariants of power series. Lond. M. S. Proc. (2) 2, 470-477.

In einer Reihe neuerer englischer Arbeiten wird die Theorie der Perpetuanten im Sinne der Aronholdschen Symbolik behandelt. Der Verf. betrachtet die zu Grunde gelegten Formen unbegrenzt hoher Ordnung als Potenzreihen. Die Kovariante $(ab)^\lambda a_x^{n-\lambda} b_x^{n-\lambda}$ der Formen $f(x) = a_x^n$, $\varphi(x) = b_x^n$ kann bei unbegrenzt hohem n einfach durch $(ab)^\lambda$ bezeichnet werden. Die Variable x_1 werde einfacher gleich Eins gesetzt, so daß man es mit gewöhnlichen Potenzreihen zu tun hat. Entwickelt man die rechte Seite der Identität $x_1^\lambda(ab)^\lambda = (a_x b_2 - a_2 b_x)^\lambda$, so erhält man

$$b_2^\mu b_x^{\lambda-\mu} = \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}\frac{1}{b_x^{n-\lambda}}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^\mu b_x^n,$$

also für sehr großes n angenähert $b_2^\mu b_x^{\lambda-\mu} = \frac{1}{n^\mu}\frac{1}{b_x^n}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^\mu b_x^n$. Schreibt man x statt x_2 so ergibt sich damit die grundlegende symbolische Formel:

$$x_1^\lambda(ab)^\lambda = \frac{1}{n^\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^\lambda f(x)\,\varphi(y),$$

wo nach erfolgter Differentiation y durch x zu ersetzen ist.

Entsprechend läßt sich die Perpetuante $(bc)^\lambda(ca)^\mu(ab)^\nu$ von drei Formen f, φ, ψ darstellen durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right)^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^\nu f(x)\,\varphi(y)\,\psi(z)\,(y = z = x), \text{ usf.}$$

Setzt man mit Mac Mahon $f = e^{\alpha x}$, wo α ein Symbol ist, so werden die Kovarianten unmittelbar vom Typus

$$(\alpha - \beta)^\lambda, (\beta - \gamma)^\lambda(\gamma - \alpha)^\mu(\alpha - \beta)^\nu, \text{ usf.}$$

Die Regeln für die Bildung voller Systeme werden genau dieselben wie bei den gewöhnlichen Aronholdschen Symbolen.

Die Kovarianten der Potenzreihen besitzen alle den nämlichen Konvergenzkreis wie die Urform. Zahlreiche besondere Fälle werden diskutiert.

Zuerst wird die einzelne Exponentialreihe $f \equiv e^{\alpha x}$ betrachtet. Es zeigt sich leicht, daß sämtliche Kovarianten verschwinden. In der Tat verschwindet ja jede Kovariante einer vollständigen n-ten Potenz, und die Exponentialfunktion läßt sich als Grenze einer solchen Potenz ansehen. Umgekehrt ist die Exponentialfunktion die einzige Form, für die $(ab)^2$ verschwindet.

Sodann kommt der Fall mehrerer Exponentialfunktionen in Betracht. Die Kovariante $(bc)^\lambda (ca)^\mu (ab)^\nu$ der Formen $e^{\alpha x}, e^{\beta x}, e^{\gamma x}$ erweist sich als ein Vielfaches vom Produkt dieser Formen, und Entsprechendes gilt allgemein. Für

$$f(x) = \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ wird } (ff)^2 = -2, (ff)^{2\lambda} = (-1)^\lambda 2^{2\lambda-1},$$

und ähnlich für $f(x) = \sin x$; für $(ab)^2 (bc)$ erhält man $-2 \sin x$, resp. $2 \cos x$. Behufs weiterer Anwendungen ist es nützlich, noch andere allgemeine Ausdrücke für Kovarianten zu bilden. So ist die Kovariante $(ab)^n$ von $f(x)$, $\varphi(x)$ nichts anderes als das Produkt von $n!$ in den Koeffizienten von h^n in $f(x+h)\,\varphi(x-h)$, und dieses Gesetz ist leicht zu verallgemeinern: die Kovariante erscheint als ein gewisser Koeffizient einer Funktion, die sich unmittelbar hinschreiben läßt. Ein interessantes Beispiel ist die Weierstraßsche σ-Funktion. Die Kovarianten vom Typus $(ab)^\lambda$ sind die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von h in der Entwicklung von $\sigma(x+h)\,\sigma(x-h)$, je bis auf einen numerischen Faktor, oder, wie sich durch einfache Umformung ergibt, selbst von der Gestalt $C\sigma(x+a)\,\sigma(x-a)$, wo C und a Konstanten sind. Weiter sind die Kovarianten vom Typus $(ab)^\lambda (bc)^\mu$ die Koeffizienten der Entwicklung $\sigma(x+h)\,\sigma(x+k-h)\,\sigma(x-k)$ und lassen sich in die Gestalt bringen $(a\wp x + b\wp' x + c)\,\sigma^3 x$, wo a, b, c Konstanten sind, und entsprechend allgemein.

Der Verf. untersucht sodann die Umkehrfrage nach denjenigen Potenzreihen, für die einfachere Kovarianten verschwinden.

Eine erste Klasse, für die $(ab)^2$ oder $(ab)^2(bc)$ verschwindet, führt, wie schon angegeben, auf Exponentialfunktionen; eine zweite Klasse, wo $(ab)^4$ oder $(ab)^4(bc)$ verschwindet, auf elliptische Funktionen.

Die Forderung $(ab)^6 = 0$ führt auf neue Funktionen, die noch wenig bemerkt zu sein scheinen.

So interessant diese Ergebnisse sind, so wird sich ihre Fruchtbarkeit doch erst bei weiterem funktionentheoretischem Ausbau zeigen. My.

L. Sinigallia. Sugli invarianti differenziali. Palermo Rend. **19**, 161-184.

Die Differentialparameter erweisen sich bei höherer Auffassung als simultane Invarianten Pfaffscher Ausdrücke von der ersten Klasse und einer Differentialform erster Ordnung, aber beliebigen Grades. Beltrami (F. d. M. **1**, 196, 1868) bestimmte nach dem Vorbilde von Jacobi einige

Differentialparameter durch Variation eines Integrales. Padova (F. d. M. **19**, 127, 1887) bediente sich der Transformation vielfacher Integrale, um viele invariante Ausdrücke der in Rede stehenden Art zu erhalten. Indessen war der erste, der das Problem direkt angriff, Casorati (1861), der die Differentialinvarianten einer binären quadratischen Form algebraisch durch einen Eliminationsprozeß entstehen ließ. Auf diesem Wege folgten Christoffel (F. d. M. **2**, 128, 1869/70), Ricci und Levi-Civita (F. d. M. **32**, 296, 1901); es ergab sich, daß die Bestimmung aller Differentialinvarianten eines Systems von Formen, von denen wenigstens eine quadratisch ist, zurückgeführt werden kann auf die der algebraischen Invarianten eines Formensystems.

Somigliana (F. d. M. **22**, 365, 1890) hat die Riccische Methode von der Einschränkung befreit, daß unter dem System der gegebenen Formen eine quadratische enthalten sein müsse. Indessen legt er seinem Formensystem eine gewisse andere Bedingung auf, die eine weitere Anwendungsfähigkeit erschwert. Der Verf. erzielt in der vorliegenden Arbeit wesentlich dadurch neue Fortschritte, daß er sich der von ihm und Pascal (F. d. M. **34**, 137, 144, 1903) in die Theorie der Differentialformen eingeführten Symbole bedient. Dadurch läßt sich die Bestimmung vieler Differentialinvarianten eines Formensystems zurückführen auf die der algebraischen Invarianten eines Systems von Formen von der Art, daß wenigstens eine Form des Systems eine von Null verschiedene algebraische Invariante besitzen muß, und daß zugleich der Rang ihrer Hesseschen Determinante nicht kleiner als $n-1$ sein muß. Da diese Bedingungen selbst invarianter Natur sind, so läßt sich in jedem Falle leicht feststellen, ob sie erfüllt sind oder nicht.

Es sei $X^{(r)} \equiv \sum_{i_1, \ldots, i_r} X_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \ldots dx_{i_r}$ eine Differentialform erster Ordnung und vom Grade r, wo die Koeffizienten $X_{i_1, \ldots, i_r}$ in einem gewissen Gebiete des Raumes $(x_1, \ldots, x_n)$ regulär sein sollen. Durch die Transformation $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$ geht $X^{(r)}$ über in eine analoge Form $Y^{(r)} \equiv \sum_{h_1, \ldots, h_r} Y_{h_1 \ldots h_r} dy_{h_1} \ldots dy_{h_r}$. Die $X_{i_1 \ldots i_r}$ lassen sich dann durch die $Y_{h_1 \ldots h_r}$ und die Ableitungen der y nach den x unmittelbar ausdrücken. Bildet man jetzt die Differentialform vom Grade $r-s$: $X^{(r-s)}_{i_{r-s+1}, \ldots, i_r} = \sum_{i_1, \ldots, i_{r-s}} X_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \ldots dx_{i_{r-s}}$, wo die „Teilformen" nichts anderes sind als die Koeffizienten der Entwicklung von $X^{(r)}$ nach den Produkten der noch übrigen dx, so ergibt sich zunächst, daß sich diese Teilformen bei einer Substitution der Variabeln nach demselben Gesetz transformieren, wie die Koeffizienten einer Differentialform vom Grade s. Nunmehr wird ein System von m Differentialformen mit den Graden $r_1, \ldots, r_m$ zugrunde gelegt und das Kriterium dafür aufgestellt, daß die m Formen, resp. ein Teil derselben linear unabhängig sind, d. h. keine lineare homogene Relation besteht, deren Koeffizienten wiederum Differentialformen sind. Zu dem Behuf bilde man eine gewisse Matrix

aus Teilformen der gegebenen; dann sind gerade p der m vorgelegten Formen linear unabhängig, wenn der Rang der Matrix gleich p ist. Dieser Rang ist eine Invariante der m Formen gegenüber jeder Transformation der Variabeln.

Nunmehr werden die algebraischen Kovarianten und Invarianten eingeführt. Eine Differentialform läßt sich als algebraische Form der Differentiale dx auffassen, die eine lineare homogene Substitution erleiden, wenn die Variabeln x einer beliebigen Transformation unterworfen werden. Somit läßt sich die Theorie der algebraischen Formen unmittelbar für ein System von Urformen $X^{(r_k)}$ verwenden. Bedient man sich der symbolischen Schreibweise, so lassen sich die wichtigsten in Betracht kommenden invarianten Bildungen ohne weiteres hinschreiben. So führt die invariante Jacobiana J zu n wichtigen Differentialformen, die simultane Kovarianten jener Urformen sind. Eingehend wird dann die Hessesche Form H untersucht, und insbesondere die Bedeutung von ihrem identischen Verschwinden. Findet dies für irgend eine Differentialform in n Variabeln statt, so läßt sich die Form in eine andere transformieren, die nur die Differentiale von höchstens $n-1$ der neuen Variabeln enthält, wobei aber die Koeffizienten der neuen Form im allgemeinen von sämtlichen neuen Variabeln abhängen. Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig. Vermöge der Form H gelangt man auch zur Verallgemeinerung des Beltramischen gemischten Differentialparameters einer quadratischen Form, sowie zu den Verallgemeinerungen der Christoffelschen Indexsymbole, endlich zu den Verallgemeinerungen der Riccischen Ableitungen nach Kovarianten. My.

E. Engel. Eine neue Methode in der Invariantentheorie der Differentialgleichungen. Leipz. Ber. 57, 161-232.

In einem Raume R_n $(n > 2)$ sei eine Kurvenschar mit $n+m$ $(m \geqq 0)$ wesentlichen Parametern c gegeben:

$$x_k = f_k(x_1, c_1, \ldots, c_{n+m}) \, (k = 2, 3, \ldots, n),$$

so daß durch jeden Punkt des Raumes ∞^{m+1} Kurven der Schar gehen. Man bilde die Gleichungen $\sum_1^{n+m}{}_\nu \frac{\partial f_k}{\partial c_\nu} dc_\nu = 0$ und denke sich x_1 eliminiert, so erhält man die $n-2$ Mongeschen Gleichungen

$$\Omega_\mu(c_1, \ldots, c_{n+m}, dc_1 : \ldots : dc_{n+m}) = 0 \, (\mu = 1, \ldots, n-2),$$

als die „Schnittbedingungen" der Kurvenschar, d. h. als die Bedingungen, unter denen zwei benachbarte Kurven c_ν und $c_\nu + dc_\nu$ einander schneiden. Entsprechend könnte man weitergehen zu einem System von Mongeschen Gleichungen, die aussagen, daß sich zwei benachbarte Kurven der Schar in der ersten Ordnung berühren, usf. Aber diese höheren Bedingungen sind doch nur wieder ein besonderer Fall von Schnittbedingungen für gewisse besondere Kurvenscharen eines geeignet hohen Raumes, so daß man sich auf die ersteren beschränken kann.

Das System $\Omega_\mu = 0$ hat bei Lie von jeher eine große Rolle gespielt, insbesondere in den Fällen $n = 3, m = 0$ und n beliebig, $m = 0, 1$.

Das Mongesche System $\Omega_\mu = 0$ steht zur gegebenen Kurvenschar in einer gegenüber allen Punkttransformationen des R_n invarianten Beziehung. Dabei ist aber zu beachten, daß alle Systeme $\Omega_\mu = 0$ gleichberechtigt sind, die durch beliebige Transformationen der Parameter c entstehen.

Umgekehrt braucht keineswegs jedes System von $n - 2$ Mongeschen Gleichungen in $n + m$ Veränderlichen c die Schnittbedingungen einer Schar von ∞^{n+m} Kurven des R_n darzustellen; man wird also nach den Bedingungen hierfür fragen, und wenn sie erfüllt sind, nach den zugehörigen Kurvenscharen.

Der Inbegriff aller Systeme $\Omega_\mu = 0$, die in den dc_ν algebraisch sind, bleibt für sich bei allen Transformationen der c_ν invariant, und dasselbe gilt, wenn unter den Gleichungen $\Omega_\mu = 0$ gerade $l < n - 2$ voneinander unabhängige, in den dc_ν algebraische enthalten sind, und unter solchen Systemen $\Omega_\mu = 0$ gibt es sicher unbegrenzt viele, die Schnittbedingungen darstellen.

Damit ergibt sich eine naturgemäße Klassifikation der Scharen von ∞^{n+m} Kurven des R_n, unter deren Schnittbedingungen solche vorkommen, die in den dc_ν algebraisch sind, wo nur noch dahingestellt bleibt, welche unter den einzelnen Klassen wirklich durch Kurvenscharen vertreten sind. Eine erste Klasse würden alle die Scharen bilden, bei denen sämtliche Schnittbedingungen Pfaffsche Gleichungen sind, eine andere Klasse alle die, bei denen das System gerade $l < n - 2$ unabhängige Pfaffsche Gleichungen enthält; eine weitere Klasse, wenn unter den Schnittbedingungen eine bestimmte Anzahl solcher linear unabhängigen Gleichungen vorkommen, die in den Differentialen vom zweiten Grade sind, usf. Es handelt sich dann wiederum darum, für eine bestimmte dieser Klassen zu entscheiden, ob es Kurvenscharen gibt, die ihr angehören, und wenn das der Fall, wie sich die ihr angehörigen Kurvenscharen bestimmen lassen. Der Verf. entwickelt eine allgemeine Methode, die zu entscheiden gestattet, ob es Scharen von ∞^{n+m} Kurven des R_n gibt, unter deren Schnittbedingungen eine beliebige vorgeschriebene Zahl von Pfaffschen Gleichungen, von Mongeschen Gleichungen zweiten, dritten Grades usf. vorkommen, und wie diese zu bestimmen sind. Man wird zu dem Behuf für die Kurvenschar eine Darstellung wählen, die von der Wahl der Parameter c unabhängig ist, d. h. man denke sich die Kurvenschar nicht durch ihre endlichen Gleichungen definiert, sondern durch das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, deren allgemeinste Lösungen die endlichen Gleichungen darstellen.

Die aufgeworfene Frage läßt sich in jedem einzelnen Falle ohne Integration, durch bloße Differentiationen und Eliminationen entscheiden, und sind die betreffenden Kriterien erfüllt, so lassen sich auch die zugehörigen Pfaffschen und Mongeschen Gleichungen ohne Integration aufstellen, wenn man die Parameter der Kurvenschar passend wählt.

Die neue Methode des Verf. beruht auf einem einfachen Satze aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Seien $x_1, \ldots, x_n$ als Funktionen von x bestimmt durch ein System solcher Differentialgleichungen erster Ordnung $\frac{dx_i}{dx} = \xi_i(x, x_1, \ldots, x_n)$, wo die ξ in einem gewissen Gebiete in gewöhnliche Potenzreihen entwickelbar sind. Die allgemeinen Lösungen jenes Systems mit n wesentlichen Konstanten c haben die Form $x_i = \varphi_i(x, c_1, \ldots, c_n)$. Nun sind die nach den c genommenen Ableitungen der unbekannten Funktionen $x_i = \varphi_i$ Lösungen gewisser linearer homogener Differentialgleichungen erster Ordnung, nämlich

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial x_i}{\partial c_\mu} \sum_\nu^{1,\ldots,n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial c_\mu}.$$

Diese, zusammen mit dem ursprünglichen System, lassen sich auffassen als ein Gesamtsystem, das die x_i und ihre Ableitungen nach den c_μ als Funktionen von x bestimmt. — Enthalten übrigens bereits die ξ_i eine Anzahl r von Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, so genügen auch die $\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k}$ linearen Differentialgleichungen, nämlich

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \lambda_k} + \sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial \lambda_k}. —$$

Bezeichnet jetzt δx_i den Zuwachs, den x_i bei unendlich kleiner Änderung der c_μ erhält, so lassen sich die obigen n^2 linearen Differentialgleichungen zusammenfassen in die n folgenden:

$$\frac{d}{dx}\delta x_i = \delta \xi_i = \sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\delta x_\nu,$$

die ihre Form beibehalten, wenn man an Stelle der c irgend n neue willkürliche Konstanten einführt. Hierbei kann zwischen den n Größen δx_i keine homogene Relation von der Gestalt $\chi(x, c_1, \ldots, c_n, \delta x_1 : \ldots : \delta x_n) = 0$ bestehen.

Jene n Gleichungen in den δx_1 hat schon Poincaré in seiner Mécanique céleste verwendet, doch zu ganz anderen Zwecken.

Was die obigen Differentialgleichungen in den $\frac{\partial x_i}{\partial c_\mu}$ und den δx_i so bemerkenswert macht, ist ihre lineare Form, und man könnte sie unmittelbar für die wichtige Frage verwenden: Wie muß das simultane System $\frac{dx_i}{dx} = \xi_i(x, x_1, \ldots, x_n)$ beschaffen sein, damit seine Lösungen in einer bestimmten vorgeschriebenen Weise von den Integrationskonstanten c_i abhängen?

Der Verf. beschränkt sich indessen auf den in Rede stehenden Fall, daß das System $\frac{dx_i}{dx} = \xi_i$ eine Kurvenschar in einem R_ν ($\nu \leqq n$) definiert,

und zeigt, daß die Gleichungen für die $\frac{\partial x_i}{\partial c_\mu}$, insbesondere bei Einführung geeigneter Anfangskonstanten, gerade erlauben, die im Eingange formulierte Frage zu beantworten. My.

F. NOTH. Differentialinvarianten und invariante Differentialgleichungen zweier zehngliedriger Systeme. Leipzig. 32 S. 8°.

Kapitel 3.

Substitutionen und Gruppentheorie, Determinanten, Elimination und symmetrische Funktionen.

A. Substitutionen und Gruppentheorie.

J. A. DE SÉGUIER. Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits. Paris 1904. Gauthier-Villars. 176 S.

Mag auch, um mit Poincaré zu sprechen, die Idee des Gruppenbegriffes implizit so alt wie der mathematische Gedanke sein, so hat sie sich doch zuerst bei der Behandlung algebraischer Gleichungen klar und deutlich dargeboten. Die Permutationsgruppen bilden daher den Ausgangspunkt der Gruppentheorie. Lagrange, Ruffini, Cauchy, Abel und Galois sind die Begründer der Disziplin, und C. Jordans fundamentaler Traité des substitutions et des équations algébriques bedeutet für sie einen Markstein. Die Erkenntnis, daß bei einer Gruppe nicht die Art der Darstellung der Symbole, sondern das Gesetz für ihre Kombination den springenden Punkt bildet, die Prinzipien der Theorie der Permutationsgruppen also einem abstrakteren, allgemeineren Gedankenkreise angehören, ist wohl am frühesten von Cayley und Kronecker ausgesprochen worden.

Wieviel auch die Theorie der Permutationsgruppen Frankreichs Forschern zu verdanken hat, so kann man nicht behaupten, daß die abstrakte Gruppentheorie, die vornehmlich von englisch und deutsch sprechenden Gelehrten ausgebaut wurde, die französischen Mathematiker besonders angezogen hat. Um so erfreulicher ist es, ein von einem französischen Gelehrten geschriebenes Werk der abstrakten Gruppentheorie anzeigen zu können. Der vorliegende erste Teil behandelt unter dem Titel „Éléments“ ausschließlich die abstrakte Gruppentheorie, ohne von der Natur der Elemente irgend welchen Gebrauch zu machen. Ein zweiter Teil, in dem auch die Permutationsgruppen verwendet werden sollen, wird unter dem Titel „Compléments“ erscheinen. Auf den ersten sechs Seiten erfahren die Mengen nach G. Cantor eine kurze Behandlung, um sie in endliche und unendliche einzuteilen. Hierauf definiert der Verf. die Gruppe als eine besondere Gattung eines corps. Unter einem corps wird

von de Séguier durchgehend eine Menge von endlich oder unendlich vielen Elementen verstanden, die miteinander nach einer derartigen Vorschrift komponiert werden können, daß für irgend drei Elemente stets das assoziative Prinzip erfüllt ist. Kommen zu diesem Postulat des assoziativen Charakters noch die zwei weiteren hinzu, daß zu irgend zwei Elementen a und b des corps stets in ihm erstens ein Element x existieren soll, daß $ax = b$ wird, und zweitens in ihm ein Element y vorhanden sein soll, daß $ya = b$ wird, so ist der corps eine Gruppe im üblichen Sinne. Die Abgeschlossenheit ihrer Elemente in bezug auf die Komposition erscheint dann als beweisbarer Lehrsatz. Dies ist die erste von Huntington (Bulletin American M. S. **8**, 296) gegebene Gruppendefinition durch drei unabhängige Postulate. De Séguier setzt übrigens nicht voraus, daß a alle Elemente des corps durchläuft; es genügt, daß für a alle erzeugenden Elemente des corps gesetzt werden, d. h. alle diejenigen, durch deren Komposition sämtliche Elemente des corps entstehen. An Stelle der gegebenen Definition würde man gegenwärtig wohl zweckmäßiger eine auch von Huntington in einem neueren Aufsatze (Transactions American M. S. **6**, 183, 1905), als „more convenient" bezeichnete Definition von Moore durch unabhängige Postulate treten lassen. Ich würde sie in der Dicksonschen Form (Transactions American M. S. **6**, 199, 1905) wählen. Nach ihr wird ein corps eine Gruppe, wenn außer dem Postulat der Assoziativität (I) noch die folgenden drei Postulate gelten:

II. Das Produkt irgend zweier Elemente des corps ist ein ihm angehöriges eindeutig bestimmtes Element.

III. Der corps enthält wenigstens ein rechtshändiges Einheitselement i, so daß für jedes Element des corps die Gleichung $ai = a$ gilt.

IV. Existieren derartige Einheitselemente i, so soll für ein besonderes i und jedes a des corps die Gleichung $ax = i$ innerhalb des corps lösbar sein.

Die drei vom Verf. angegebenen Huntingtonschen Postulate zur Definition einer Gruppe sind ebenso wie die vier Moore-Dicksonschen voneinander unabhängig, d. h. keines von ihnen ist aus den anderen als beweisbarer Lehrsatz herleitbar. Fügt man zu den drei Huntingtonschen oder den vier Moore-Dicksonschen Postulaten noch das weitere, daß der corps nur die endliche Anzahl n von Elementen besitzen soll, so wird durch die Hinzunahme des weiteren Postulats die Unabhängigkeit nicht gestört. Um dies nachzuweisen, reichen de Séguiers Betrachtungen nicht aus; vielmehr wäre die Unabhängigkeit der Postulate bei der Voraussetzung, daß der corps n Elemente enthalten soll, etwa nach Huntington zu erweisen. Der Zusatz „abélien" auf S. 8, Z. 10 von unten bei dem Nachweis der Unabhängigkeit der drei Postulate und der Satz „Cette condition est toujours remplie si G est abélien" (S. 7, Z. 12) widersprechen sich; beide zitierten Stellen sind zu streichen.

Sehr eingehend untersucht Verf. die Definition einer Gruppe durch ein System von Gleichungen. Hieran schließt sich eine kürzere Betrachtung der rationalen und irrationalen Zahlen, die sich sowohl in bezug auf additive, als auch auf multiplikative Verknüpfung als Gruppen auffassen

lassen. Der Schluß des ersten Kapitels behandelt sehr gründlich den endlichen Galoisschen Körper. Des Verf. Ausgangspunkt ist ein Abelscher corps C, dessen Elemente auf zwei Arten verknüpfbar sind. In bezug auf die erste Art der Verknüpfung, die als Addition bezeichnet wird, ist C eine additive Gruppe. Ihre Einheit sei mit 0 bezeichnet. Für die zweite Art der Komposition, die Multiplikation heiße, soll $C-0$ (d. h. C mit Ausschluß der Einheit der additiven Gruppe) ebenfalls eine Gruppe sein. Für irgend welche x und y in C soll $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ sein; hieraus folgt, daß, wenn $xy = 0$ ist, entweder $x = 0$ oder $y = 0$ ist. Schließlich soll die Multiplikation in bezug auf die Addition distributiv sein. Ein derartiger corps heißt nach allgemeinem Gebrauch ein Körper oder Feld (champ). Abstrakte Definitionen für einen Körper oder ein Feld gehen auf H. Weber (Math. Annalen **43**) und E. H. Moore zurück. Die Frage nach Definitionen eines Körpers durch voneinander unabhängige Postulate wird gegenwärtig von Dickson und Huntington (Transactions American M. S. **4**, 1903 und **6**, 1905) eifrig studiert. Die Worte des Verf.: „Les postulats qui le (le champ) caractérisent sont évidemment indépendants“ (S. 27) sind unzulänglich. Enthält C nur eine endliche Anzahl von Elementen, so hat man nach einem Mooreschen Satze einen endlichen Galoischen Körper, dessen Ordnung eine Primzahlpotenz ist.

Kap. II behandelt die Untergruppen, ihre Zerlegung nach einem einfachen oder einem Doppelmodul, den Homomorphismus, die Sylowschen Sätze, Kompositions- und Hauptreihen einer Gruppe, schließlich die zerlegbaren Gruppen. Im Zusammenhang mit der Kompositionsreihe beschäftigt sich Verf. eingehend mit dem von ihm sogenannten „groupe spécial.“ Auf S. 89 muß ihre Charakterisierung lauten: „Si tout groupe facteur A_{i-1}/A_i $(A_0 = G)$ d'une seule série principale $G, A_1, A_2, \ldots, A_r = 1$ d'un groupe G a ses éléments normaux dans G/A_i, G est spécial.“ Ebenso ist auf S. 89, Z. 9 „dans G“ in „dans G/B“ zu ändern. Die vom Verf. sogenannte spezielle Gruppe ist auch sonst in der Literatur aufgetreten (W. Burnside, theory of groups of finite order, S. 115). Eine charakteristische Eigenschaft für sie ist ferner noch, daß sich jede ihrer Untergruppen in eine Kompositionsreihe einordnen läßt (vgl. des Ref. Aufsatz in den Math. Annalen Bd. **55**, 67).

Das dritte Kapitel ist den Abelschen Gruppen gewidmet. Wie überall werden auch hier, obgleich die endlichen Gruppen der vornehmlichste Gegenstand der Untersuchung sind, die unendlichen in den Kreis der Betrachtung gezogen. Die vom Verf. (S. 98) untersuchten unendlichen Abelschen Gruppen, die eine Basis besitzen und keine Elemente unendlicher Ordnung enthalten, hat übrigens auch H. Weber (Math. Ann. **48**, 439) betrachtet.

Das Schlußkapitel gilt der eingehenden Behandlung der Gruppen von Primzahlpotenzordnung. Zu ihrer Charakterisierung bedient sich der Verf. des Begriffes „figure“, den er auf folgende Weise definiert: „$1, A_1, A_2, \ldots, A_n = G$ étant une série spéciale du $g_{p^m} = G$ et A_i/A_{i-1} ayant le type $(a_i, b_i, \ldots)$ (117, non 115), je dirai que le symbole $(a_1, b_1, \ldots)$, $(a_2, b_2, \ldots), \ldots$ est la figure de G“ (S. 113). Die Reihe $1, A_1, A_2, \ldots$

$A_n = G$ heißt eine Spezialreihe, wenn die Faktorgruppe A_i/A_{i-1} le central von G/A_{i-1} ist (S. 87). Gruppen, die eine Spezialreihe besitzen, sind identisch mit den oben erwähnten speziellen Gruppen. Die Gesamtheit invarianter Elemente einer Gruppe nennt Verf. le central der Gruppe (S. 57). Der Typus $(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)$ einer Abelschen Gruppe von Primzahlpotenzordnung p^k bedeutet in üblicher Weise die Ordnungen $p^{k_1}, p^{k_2}, \ldots p^{k_\varrho}$ der ϱ erzeugenden Elemente eines Basissystems. Ich habe hier an einem Beispiel eine Reihe vom Verf. neu eingeführter Bezeichnungen vorgeführt.

Hoffentlich wird der zu erwartende zweite Teil zur bequemeren und leichteren Orientierung einen ausführlichen Index bringen. Durch die zahlreichen neuen Namen und eine kurze Ausdrucksweise hat Verf. auf dem geringen Raume ein sehr großes Material zusammengetragen. Zwar sind die benutzten Hülfssätze, wenn sie sich darboten, bewiesen; trotzdem hat de Séguier, wie mir scheint, infolge der knappen und kondensierten Darstellung mehr ein Handbuch als ein zur Einführung bestimmtes Lehrbuch geschaffen. Die neueste Literatur ist dem Verf. wohl bekannt und von ihm auf das geschickteste benutzt worden. In zwei beigefügten Noten werden die Bewegungsgruppen sowie Elementarteiler, lineare Gleichungen und lineare Kongruenzen behandelt. Ly.

D. A. Grave. Die Elemente der algebraischen Analysis. Kiew Univ. 1904 Nr. 7, 1-48; 1905 Nr. 10, 49-114 (Russisch).

Das Werk ist noch nicht abgeschlossen. Der erste Teil ist der Theorie der Substitutionen (im engeren Sinne) gewidmet. Es handelt über: 1. Haupteigenschaften der Substitutionen. 2. Ihre Zerlegung in Zyklen. 3. Die Gruppen der Substitutionen. 4. Die Teiler der symmetrischen Gruppe. 5. Über Normalteiler der Gruppen (invariante Untergruppen). Der zweite Teil ist der allgemeinen Theorie der Gruppen gewidmet. 1. Grundbegriffe und Erklärungen. 2. Zusammensetzen der Teile der Gruppe (seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Teile der Gruppe P; sämtliche Kombinationen AB aus den Elementen A und B von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ resp. bilden $\mathfrak{AB}$ — aus den Teilen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von P ist $\mathfrak{AB}$ zusammengesetzt). 3. Der Satz von C. Jordan. 4. Die Sätze von Sylow. Si.

E. V. Huntington. A set of postulates for ordinary complex algebra. American M. S. Trans. 6, 209-229.

Verf. will die komplexen Zahlen der Algebra abstrakt durch voneinander unabhängige Postulate definieren. Seine Fragestellung ist folgende: „Wir betrachten zwei Klassen, K und C, von Elementen, ferner zwei Operationen, die wir mit $+$ und $\times$ bezeichnen, und schließlich eine Relation, die wir mit $<$ bezeichnen. Diesen fünf fundamentalen Begriffen, von denen wir zunächst nichts wissen, schreiben wir gewisse willkürliche Bedingungen oder Postulate vor, denen sie gehorchen müssen; sie dienen uns als die

fundamentalen Voraussetzungen einer abstrakten deduktiven Theorie. Die übrigen Sätze dieser Theorie sollen ausnahmslos aus diesen durch rein logische Prozesse herleitbar sein. Das zu behandelnde Problem lautet dann: „man soll die fundamentalen Voraussetzungen so wählen, daß alle Theoreme der Algebra, als formale oder abstrakte Sätze betrachtet, aus ihnen ableitbar sind, wenn man die Klassen K und C den komplexen und reellen Zahlen, die Symbole $+$, $\times$ und $<$ der Addition, Multiplikation und dem Begriff „kleiner" entsprechen läßt." Verf. definiert das System der gewöhnlichen komplexen Größen abstrakt durch 28 voneinander unabhängige Postulate. Sie zerfallen in fünf Gattungen: I. Durch die 13 ersten Postulate wird K in bezug auf die zwei Operationen $+$ und $\times$ als Feld oder Körper definiert. II. Durch sieben weitere Postulate wird auch die Unterklasse C von K ebenso wie K inbezug auf die Operationen $+$ und $\times$ zum Felde gestempelt. III. Vier Postulate machen für die Relation $<$ die Unterklasse C von K zu einem eindimensionalen Kontinuum. IV. Für die Elemente von C sollen die zwei weiteren Postulate bestehen: 1. Aus $x < y$ soll $a + x < a + y$ folgen, 2. aus $a > z$ und $b > z$ soll sich, wenn z das Nullelement bedeutet, $a \times b > z$ ergeben. V. In dem für die Operationen $+$ und $\times$ definierten Felde K soll es 1. ein Element j geben, daß $j \times j = -1$ ist, wobei -1 die negative Einheit bedeutet. 2. Ist i ein solches Element, daß $i \times i = -1$ ist, so sollen für jedes Element a aus K in C zwei Elemente x und y existieren, daß $x + y \times i = a$ wird. Ly.

E. V. Huntington. Note on the definitions of abstract groups and fields by sets of independent postulates. American M. S. Trans. **6**, 181-197.

Verf. gibt zunächst eine Übersicht sämtlicher Definitionen einer abstrakten Gruppe durch voneinander unabhängige Postulate. Zu den bereits bekannten fügt er eine weitere Definition durch sechs unabhängige Postulate; diese Definition ist eine Modifikation der zweiten von E. H. Moore im Jahre 1902 gegebenen, auf die auch der zuletzt genannte Forscher in dem weiter unten besprochenen Aufsatze zurückgekommen ist. Bei Hinzufügung eines weiteren Postulats über die Kommutabilität der Gruppenelemente bleiben diese sechs Postulate noch unabhängig; hingegen werden zwei von ihnen, wenn man eine endliche Anzahl von Gruppenelementen postuliert, überflüssig. Auf Grund der für eine Gruppe gewonnenen Postulate definiert Verf. auch ein Feld oder einen Körper abstrakt mittels 13 voneinander unabhängiger Postulate als ein System von Elementen, die durch zwei Operationen, Multiplikation und Addition, verknüpfbar sind. Das Feld wird noch kürzer durch zehn Postulate definiert. Erinnert sei, daß sowohl der Verf., als auch L. E. Dickson bereits früher (F. d. M. **34**, 160, 161, 1903) das Feld abstrakt durch unabhängige Postulate definiert haben. Zum Schluß gibt Verf. noch weitere Definitionen einer abstrakten Gruppe, die Modifikationen einer früher von ihm gegebenen

(American M. S. Bull. (2), **8**, 296; F. d. M. **33**, 142, 1902, und American M. S. Trans. **4**, 30; F. d. M. **34**, 162, 1903) sind. Er bedient sich hierbei anstatt der Kompositionsgleichung $ab = c$ (c ist das Produkt von a und b) des Begriffes der triadischen Relation R (abc), auf den Bôcher hingewiesen hat (American M. S. Bull. **11**, 126). R (abc) soll bedeuten, die Elemente a, b, c befriedigen eine gegebene Relation R. Wir begnügen uns, beispielsweise ein Postulat anzuführen: Sind b und c Gruppenelemente, so soll es in der Gruppe ein Element a geben, daß R (abc) besteht. Die übliche Form würde lauten: Sind b und c Gruppenelemente, so soll es in der Gruppe ein Element a geben, daß $ab = c$ ist. Ly.

E. V. Huntington. A set of postulates for real algebra, comprising postulates for a one-dimensional continuum and for the theory of groups. American M. S. Trans. **6**, 17-41.

Verf. stellt für die Algebra der reellen Zahlen ein System von 16 Postulaten auf, das in drei Gattungen zerfällt: 1. Postulate, die der Relation $<$ genügen, 2. solche, die sich auf eine Operation $+$ beziehen, 3. solche, welche die Relationen $<$ und $+$ verknüpfen. Die erste Gattung von Postulaten sind die gewöhnlichen für das eindimensionale Kontinuum (vgl. Schoenflies, Jahresber. d. deutschen Mathematiker-vereinigung, Bd. 8 (1900), Bericht über Mengenlehre); Verf. weist ihre Unabhängigkeit nach. Die zweite Gattung ist ein System von acht unabhängigen Postulaten für kommutative Gruppen; das hierbei verwendete Operationssymbol $+$ bezieht sich ausschließlich auf die Verknüpfung der Elemente und hat nur die ausdrücklich in den Postulaten angeführten Eigenschaften. Die 16 Postulate zusammen sind voneinander unabhängig, d. h. aus irgend 15 folgt nie ein 16tes. Die Möglichkeit ihres Zusammenbestehens wird durch die Existenz der reellen Zahlen dargetan. Diese sind durch die 16 Postulate auch eindeutig bestimmt. Es gilt nämlich, wie Verf. zeigt, der Satz: „Zwei beliebige Systeme K und K', die den 16 Postulaten genügen, sind in bezug auf $<$ und $+$ äquivalent, d. h. sie können derartig in eine ein-eindeutige Beziehung zueinander gebracht werden, daß, falls a', b', c' Elemente aus K' sind, die den Elementen a, b, c aus K entsprechen, 1. aus $a < b$ die Relation $a' < b'$ folgt und umgekehrt, 2. aus $a + b = c$ sich die Relation $a' + b' = c'$ ergibt und umgekehrt.

Verf. definiert weiter eine nicht kommutative Gruppe abstrakt durch 12 Postulate; hieraus leitet er eine Definition der reellen Größen durch 20 Postulate ab. Die reellen Größen erscheinen hierbei in bezug auf die Addition als eine Gruppe, für die das kommutative Gesetz nicht postuliert, sondern auf Grund der übrigen Postulate bewiesen wird. Verf. gibt ferner noch eine kondensierte abstrakte Definition der reellen Größen durch zehn Postulate. Bei diesen drei Definitionen wird die Multiplikation der reellen Größen als ein abgeleiteter Begriff behandelt, der sich auf

Grund der Begriffe $<$ und $+$ einführen läßt. Schließlich definiert Verf. die reellen Größen abstrakt durch 20 Postulate; bei diesen werden für das System von Elementen eine Relation $<$ und zwei Operationen der Verknüpfung, nämlich $+$ und $\times$, vorausgesetzt.

Über das Verhältnis dieser Arbeit zu anderen äußert sich Verf. in der Einleitung: „Die Postulate für die Gruppentheorie führen, wie ich denke, die Analyse weiter als die früher vom Verf. gegebenen (American M. S. Bull. (2) **8**, 296; F. d. M. **33**, 142, 1902. American M. S. Trans. **4**, 27; F. d. M. **34**, 162, 1903) und die von E. H. Moore (American M. S. Trans. **3**, 485; F. d. M. **33**, 142, 1902. Amer. M. S. Trans. **5**, 549). Die Postulate für die reelle Algebra sind in mehrfacher Beziehung befriedigender als des Verf. frühere Reihe (American M. S. Trans. **4**, 358; F. d. M. **34**, 74, 1903): erstens ist jetzt die Trennung der Postulate die sich auf $<$ beziehen, von denen der Operation $+$ vollständig; zweitens sind die einzelnen Postulate mehr nahezu einfache Festsetzungen (und daher zahlreicher); schließlich ist bei der Anzahl der Postulate keine Voraussetzung bezüglich der Existenz irgend welcher Art von Zahlen gemacht worden. Diese letzte Verbesserung wurde durch eine neue Arbeit von Burali-Forti (F. d. M. **35**, 1904, 88) angeregt." Man vgl. für die Lektüre der Arbeit auch des Verf. Bemerkungen Amer. M. S. Trans. **6**, 546. Ly.

E. H. Moore. On a definition of abstract groups. American M. S. Trans. **6**, 179-180.

Eine Gesamtheit G von Elementen, die sich untereinander komponieren lassen, bilden, wie Verf. zeigt, eine Gruppe, wenn von ihnen folgende fünf untereinander unabhängige Postulate erfüllt werden:

1. Das Produkt ab zweier beliebigen Elemente aus G gehört G an.

2. Für irgend drei Elemente a, b, c aus G gilt das assoziative Gesetz $a(bc) = (ab)c$.

$3''$. In G existiert ein Element a, so daß $aa = a$ ist.

$3_l''$. Sind a und b Elemente aus G und ist $aa = a$, so soll $ab = b$ sein.

$4_l''$. Sind a und b Elemente aus G und ist $aa = a$, so soll ein Element $b_l^{(a)}$ existieren, daß $b_l^{(a)} b = a$ wird.

Diese fünf Postulate bleiben auch noch unabhängig, wenn man verlangt, die Elemente von G sollen eine Abelsche Gruppe definieren, d. h. sie sollen durch das Postulat A) der Kommutativität ergänzt werden: A) Sind a und b Elemente aus G, so soll $ab = ba$ sein. Die Note ist eine Ergänzung des Aufsatzes in den American M. S. Trans. **3**, 485-492 (F. d. M. **33**, 142, 1902); die dortige zweite Definition einer Gruppe enthielt außer den obigen fünf Postulaten noch ein sechstes $3_r''$), das aus ihnen herleitbar ist. $3_r''$) bezog sich auf die rechtshändige Multiplikation mit a, also $ba = b$, wenn $aa = a$ ist. (Vgl. auch E. H. Moore, American M. S. Trans. **5**, 549.) Ly.

I. Schur. Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere. Berl. Ber. 1905, 406-432.

Verf. liefert in dem vorliegenden Aufsatze eine neue und durchaus elementare Einführung in die von Frobenius begründete Theorie der Gruppencharaktere oder in die Lehre von der Darstellung der endlichen abstrakten Gruppen durch lineare homogene Substitutionen. An Vorkenntnissen werden außer den Anfangsgründen der formalen Regeln des Kalküls der Matrizen nur die folgenden zwei bekannten Sätze, die man beispielsweise in Kroneckers Vorl. über die Theorie der Determinanten, herausgegeben von Hensel, S. 368 findet, vorausgesetzt: a) „Ist P eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, und sind A und B zwei Matrizen der Grade m und n, deren Determinanten nicht verschwinden, so besitzen die beiden Matrizen P und APB denselben Rang. b) Ist P eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, deren Rang gleich r ist, so lassen sich zwei Matrizen A und B der Grade m und n von nicht verschwindenden Determinanten bestimmen, so daß in der Matrix $APB=(q_{\alpha\beta})$ die r Koeffizienten $q_{11}, q_{22}, \ldots, q_{rr}$ gleich 1, die übrigen Koeffizienten gleich 0 sind." Wer die wichtigen Ergebnisse der Theorie der Gruppencharaktere kennen lernen will, wird sie am besten und raschesten auf Grund der vorliegenden Arbeit studieren. Die Schursche Begründung der Theorie der Gruppencharaktere arbeitet auch mit noch einfacheren Hülfsmitteln als die von W. Burnside (Acta Math. **28**, Lond. M. S. Proc. (2), **1**, 117; F. d. M. **34**, 156, 1903) gegebene. Die Grundlage bildet bei Schur der Satz: Es seien $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ irgend zwei irreduzible Systeme von Matrizen der Grade f und f'. Ist dann P eine konstante Matrix mit f Zeilen und f' Kolonnen, für die die Gleichung $XP=PX'$ besteht, wobei X und X' alle Matrizen aus $\mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{H}'$ durchlaufen, so ist entweder $P=0$, oder es ist P eine quadratische Matrix des Grades $f=f'$ von nicht verschwindender Determinante, und wegen $X=PX'P^{-1}$ sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ äquivalent. § 1 bis § 5 entwickeln die eigentliche Theorie der Gruppencharaktere; § 6 enthält auf Frobenius' Anregung eine Anwendung seiner Theorie der charakteristischen Einheiten einer endlichen abstrakten Gruppe. (Vgl. Frobenius, Berl. Ber. 1903, 328; F. d. M. **34**, 148, 1903.) Ly.

I. Schur. Über eine Klasse von endlichen Gruppen linearer Substitutionen. Berl. Ber. 1905, 77-91.

Die vom Verf. untersuchten Gruppen G von endlich vielen linearen homogenen Substitutionen in n Variabeln sind so beschaffen, daß die Spur (d. h. die Summe der Diagonalglieder) jeder Substitution von G einem vorgeschriebenen algebraischen Zahlkörper K angehört. Verf. bestimmt das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen aller Gruppen G linearer homogener Substitutionen in n Variabeln, deren Spuren sämtlich einem vorgegebenen Körper K angehören; dieses kleinste gemeinsame Vielfache ist eine allein durch den Zahlkörper K und die Anzahl n der Variabeln bestimmte Zahl. Wir beschränken uns darauf, das I. Schursche Theorem hier für

den besonderen Fall mitzuteilen, daß der Zahlkörper K mit dem Bereich Ω der rationalen Zahlen übereinstimmt. „Ist G eine endliche Gruppe homogener linearer Substitutionen in n Variabeln, und ist die Spur jeder Substitution von G eine (ganze) rationale Zahl, so ist die Ordnung g der Gruppe G ein Divisor der Zahl

$$M_n = \prod_p p^{\left[\frac{n}{p-1}\right] + \left[\frac{n}{p(p-1)}\right] + \left[\frac{n}{p^2(p-1)}\right] + \cdots} \quad (p = 2, 3, 5, \ldots).$$

Hierbei bedeutet $[a]$ die größte ganze Zahl $\leqq a$, ferner soll p die Reihe der Primzahlen soweit durchlaufen, bis das Produkt von selbst abbricht, d. h. bis zur größten Primzahl, welche $\leqq n+1$ ist.“ Die Zahl M_n ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen sämtlicher endlicher Gruppen linearer homogener Substitutionen in n Variabeln mit rationalen Spuren. Zur Würdigung der Schurschen Untersuchungen sei noch die selbstverständliche Bemerkung beigefügt, daß die Ordnung einer endlichen Gruppe linearer homogener Substitutionen in n Variabeln beliebig großer Werte fähig ist, falls über die Eigenschaften der Gruppe nichts vorausgesetzt ist. Ly.

A. Loewy. Über die vollständig reduzibeln Gruppen, die zu einer Gruppe linearer homogener Substitutionen gehören. American M. S. Trans. **6**, 504-533.

$\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe linearer homogener Substitutionen S in n Variabeln x, d. i. eine Gesamtheit von S derart, daß das Produkt zweier S, sowie die Inverse jeder S von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}$ enthalten ist. $\mathfrak{G}$ heißt „reduzibel“, wenn man $\nu < n$ lineare homogene Kombinationen der Variabeln mit konstanten Koeffizienten bilden kann, die durch jede S von $\mathfrak{G}$ nur untereinander transformiert werden. Mit anderen Worten, man kann vermöge neuer Variabeln y die Gruppe $\mathfrak{G}$ so transformieren, daß ν der y für sich eine lineare Transformation erleiden. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt im besonderen „vollständig reduzibel“, wenn man durch Einführung neuer Variabeln erreichen kann, daß nunmehr die Variabeln in eine Reihe von λ Systemen zerfallen, sodaß die Variabeln eines jeden Systems sich nur untereinander transformieren, und wenn überdies die Gruppen dieser einzelnen Variabelnsysteme irreduzibel sind. Besteht die Reihe nur aus einem einzigen System ($\lambda = 1$), so entsteht der Spezialfall der irreduzibeln Gruppen. Mit solchen vollständig reduzibeln Gruppen hatten sich bereits der Verf. (F. d. M. **34**, 169, 1903) und E. Dickson (F. d. M. **34**, 168, 1903), sowie I. Schur (F. d. M. **32**, 165, 1901) beschäftigt. Der Verf. beweist zunächst das Theorem: „Jede Gruppe linearer S, die eine definite Hermitesche Form in sich transformiert, ist vollständig reduzibel.“ Vergleicht man dies mit dem vom Verf. und von Moore (F. d. M. **27**, 106 und 241, 1896) aufgestellten Satze, daß zu jeder endlichen Gruppe von S eine invariante definite Hermitesche Form gehört, so folgt der Maschke-Frobeniussche Fundamentalsatz (F. d. M. **28**, 130, 1897; **29**, 129, 1898), daß jede endliche Gruppe von S vollständig reduzibel ist.

Umgekehrt ist aber nicht jede reduzible Gruppe von S vollständig reduzibel. Sieht man ähnliche Gruppen als nicht verschieden an, so leitet in dieser Hinsicht der Verf. den für die Theorie der unendlichen Gruppen von S fundamentalen Satz her: „Zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ von S gehören μ vollständig reduzible Gruppen von S; diese sind, ebenso wie die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{G}$, eindeutig bestimmt. Diese μ Gruppen sind aber auch ihrer Reihenfolge nach eindeutig festgelegt. Die Gesamtzahl der Variabeln der μ Gruppen ist gleich der Variabelnzahl von $\mathfrak{G}$. Für $\mu = 1$ ist $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel." Man gelangt zu diesen μ Gruppen so. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ kann durch eine konstante Matrix P in eine ähnliche Gruppe der besonderen Form transformiert werden, daß die rechts von der Hauptdiagonale stehenden Matrizenelemente alle verschwinden, so daß die in der Hauptdiagonale befindlichen μ Matrizenelemente vollständig reduzible Gruppen definieren. Wie der Verf. sich ausdrückt, „wird hierdurch $\mathfrak{G}$ in eine ähnliche Gruppe transformiert unter Hervorhebung aller aufeinander folgenden größten vollständig reduziblen Gruppen". Eine derartige Darstellung ist nicht eindeutig. Wie aber auch $\mathfrak{G}$ in der angegebenen Weise transformiert werden mag, so sind die vollständig reduziblen Gruppen, die sich bei zwei verschiedenen Ausführungen der Transformation ergeben, einander der Reihe nach zugeordnet, so daß zwei zugeordnete vollständig reduzible Gruppen gleichviele Variabeln haben und ähnlich sind.

Der Begriff der vollständigen Reduzibilität einer Gruppe von S läßt sich auf den besonderen Fall übertragen, wo die Koeffizienten aller S Zahlen eines bestimmten unendlichen Zahlkörpers Ω sind.

Für derartige Gruppen werden dann die oben genannten Eigenschaften erweitert. My.

A. Loewy. Über reduzible Gruppen linearer homogener Substitutionen. Verh. d. 3. Heidelb. intern. Math. Kongr., 194-199.

Verf. berichtet von seinen Untersuchungen über die Reduzibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen (American M. S. Trans. **4**, 44-64, ebenda 171-177; F. d. M. **34**, 169, 1903 und American M. S. Trans. **6**, 504-533; Referat vorstehend), sowie die ihnen parallel laufenden Ergebnisse, die er für lineare homogene Differentialgleichungen erhalten hat. (Math. Ann. **62**, 89, Referat im folgenden Jahrgange.) Ly.

E. Netto. Über die Bildung abstrakter Gruppen aus zwei Elementen. J. für Math. **128**, 243-262.

Verf. untersucht die endlichen Gruppen, die durch zwei Elemente a und b erzeugt werden; natürlich müssen beide Elemente selbst von endlicher Ordnung sein, doch reicht dies nicht aus, um eine endliche Gruppe zu charakterisieren. Die zur Erhaltung einer endlichen Gruppe hinzutretenden Bedingungen können sehr verschiedene Formen annehmen.

Verf. betrachtet im besonderen die Gruppen, bei denen $ba = a^\varkappa b$, $ba = ab^\varkappa$, $ba = a^2b^2$ ist. Das allgemeine Problem zu lösen: Unter welchen Umständen liefern zwei Elemente a und b von endlichen Ordnungen mit $ba = a^\varkappa b^\lambda$ widerspruchsfreie endliche Gruppen? scheint mit Schwierigkeiten verknüpft zu sein. Schon für $\varkappa = \lambda = 2$ sind die Ordnungen von a und b Beschränkungen unterworfen, auch braucht für beliebige $\varkappa$ und λ die Gruppe nicht notwendig endlich zu sein. $a^4 = 1$, $b^4 = 1$, $ba = a^3b^3$ liefert eine widerspruchsfreie unendliche Gruppe. Ly.

I. M. Schottenfels. A set of generators for ternary linear groups. Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 63-68.

Die Verf. gibt einen Beweis für die bekannte Tatsache, daß die Substitutionen

$$x_i' = x_{i+1},\; x_k' = x_1 + hx_2\; (i = 1, 2, \ldots, k-1;\, h = 0, 1)$$

erstens die ternäre lineare Substitutionsgruppe mit ganzzahligen Koeffizienten von der Determinante 1 und zweitens die linearen und lineargebrochenen Galoisfeldgruppen erzeugen. Für den ersten Teil werden die Methoden von Burnside benutzt; für den zweiten Teil wird dieses Beweisverfahren in entsprechender Weise ausgebaut. Lp.

W. A. Manning. On the arithmetic nature of the coefficients in groups of finite monomial linear substitutions. Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 77-79.

Im Anschluß an eine Abhandlung von Maschke in Math. Ann. **50**, 492-498 (F. d. M. **29**, 114. 1898) und von Burnside in Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 239-252 (Referat unten S. 198) wird in dieser Note bewiesen, daß lineare Gruppen, deren sämtliche Elemente nur endliche monomiale Substitutionen sind, d. h. von der Form $x_i' = a_j x_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, wo n die Anzahl der Variabeln ist, so geschrieben werden können, daß alle Koeffizienten Einheitswurzeln sind. Lp.

W. Burnside. On finite groups in which all the Sylow groups are cyclical. Messenger (2) **35**, 46-50.

In dem ersten Paragraphen werden die Bedingungen für die im Titel genannten Gruppen ermittelt; danach folgen im zweiten Paragraphen die Darstellungen einer Gruppe G, deren Sylowsche Untergruppen alle zyklisch sind, als einer Gruppe linearer Substitutionen. Im letzten Paragraphen werden die Untergruppen in dem Falle einer geraden Ordnung der gegebenen Gruppe G betrachtet; dann sind die Untergruppen von einem anderen Typus als dem zyklischen. Lp.

W. Burnside. On a general property of finite irreducible groups of linear substitutions. Messenger (2) **35**, 51-55.

Im allgemeinen hat eine endliche irreduzible Gruppe linearer Substitutionen die Eigenschaft, daß es für eine gewisse Untergruppe, welche nicht die aus der identischen Substitution allein bestehende ist, eine lineare, durchaus ungeändert bleibende Funktion der Variabeln gibt, an denen die Operation ausgeführt wird. Der Verf. bestimmt und klassifiziert hier diejenigen irreduziblen Gruppen, welche diese Eigenschaft nicht besitzen. Zuerst wird der Fall behandelt, daß die Ordnung der Gruppen die Potenz einer Primzahl ist; dann wird der allgemeine Fall erledigt. Für den ersten Fall sind die einzigen Ausnahmen: 1. eine zyklische Gruppe in einer einzigen Variable, 2. eine Gruppe der Ordnung 2^n in zwei Variabeln, welche nur eine Operation der Ordnung 2 enthält. Beim zweiten Fall gibt es drei Klassen von Ausnahmen: 1. Alle Sylowschen Untergruppen sind zyklisch. 2. Alle Sylowschen Untergruppen ungerader Ordnung sind zyklisch, während es nichtzyklische Untergruppen der Ordnung 2^a gibt, welche nur eine Operation der Ordnung 2 enthalten. Außerdem ist jede Operation der Gruppe, welche mit einer Untergruppe der Ordnung 2^a permutabel ist, mit jeder Operation jener Untergruppe permutabel. 3. Die Ordnung der Gruppe ist von der Form $2^3 . 3^\alpha . p_3^\beta \ldots$, wo $\alpha > 0$. Lp.

W. Burnside. On groups of order $p^\alpha q^\beta$ (second paper). Lond. M. S. Proc. (2) **2**, 432-437.

Alle Gruppen der Ordnung $p^\alpha q^\beta$ sind, wie Verf. in einem Aufsatz unter gleichem Titel (Lond. M. S. Proc. (2) **1**, 388-392; F. d. M. **35**, 162, 1904) bewiesen hat, auflösbar. Verf. weist in der vorliegenden Veröffentlichung nach, daß, abgesehen von Gruppen gerader Ordnung ($p = 2$, $q = 1 + 2^{2^m}$ oder $q = 2$, $p = 2^n - 1$) alle Gruppen der Ordnung $p^\alpha q^\beta$ ($p^\alpha > q^\beta$) eine charakteristische Untergruppe der Ordnung p^k besitzen, wobei k der Ungleichung $p^k > p^\alpha q^{-\beta}$ genügt. Ly.

W. Burnside. On the complete reduction of any transitive permutation-group; and on the arithmetical nature of the coefficients in its irreducible components. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 239-252.

Zu jeder endlichen abstrakten Gruppe $\mathfrak{H}$ gehören k irreduzible, nicht äquivalente Darstellungen durch lineare homogene Substitutionen; k ist hierbei gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{H}$. Stellt man die Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung h als reguläre Permutationsgruppe in h Symbolen dar, so tritt bei ihrer Zerlegung in irreduzible Bestandteile jeder so oft auf, wie seiner Variabelnzahl entspricht. Diese Resultate stammen von Frobenius. Verf. bestimmt, wie häufig jeder der k irreduziblen Bestandteile auftritt, wenn man eine beliebige Darstellung von $\mathfrak{H}$ als transitive Permutationsgruppe in irreduzible Bestandteile zerlegt.

Das Frobeniussche Ergebnis erscheint hierbei als Spezialfall. Hieran knüpft Burnside die Untersuchung der arithmetischen Natur der Koeffizienten einer irreduziblen Gruppe linearer homogener Substitutionen. „Enthält eine endliche irreduzible Gruppe Γ linearer homogener Substitutionen mit den Charakteristiken $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ (das sind die Summen der Diagonalelemente je eines Repräsentanten der k Klassen konjugierter Elemente von Γ) irgend eine Untergruppe mit einer und auch nur einer linearen Invariante, so kann man Γ immer derartig transformieren, daß die Koeffizienten aller seiner Substitutionen rationale Funktionen der χ werden." (Man vgl. Frobenius, Berl. Ber. 1903, 338.) Verf. beweist ferner das wichtige Resultat, daß eine irreduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen, deren charakteristische Funktionen nicht sämtlich gleichzeitig A-te ($A > 1$) Potenzen rationaler Funktionen sind, stets so darstellbar ist, daß sämtliche Substitutionskoeffizienten rationale Funktionen von Einheitswurzeln werden. Eine Fortführung dieser Untersuchungen bei I. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen (Berl. Ber. 1906, 164). Ly.

W. Burnside. On the condition of reducibility of any group of linear substitutions. Lond. M. S. Proc. (2) 3, 430-434.

Verf. beweist folgenden für die Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen fundamentalen Satz: Eine Gruppe von endlich oder unendlich vielen linearen homogenen Substitutionen ist dann und nur dann reduzibel, wenn eine oder mehrere lineare homogene Gleichungen durch die Koeffizienten jeder Substitution der Gruppe erfüllt werden. Anders ausgedrückt: Eine Gruppe linearer homogener Substitutionen in n Variabeln ist dann und nur dann irreduzibel, wenn man aus ihr ein System von n^2 Substitutionen A_i $(i = 1, 2, \ldots, n^2)$ mit Koeffizienten $a_{jk}^{(i)}$ auswählen kann, daß die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} \\ a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{11}^{(n^2)} & a_{12}^{(n^2)} & \ldots & a_{nn}^{(n^2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Einen Beweis in abgeänderter Gestalt und eine wichtige Verallgemeinerung dieses W. Burnsideschen Fundamentalsatzes haben Frobenius und I. Schur in der im nächsten Jahrgange der Fortschritte zu besprechenden Arbeit „Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen" (Berl. Ber. 1906, 209) geliefert. Ly.

W. Burnside. On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions. Lond. M. S. Proc. (2) 3, 435-440.

Für jede endliche Gruppe G linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten $\alpha + i\beta$ (α und β reell, $i = \sqrt{-1}$) existieren zwei positive

endliche Zahlen m und M, daß für jeden Koeffizienten jeder Substitution von G erstens $|\alpha| < M$, $|\beta| < M$ und zweitens entweder $\alpha = 0$ oder $|\alpha| > m, \beta = 0$ oder $|\beta| > m$. Verf. zeigt, daß die Existenz zweier derartiger Zahlen m und M (eine ist nicht genügend) eine Gruppe als eine solche von endlich vielen linearen homogenen Substitutionen charakterisiert. Verf. beweist ferner allgemein den zuerst vom Referenten mit einer Einschränkung bewiesenen Satz (Math. Ann. **53**, 225; F. d. M. **31**, 130, 1900): „Eine Gruppe linearer homogener Substitutionen einer endlichen Anzahl n von Variabeln ist stets und nur dann endlich, wenn die Ordnung jeder Substitution gleich oder kleiner als eine endliche Zahl m ist." Verf. zeigt schließlich: „Hat eine Gruppe linearer homogener Substitutionen einer endlichen Anzahl n von Variabeln nur eine endliche Anzahl Klassen konjugierter Substitutionen, so ist die Gruppe endlich."

Ly.

G. A. Miller. Extension of a theorem due to Sylow. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 367-369.

Jede Gruppe G von der Ordnung p^m, wo p eine Primzahl, enthält wenigstens p invariante Operatoren. Dieser fundamentale Satz von Sylow (Math. Ann. **5**, 584, 1872) ist in dem folgenden enthalten: Jede nichtabelsche Gruppe von der Ordnung p^m enthält wenigstens p invariante kommutatorische Operatoren, und ihre kommutatorische Quotientengruppe ist immer nichtzyklisch. Die Quotientengruppe, welche der kommutatorischen Untergruppe entspricht, wird als kommutatorische Quotientengruppe eingeführt. In diesem Zusammenhange wird das folgende, eng damit verwandte Theorem bewiesen: Es ist möglich, eine nichtabelsche Gruppe zu konstruieren, welche eine beliebige Abelsche Gruppe als eine kommutatorische Quotientengruppe besitzt. Jede nichtzyklische Abelsche Gruppe von der Ordnung p^a ist die kommutatorische Quotientengruppe einer beliebigen nichtabelschen Gruppe von der Ordnung p^m.

Lp.

G. A. Miller. Determination of all the characteristic subgroups of any Abelian group. American J. **27**, 15-24.

Verf. beschäftigt sich mit der Bestimmung aller möglichen charakteristischen (G. Frobenius, Berl. Ber. 1895, 183) Untergruppen einer endlichen kommutativen Gruppe G. Eine Untergruppe von G ist stets und nur dann eine charakteristische, falls die Sylowschen (American M. S. Bull. (2) **9**, 543; vgl. auch F. d. M. **35**, 163, 1904 letztes Referat: G. A. Miller) Untergruppen dieser Untergruppe in einer Sylowschen Untergruppe von G charakteristisch sind. Infolgedessen kann sich Verf. auf die Betrachtung der kommutativen Gruppen G von Primzahlpotenzordnung p^m beschränken. Die hauptsächlichsten Resultate sind folgende: „Ist p eine ungerade Primzahl, so können zwei charakteristische Untergruppen nicht von dem gleichen Typus sein, und die Anzahl der charakteristischen Untergruppen von G ist gleich der Anzahl der Klassen

von Elementen, bei denen jede Klasse alle Elemente umfaßt, die in der Isomorphismengruppe J von G konjugiert sind. Alle möglichen charakteristischen Untergruppen (außer der Identität) haben eine gewisse charakteristische Untergruppe gemein. Sie heißt die fundamentale charakteristische Untergruppe von G und ist die einzige, in der, abgesehen von der Identität, alle Elemente innerhalb J konjugiert sind." „Jede der charakteristischen Untergruppen von G ($p > 2$) wird durch eine und auch nur eine vollständige Reihe innerhalb J konjugierter Elemente erzeugt, und die unabhängigen erzeugenden Elemente einer solchen Untergruppe können so ausgewählt werden, daß sie Potenzen der unabhängigen erzeugenden Elemente von G sind." Die Anzahl charakteristischer Untergruppen von G kann mittels einer einfachen Formel direkt bestimmt werden. (Vgl. auch G. A. Miller, C. R. **138**, 888; F. d. M. **35**, 162, 1904.) Ly.

G. A. Miller. Determination of all the groups of order 2^m which contain an odd number of cyclic subgroups of composite order. Amer. M. S. Trans. **6**, 58-62.

In jeder nichtzyklischen Gruppe der Ordnung p^m (p ungerade Primzahl) ist die Anzahl zyklischer Untergruppen der Ordnung p^β für $\beta > 1$ ein Vielfaches von p und für $\beta = 1$ gleich $1 + p + kp^2$. (Zu vgl. G. A. Miller, Lond. M. S. Proc. (2) **2**, 142-143; F. d. M. **35**, 163, 1904.) Der vorliegende Aufsatz behandelt den Fall $p = 2$, bei dem die Verhältnisse anders liegen. „Jede nichtzyklische Gruppe der Ordnung 2^m, $m > 3$, die eine ungerade Anzahl zyklischer Untergruppen der Ordnung 4 enthält, enthält genau eine zyklische Untergruppe der Ordnung 2^α, wobei α alle Werte von 3 bis $m - 1$ besitzen kann; jede Gruppe, die nur eine zyklische Untergruppe der Ordnung 2^α enthält, besitzt eine ungerade Anzahl zyklischer Untergruppen der Ordnung 4. Für jeden Wert von α und m gibt es drei solcher Gruppen; daher existiert ein doppelt unendliches System von Gruppen der Ordnung 2^m, die eine ungerade Anzahl zyklischer Untergruppen zusammengesetzter Ordnung enthalten."
Ly.

G. A. Miller. The groups of order 2^m which contain an invariant cyclic subgroup of order 2^{m-2}. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 494-499.

In einem Vortrage: A note on groups of order 2^m which contain self-conjugate subgroups of order 2^{m-2}, von dem im Bull. (2) **11**, 318 ein ganz kurzer Auszug gegeben ist, hat G. H. Hallett gezeigt, daß sechs solche Gruppen existieren, welche nicht einen Operator von der Ordnung 2^{m-1} einschließen; Burnside dagegen gibt in seinem Buche Theory of groups (1897) nur fünf von ihnen an. Ferner gibt es nur acht mögliche nichtabelsche Gruppen von der Ordnung 2^m, welche nicht einen Operator von der Ordnung 2^{m-1} einschließen und eine nichtzyklische Quotientengruppe inbezug auf eine Untergruppe A des obigen Titels enthalten, während Burnsides Angabe, daß die Gesamtzahl der fraglichen Gruppen

14 ist, neun solcher Gruppen anzunehmen nötigt. Miller untersucht mit Rücksicht auf seine Arbeit in Amer. M. S. Trans. **2**, 259-272 (F. d. M. **32**. 143, 1901) die Frage von neuem und bestätigt, daß die Gesamtzahl der nichtabelschen Gruppen von der Ordnung 2^m, welche eine invariante zyklische Untergruppe von der Ordnung 2^{m-2} enthalten, aber keine solche Untergruppe von der Ordnung 2^{m-1}, 14 ist. Weil Burnside zwei Fehler gemacht hat, die sich gegenseitig aufheben, hatte Miller nicht gemerkt, daß solche Fehler vorlagen. — Da jede mögliche Gruppe von der Ordnung 2^m eine invariante Untergruppe von der Ordnung 2^{m-2} enthält, ist der Titel der Hallettschen Note irreführend. Lp.

G. A. Miller. On the possible numbers of operators of order 2 in a group of order 2^m. Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 74-77.

Die Note schließt sich an die vorstehend besprochene Arbeit des Verf. an. Von den einzelnen Ergebnissen führen wir an: Es gibt keine Gruppe, deren Ordnung von der Form 2^m ist, und die genau 13 Operatoren von der Ordnung 2 enthält. Man kann Gruppen konstruieren, in denen die Anzahl der Operatoren von der Ordnung 2 genau $2^x + 2^y - 1$ ist, wo x und y jedes beliebige Paar ganzzahliger Werte mit Ausnahme von 0 und 1 haben können. Es ist möglich, eine Gruppe zu konstruieren, bei der die Anzahl der Operatoren von der Ordnung 2 gleich $2^x + 2^y + 2^z - 1$, wo $x > y > z > 1$. Allgemein: Es gibt Gruppen von der Ordnung 2^m, die eine beliebig vorgeschriebene Zahl von Operatoren der Ordnung 2 enthalten, vorausgesetzt daß sie $\equiv 3 \pmod{4}$ ist und kleiner als 124. Lp.

G. A. Miller. On the invariant subgroups of prime index. Amer. M. S. Trans. **6**, 326-331.

Eine beliebige endliche Gruppe G besitzt $\dfrac{p^\lambda - 1}{p - 1}$ invariante Untergruppen vom Primzahlindex p. Ist G eine Gruppe vertauschbarer Operationen, so ist λ gleich der Anzahl der Invarianten einer Sylowschen Untergruppe der Ordnung p^m, die in G enthalten ist. Ist G eine nichtabelsche Gruppe, so ist die Bestimmung der Zahl λ mit Schwierigkeiten verknüpft, ihr Wert kann jedenfalls nicht den Wert von λ für eine Sylowsche Untergruppe der Ordnung p^m, die in G enthalten ist, übersteigen. Daher ist vor allem die Bestimmung des λ für Gruppen von Primzahlpotenzordnung p^m wichtig. Eine solche ist für $\lambda = 1$ zyklisch, für $\lambda = m$ die Abelsche Gruppe des Typus $(1, 1, 1, \ldots, 1)$. Der Fall $\lambda = m - 1$ umfaßt die Hamiltonschen Gruppen und ist vom Verf. in Math. Ann. **60**, 597 (Referat nachstehend) behandelt worden. Der vorliegende Aufsatz behandelt die Gruppen der Ordnung p^m mit $\lambda = m - 2$. Für die Behandlung dieser Gruppen kommt das auch an sich interessante Theorem zur Anwendung: „Ist die Kommutatorgruppe einer Gruppe der

Ordnung p^m von der Ordnung p, so ist jedes der Elemente, die alle Untergruppen des Index p gemeinsam haben, ein ausgezeichnetes Element der ganzen Gruppe." Ly.

G. A. MILLER. Generalization of the Hamiltonian groups. Math. Ann. **60**, 597-606.

Bedeutet 2^m die höchste Potenz der Zahl 2, die in der Ordnung irgend einer Gruppe enthalten ist, so ist die Zahl ihrer Untergruppen vom Index 2 gleich 2^r-1, wobei $r \leqq m$ ist. Bei den Hamiltonschen Gruppen ist $r=m-1$. Als Verallgemeinerung der Hamiltonschen Gruppen untersucht Verf. allgemein diejenigen Gruppen G, bei denen r den Wert $m-1$ hat. Die Gruppen der Ordnung p^m (p irgend eine Primzahl), die $\frac{p^{m-1}-1}{p-1}$ Untergruppen der Ordnung p^{m-1} besitzen, stehen, besonders für $p=2$, mit den Gruppen G in innigstem Zusammenhang; sie werden daher von dem Verf. ebenfalls bestimmt. Für die Gruppen G gilt der Satz, daß, wenn eine Gruppe gerade $2^{m-1}-1$ Untergruppen der Hälfte ihrer Ordnung enthält, ihre Sylowsche Untergruppe der Ordnung 2^m ebenfalls $2^{m-1}-1$ Untergruppen der Ordnung 2^{m-1} hat. Die Gruppen der Ordnung 2^m mit $2^{m-1}-1$ Untergruppen der Ordnung 2^{m-1} sind als Gruppen der Ordnung 2^m charakterisierbar, welche Elemente der Ordnung 4, aber keine der Ordnung 8 enthalten und deren Elemente der Ordnung 4 ein gemeinsames Quadrat besitzen. Ly.

G. A. MILLER. Sur les sous-groupes invariants d'indice p^2. C. R. **140**, 32-33.

Verf. bestimmt die Anzahl der invarianten Untergruppen des Index p^2 einer endlichen Gruppe G gleich

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_\beta p^\beta + \cdots,$$

wobei $a_\beta \leqq \frac{1}{2}\beta + 1$ und $a_{\beta+1} = 0$, falls $a_\beta = 0$ ist. Z. B. enthält G mehr als eine invariante Untergruppe des Index p^2, so ist die Zahl dieser Untergruppen $\equiv 1 + p \pmod{p^2}$. Ly.

G. A. MILLER. Groupes contenant plusieurs opérations de l'ordre deuxième. C. R. **141**, 591-592.

Sind, abgesehen von der Identität, alle Elemente einer Gruppe von der Ordnung 2, so ist die Gruppe eine Abelsche vom Typus (1, 1, ..., 1). In jeder anderen Gruppe ist wenigstens der vierte Teil der Elemente von höherer als 2ter Ordnung. Ist genau der vierte Teil der Gruppenelemente von höherer als 2ter Ordnung, so ist die Gruppe das direkte Produkt der oktischen Gruppe (Pierpont, Annals of Math. (2) **1**, 140; F. d. M. **35**, 95, 1900 — man versteht hierunter eine Untergruppe der

Ordnung 8 der symmetrischen Gruppe von 4 Symbolen —) in eine Abelsche Gruppe der Ordnung 2^a vom Typus $(1, 1, \ldots, 1)$. Ist genau die Hälfte der Gruppenelemente von höherer als 2ter Ordnung, so ist die Gruppe von der Ordnung $2h$ (h ungerade) und enthält eine Abelsche Untergruppe der Ordnung h. In einer nichtabelschen Gruppe der Ordnung 2^m, bei der weniger als die Hälfte der Operationen von höherer als 2ter Ordnung ist, muß die Anzahl der Elemente von höherer als 2ter Ordnung stets gleich $\frac{2^a-1}{2^{a+1}} \cdot g$ sein, wobei g die Gruppenordnung bedeutet. Die Beschaffenheit der Gruppe im Fall $\alpha = 1$ ist oben erwähnt worden. Ly.

G. A. Miller. Groups of the fundamental operations of arithmetic. Annals of Math. (2) **6**, 41-48.

Verf. untersucht Gruppen, die sich bei der Verknüpfung der ganzen Zahlen durch die vier fundamentalen Operationen „Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division" ergeben. Beispielsweise: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine gegebene Reihe mod. m verschiedener ganzer positiver Zahlen in bezug auf die Multiplikation eine Gruppe erzeugt, besteht darin, daß der größte gemeinsame Divisor d des Moduls m und jeder Zahl der Reihe nicht von der Wahl dieser Zahl abhängt und $\frac{m}{d}$ zu d relativ prim ist. Zur weiteren Charakterisierung des Inhalts des Aufsatzes sei noch die Behandlung der Subtraktions- und Divisionsgruppe, die der speziellen Annahme $\chi_1 = \chi_2$ in des Verf. Arbeit (Quart. J. **37**, 80-87, Referat nachstehend) entspricht, erwähnt. Ly.

G. A. Miller. Groups of subtraction and division. Quart. J. **37**, 80-87.

Subtrahiert man von einer festen Zahl χ_1 die Zahl n und subtrahiert das sich ergebende Resultat wiederum von χ_1, so erhält man die ursprüngliche Zahl n. Diese Operation der Subtraktion kann also als periodisch mit der Periode 2 angesehen werden. Ähnlich kann man auch die Division als periodisch mit der Periode 2 betrachten. Verf. untersucht die Gruppen, die durch die zwei Operationen $\chi_1 - n$ und $\frac{\chi_2}{n}$ erzeugt werden; hierbei bedeuten χ_1 und χ_2 feste Zahlen. In den vier Fällen $\chi_1 = 0$, $\chi_1^2 = \chi_2$, $\chi_1^2 = 2\chi_2$ und $\chi_1^2 = 3\chi_2$ haben die erzeugten Gruppen die Ordnungen 4, 6, 8 und 12. Sind χ_1 und χ_2 beide rational, so gibt es keine anderen endlichen Gruppen als die vier besprochenen. Falls χ_1 und χ_2 auch irrational sein dürfen, kann jede mögliche Diederrotationsgruppe als eine Subtraktions- und Divisionsgruppe dargestellt werden. Beispielsweise liefert $\chi_1 = 1 + \sqrt{5}$, $\chi_2 = 4$ die Diederrotationsgruppe der Ordnung 10, die nach dem obigen die einzige Diederrotationsgruppe von niedrigerer

als 14ter Ordnung ist, die nicht durch rationale Werte χ_1 und χ_2 erzeugt werden kann. Daß die zwei angegebenen Operationen stets nur Gruppen vom Diederrotationstypus erzeugen können, folgt aus der Tatsache, daß beide die Periode 2 haben. Ly.

H. Hilton. Groups of subtraction and division. Messenger (2) **35**, 117.

Geometrischer Beweis der Resultate von Miller im Quart. J. **37**, 80-87 (vgl. das vorstehende Referat). Lp.

G. A. Miller. Theorems relating to quotient groups. Prace mat.-fiz. **16**, 109-112.

G. A. Miller. Some relations between number theory and group theory. American J. **27**, 315-322.

„Die $\varphi\left(\frac{m}{k}\right)$ Zahlen, die kleiner als die ganze positive Zahl m sind und k zum größten gemeinsamen Divisor mit m haben, bilden, wenn man sie multiplikativ mod. m verbindet, eine Abelsche Gruppe G, und G ist die Isomorphismengruppe der zyklischen Gruppe der Ordnung $\frac{m}{k}$." Ausgehend von dieser Tatsache, leitet Verf. gruppentheoretisch einige Fundamentalsätze der Zahlentheorie her; sie betreffen die quadratischen Reste und die Eigenschaften der Eulerschen zahlentheoretischen Funktion φ. Ly.

G. A. Miller. Application of several theorems in number theory to group theory. Amer. Math. Monthly **12**, 81-84.

G. A. Miller. The groups generated by two operators which have a common square. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 6-7.

Bedeuten s_1 und s_2 zwei Elemente, für die $s_1^2 = s_2^2$ ist, so ist, falls beide Operationen ungerader Ordnung sind oder die eine gerader, die andere ungerader Ordnung ist, die von ihnen definierte Gruppe zyklisch. Sind die Operationen s_1 und s_2 vertauschbar, so ist die von ihnen definierte Gruppe zyklisch oder das direkte Produkt einer zyklischen Gruppe in eine der Ordnung 2. Sind s_1 und s_2 gleicher gerader Ordnung n und nicht kommutativ, so hat man es mit einer Verallgemeinerung der Diedergruppen zu tun. „Für gegebenes n gibt es nur eine einzige Gruppe der Ordnung nk ($k > 2$ stellt die Ordnung von $s_1 s_2^{-1}$ dar),

die durch s_1 und s_2 erzeugt wird. In diesem unendlichen System kann k jeden Wert von 3 bis ∞ annehmen. Sind $\frac{1}{2}n$ und k beide gerade, so erzeugen s_1 und s_2 auch eine Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}nk$. In diesem System kann k jeden geraden Wert von 4 bis ∞ annehmen. Jede dieser Gruppen enthält entweder $\frac{1}{2}n$ oder n invariante Elemente, und die entsprechende Quotientengruppe ist eine Diedergruppe; die letztere ist auch die Gruppe der kogredienten Isomorphismen." Ly.

L. E. Dickson. A new system of simple groups. Math. Ann. **60**, 137-150.

Das neue System einfacher Gruppen, das der Verf. findet, ist ein solches der Ordnung $2^{6q}(2^{6q}-1)(2^{2q}-1)$, wobei q jede positive ganze Zahl, die >1 ist, bedeutet. „Für $q=1$ hat die Gruppe der Ordnung 12096 eine einfache Untergruppe des Index 2, also der Ordnung 6048. Die letztere ist mit der einfachen Gruppe aller ternären hyperorthogonalen Substitutionen der Determinante 1 mit Koeffizienten aus dem Galoisschen Felde $GF[3^2]$ (vgl. über $HO[3,3^2]$ Dickson, Linear groups with an exposition of the Galois Field theory 1901, § 290) holoedrisch isomorph. Für die isomorphe abstrakte Gruppe werden die allgemeinen Relationen bestimmt, ferner wird ihre Darstellung als ~transitive Permutationsgruppe von 36 Buchstaben nachgewiesen. Für $q=1$ ist die Gruppe der Ordnung 12096 mit einer Untergruppe des Index 120 der senären Abelschen Gruppe mit Koeffizienten mod. 2 der Ordnung $2^9\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$ holoedrisch isomorph. Die eben genannte senäre Abelsche Gruppe der Ordnung 1451520 ist bekanntlich (C. Jordan, Traité des substitutions, p. 229, 1870. — L. E. Dickson, American M. S. Trans. **3**, 377; F. d. M. **33**, 153, 1902) mit der Gruppe der Gleichung für die 28 Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte holoedrisch isomorph. Sie hat daher Resolventen der Grade $63=2^6-1$ und 120, von denen die letztere bisher nicht bemerkt wurde." Das neue Gruppensystem der Ordnung $2^{6q}(2^{6q}-1)\cdot(2^{2q}-1)$ ergibt sich dem Verf. als Analogon zu der einfachen 14-gliedrigen endlichen kontinuierlichen, von Killing, Engel und Cartan untersuchten Transformationsgruppe, die sich in die vier großen Lieschen einfachen Gruppengattungen nicht einordnen läßt. Der behandelte Gruppentypus ist eine Untergruppe der linearen homogenen Gruppe in sieben Variabeln mit Koeffizienten aus dem Galoisschen Felde $GF[2^q]$, welche die quadratische Form: $\xi_0^2+\sum_{i=1}^{i=3}\xi_i\,\xi_{i+3}$ invariant läßt. Falls die Koeffizienten der Substitutionen einem Körper F angehören, der kein Galoissches Feld $GF[2^q]$ ist, hat Verf. diese Gruppe in sieben Variabeln bereits in American M. S. Trans. **2**, 383-391 (F. d. M. **32**, 133, 1901) untersucht. Ly.

L. E. Dickson. **Definitions of a group and a field by independent postulates.** Amer. M. S. Trans. 6, 198-204.

Verf. definiert eine Gruppe G abstrakt durch folgende vier Postulate, die von einander unabhängig sind:

1. Das Produkt irgend zweier Elemente von G ist ein eindeutig bestimmtes Element von G.

2. Die Produktbildung ist assoziativ.

3. G enthält wenigstens ein rechtshändiges Element i, so daß für jedes Element a von G die Gleichung $ai = a$ gilt.

4. Existieren Elemente i, so soll für ein besonderes i und für jedes a die Gleichung $aa' = i$ innerhalb G lösbar sein.

Ein besonderer Vorzug dieser Gruppendefinition ist, daß die Postulate auch von einander unabhängig bleiben, wenn man die Elementenzahl beschränkt oder die Gruppe kommutativ voraussetzt. Die gegebene Definition ist eine Modifikation der ersten Mooreschen in den American M. S. Trans. **3**, 485-492 (F. d. M. **33**, 142, 1902); auch über ihr Verhältnis zu der gleichzeitigen Mooreschen Publikation (vgl. oben S. 193) spricht sich Verf. aus. An seine Gruppendefinition anknüpfend, gibt Verf. eine abstrakte Definition eines Feldes oder Körpers durch elf unabhängige Postulate; sie gilt gleichmäßig, ob das elfte Postulat lautet: die Elementenzahl des Feldes ist endlich (Galoisscher Körper), oder bildet eine abzählbare oder eine nicht abzählbare, unendliche Menge. Wegen der bisherigen Definitionen des Feldes durch unabhängige Postulate vgl. man das Referat Huntington (S. 191). Ly.

L. E. Dickson. **On semi-groups and the general isomorphism between finite groups.** Amer. M. S. Trans. 6, 205-208.

Als Halbgruppe definiert Verf. ein System G von Elementen, das den folgenden vier von einander unabhängigen Postulaten genügt:

1. Das Produkt irgend zweier Elemente von G ist ein eindeutig bestimmtes Element von G.

2. Die Produktbildung ist assoziativ.

3, 4. Sind a, x, y Elemente aus G, und ist $ax = ay$ oder $xa = ya$, so soll in jedem der zwei Fälle notwendig $x = y$ sein.

Unter der Hinzufügung des Postulats, daß G nur eine endliche Anzahl von Elementen besitzen soll, ist dies die H. Webersche Definition einer endlichen Gruppe (Lehrbuch der Algebra, Bd. II, 1. Abschnitt, § 1). G und G' seien zwei Gruppen; für sie sei ein Isomorphismus als derartige wechselseitige Beziehung der Elemente definiert, daß jedem Element der einen Gruppe eines oder mehrere der anderen entsprechen und, falls den Elementen a_i und a_j aus G die Elemente a_i' und a_j' aus G' entsprechen, zwischen $a_i a_j$ und $a_i' a_j'$ ebenfalls ein Entsprechen stattfindet. Seien G_1 (bzw. G_1') die Elemente aus G (bzw. G'), die dem

Einheitselement aus G' (bzw. G) entsprechen, so bilden G_1 und G'_1 Halbgruppen, nicht stets notwendig Gruppen. Ist eine der Halbgruppen G_1 oder G'_1 eine Gruppe, so ist es auch die andere. Ly.

L. E. Dickson. Determination of the ternary modular groups. American J. **27**, 189-202.

Die Bestimmung aller Gruppen linearer homogener Substitutionen in m Variabeln mit Koeffizienten aus dem Galoisschen Felde $GF[p^n]$ ist zweifacher Art, jenachdem die Gruppenordnung durch die Primzahl p teilbar oder nicht teilbar ist. Bei seiner eingehenden Untersuchung des Falles $m=3$, $n=1$ führt W. Burnside (Lond. M. S. Proc. **26**, 58-106; F. d. M. **26**, 171, 1895) für die Zahl p^2+p+1 Beschränkungen ein; die Gruppenordnung ist nämlich für diesen Fall $\lambda(p^2+p+1)$ oder $\frac{1}{3}\lambda(p^2+p+1)$, je nachdem $p\equiv -1$ oder $+1$ (mod. 3) ist, λ hat den Wert $p^3(p+1)(p-1)^2$.

„Der vorliegende Aufsatz bedient sich für die ternären Gruppen, deren Ordnungszahlen durch p teilbar sind, ganz anderer Methoden als Burnside und führt über die ungerade Primzahl p keine Voraussetzungen ein. Außerdem wird für jede Klasse konjugierter Untergruppen ein Repräsentant in expliziter Gestalt angegeben." Ly.

L. E. Dickson. Subgroups of order a power of p, in the general and special m-ary linear homogeneous groups in the $GF[p^n]$. American J. **27**, 280-302.

Verf. beschäftigt sich mit den Untergruppen von Primzahlpotenzordnung der allgemeinen und speziellen linearen homogenen Gruppe in m Variabeln mit Koeffizienten aus dem Galoisschen Körper $GF[p^n]$.

„Die gegenwärtige Untersuchung geht weit genug, um einen klaren Einblick in die Natur der einfachen Gesetze, die für den Gegenstand gelten, zu geben. Hoffentlich lassen sich die Resultate durch Induktion auf alle Potenzen von p ausdehnen. Um die Schwierigkeit dieses Schrittes anzudeuten, sei bemerkt, daß seine vollständige Durchführung die Mittel liefern würde, sofort eine explizite Liste aller Gruppen von Primzahlpotenzordnung und gleichzeitig aller ihrer Untergruppen abzuleiten. Ein zweites Ziel der Arbeit war es, Angaben über das Problem der Bestimmung aller Gruppen in m Variabeln für niedrige Werte des m zu machen." Der Aufsatz ist eine Fortführung des in Quart. J. **36**, 373 veröffentlichten (Referat nachstehend). Eingehend werden die Untergruppen von Primzahlpotenzordnung für die spezielle lineare homogene Gruppe bei $m=3$ mit Koeffizienten aus dem $GF[p^n]$ und $m=4$ mit Koeffizienten aus dem $GF[p^2]$ behandelt. Ly.

L. E. Dickson. Determination of all the subgroups of the three highest powers of p in the group G of all m-ary linear homogeneous transformations modulo p. Quart J. **36**, 373-384.

Die vom Verf. behandelten Untergruppen der Gruppe G aller linearen homogenen Substitutionen mit Koeffizienten mod. p in m Variabeln sind die der Ordnungen p^μ, $p^{\mu-1}$ und $p^{\mu-2}$; hierbei ist $\mu = \frac{1}{2}m(m-1)$ der Exponent der höchsten Potenz der Primzahl p, welche die Gruppenordnung von G teilt. Die Arbeit stellt eine Verallgemeinerung der Resultate sowie eine Verbesserung der Methoden und Bezeichnungen eines frühereren Aufsatzes des Verf. (American M. S. Bull. (2) **10**, 385-397; F. d. M. **35**, 170, 1904) dar. Ly.

L. E. Dickson. On the real elements of certain classes of geometrical configurations. Annals of Math. (2) **6**, 141-150.

In seinem Traité des substitutions (Livre III, Chap. III) hat C. Jordan eine große Anzahl geometrischer Probleme durch gruppentheoretische Behandlung der mit ihnen verknüpften algebraischen Gleichungen diskutiert. „Für diejenige Klasse von Problemen, die der Behandlung mittels Abelscher Funktionen zugänglich ist und fünf von Jordans speziellen Problemen enthält, hat Edm. Maillet in seiner neuen umfangreichen Arbeit (Referat S. 211) eine allgemeine Theorie gegeben. Die Elemente der Konfiguration können durch einen Buchstaben bezeichnet werden, dessen Indizes ganze Zahlen mod. r sind". An Stelle der komplizierten Mailletschen Diskussion gibt Verf. ein direktes einfaches Beweisverfahren des allgemeinen von Maillet benutzten gruppentheoretischen Satzes und beseitigt die Mailletsche Beschränkung, daß r eine Primzahlpotenz sein soll. „Bei seiner Anwendung der Gruppentheorie auf geometrische Probleme beschäftigte sich Jordan nur mit den Schwierigkeiten, die in der tatsächlichen Bestimmung der Elemente der Konfiguration liegen; daher zerlegte er die entsprechende algebraische Gleichung in ihre Resolventen. Maillet macht einen bemerkenswerten Fortschritt — und dies ist der wichtigste Teil seiner Arbeit —, er wendet die Gruppentheorie zur Bestimmung der Anzahl reeller Elemente der Konfiguration an". Verf. kürzt Maillets Entwicklungen bedeutend ab. Die Frage nach der Realität der 27 Geraden einer kubischen Fläche behandelt Maillet isoliert und leitet dann hieraus das Resultat ab, daß von den 28 Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung keine, 4, 8, 16 oder 28 reell sind (Maillet, S. 323). Verf. greift diese zwei Probleme in umgekehrter Reihenfolge an und zeigt im Einklang mit Zeuthens Ergebnissen (Math. Ann. **7**), daß der Fall, es sei keine reelle Doppeltangente vorhanden, unmöglich ist. Schließlich behandelt Dickson, über die C_4 hinausgehend, noch die C_n gruppentheoretisch und findet die Realitätsverhältnisse bei ihr, wie sie F. Klein (Math. Ann. **42**, 26 und 27) mittels funktionentheoretischer Methoden (vgl. Berzolari in der Enzyklopädie der math. Wiss. III, 2, S. 392) bestimmt hat. „Ist C_n eine reelle Kurve n-ter Ordnung ohne Doppelpunkte und $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, so sind von den $2^{2p-1} - 2^{p-1}$ Kurven der Ordnung $n-3$, die mit der C_n in $\frac{1}{2}n(n-3)$ Punkten eine einfache Berührung eingehen, entweder alle oder

$2^{2p-2k-1} - 2^{p-1}$ $(k = 1, \ldots, \pi)$ oder 2^{2p-1-k} $(k = 1, \ldots, p)$ reell; hierbei ist $\pi = \frac{p}{2}$ oder $\frac{p-1}{2}$." Ly.

L. E. Dickson. The groups of a tactical configuration. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 177-179.

Eine taktische Konfiguration, die mit der Abelschen Gruppe G_{p^m} vom Typus $(1, 1, \ldots, 1)_m$ zusammenhängt und zur Definition der allgemeinen linearen homogenen Gruppe H modulo p in n Variabeln dient, ist von Moore gegeben worden (Amer. M. S. Bull. (2) **2**, 33-43; F. d. M. **26**, 73. 1895). Als eine augenscheinliche Verallgemeinerung sind die die verschiedenen Untergruppen von H definierenden Konfigurationen zu betrachten. Das vom Verf. gegebene Beispiel hat seinen Ursprung in dem folgenden Problem: Man sucht die Anzahl N_n aller möglichen Arten, die $2^{2n} - 1$ von der Identität verschiedenen Operationen der $G_{2^{2n}}$ in $2^n + 1$ Systeme, jedes von $2^n - 1$ Operatoren, zu trennen, so daß die Operatoren jedes Systems einschließlich der Identität eine Untergruppe G_{2^n} bilden, und daß keine zwei Systeme einen gemeinsamen Operator haben. Hier ist $G_{2^{2n}}$ als Abelsche Gruppe vom Typus $(1, 1, \ldots, 1)_{2n}$ angenommen, z. B. die Gruppe aller linearen Transformationen an n Variabeln, welche jede Variable mit ± 1 multiplizieren. — Über die auf bestimmte Weise zu bildenden Systeme S_i werden zwei Sätze ausgesprochen und bewiesen. Lp.

L. E. Dickson. On the class of the substitutions of various linear groups. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 426-432.

Durch die Untersuchungen von Maillet in Toulouse Ann. (2) **6**, 277-349 (vgl. unten S. 211) angeregt, teilt Dickson die Resultate seiner bezüglichen Forschungen mit, welche er im Anschluß an seine Abhandlung im American J. **23**, 337-377 angestellt hat (F. d. M. **32**, 134, 1901). Wir geben seine Theoreme im Wortlaut wieder: I. Die allgemeine m-äre lineare homogene Gruppe im $GF[p^n]$ enthält Substitutionen der Klassen $p^{nm} - p^{nt}$ $(t = 0, 1, \ldots, m-1)$ ausschließlich und ist m-fach unvollständig transitiv. Für die nichthomogene Gruppe ist die allein hinzukommende Klasse p^{nm}; sie ist $(m+1)$-fach unvollständig transitiv. Die Klasse der beiden Gruppen ist $p^{nm} - p^{n(m-1)}$. II. Für beliebige ganze Zahlen m und n enthält die m-äre lineare homogene Gruppe modulo n Substitutionen der Klassen $n^m - d_i$ ausschließlich, wo d_i die Divisoren von n^m durchläuft. Für die nichthomogene Gruppe ist die allein hinzutretende Klasse n^m. III. Die allgemeine oder spezielle $2m$-äre lineare Abelsche Gruppe im $GF[p^n]$ enthält Substitutionen der Klassen $p^{2nm} - p^{nt}$ $(t = 0, 1, \ldots 2m-1)$ ausschließlich. IV. Die m-äre Gruppe H aller hyperorthogonalen Substitutionen in $GF[p^{2s}]$ enthält Substitutionen der Klassen $p^{2sm-2st}$ $(p = 0, 1, \ldots, m-1)$ ausschließlich. Dasselbe gilt für die Untergruppen H_1 von der Determinante 1.

V. Die Gruppe O aller m-ären orthogonalen Substitutionen im $GF[p^n]$ enthält Substitutionen der Klassen $p^{nm}-p^{nt}$ $(t=0,1,\ldots,m-1)$ ausschließlich. Die Untergruppe O_1 orthogonaler Substitutionen von der Determinante $+1$ enthält Substitutionen der Klassen

$$p^{nm}-p^{2kn} \qquad (k=0,1,\ldots,\tfrac{1}{2}m-1)$$

ausschließlich, wenn m gerade ist, aber der Klassen

$$p^{nm}-p^{(2k-1)m} \quad (k=1,\ldots,\tfrac{1}{2}(m-1))$$

ausschließlich, wenn m ungerade ist. VI. Die $2m$-äre hypoabelsche Gruppe G_2 in $GF[2^n]$ enthält Substitutionen der Klassen

$$2^{nm}-2^{nt} \qquad (t=0,1,\ldots,2m-1)$$

ausschließlich. VII. Die Untergruppe J_λ vom Index 2 unter G_λ enthält Substitutionen der Klassen $2^{nm}-2^{nj}$ $(j=0,1,\ldots,m-1)$ ausschließlich. Lp.

E. Maillet. Sur les équations de la géométrie et la théorie des substitutions entre n lettres. Toulouse Ann. (2) **6**, 277-349.

Von der umfangreichen und beachtenswerten Arbeit ist bereits ein Auszug in den C. R. **138**, 890-893 erschienen, auch hat Dickson in seinem Aufsatz „On the real elements of certain classes of geometrical configurations", Annals of Math. (2) **6**, 141-150 eine bemerkenswerte Vereinfachung und Fortsetzung der Untersuchungen des Verf. geliefert. Daher sei auf das Referat im Jahrbuch **35**, 174, 1904 und auf das Referat Dickson im diesjährigen Jahrbuch S. 209 verwiesen. Ergänzend seien noch Maillets hier vorliegende Untersuchungen über die Klasse der Substitutionen verschiedener linearer Kongruenzgruppen erwähnt. Hieran knüpft Dickson in Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 426, 1905 (Referat oben S. 210) an. Ly.

W. H. Bussey. Generational relations for the abstract group simply isomorphic with the group $LF[2,p^n]$. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 296-315.

Die Gruppe $LF[2,p^n]$ aller unimodularen Substitutionen

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma=+1)$$

mit Koeffizienten aus dem Galoisschen Felde $GF[p^n]$ hat für eine ungerade Primzahl p die Ordnung $\frac{1}{2}p^n(p^{2n}-1)$ und für $p=2$ die Ordnung $2^n(2^{2n}-1)$, sie ist für $p^n>3$ einfach. Verf. beschäftigt sich mit den erzeugenden Operationen der zu dieser Gruppe holoedrisch isomorphen abstrakten Gruppe. Die Untersuchung bewegt sich in der Richtung der Arbeiten von E. H. Moore (F. d. M. **34**, 172, 1903), L. E. Dickson, Linear groups with an exposition of the Galois field theory (Leipzig, 1901), S. 300 und Lond. M. S. Proc. **35**, 292, 1903, J. de Séguier, Journ. de Math. (5) **8**, 253, 1902. Unter anderem werden

die Dicksonschen Betrachtungen (F. d. M. **34**, 165, 1903) auf $p^n = 49, 81, 121$ und auf die Gruppe $LF[2, 2^n]$ (ebenda, zweites Referat), falls $n = 5$, $n = 6$ ist, erweitert. Ly.

W. H. Bussey. Galois field tables for $p^n \leqq 169$. Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 22-38.

In jeder der abgedruckten Tafeln ist das $GF[p^n]$ vermittels einer primitiven irreduziblen Kongruenz konstruiert, die an der Spitze jeder Tafel steht. Die Marken jedes Feldes sind in zwei Tafeln angeordnet. In jeder Tafel erscheint jede Marke als eine Potenz einer primitiven Wurzel i und auch als ein Polynom in i vom Grade $k \leqq n - 1$. Die Koeffizienten in diesem Polynom sind modulo p reduziert. Die Tabellen sind gegeben für 2^3, 3^2, 2^4, 5^2, 2^5, 3^3, 7^2, 2^6, 3^4, 11^2, 5^3, 2^7, 13^2. Lp.

J. de Séguier. Sur certains groupes d'ordre $p^m q^n$. S. M. F. Bull. **33**, 242-250.

Bei der Behandlung der Gruppen der Ordnung $p^m q^n$ (p, q Primzahlen) für die ersten Werte von m und n wird man sofort auf folgenden Fall aufmerksam: „Die betrachtete Gruppe hat eine invariante prinzipale Abelsche Gruppe G_{p^m} zur Untergruppe A, kein Element $e_{(q^n)}$ ist mit jedem Element von A vertauschbar. Diesen und einen anderen ähnlichen Fall will ich hier behandeln.“ Eine prinzipale Abelsche Gruppe der Ordnung p^m ist nach des Verf. Terminologie (Éléments de la théorie des groupes abstraits, Paris 1904, S. 13) eine solche, die durch m unabhängige Elemente der Ordnung p erzeugt wird. $e_{(q^n)}$ bedeutet ein Element, dessen Ordnung q^n teilt. Ly.

C. Alasia. Estensione di alcuni teoremi sui gruppi di sostituzioni. Perodico di Mat. (3) **3**, 64-73.

C. Alasia. Nozioni della teoria dei gruppi di sostituzioni. Il Pitagora **11**, 113-123.

Unter Bezugnahme auf die größeren zusammenfassenden Werke über Substitutionsgruppen und auf mehrere Artikel verschiedener Autoren in Zeitschriften entwickelt Alasia in dem ersten Artikel eine Reihe von Sätzen, die er in einer späteren Arbeit benutzen will. Bei der recht bedeutenden Zunahme der Literatur über diesen Gegenstand ist es schwierig, die Neuheit der Resultate festzustellen. Wir führen folgende Sätze an, um den Charakter der Untersuchung kenntlich zu machen.

Wenn p die größere Primzahl und p^a ihre höchste Potenz ist, welche die Ordnung $n\,(= mp^a)$ der Gruppe G teilen, so ist 1. G ein direktes Produkt von Gruppen der Ordnung p^a und m bzw., wenn jede Operation eine ihrer Untergruppen von der Ordnung p^a ihre invariante Operation ist. 2. G besitzt eine invariante Untergruppe vom Index p^a, wenn die Untergruppen, welche diese Zahl als Ordnung haben, Abelsch

sind. Dies wird auf den Fall ausgedehnt, in welchem die Ordnung $n = mp^\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) der Gruppe G eine ungerade Zahl ist und p kleiner als jeder der Primfaktoren von m. — Es sei p^α die größte Potenz, welche die Ordnung der Untergruppe G_s von G teilt, die ein gegebenes Element a_s nicht versetzt. Wenn alle Grade der transitiven Bestandteile von G_s Vielfache von p^β sind, aber wenigstens einer nicht ein Vielfaches von $p^{\beta+1}$, so ist entweder $\alpha = \beta$, oder in G ist eine Untergruppe vom Grade n, welche einen transitiven Bestandteil vom Grade $1 + kp$ ($k > 0$) besitzt, und dessen Ordnung ein Vielfaches von p ist. — Eine primitive Gruppe G vom Grade g, welche eine zusammengesetzte Zahl n als Ordnung hat, enthält mehr als $n/(v+1)$ Substitutionen von kleinerem Grade als g, wo v die Anzahl der Intransivitätssysteme der Untergruppe ist, welche nicht ein gegebenes Element versetzt. Mit der Wiedergabe dieser Beispiele von Sätzen aus der Abhandlung müssen wir uns begnügen. — Der zweite Aufsatz dient zur ersten Einführung in die Theorie. Lp.

H. L. Rietz. Simply transitive primitive groups which are simple groups. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 545-546.

Es gibt eine einfache Gruppe G von zusammengesetzter Ordnung: die jeder Primzahl $p > 11$ entspricht (wo $p = 2q + 1$, q eine Primzahl), darstellbar als eine einfach transitive primitive Gruppe des Grades,

$$1 + kp, \text{ wo } \frac{(p-2)! - 1}{p} \geqq k > 1.$$

Lp.

L. I. Neikirk. Groups of order p^m which contain cyclic subgroups of order p^{m-3}. Pennsylv. Publications Nr. 3, 1905, 65 S.

L. I. Neikirk. Groups of order p^m, which contain cyclic subgroups of order p^{m-3}. Amer. M. S. Trans. **6**, 316-325.

Die Gruppen der Ordnung p^m (p Primzahl), die zyklische Untergruppen der Ordnungen p^{m-1} und p^{m-2} besitzen, sind durch die Untersuchungen von W. Burnside (Theory of groups of finite order, p. 75-81, 1897) und von G. A. Miller (American M. S. Trans. **2**, 259-272 und **3**, 383-387; F. d. M. **32**, 143, 1901 und **33**, 154, 1902) bekannt. In der vorliegenden Publikation, von der ein Teil schon 1903 als Doktorschrift verwandt wurde, bestimmt Verf. alle Gruppen der Ordnung p^m, die zyklische Untergruppen der Ordnung p^{m-3} und keiner höheren Ordnung besitzen. Sie zerfallen in drei Klassen, die den drei Zerlegungen $(m-3, 3)$, $(m-3, 2, 1)$ und $(m-3, 1, 1, 1)$ der Zahl m entsprechen. Ist P ein Element der Ordnung p^{m-3} der zu untersuchenden Gruppengattung G, die keine Elemente höherer als p^{m-3}-ter Ordnung enthalten soll, so ist die p^3-te Potenz jedes Elementes von G in der durch P erzeugten zyklischen Gruppe $\mathfrak{P}$ enthalten; denn sonst wäre G höherer als p^m-ter Ordnung. Die Gruppen G zerfallen in die folgenden drei Klassen:

I. G besitzt wenigstens ein Element Q, daß Q^{p^2} nicht in $\mathfrak{P}$ enthalten ist.

II. Die p^2-te Potenz jedes Elementes von G ist in $\mathfrak{P}$ enthalten, G besitzt aber wenigstens ein Element Q, so daß Q^p nicht in $\mathfrak{P}$ enthalten ist.

III. Die p-te Potenz jedes Elementes von G ist in $\mathfrak{P}$ enthalten.

Für $p > 3$, $m > 8$ (die kleineren Werte bieten Besonderheiten) umfaßt die erste Klasse 9, die zweite $32 + 5p$, die dritte 23 Gruppengattungen; sie werden sämtlich abstrakt durch Gleichungen definiert.

Der zweite Aufsatz ist ein Auszug aus der ersten Arbeit; er gibt eine genaue Analyse der ersten Gruppenklasse, sowie eine übersichtliche Mitteilung der für die zwei anderen Klassen erhaltenen Resultate. Ly.

H. F. Blichfeldt. The finite, discontinuous primitive groups of collineations in four variables. Math. Ann. **60**, 204-231.

Eine größere Anzahl wichtiger endlicher Gruppen linearer homogener Substitutionen in vier Variabeln ist durch die Arbeiten verschiedener Autoren bekannt. (Zu vgl. Wiman in seinem Artikel über die endlichen Gruppen linearer Substitutionen im Bd. I der Enzyklopädie der math. Wiss.) Von der Bestimmung aller endlichen quaternären Gruppen linearer homogener Substitutionen heißt es a. a. O.: „aber schon bei den quaternären Gruppen erhielt er (Jordan) eine so komplizierte Fundamentalgleichung, daß ihre Diskussion kaum möglich scheint" (S. 528). Auf Grund seiner früheren Arbeiten (American M. S. Trans. **4**, 387 und **5**, 310; F. d. M. **34**, 176, 1903 und **35**, 160, 1904) erledigt Verf. in dem vorliegenden Aufsatz die noch offene Frage der Bestimmung aller endlichen quaternären linearen homogenen Substitutionsgruppen für die von ihm so genannte Klasse der primitiven Gruppen. Es sei daran erinnert, daß man die Gruppen linearer homogener Substitutionen in reduzible (von Maschke und vom Verf. intransitiv genannt) und irreduzible (transitive) einteilen kann. Die letzteren hat Verf. früher (F. d. M. **34**, 177, 1903) in primitive und imprimitive klassifiziert. Verf. gelangt zu dem Resultat: Jede endliche primitive lineare homogene Substitutionsgruppe in vier Variabeln ist einem der 30 von Blichfeldt angegebenen, nicht ineinander transformierbaren Typen ähnlich. Sieben dieser Typen haben invariante reduzible Untergruppen, neun besitzen invariante imprimitive Untergruppen; sechs Typen sind einfache Gruppen und acht enthalten invariante primitive Untergruppen. Wegen der endgültigen Bestimmung aller endlichen quaternären Gruppen linearer homogener Substitutionen vgl. man das folgende Referat. Ly.

H. F. Blichfeldt. On imprimitive linear homogeneous groups. Amer. M. S. Trans. **6**, 230-236.

Von C. Jordan stammt folgender Fundamentalsatz (J. für Math. **84**): Jede endliche Gruppe G linearer homogener Substitutionen in n Variabeln besitzt eine invariante Abelsche Untergruppe der Ordnung f; die Ordnung

von G ist λf, hierbei ist λ kleiner als eine feste, nur von n allein abhängige Zahl. In einer früheren Arbeit (American M. S. Trans. **5**, 310; F. d. M. **35**, 160, 1904) hat Verf. für jene besondere Klasse irreduzibler Gruppen, die er primitiv nennt, den Jordanschen Satz bewiesen und ferner durch Angabe einer Zahl, die λ als Divisor enthält, für λ eine obere Grenze gefunden. In der vorliegenden Arbeit beweist Verf. zunächst einen Satz über den Aufbau der imprimitiven Gruppen aus primitiven. Gestützt auf dieses Theorem und das für primitive Gruppen früher gewonnene Resultat, kann Blichfeldt den C. Jordanschen Satz nunmehr auch für imprimitive Gruppen beweisen und in diesem Fall ebenfalls eine Zahl herleiten, die nur von der Variabelnzahl n abhängt und durch λ teilbar ist. Hiermit ist der Jordansche Fundamentalsatz für alle irreduziblen Gruppen linearer homogener Substitutionen bewiesen und, über Jordan hinausgehend, für λ eine obere Grenze fixiert. Da jede endliche reduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen vollständig reduzibel ist, kann man das Jordansche Theorem allgemein beweisen. Nach des Verf. Ergebnis über den Aufbau imprimitiver endlicher Gruppen müssen solche in vier Variabeln, wenn sie nicht semikanonisch (F. d. M. **35**, 161, 1904; Verf. sagt nach Maschke „Monomialgruppen") sind, zwei Reihen der Imprimitivität enthalten. Es ergeben sich 14 Typen endlicher imprimitiver Gruppen linearer homogener Substitutionen in vier Variabeln, die nicht semikanonisch sind. Hiermit sind des Verf. Untersuchungen über die Bestimmung der endlichen Gruppen linearer homogener Substitutionen in vier Variabeln (Math. Ann. **60**, vgl. voraufgehendes Referat) vervollständigt. Ly.

U. Scarpis. Il teorema di Wilson nella teoria dei gruppi d'operazioni. Batt. G. [(2) **12**] **43**, 323-328.

Sind $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$ die $\varphi(n)$ Zahlen, die kleiner als die ganze positive Zahl n und relativ prim zu n sind, so hat man nach dem verallgemeinerten Wilsonschen Satz: $r_1\, r_2 \ldots r_{\varphi(n)} \equiv -1 \pmod{n}$, falls n eine Potenz einer ungeraden Primzahl, das Doppelte einer solchen Zahl oder $= 4$ ist. Sonst ist das Produkt $r_1\, r_2 \ldots r_{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Die Betrachtung der Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$ als Elemente einer durch ihre multiplikative Verbindung mod. n entstehenden Kongruenzgruppe führt den Verf. auf die Untersuchung des Produktes aller Elemente einer beliebigen endlichen Gruppe. (Vgl. Fite, Annals of Math. (2) **6**, 7-8; F. d. M. **35**, 165, 1904.) Ly.

E. Wendt. Notiz zu meiner Arbeit über Hamiltonsche Gruppen. Math. Ann. **60**, 319-320.

Auf die hier vorliegende Note weist schon das Referat über des Verf. Arbeit in Math. Ann. **59**, 187-192; F. d. M. **35**, 165, 1904 hin. Ly.

W. A. Manning. On the primitive groups of class $3p$. Amer. M. S. Trans. **6**, 42-47.

Verf. hatte früher die primitiven Gruppen der Klasse $2p$, die eine Permutation der Ordnung p und des Grades $2p$ enthalten, untersucht. (American M. S. Trans. **4**, 351; F. d. M. **34**, 178, 1903.) Der vorliegende Aufsatz behandelt die primitiven Gruppen der Klasse $3p$, die eine Permutation der Ordnung p und des Grades $3p$ enthalten (p ungerade Primzahl). Es gibt nur drei solche Gruppen; sie sind von der Klasse 15 und von den Ordnungen $16\cdot 5$, $16\cdot 15$ und $17\cdot 16\cdot 15$; hierbei zeigt der erste Faktor den Grad an. Ehe Verf. diese Resultate gewinnt, leitet er folgende zwei Sätze ab: „Ist A eine Permutation des Grades pq und der Ordnung p in einer Gruppe der Klasse pq, $q \leqq p$, so kann keine zu A ähnliche und mit A nicht vertauschbare Permutation von allen Buchstaben irgend eines Zyklus von A frei sein. Eine Ausnahme kann nur eintreten, falls $q = p$ ist und die Gruppe eine transitive Untergruppe der Ordnung p^2 enthält." „Unter den zu A ähnlichen Permutationen einer primitiven Gruppe der Klasse $pq\,(1 < q \leqq p)$, p ungerade, kann man eine Permutation B finden, die zwei Zykeln von A transitiv verknüpft und in jedem Zyklus nicht mehr als einen neuen Buchstaben enthält." Ly.

H. Hilton. An extension of the theory of groups of movements. Messenger (2) **34**, 157-160.

Es sei j der reelle oder imaginäre Schnitt einer reellen Ebene t mit einer reellen Fläche zweiter Ordnung; A ein beliebiger Punkt in t; seine Polare in bezug auf j treffe j in H und K. Ist dann r eine beliebige Ebene durch HK, und trifft eine Gerade $APFP'$ durch A die Ebene r in F, also (AF, PP') eine harmonische Punktreihe, dann werden P, P' „Reflexionen von einander in r in bezug auf j" genannt. Jede Gerade durch A heißt „senkrecht" zu r. In dieser Weise überträgt der Verf. den Namen der Reflexionen und weiter der Rotationen auf geometrische Vorgänge und untersucht dann die „Gruppen" solcher Bewegungen. Bei imaginärem j findet er 14, bei reellem 37 verschiedene Gruppen. Lp.

E. Levi. Sui gruppi di movimenti. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 496-505.

Verf. beschäftigt sich mit der $\frac{1}{2}n\,(n+1)$-gliedrigen Gruppe der euklidischen Bewegungen des R_n. Jede ihrer reellen Untergruppen mit zwei Parametern ist kommutativ. Verf. leitet ferner einige Sätze über die derivierte Gruppe einer Bewegungsgruppe ab; hierdurch ist er imstande, die drei Typen reeller dreigliedriger Untergruppen der Bewegungsgruppe des R_n unmittelbar zu finden. Der Aufsatz steht mit einer Arbeit von Bianchi „Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono gruppi di movimenti", Memorie della Società Italiana delle scienze, 1898, in Zusammenhang. Ly.

E. Levi. Sui gruppi transitivi dello spazio ad n dimensioni. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_2$, 133-140, 214-220.

Verf. leitet ein Theorem über die Operationen höchster Ordnung (>4) einer endlichen kontinuierlichen transitiven Transformationsgruppe ab. Mittels dieses Satzes beweist er, daß eine endliche kontinuierliche primitive Gruppe des R_n keine Operationen höherer als vierter Ordnung enthalten kann. In seiner Theorie der Transformationsgruppen Bd. III, S. 313 hatte Lie die Zahl $2n+1$ als Grenze angegeben und dabei vermutungsweise ausgesprochen, daß diese Zahl sich auf 2 herabdrücken lasse. Weiter verwendet Verf. sein Haupttheorem zur näheren Untersuchung der Unterklassen, die zu einer Klasse transitiver Gruppen gehören. Des Verf. diesbezügliche Untersuchungen beziehen sich auf die von Lie gegebene Einteilung der transitiven Gruppen in Klassen und Unterklassen. (Theorie der Transformationsgruppen, Bd. I, 603-604, 606 und 608.)

Ly.

E. Levi. Sulla struttura dei gruppi finiti e continui. Torino Atti **40**, 551-565.

Von Killing (Math. Ann. **34**, 107) wurde der Satz ausgesprochen, daß jede endliche kontinuierliche Transformationsgruppe, die nicht halbeinfach oder integrabel ist, sich aus einer invarianten integrabeln und einer halbeinfachen Gruppe zusammensetzen läßt. Nach E. Cartans bekannter Thèse „Sur la structure des groupes de transformations finis et continus“ (Paris 1894, S. 115 und 128) ist Killings Beweis unzulänglich. Cartan selbst beweist das Theorem nur in einem speziellen Falle, Verf. beweist es auf Grund der Killing-Cartanschen Untersuchungen ganz allgemein.

Ly.

R. Le Vavasseur. Sur l'énumération des sous-groupes du groupe linéaire, homogène, à quatre variables: sous-groupes à un et à deux paramètres. Darb. Bull. (2) **29**, 197-203.

Bei Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen gelangte Picard (Journ. de Math. (4) **8**, 217, 1892) zu dem Ergebnis, daß die Bestimmung gewisser von ihm betrachteter Systeme partieller Differentialgleichungen die vorhergehende Kenntnis der Untergruppen der linearen homogenen Gruppe in vier Variabeln verlangt. Im dritten Bande seiner Theorie der Transformationsgruppen hat Lie bereits eine Anzahl dieser Untergruppen bestimmt, jedoch hat er keine systematische Aufzählung vorgenommen. „Ich hielt diese Abzählung für angebracht, daher gebe ich hier die von mir für die Gruppen mit einem oder zwei Parametern erhaltenen Resultate.“

Ly.

R. Le Vavasseur. Contribution à l'énumération des groupes continus, finis ou infinis, de l'espace à trois dimensions. Ass. Franç. Grenoble **33**, 168-170.

Die Note enthält in einer nicht weiter erklärten Symbolik die Aufzählung der Gruppen, deren infinitesimale Transformationen die Form haben

$$\zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} = \zeta(x, y, z) \cdot r.$$

Lp.

C. L. Bouton. Note on isothermal curves and one-parameter groups of conformal transformations in the plane. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 369-371.

Bei der Lösung der Aufgabe in der auf S. 223 besprochenen Note bestimmt Wright eine Gruppe konformer Transformationen mit gegebenen Bahnkurven. In diesem Zusammenhange ist es ein natürliches Problem, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu finden, unter denen eine konforme Gruppe mit gegebenen Bahnkurven existiert. Die Lösung dieses Problems wird in dem Satze gegeben: Eine einparametrige Gruppe konformer Transformationen mit gegebenen Bahnkurven existiert, wenn und nur wenn die gegebenen Kurven eine isotherme Familie bilden. Für diesen Satz werden zwei Beweise gegeben. Lp.

G. Bagnera. I gruppi finiti di trasformazioni lineari dello spazio che contengono omologie. Palermo Rend. **19**, 1-56.

In einer früheren Abhandlung (F. d. M. **32**, 155, 1901) hatte der Verf. bereits die Aufstellung aller endlichen Gruppen von Raumkollineationen in Aussicht gestellt, die Homologien enthalten. Es gibt nur acht eigentliche solcher Gruppen, die alle bereits mehr oder weniger bekannt sind. Die Methode ist eine rein geometrische.

In § 1 werden nochmals die endlichen Gruppen linearer Transformationen der Geraden und der Ebene zusammengestellt. Auf der Geraden hat man die bekannten binären Gruppen: 1. die Identität; 2. eine zyklische Gruppe Q_n von einem Grade $n > 1$, die nur zwei Punkte der Geraden, die Pole, ungeändert läßt; 3. eine Diedergruppe Q_n^2 von einem Grade $2n$, die aus der vorigen hervorgeht durch Hinzufügung einer Operation zweiter Art, die die Pole vertauscht; 4. eine Tetraedergruppe R_{12}, die mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von vier Dingen holoedrisch isomorph ist; 5. eine Oktaedergruppe R_{24}, die mit der symmetrischen Gruppe der Vertauschungen von vier Dingen, und 6. eine Ikosaedergruppe R_{60}, die mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von fünf Dingen holoedrisch isomorph ist.

Besonders bemerkenswert ist bei 3. der Fall $n = 2$, die Vierergruppe Q_2^2. Die Ikosaedergruppe ist eine einfache, d. h. sie besitzt keine

invarianten Teiler. Die Gruppen R_{12}, R_{24}, R_{60} sind nicht holoedrisch, sondern meriedrisch isomorph den entsprechenden Gruppen binärer unimodularer Substitutionen zugeordnet.

Die endlichen Gruppen der Ebene sind: 1. Gruppen von einem Grade $n > 1$, die einen Punkt und folglich auch eine nicht durch den Punkt gehende Gerade invariant lassen; 2. Gruppen, die die Ecken eines Dreiecks in transitiver Weise vertauschen; 3. die von Jordan (F. d. M. **9**, 234, 1877) aufgestellte Gruppe Γ_{216} der Hesseschen Konfiguration und ihre Untergruppen Γ_{72}, Γ_{36}; 4. die von Valentiner (F. d. M. **21**, 135, 1889) aufgestellte Gruppe Γ_{360} und ihre Untergruppen Γ_{60}; 5. die Kleinsche Gruppe Γ_{168} (F. d. M. **11**, 297, 1879).

Die Gruppen 1, die einen Punkt O und eine Gerade r ungeändert lassen, werden mit dem Symbol (O_r) bezeichnet. Eine solche Gruppe ist meriedrisch isomorph zu einer Gruppe der linearen Transformationen auf der Geraden r.

Im Falle 2 können die Ecken des Dreiecks entweder nur zyklisch oder aber auf alle möglichen Arten vertauscht werden: jenachdem entsteht eine Gruppe Δ_n^3, oder aber $\Delta_n^6 (n > 1)$. Für $n = 3$ hat man eine Hessesche Gruppe Δ_3^3, die zugleich die vier Wendedreiecke einer Kurve dritter Ordnung als Ganzes ungeändert läßt. Desgleichen wird die Struktur der unter 3, 4, 5 angegebenen Gruppen diskutiert. Die Gruppe Γ_{360} ist nicht holoedrisch isomorph zu der entsprechenden Gruppe ternärer unimodularer Substitutionen.

Jede Gruppe der Kategorien 1 und 2 heißt eine „uneigentliche“ Gruppe der Ebene, dagegen jede der Gruppen 3, 4, 5 eine „eigentliche“.

Eine uneigentliche Gruppe läßt demnach einen Punkt und eine Gerade fest, oder sie transformiert ein Dreieck in sich, und der Grad einer solchen Gruppe kann beliebig hoch sein; die eigentlichen Gruppen besitzen jene Eigenschaften nicht.

Man bemerkt, daß die höchste Potenz von 2, die in den Graden der eigentlichen Gruppen aufgeht, gleich 2^3 ist.

Nunmehr wendet sich der Verf. zur Aufstellung der uneigentlichen endlichen Gruppen von S des Raumes. Eine solche läßt entweder einen Punkt P fest, und damit eine nicht durch P gehende Ebene Π, oder aber eine Gerade g, und damit eine zweite zu g windschiefe Gerade, oder endlich es findet keines von beiden statt. Man hat vier Hauptfälle: α) die Gruppen, die einen und nur einen Punkt fest lassen; β) die Gruppen, die eine Gerade fest lassen; γ) die Gruppen, die eine lineare Geradenkongruenz in sich überführen; δ) die Gruppen, die ein Tetraeder in sich transformieren, so daß die vier Ecken alle geraden Vertauschungen erleiden. Diese vier Arten von Gruppen werden eingehend untersucht. Unter den Gruppen δ) gewähren ein besonderes Interesse die den Werten $n = 4, 8, 16, 32$ entsprechenden. Waren die Gruppen $\alpha), \ldots, \delta$) wieder „uneigentliche“, insofern ihr Grad beliebig hoch sein kann, so kommen nunmehr die „eigentlichen“ Gruppen zur Behandlung, deren Grad begrenzt ist, und die weder einen Punkt, noch eine Kongruenz, noch ein Tetraeder

fest lassen. Als erste Klasse der neuen Gruppen treten die auf, die Homologien von einer Ordnung $\nu > 3$ enthalten. Aber alle diese sind in Wahrheit uneigentliche Gruppen, die im vorigen erledigt waren. Dagegen ist unter den Gruppen, die Homologien der dritten Ordnung enthalten, eine eigentliche vorhanden, eine einfache Gruppe von 25920 Kollineationen. Diese enthält keine involutorischen Homologien (d. h. von der zweiten Ordnung), da überhaupt keine eigentliche Gruppe existiert, die Homologien der dritten und zweiten Ordnung zugleich enthielte. Die vier erzeugenden Substitutionen der in Rede stehenden Gruppe lassen sich sofort hinschreiben.

Sodann handelt es sich um die eigentlichen Gruppen, die involutorische Homologien enthalten. Zunächst wird nachgewiesen, daß der Grad n einer solchen Gruppe nicht größer als fünf sein kann, da die anderen Fälle auf uneigentliche Gruppen zurückführen. Es werden vier solcher Gruppen aufgefunden, je eine G_6, G_8, G_{10}, G_{16}, die selbst Untergruppen einer gewissen (uneigentlichen) „Hauptgruppe" G sind. Diese vier Gruppen sind selbst nicht zugleich in einer und derselben eigentlichen Gruppe enthalten; dagegen existieren eigentliche Gruppen, die eine oder mehrere Untergruppen von jedem Typus enthalten. Zu dem Typus G_{16} gehört als einzige eigentliche die von Klein (F. d. M. **3**, 60, 1871) aufgefundene von 11520 Kollineationen; sie ist zugleich die Hauptgruppe der desmischen Konfigurationen. Ebenso gehört zum Typus G_{10} eine einzige eigentliche, vom Verf. schon früher (l. c.) ermittelte Gruppe von 7200 Kollineationen, die eine F_2 in sich überführt. Zum Typus G_8 gehört je eine G von 1152 und eine G von 576 Kollineationen, die Untergruppen der Kleinschen Gruppe sind. Endlich gehören zum vierten Typus G_6 eine in der Kleinschen Gruppe enthaltene G von 288 und eine G von 120 Kollineationen, die selbst eine Untergruppe der oben aufgeführten G_{7200} ist.

Die wesentlichsten Ergebnisse sind danach folgende. Alle endlichen Gruppen von S des R_3, die Homologien von einer Ordnung > 3 enthalten. sind uneigentliche, d. h. sie lassen entweder einen Punkt und eine Ebene fest, oder sie führen ein Paar windschiefer Geraden in sich über, oder endlich ein Tetraeder. Abgesehen von diesen, existieren nur acht eigentliche Gruppen: 1. eine einfache Gruppe von 25920 S mit 80 Homologien der dritten Ordnung, die bei der Dreiteilung der hyperelliptischen Funktionen auftritt und isomorph ist mit derjenigen, von der die 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung abhängen; 2. eine einfache Gruppe von 11520 S mit 60 involutorischen Homologien, die Hauptgruppe der desmischen Konfigurationen; sie vertauscht sechs zur Kummerschen Fläche gehörige lineare Komplexe; 3. eine Gruppe von 7200 S mit 60 involutorischen Homologien, die eine F_2 in sich überführt; 4. eine Gruppe von 1920 S mit 40 involutorischen Homologien; 5. eine Gruppe von 1152 S mit 24 involutorischen Homologien, die eine F_2 in sich überführt; 6. eine Gruppe von 576 S mit 24 involutorischen Homologien, die eine F_2 in sich überführt; 7. eine Gruppe von 288 S mit 12 involutorischen Homologien, die eine F_2 in sich überführt; 8. eine

Gruppe von 120 S mit 10 involutorischen Homologien, die eine F_2 in sich überführt und holoedrisch isomorph ist mit der symmetrischen Gruppe von fünf Dingen. Die Darstellungskoeffizienten sind bei 1, 2, 4 imaginär, bei den übrigen reell. My.

G. Fubini. Sulla teoria dei gruppi discontinui. Annali di Mat. (3) **11**, 159-186.

Diese Arbeit ist eine Weiterführung einer früheren des Verf. (F. d. M. **34**, 126, 1903). Es handelt sich um diskontinuierliche Gruppen (d. h. solche ohne infinitesimale Transformationen) von Projektivitäten in einer und in zwei Variabeln. Über die ersteren existieren einige wichtige Theoreme, von denen zwei von Poincaré herrühren, eines von F. Klein, endlich ein weiteres von Hilbert ausgesprochen und von Blumenthal bewiesen wurde.

Die beiden Theoreme von Poincaré und das von Hilbert-Blumenthal wurden vom Verf. in der erwähnten Abhandlung durch ein allgemeineres umfaßt: „Eine diskontinuierliche Gruppe G von reellen (komplexen) Projektivitäten, die eine quadratische (Hermitesche) Form in sich überführen, wirkt in eigentlich diskontinuierlicher Weise auf die reellen (komplexen) Punkte eines geeigneten Bereiches des umgebenden Raumes.“ Dieser Satz läßt sich übrigens auf Systeme von quadratischen, resp. Hermiteschen Formen ausdehnen. Hieraus folgt weiter: Wenn eine Gruppe von Bewegungen in einem euklidischen oder nichteuklidischen Raume von n Dimensionen, die durch eine quadratische Form definiert sind, diskontinuierlich ist, so ist sie auch eigentlich diskontinuierlich. Ferner entspricht jeder Gruppe G eine Metrik, die durch eine positive quadratische Differentialform definiert ist, die eine kontinuierliche Gruppe von Bewegungen gestattet, von der G eine diskontinuierliche Untergruppe ist.

Der Verf. verfolgt in der vorliegenden Abhandlung das Ziel, alle jene mehr oder weniger vereinzelten Ergebnisse unter einem einzigen Gesichtspunkt zusammenzufassen und zugleich die Beweise so einfach wie möglich zu gestalten. Die projektiven Gruppen beziehen sich dabei auf n Variabeln. Die diskontinuierlichen Bewegungsgruppen werden für irgend eine Metrik untersucht, die durch eine beliebige (nicht nur quadratische) Differentialform definiert ist, so daß sie eine Liesche Gruppe von Bewegungen enthält. Von den allgemeinen Sätzen werden Anwendungen gemacht auf die Theorie der automorphen Funktionen, sowie auf die Äquivalenztheorie ganzer algebraischer Formen mit ganzen Koeffizienten eines beliebigen algebraischen Körpers. Die Bewegungen in einer Cayleyschen Metrik von n Dimensionen lassen sich in elliptische, parabolische, hyperbolische und loxodromische (Produkt einer elliptischen mit einer parabolischen oder hyperbolischen Bewegung) einteilen. In dem allgemeinen Falle des Verf. läßt sich diese scharfe Trennung nicht mehr aufrecht erhalten.

Nach diesem Überblick gehen wir noch auf einige Einzelheiten ein. Als Ausgang dient die Reduktion einer Projektivität $P: x_i' = \sum a_{ik} x_k$ auf partielle Projektivitäten der beiden Typen $z' = \varrho z_i$, und $z_1' = \varrho(z_1 + z_2), z_2' = \varrho(z_2 + z_3), \ldots, z_{m-1}' = \varrho(z_{m-1} + z_m), z_m' = \varrho z_m$, die Zykeln von einer, resp. von m Variabeln heißen, mit der „Wurzel" ϱ, die der charakteristischen Gleichung der Projektivität P genügt.

Sei nun außerdem eine reelle definite Form $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vorgelegt, so gilt zunächst der Satz, daß die Koeffizienten einer reellen P, die V in sich transformiert, sämtlich, absolut genommen, unter einer gewissen, durch V bedingten Konstante liegen. Verwandelt dagegen P die Form V in eine andere (definite) Form V' derart, daß sich die Koeffizienten von V' von denen von V um eine Größe unterscheiden, die unterhalb einer festen Konstante h liegt, so liegen wiederum die Koeffizienten von P, absolut genommen, unter einer lediglich durch V und h bedingten andern Konstante.

Hieraus läßt sich die notwendige und hinreichende Bedingung dafür entnehmen, daß eine Gruppe G von unimodularen Projektivitäten P diskontinuierlich ist; nach Wahl einer beliebigen positiven Zahl N darf G höchstens eine endliche Anzahl solcher Projektivitäten enthalten, deren Koeffizienten, absolut genommen, kleiner als N sind.

Ist im besondern G eine Gruppe von reellen P, die eine gegebene definite Form in sich überführen, so muß G endlich sein, d. h. nur aus einer endlichen Anzahl von P bestehen, und G ist dann zugleich eigentlich diskontinuierlich. Die Ausdehnung dieser Entwicklungen führt zu dem weiteren Satze: Läßt eine diskontinuierliche Gruppe G reeller unimodularer P ein System S definiter Formen beliebigen Grades fest, wobei irgend eine Form von S in eine andere Form von S übergehen kann, so wirkt G in eigentlich diskontinuierlicher Weise auf das Formensystem S. Dieser einfache Satz umfaßt in Wirklichkeit alle früheren, und es lassen sich weitere Folgerungen von Bedeutung daraus ziehen. Es wirke unter anderem eine diskontinuierliche Gruppe G von P in einem beliebigen Raume Σ, den man sich als einen Ort S von lauter F_2 (quadratischen Gebilden) denke, und es sei R dasjenige Gebiet von S, dessen Punkte Bilder von definiten quadratischen Formen in Σ sind. Dann ist G in R eigentlich diskontinuierlich. Und dies Ergebnis bleibt gültig, auch wenn die quadratischen (definiten) Formen ersetzt werden durch (definite) Formen beliebigen Grades.

Eine besonders wichtige Anwendung liefert die Betrachtung der Hermiteschen Formen. Sei G jetzt eine diskontinuierliche Gruppe von reellen oder komplexen P gewisser Variabeln z; man betrachte alle Hermiteschen Formen in den z, und es sei S der Raum, dessen homogene Koordinaten der reelle und der imaginäre Teil der Koeffizienten jener Formen sind. Entspricht hierbei definiten Formen das Gebiet R, so ist wiederum G in R eigentlich diskontinuierlich.

Diese Sätze, denen sich noch eine große Reihe analoger anreiht, lassen die Tragweite der Untersuchungen des Verf. erkennen. My.

C. Juel. Note om et direkte og elementärt Bevis for Gruppetheoriens Hovedsätning, naar Gruppen har to Parametre. Nyt Tidsskr. for Math. **16** B, 6-15.

Wenn eine Liesche Transformationsgruppe mit einem Parameter durch das Symbol

$$Xf = \xi_1(x)\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \xi_n(x)\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ausgedrückt wird, enthält jede Transformationsgruppe mit zwei Parametern ein lineares System infinitesimaler Transformationen, bestimmt durch $e_1 X_1 f + e_2 X_2 f$, wo e_1 und e_2 willkürliche Konstanten sind. Umgekehrt kann man fragen, wann bestimmt ein solches System eine Transformationsgruppe mit zwei Parametern? Lie beantwortet die Frage so: Die notwendige und zulängliche Bedingung sei, daß identisch

$$(\chi_1 \chi_2) = c_1 \chi_1 f + c_2 \chi_2 f,$$

wo c_1 und c_2 Konstanten sind, und indem $(\chi_1 \chi_2) = \chi_2 \chi_1 f - \chi_2 \chi_1 f$. Der Verf. gibt einen sehr einfachen und ganz elementaren Beweis dieses Satzes und bemerkt, daß man auf ähnliche Weise leicht die notwendigen Bedingungen für eine Gruppe mit mehreren Bedingungen finden kann, daß es aber schwierig ist, zu beweisen, daß sie auch zulänglich sind.

V.

J. E. Wright. Application of the theory of continuous groups to a certain differential equation. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 180-182.

In Wolstenholmes „Mathematical Problems" lautet Nr. 1964: Längs der Normale einer Kurve in P wird eine feste Länge PQ abgemessen; O ist ein fester Punkt und die Kurve ist so beschaffen, daß der um OPQ beschriebene Kreis bei O eine feste Tangente hat. Die Differentialgleichung, ihr allgemeines Integral und ihre singuläre Lösung zu finden." Das Hauptinteresse der Aufgabe liegt, wie Wright meint, in der Tatsache, daß sie, obgleich ohne Bezug auf die Gruppentheorie gestellt, durch schlichte Anwendung jener Theorie vollständig gelöst werden kann; außerdem liefert sie einen guten Beleg für die Art des Zusammenhanges zwischen den Differentialgleichungen und jener Theorie. Dies wird in der Note näher gezeigt.

Lp.

E. Cartan. Sur la structure des groupes infinis de transformations. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 219-308.

Die Fortsetzung der F. d. M. **35**, 176, 1904 besprochene Arbeit. Zunächst wird gezeigt, daß jede Gruppe G, die durch eine Anzahl invarianter Funktionen U und eine Anzahl invarianter Pfaffscher Ausdrücke ω_k definiert ist, auch definiert werden kann als die allgemeinste Gruppe, welche die Funktionen U invariant läßt und gewisse Pfaffsche Ausdrücke ϖ_k durch eine lineare homogene Gruppe Γ transformiert. Diese Gruppe Γ bezeichnet der Verf. als die „adjungierte Gruppe". Ist Γ gegeben,

so müssen die ϖ_k gewisse Bedingungen erfüllen, wenn sie zusammen mit Γ eine Gruppe G definieren sollen. Die neue Definition der Gruppe G hat den Vorteil, daß in ihr nur solche Pfaffschen Ausdrücke auftreten, die aus den bei der Gruppe transformierten Veränderlichen $x_1, \ldots, x_r$ gebildet sind, und außerdem eine lineare homogene Gruppe. Der Verf. betrachtet dann zunächst das, was er die „normale holoedrische Erweiterung" von G nennt. Man erhält, indem man zu den x die Veränderlichen y hinzunimmt, die in den früher betrachteten Pfaffschen Ausdrücken ω und ϖ vorkommen, eine erste erweiterte Gruppe G', deren Struktur und deren adjungierte Gruppe Γ' bestimmt wird, aus G' eine zweite erweiterte Gruppe G'' usw. Als Beispiele werden die normalen Erweiterungen der unendlichen Gruppen aller Punkttransformationen der Geraden und der Ebene betrachtet. Sodann wird allgemein untersucht, wann eine unendliche Gruppe G die Erweiterung einer vorgelegten Gruppe G_1 ist. Man kann dabei annehmen, daß G alle Veränderlichen $x_1, \ldots, x_s$ von G_1 untereinander vertauscht, und die Erweiterung wird holoedrisch oder meriedrisch sein, jenachdem die Transformationen von G, bei denen $x_1, \ldots, x_s$ alle invariant bleiben, sich auf die identische Transformation reduzieren oder eine neue Gruppe $\bar{G}$ bilden. Man kann aus der bloßen Struktur von G erkennen, welcher von beiden Fällen eintritt. und im zweiten Falle auch die Struktur von $\bar{G}$ ermitteln. Auch hierfür werden Beispiele gegeben, und dann wird untersucht, unter welchen Bedingungen eine Gruppe G. deren Definitionsgleichungen von der ersten Ordnung sind, die holoedrische Erweiterung einer Gruppe G_1 von derselben Art ist. Es folgt die allgemeine Theorie der Bestimmung aller Gruppen, die zu einer gegebenen Gruppe G holoedrisch isomorph sind, mit Anwendungen auf spezielle endliche und unendliche Gruppen. Es stellt sich nun weiter heraus, daß zwei unendliche Gruppen G_1 und G_2 ähnlich und also holoedrisch isomorph sein können, während zugleich eine dritte Gruppe G existiert, die eine holoedrische Erweiterung von G_1 und eine meriedrische von G_2 ist, so daß dann G_1 und G_2 zugleich auch meriedrisch isomorph sind. Man muß daher zwischen eigentlichem und uneigentlichem meriedrischem Isomorphismus unterscheiden. Eigentlich meriedrisch isomorph sind zwei Gruppen, die als meriedrisch isomorph, aber auf keine Art als holoedrisch isomorph aufgefaßt werden können. Ebenso heißt eine Gruppe eigentlich einfach, wenn sie weder eigentlich noch uneigentlich meriedrisch isomorphe Gruppen zuläßt, uneigentlich einfach, wenn sie keine eigentlich meriedrisch isomorphen Gruppen zuläßt, sondern nur uneigentliche. Den Schluß der Abhandlung bildet eine Untersuchung über die unendlichen Gruppen, die von willkürlichen Funktionen eines Argumentes abhängen. El.

W. Ermakoff. Groupes de transformations, continus, isomorphes holoédriques. Toulouse Ann. (2) 7, 443-466.

Das Hauptziel der Arbeit ist der Beweis eines Satzes, von dem der Verf. meint, er werde alle, die sich mit Gruppentheorie beschäftigt haben,

überraschen, des Satzes nämlich, daß zwei holoedrisch isomorphe Gruppen stets ineinander überführbar sind, auch wenn sie nicht die gleiche Zahl von Veränderlichen enthalten. Mit der Überraschung hat es allerdings seine Richtigkeit, aber nur insofern, als man billig erstaunen muß, etwas so Altes für neu ausgegeben zu sehen. Die Überführung der einen Gruppe in die andere beruht nämlich einfach auf dem Verfahren, das Lie schon vor vielen Jahren benutzt hat, um aus einer r-gliedrigen Gruppe eine einfach transitive gleichzusammengesetzte Gruppe zu konstruieren (vgl. Th. d. Transformationsgruppen I, S. 156; III, S. 587 ff.), und auf dem Lieschen Satze von der Ähnlichkeit gleichzusammengesetzter einfach transitiver Gruppen. Die Entwicklungen des Verf. sind nicht einmal alle in Ordnung. Z. B. ist Theorem II auf S. 449 falsch; denn eine endliche Transformation, bei der alle infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe untereinander vertauscht werden, braucht keineswegs dieser Gruppe anzugehören. Ebenso ist der Satz am Ende von S. 453 unrichtig; denn es gibt ja transitive Gruppen, die systatisch sind, und deren Transformationen bleiben bei allen Transformationen einer kontinuierlichen Gruppe invariant. Welches Recht hat überdies der Verf., den Ausdrücken primitiv und imprimitiv, deren Bedeutung festgelegt ist, plötzlich einen ganz anderen Sinn unterzulegen (S. 450)? El.

H. F. Baker. Alternants and continuous groups. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 24-47.

Der Verf. hat das Verständnis seiner Arbeit durch Anwendung gewisser Symbole, namentlich durch die ziemlich überflüssige Einführung der „Bases of alternants“ etwas erschwert. Ich muß daher darauf verzichten, seinen Gedankengang wiederzugeben, und begnüge mich, einige seiner Resultate in etwas anderer Form mitzuteilen. Es handelt sich um folgendes: Führt man nacheinander zwei Transformationen: $f' = e^{tXf}$ und $f' = e^{\tau Yf}$ aus, die von den infinitesimalen Transformationen Xf und Yf erzeugt sind, so erhält man eine Transformation, von der zu erwarten ist, daß sie von einer infinitesimalen Transformation Zf erzeugt und also in der Form: $f' = e^{Zf}$ darstellbar ist, und daß Zf eine unendliche Reihe von aus Xf und Yf gebildeten Klammerausdrücken wird. In der Tat ergibt sich, wenn man

$$((X\overset{\nu}{Y})Y) = (X\overset{\nu+1}{Y})$$

setzt:

$$Xf = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)!}\left(\frac{\partial Z}{\partial t}\overset{\nu}{Z}\right),$$

$$Yf = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{(\nu+1)!}\left(\frac{\partial Z}{\partial t}\overset{\nu}{Z}\right)$$

und daraus, wenn

$$\frac{u}{e^u - 1} = \sum_0^\infty{}_\nu \lambda_\nu u^\nu$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial Zf}{\partial t} = \sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu \lambda_\nu (X\overset{\nu}{Z}),$$

$$\frac{\partial Zf}{\partial \tau} = \sum_0^\infty {}_\nu \lambda_\nu (Y\overset{\nu}{Z}),$$

woraus unter anderem die Schurschen Formeln für die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe ohne weiteres folgen. Es sind im Grunde solche und ähnliche Formeln, die der Verf. ableitet, und die er insbesondere benutzt, um eine Rekursionsformel zur wirklichen Berechnung von Zf abzuleiten. Er faßt jedoch das ganze Theorem zunächst nicht gruppentheoretisch, sondern als die Aufgabe, die symbolische Exponentialgleichung: $e^C = e^A \cdot e^B$ nach C aufzulösen, wenn die Multiplikation bloß assoziativ, nicht kommutativ ist, und die unmittelbar angebbare Auflösung:

$$C = (e^A e^B - 1) - \tfrac{1}{2}(e^A e^B - 1)^2 + \cdots$$

aus alternierenden Produkten von A und B zusammenzusetzen. Dieselbe Auffassung hat in übersichtlicherer und einfacherer Darstellung inzwischen Hausdorff entwickelt in der Arbeit: „Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie" (Leipz. Ber. **58**, 19-48, 1906). Die Bakersche Abhandlung, die Hausdorff entgangen war, enthält jedoch schon einen sehr wesentlichen Teil der von Hausdorff gefundenen Resultate.

El.

S. E. Slocum. Relation between real and complex groups with respect to their structure and continuity. American J. **27**, 7-14.

Der Verf. nennt nach dem Vorgange von Taber (vgl. F. d. M. **31**, 150, 1900) eine nach Lies Definition kontinuierliche Gruppe dann diskontinuierlich, wenn sie endliche Transformationen enthält, die von keiner infinitesimalen Transformation erzeugt sind. Versteht man unter $a_1, \ldots, a_r$ die kanonischen Parameter einer r-gliedrigen Gruppe, und ist $\bar{a}_k$ ein Wertsystem, das den gemeinsamen Nenner der infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe zum Verschwinden bringt, so ist die endliche Transformation $T_{\bar{a}}$ der kanonischen Parametergruppe von keiner infinitesimalen Transformation erzeugt. Trotzdem kann der Punkt $\bar{a}_k$ des Raumes der Parametergruppe unter Umständen bei dieser Gruppe in jeden beliebigen andern Punkt übergehen; aber der Übergang in die neuen Lagen kann nicht aus infinitesimalen Übergängen zusammengesetzt werden. Der Verf. bemerkt dann, daß eine r-gliedrige Zusammensetzung unter Umständen verschiedene reelle Formen erhalten kann, die im komplexen Gebiete holoedrisch isomorph sind, nicht aber im reellen Gebiete. Dabei kann es z. B. vorkommen, daß die zu einer solchen reellen Form gehörigen reellen Gruppen alle kontinuierlich sind im Sinne des Verf., indem jede reelle Transformation von einer reellen infinitesimalen reell erzeugt ist. Das tritt ein, wenn der vorhin erwähnte gemeinsame Nenner für kein reelles Wertsystem verschwindet. Der Verf.

gibt Beispiele für die verschiedenen Möglichkeiten. Wenn er übrigens behauptet, die auf S. 12 in der Anm. angegebenen vier reellen Zusammensetzungen seien im reellen Gebiete verschieden, so ist er im Irrtum; denn die Zusammensetzung der Gruppe $p, xp, x^2 p, q$ kann offenbar nur zwei reell verschiedene reelle Formen erhalten. In der Tat sind die Formen 2, 3, 4 auch reell gleich zusammengesetzt. El.

G. Ricci. Sui gruppi continui di movimenti rigidi negli iperspazii. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_2$, 487-491.

Der Verf. betrachtet eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit V_n mit quadratischem Bogenelement. Indem er sich auf eine frühere Arbeit (F. d. M. **35**, 145, 1904) stützt, führt er den Begriff der regulären V_n ein, weil für diese die Gleichungen zur Bestimmung der möglichen starren Bewegungen besonders einfach werden. Er leitet mehrere Sätze ab, die teils hinreichende, teils notwendige Bedingungen dafür enthalten, daß eine V_n, insbesondere eine reguläre V_n eine Gruppe, namentlich eine transitive Gruppe von starren Bewegungen zuläßt. El.

B. Determinanten.

Th. Muir. The theory of general determinants in the historical order of development up to 1852. Edinb. R. S. Proc. **25**, 908-947.

Übersicht über den Inhalt der in den Jahren 1844-1852 erschienenen Determinantenarbeiten aus der Feder von Cauchy (1844, 1847), Hansen (1846), Cayley (1847, 1851), Joachimsthal (1849), Sylvester (1850, 1851, 1852), Spottiswoode (1851), Betti (1852) und Faà di Bruno (1852), darunter auch das in mehrfacher Hinsicht merkwürdige Mémoire Cauchys sur les clefs algébriques (1847). Jhk.

Th. Muir. A third list of writings on determinants (continued). Quart. J. **36**, 193-267.

Fortsetzung des Verzeichnisses der Arbeiten, welche über Determinanten in den Jahren 1886-1900 erschienen sind. Am Schluß dieser dritten Liste ist ein alphabetisches Verzeichnis aller Autoren angehängt. Jhk.

Th. Muir. The theory of continuants in the historical order of development up to 1880. Edinb. R. S. Proc. **25**, 648-679.

Ergänzung und Fortsetzung des Berichtes über die Arbeiten, welche von den Kettenbruchdeterminanten handeln (vgl. F. d. M. **35**, 186, 1904). Die Liste der Verf. nebst Erscheinungsjahr der Abhandlungen ist folgende: Smith (1854), Studnička (1872), Hattendorf (1872), Casorati (1872), Bauer (1872), Nachreiner (1872), Günther (1873, 1874,

1875, 1877). Muir (1874, 1877, 1878), Wolstenholme (1874), Diekmann (1875), Guldberg (1876), Salmon (1876), Baraniecki (1878). Mansion (1878, 1880). Scott (1878, 1880), Sylvester (1879). Jhk.

Th. Muir. The condensation of continuants. Edinb. M. S. Proc. **23**, 35-39.

Eine Note in Edinb. M. S. Proc. **2**, 16-18 zeigt, daß eine Kontinuante mit univarialen Diagonalen mit Hülfe einer ähnlichen Kontinuante von viel niedrigerer Ordnung ausdrückbar ist. In der vorliegenden Note wird gezeigt, daß die fragliche Eigentümlichkeit nicht auf die obige besondere Form beschränkt ist, sondern für Kontinuanten von irgend welcher Form besteht. Gbs. (Lp.)

Th. Muir. Continuants resolvable into linear factors. Edinb. Trans. **41**, 343-358.

Sylvester und Painvin haben die ersten Beispiele von Kontinuanten mitgeteilt, die sich in Linearfaktoren auflösen lassen. Kontinuanten ganz anderer Art, welche zerlegbar sind, hat der Verf. gefunden: Die Kontinuante n-ter Ordnung, deren Hauptdiagonale lautet

$$a, a+2\cdot 1^2\cdot c,\ a+2\cdot 2^2\cdot c,\ a+2\cdot 3^2\cdot c, \dots$$

und deren Nebendiagonalen sind:

$$2(n-1)\,b,\ (n-2)(b+c),\ (n-3)(b+2c), \dots$$
$$n(b-c),\ (n+1)(b-2c),\ (n+2)(b-3c), \dots,$$

ist gleich dem Produkt der n Faktoren

$$[a+2(n-1)\,b]\,[a+2(n-3)\,b+2(2n-3)\,c]\times$$
$$[a+2(n-5)\,b+4(2n-5)\,c)]\dots[a-(2n-1)\,b+(2n-2)\,c].$$

Diesem Satz wird ein zweiter an die Seite gestellt. Um dann die Resultate zu verallgemeinern, stellt der Verf. die Bedingungen zwischen den β_i, γ_i und $p, q, r, \dots$ auf, damit die Kontinuante

$$\begin{vmatrix} a & 2(n-1)\beta_1 & \cdot & \cdot & \dots \\ n\gamma_1 & a+p & (n-2)\beta_2 & \cdot & \dots \\ \cdot & (n+1)\gamma_2 & a+q & (n-3)\beta_3 & \dots \\ \cdot & \cdot & (n+2)\gamma_3 & a+r & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}$$

in Linearfaktoren auflösbar sei. Jhk.

Th. Muir. Further note on factorizable continuants. Trans. of the South. Afr. Phil. Soc. **15**, 183-194.

Anschließend an eine Notiz, die im gleichen Bande 1904 auf S. 29-33 veröffentlicht ist, findet der Verf. den Wert der Kontinuante oder Kettenbruchdeterminante:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & . \dots\dots & . & . \\ 2n-1 & a & 2 \dots\dots & . & . \\ . & 2n-2 & a \dots\dots & . & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ . & . & . \dots\dots & a & n-1 \\ . & . & . \dots\dots & n+1 & a+n \end{vmatrix}_n = (a+\overline{2n-1}) \,.\, (a-\overline{2n-3}) \,.\, (a+\overline{2n-5}) \,.\, (a-\overline{2n-7}) \dots\dots$$

Dieser Satz führt ihn zu der Frage nach der allgemeinsten Kontinuante, welche sich in Faktoren zerlegen läßt. Bei der näheren Untersuchung sind die beiden Fälle zu unterscheiden, wo die Ordnung der Determinante eine Zahl von der Form $2m$ oder $2m+1$ ist. Es genüge, das Resultat für den ersteren Fall mitzuteilen: Die Kontinuante

$$\begin{vmatrix} A_1 & \beta_1 & . & \dots \\ \gamma_1 & A_2 & \beta_2 & \dots \\ . & \gamma_2 & A_3 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}$$

ist in lineare Faktoren zerlegbar, wenn

$$A_1 = a + \tau,\ A_{2\theta} = a + \frac{\theta}{2\theta-1} M,\ A_{2\theta+1} = a + \frac{\theta}{2\theta+1} M;$$

$$\beta_1 = b, \qquad \beta_{2\theta} = \frac{m-\theta}{m}\tau,\ \ \beta_{2\theta+1} = \frac{1}{2\theta+1}\left\{\theta s + b - \frac{2\theta(\theta+1)}{m}\tau\right\};$$

$$\gamma_1 = s - b,\ \gamma_{2\theta} = \frac{m+\theta}{m}\tau,\ \ \gamma_{2\theta+1} = \frac{1}{2\theta+1}\left\{(\theta+1)s - b + \frac{2\theta(\theta+1)}{m}\right\};$$

wo $M = 2b - s + \frac{1}{m}\tau$ gesetzt ist. Die Faktoren heißen alsdann:

$$\left(a+b+\tau\right) \cdot \left(a+b-s-\tau+\frac{2}{m}\tau\right)$$
$$\cdot \left(a+b+\tau-\frac{2}{m}\tau\right) \cdot \left(a+b-s-\tau+\frac{4}{m}\tau\right)$$
$$\cdot \left(a+b+\tau-\frac{4}{m}\tau\right) \cdot \left(a+b-s-\tau+\frac{6}{m}\tau\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\cdot \left(a+b+\tau-\frac{2m-2}{m}\tau\right) \cdot \left(a+b-s-\tau+\frac{2m}{m}\tau\right).$$

Jhk.

TH. MUIR. Continuants whose main diagonal is univarial. Edinb. R. S. Proc. **25**, 507-512.

In einem Aufsatz des Messenger of Math. **34**, 126 (F. d. M. **35**, 183, 1904) hat der Verf. gefunden, daß die Kontinuante n-ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} \theta & b_1 & . & \dots \\ -1 & \theta & b_2 & \dots \\ . & -1 & \theta & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix} = \theta^n + A_1\,\theta^{n-2} + A_2\,\theta^{n-4} + \dots$$

ist, wo A_r die Summe aller Produkte bedeutet, die sich aus r Größen $b_1, b_2, \dots$ bilden lassen unter der Einschränkung, daß keine zwei aufeinander folgende b in einem Produkt auftreten. Er macht nun die elegante Bemerkung, daß, wenn ich linker Hand die 2-ten, 4-ten, 6-ten Diagonalelemente durch Φ ersetze, rechter Hand nur θ^2 durch $\theta\Phi$ ersetzt zu werden braucht, daß also die Koeffizienten A_n ungeändert bleiben:

$$\begin{vmatrix} \theta & b_1 & . & . & \dots \\ -1 & \Phi & b_2 & . & \dots \\ . & -1 & \theta & b_3 & \dots \\ . & . & -1 & \Phi & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix} = \begin{cases} (\theta\Phi)^m + A_1(\theta\Phi)^{m-1} + A_2(\theta\Phi)^{m-2} + \dots & (n=2m) \\ \theta[(\theta\Phi)^{m-1} + A_1(\theta\Phi)^{m-2} + \dots & (n=2m-1) \end{cases}$$

Dieses Resultat führt den Verf. zu einer Reihe neuer Theoreme, unter denen ich wenigstens eines anführen will: Die vorstehende Kontinuante läßt sich für den Fall $n = 2m$ in folgende Form setzen:

$$\begin{vmatrix} \theta\Phi + b_1 & b_1 & . & \dots \\ b_2 & \theta\Phi + b_2 + b_3 & b_3 & \dots \\ . & b_4 & \theta\Phi + b_4 + b_5 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}.$$

Jhk.

Th. Muir. The three-line determinants of a six-by-three array. Edinb. R. S. Proc. **25**, 364-371.

Aus einer Matrix von drei Horizontal- und sechs Vertikalreihen lassen sich neunzig Produkte von je zwei Determinanten dritter Ordnung bilden, die nicht komplementar zu einander sind. Der Verf. beweist den Satz, daß jedes dieser Produkte auf eine und nur auf eine Weise als Summe oder Differenz zweier anderen dieser Produkte dargestellt werden kann.

Jhk.

Th. Muir. The sum of the signed primary minors of a determinant. Edinb. R. S. Proc. **25**, 372-382.

Im 24ten Bande derselben Proceedings hat der Verf. über die Summe der primären Minoren, d. i. der Unterdeterminanten zweiten Grades einer Determinante, grundlegende Sätze aufgestellt. Diese finden jetzt ihre Anwendung, besonders auf die Kontinuanten. Jhk.

TH. MUIR. Equality of two compound determinants of orders n and $n-1$. Messenger (2) **35**, 118-121.

Beispielshalber nehme man die folgenden Anordnungen

$$\begin{matrix} a_1\, a_2\, a_3\, a_4, & h_1\, h_2\, h_3\, h_4, & m_1\, m_2\, m_3\, m_4, & x_1\, x_2\, x_3\, x_4, \\ b_1\, b_2\, b_3\, b_4 & k_1\, k_2\, k_3\, k_4 & n_1\, n_2\, n_3\, n_4 & y_1\, y_2\, y_3\, y_4 \\ c_1\, c_2\, c_3\, c_4 & l_1\, l_2\, l_3\, l_4 & r_1\, r_2\, r_3\, r_4 & z_1\, z_2\, z_3\, z_4 \end{matrix}$$

bilde aus ihnen die beiden Determinanten

$$D_{4,3} = \begin{vmatrix} |a_1\, b_2\, c_3| & |h_1\, k_2\, l_3| & |m_1\, n_2\, r_3| & |x_1\, y_2\, z_3| \\ |a_2\, b_3\, c_4| & |h_2\, k_3\, l_4| & |m_2\, n_3\, r_4| & |x_2\, y_3\, z_4| \\ |a_3\, b_4\, c_1| & |h_3\, k_4\, l_1| & |m_3\, n_4\, r_1| & |x_3\, y_4\, z_1| \\ |a_4\, b_1\, c_2| & |h_4\, k_1\, l_2| & |m_4\, n_1\, r_2| & |x_4\, y_1\, z_1| \end{vmatrix}$$

und

$$\Delta_{3,4} = \begin{vmatrix} |a_1\, b_2\, c_3\, x_4| & |h_1\, k_2\, l_3\, x_4| & |m_1\, n_2\, r_3\, x_4| \\ |a_1\, b_2\, c_3\, y_4| & |h_1\, k_2\, l_3\, y_4| & |m_1\, n_2\, r_3\, y_4| \\ |a_1\, b_2\, c_3\, z_4| & |h_1\, k_2\, l_3\, z_4| & |m_1\, n_2\, r_3\, z_4| \end{vmatrix}$$

dann ist $\Delta_{4,3} = -\Delta_{3,4}$.

Es seien n Anordnungen vorhanden, jede aus $n-1$ Zeilen und n Spalten; man bilde daraus zwei Determinanten, nämlich eine, deren r-te Spalte als Elemente die n Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung hat, die aus der r-ten Anordnung erhältlich sind; eine zweite, deren r-te Spalte als Elemente $n-1$ Determinanten n-ter Ordnung hat, welche durch Hinzufügung einer Zeile der n-ten Anordnung zu der r-ten Anordnung entstehen, so sind beide Determinanten einander gleich. Lp.

TH. MUIR. Notes on semicirculants. Trans. South. Afr. Phil. Soc. **16**, 153-163.

Bei einer Semizirkulante oder halbzyklischen Determinante $4m$-ter Ordnung, stimmen die $2m$ ersten Zeilen mit denen der gewöhnlichen Zirkulante und die $2m$ letzten mit denen der zugehörigen inversen Zirkulante überein. Für den Fall der achten Ordnung hat eine solche Determinante die Form:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ h & a & b & c & d & e & f & g \\ g & h & a & b & c & d & e & f \\ f & g & h & a & b & c & d & e \\ h & g & f & e & d & c & b & a \\ a & h & g & f & e & d & c & b \\ b & a & h & g & f & e & d & c \\ c & b & a & h & g & f & e & d \end{vmatrix}.$$

Der Verf. beweist zunächst den einfachen Satz, daß jede Semizirkulante $4m$-ter Ordnung verschwindet. Ist die Ordnung eine Zahl der Form $4m+2$, dann ist die Semizirkulante im allgemeinen von Null

verschieden; ihr Wert wird vom Verf. bestimmt mit Hülfe zweier rekurrierenden oder persymmetrischen Determinanten. Hiernach werden Semizirkulanten untersucht, wo die beiden zyklischen Vertauschungen nicht mehr beide rechtshändig, sondern entgegengesetztsinnig gewählt sind.

Jhk.

Th. Muir. The eliminant of a set of general ternary quadrics. — (Part III). Edinb. Trans. **41**, 387-397.

Für die Eliminante des Gleichungssystems

$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + f_1 yz + g_1 zx + h_1 xy = 0,$$
$$a_2 x^2 + b_2 y^2 + c_2 z^2 + f_2 yz + g_2 zx + h_2 xy = 0,$$
$$a_3 x^2 + b_3 y^2 + c_3 z^2 + f_3 yz + g_3 zx + h_3 xy = 0$$

werden zwei neue Formen abgeleitet, welche die Tatsache hervorspringen lassen, daß die Eliminante sich auf eine einzige Determinante vierter Ordnung reduziert, sobald gewisse Determinanten, z. B. $|a_1\, b_2\, g_3|$, $|b_1\, c_2\, h_3|$, $|c_1\, a_2\, f_3|$ verschwinden. Dieses Resultat führt den Verf. zu der Aufgabe, das System von vier Gleichungen zu finden, dessen Koeffizienten die Elemente dieser Determinante sind, einer Aufgabe, die in einem sehr speziellen Falle bereits von Sylvester gelöst worden ist.

Jhk.

G. Marolli. Di una proprietà comune e di una affine dei determinanti di Puchta-Noether e dei circolanti. Batt. G. **43** [(2) **12**], 271-280.

Die Puchta-Noethersche Determinante vierter Ordnung

$$P_A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_2 & A_1 & A_4 & A_3 \\ A_3 & A_4 & A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \end{vmatrix}$$

läßt sich in die Form bringen: $(2^2)^{2^2} a_1\, a_2\, a_3\, a_4$, wenn

$$A_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \qquad A_2 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4,$$
$$A_3 = a_1 + a_2 - a_3 - a_4, \qquad A_4 = a_1 - a_2 - a_3 + a_4$$

gesetzt wird. Das allgemeine Gesetz für die Zerlegung einer Puchta-Noetherschen Determinante der Ordnung 2^n ist hiernach leicht erkennbar. Ähnlich läßt sich eine Zirkulante n-ter Ordnung C_φ in das Produkt $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^n a_1\, a_2 \dots a_n$ auflösen. Der Verf. betrachtet weiter eine Puchta-Noethersche Determinante P_φ und eine Zirkulante C_A, beide von der Ordnung 2^n, die erstere aufgebaut aus den Elementen φ einer Zirkulante 2^n-ter Ordnung, die letztere aus den Elementen A einer Puchta-Noetherschen Determinante der gleichen Ordnung. Beide stellen sich als Produkte von 2^n Linearfaktoren in den a dar, wo die Koeffizienten in den einzelnen Faktoren (2^n)-te Einheitswurzeln sind.

Jhk.

G. Marolli. Su certe matrici che presentano analogie con determinanti studiati da Puchta e da Noether. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 384-394.

L. Carlini. A proposito di certe matrici che presentano analogie coi determinanti di Puchta-Noether. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 644-649.

Die Puchta-Noetherschen Determinanten sind von der Ordnung 2^n, und ihre Elemente a_{rs} genügen den Bedingungen

$$a_{rs} = a_{sr} = a_{r+2^{k-1},\, s+2^{k-1}} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sie haben die bemerkenswerte Eigenschaft, sich in ein Produkt von 2^n Linearfaktoren zu zerlegen.

Der Verf. der ersten Notiz betrachtet nun die Matrix

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & . & . & . & a_\nu & a_{\nu+1} \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_6 & a_5 & . & . & . & a_{\nu-1} & a_{\nu+1} \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & a_7 & a_8 & . & . & . & a_{\nu-2} & a_{\nu+1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_8 & a_7 & . & . & . & a_{\nu-3} & a_{\nu+1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{\nu-1} & a_\nu & . & . & . & . & . & . & . & a_2 & a_{\nu+1} \\ a_\nu & a_{\nu-1} & . & . & . & . & . & . & . & a_1 & a_{\nu+1}, \end{matrix}$$

welche aus einer quadratischen Puchta-Noetherschen Matrix $\nu = 2^n$-ter Ordnung besteht, der eine Vertikalreihe von lauter gleichen Elementen, gleich $a_{\nu+1}$, hinzugefügt ist. Gegenstand seiner Notiz ist der Beweis, daß das Quadrat dieser Matrix sich in das Produkt von 2^{n+1} Faktoren auflöst, die von ihren Elementen linear abhängen. In der zweiten Notiz erfährt der Marollische Satz eine Verallgemeinerung in dem Sinne, daß das Produkt zweier Matrizen betrachtet und seine Zerlegung in Linearfaktoren bewiesen wird. Jhk.

L. Carlini. Due teoremi sui determinanti. Batt. G. **43** [(2) **12**], 63-67.

Aus n Elementen lassen sich $\binom{n}{h}$ Kombinationen von h untereinander verschiedenen Elementen aufstellen. Lege ich für die Anordnung dieser Kombinationen ein bestimmtes Gesetz zugrunde, dann kann ich nach der Nummer r fragen, welche einer bestimmten Kombination zukommt. Setze ich z. B. für die Dreierkombinationen der Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Anordnung fest:

123, 124, 125, 126, 134, ..., 234, 235, ..., 345, ..., 456,

dann besitzt die Kombination 346 die Nummer 18. Für diese Zahl r wird ein allgemeiner Ausdruck aufgestellt. Der zweite Satz erlaubt, eine Determinante n-ter Ordnung als Determinante $(n - m + 1)$-ter Ordnung darzustellen, deren Elemente Minoren m-ter Ordnung der gegebenen Determinante sind. Jhk.

E. J. Nanson. Minors of axi-symmetric determinants. American J. **27**, 69-76.

Die von **Kronecker** herrührenden linearen Relationen zwischen gewissen Minoren einer axensymmetrischen Determinante sind von **Metzler** und **Muir** verallgemeinert worden. Sie stehen in einem bemerkenswerten Zusammenhang mit gewissen Theoremen über allgemeine Determinanten, wie sie von **Schweins** und **Sylvester** aufgestellt worden sind. Gegenstand der vorliegenden Notiz ist es, diesen Zusammenhang aufzudecken. Jhk.

W. Kapteyn. Sur un théorème de la théorie des déterminants. Nieuw Archief (2) **7**, 38-41.

Beweis des Satzes, daß eine Kontinuante ungerader Ordnung verschwindet, wenn die vom Mittelpunkt der Determinante gleichweit abstehenden Elemente der Hauptdiagonale einander gleich, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftet sind, und wenn die Elemente der beiden benachbarten Diagonalen, welche zu jenem Mittelpunkt symmetrisch liegen, ein konstantes Verhältnis haben. Jhk.

E. D. Roe jr. On the coefficients in the quotient of two alternants. American M. S. Trans. **6**, 63-74.

Diese Untersuchung bildet eine Ergänzung zu dem Aufsatz, der im fünften Bande derselben Zeitschrift erschienen ist (F. d. M. **35**, 188, 1904). Ihr Gegenstand ist die Bestimmung der Koeffizienten der symmetrischen Funktion (p) in dem Quotienten der beiden Alternanten $|k_1\, k_2 \dots k_m|$ und $|0\; 1 \dots m|$. Jhk.

G. Frobenius. Zur Theorie der linearen Gleichungen. J. für Math. **129**, 175-180.

Sind $u_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + \dots + a_{\alpha n} x_n$ beliebig viele homogene lineare Funktionen der n Variabeln $x_1, \dots, x_n$, so ist die Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen gleich dem Range r ihres Koeffizientensystems $a_{\alpha\beta}$. Werden dann die r ersten Funktionen als unabhängig vorausgesetzt, so sind die linearen Gleichungen $u_{r+1} = 0$, $u_{r+2} = 0, \dots$ eine Folge der r unabhängigen Gleichungen $u_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, \dots, r)$. Ein vollständiges System von Lösungen dieser Gleichungen sei

$$x_1 = b_{\alpha 1}, x_2 = b_{\alpha 2}, \dots, x_n = b_{\alpha n}.$$

Dann hat das Koeffizientensystem $b_{\alpha\beta}$ den Rang $s = n - r$, und die Größen $x_1 = a_{\alpha 1}, \dots, x_n = a_{\alpha n}$ bilden ein vollständiges System von Lösungen der linearen Gleichungen $v_\alpha = b_{\alpha 1} x_1 + \dots + b_{\alpha n} x_n = 0$. Der Verf. nennt die beiden Systeme linearer Funktionen u_α, v_α adjungierte Systeme und die Systeme $a_{\alpha\beta}$ $(\alpha = 1, 2, \dots, n; \beta = 1, 2, \dots, r)$ und $b_{\alpha\beta}$ $(\alpha = 1, 2, \dots, n; \beta = 1, 2, \dots, s)$ adjungierte Matrizen. Diese beiden Matrizen $R_{r,n}$ und $S_{s,n}$ werden nun jede in zwei Teilmatrizen zerlegt, was durch das Schema angedeutet wird:

$$R_{r,n} = A_{r,r'} | B_{r,s'} \quad , \quad S_{s,n} = C_{s,r'} | D_{s,s'},$$

wobei $r + s = r' + s' = n$ ist. Hiernach beweist der Verf. folgenden, durch seine Einfachheit bemerkenswerten Satz: Haben die Matrizen A und D die Rangzahlen ϱ und σ, dann gilt die Relation:

$$\varrho - \sigma = r - s' = r' - s.$$

Am Schluß wird eine Angabe der Édition française de l'Encyclopédie t. I, vol. I, fasc. I, p. 90 richtig gestellt, wo die von Weierstraß herrührende funktionentheoretische Definition der Determinanten Kronecker zugeschrieben ist. Jhk.

Weitere Literatur.

L. E. Dickson. Expressions for the elements of a determinant of an array. Amer. Math. Monthly **12**, 217-221.

G. Dostor. Éléments de la théorie des déterminants avec application à l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie analytique dans le plan et dans l'espace, à l'usage des classes de mathématiques spéciales. 2e édition (nouveau tirage). Paris: Gauthier-Villars. XXXIII. u. 362 S. 8vo.

W. H. Metzler. Variant forms of vanishing aggregates of minors of axisymmetric determinants. Edinb. R. S. Proc. **25**, 717-721.

W. H. Metzler. Vanishing aggregates of determinant minors. Edinb. R. S. Proc. **25**, 853-861.

A. Young. On relations among perpetuants. Cambr. Trans. **20**, 66-73.

C. Elimination und symmetrische Funktionen.

F. Giudice. Sull'eliminazione. Batt. G. [2 (**12**)] **43**, 305-313.

G. Bauer, in seinen Vorlesungen über Algebra (F. d. M. **34**, 95, 1903), erschließt auf indirekte Weise den Satz: „Besitzen zwei Gleichungen mit der Resultante R und bekannten Gliedern a_m, b_n k gemeinsame Wurzeln, so muß eine der beiden Reihen von k Bedingungen erfüllt sein:

$$R = 0, \frac{\partial R}{\partial a_m} = 0, \ldots, \frac{\partial^{k-1} R}{\partial a_m^{k-1}} = 0; \quad R = 0, \frac{\partial R}{\partial b_n} = 0, \ldots, \frac{\partial^{k-1} R}{\partial b_n^{k-1}} = 0.$$

Alsdann verschwinden auch alle Ableitungen von R nach den Koeffizienten der einen oder der anderen Gleichung bis zur Ordnung $k - 1$." Indessen versagt dieser Satz, falls die gemeinsamen Lösungen nicht von derselben Vielfachheit für beide Gleichungen sind. Hat man z. B. p getrennte gemeinsame Wurzeln mit den Multiplizitäten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$, resp. $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, so müßten nach Bauer die Ableitungen von R nach a_m bis zur Ordnung $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_p - 1$ verschwinden, und entsprechend die nach b_n bis zur Ordnung $\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_p - 1$, was nicht der Fall ist. Zur Klärung der Frage geht der Verf. von dem allgemeinen Begriff der Resultante eines Systems von Gleichungen aus, deren Anzahl die der Unbekannten um eins übertrifft.

Es seien die Gleichungen $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_n = 0, f_{n+1} = 0$ mit den Graden $m_1, m_2, \ldots, m_n, m_{n+1}$ vorgelegt, wo

$$f_r = f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_{r1} + c_{r2} u_{r2} + c_{r3} u_{r3} + \cdots$$

Hier sind die c Koeffizienten und die u Monome. Die Grade seien steigend geordnet. Vermöge der ersten n Gleichungen reduziert sich f_{n+1} auf eine Form $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, die nur Glieder enthält, die weder durch $x_1^{m_1}$, noch durch $x_2^{m_2}$, etc. teilbar sind. φ ist dann linear durch $k = m_1 m_2 \ldots m_n$ Größen $u_1 = 1, u_2, \ldots, u_k$ darstellbar, wo die u die verschiedenen Potenzprodukte der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeuten. Entsprechendes gilt von $u_2 \varphi, u_3 \varphi, \ldots, u_k \varphi$, so daß man k lineare Gleichungen in den u erhält. Sind a_{ik} die Koeffizienten der u, und setzt man für die $x_1, \ldots, x_n$ ein Lösungssystem der $f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$ ein, so genügt φ der charakteristischen Gleichung $S(\varphi) \equiv | a_{11} - \varphi, a_{12}, \ldots, a_{1k} | = 0$. Umgekehrt sind die k Wurzeln dieser Gleichung die k Werte von φ, wenn man in φ die k gemeinsamen Wertsysteme von $f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$ substituiert. Hieraus geht aber sofort hervor, daß $S(0) = | a_{ik} | = \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_k$ wird; es ist $S(0) = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß wenigstens eine Lösung des Systems $f_1 = 0, \ldots f_n = 0$ zugleich eine solche von $f_{n+1} = 0$ ist, und ist jene Lösung 0 gerade eine p-fache von $S(\varphi) = 0$, so genügen auch gerade p Lösungen von $f_1 = 0, \ldots f_n = 0$ zugleich der letzten Gleichung $f_{n+1} = 0$.

Macht man alle Gleichungen vermöge einer Variable x homogen, und sind jetzt $m_1, m_2, \ldots m_{n+1}$ die Grade dieser homogenen Gleichungen $f_1 = 0, \ldots, f_{n+1} = 0$, so wird $S(0)$ vom Grade $m_1 m_2 \ldots m_{n+1}$ in x.

Die Koeffizienten a_{rs} hängen rational von den c_{rs} ab, und $S(0)$ ist daher nichts anderes als die bez. x gebildete Resultante (Eliminante) R des Systems $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_{n+1} = 0$. Diese Resultante R wird noch weiter analytisch-geometrisch verfolgt. Die Resultante R läßt sich in der erweiterten Form $\Omega(0)$ darstellen, wo $\Omega(y)$ aus $R(y)$ hervorgeht, indem man in letzterem Ausdruck die c_{rs} ersetzt durch die Differenzen $c_{rs} - x_{rs} y$. Die Gleichung $\Omega(y) = 0$ leistet gute Dienste bei der Frage nach vielfachen Lösungssystemen. Es ergibt sich: Damit das System $f_1 = 0, \ldots, f_{n+1} = 0$ (ohne unendliche Lösungen) genau p Lösungen zuläßt, ist notwendig und hinreichend, daß die Resultante R nebst ihren Ableitungen der Ordnung $< p$ nach den Koeffizienten verschwinden, während dies nicht sämtliche Ableitungen der Ordnung p tun.

Diese allgemeinen Entwicklungen werden angewendet auf den im Eingange formulierten Fall, der zu dem Gleichungssystem

$$f = 0, xf = 0, \ldots x^{n-1} f = 0; \; g = 0, xg = 0, \ldots, x^{m-1} g = 0$$

führt. Damit dann die beiden Gleichungen $f = 0, g = 0$ der Grade m, n genau k gemeinsame Wurzeln besitzen, ist notwendig und hinreichend, daß die Charakteristik ihrer Resultante R gleich der Zahl $m + n - k$ ist. Es wird sodann noch der Fall untersucht, wo die Lösungen eines Gleichungssystems noch einer weiteren Gleichung zu genügen haben.

My.

E. NETTO. Ein Problem der Elimination. Math. Ann. **61**, 88-94.

Es wird die Frage behandelt: Wie müssen die beiden rationalen ganzen Funktionen $f(x, y, z, t, \ldots)$, $g(x, y, z, t, \ldots)$ beschaffen sein, damit bei der Elimination einer der Variabeln aus $f=0$, $g=0$ gleichzeitig alle übrigen Variabeln herausfallen? Man bilde die Eliminante R_x von f, g nach x, so ist R_x darstellbar in der Form $R_x = fg_1 - f_1 g$, wo die Grade von f_1, g_1 in x geringer sind als die von f, g. Dieser Ausdruck für R_x muß eine Konstante C sein. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem C verschwindet oder nicht. Im ersten Falle haben f und g einen gemeinsamen Teiler, und diese Forderung erweist sich auch als hinreichend. Ist dagegen C von Null verschieden, so folgt $g = \frac{fg_1 + C}{f_1}$, und die Bedingung ist wiederum hinreichend.

Im Falle zweier Variabeln x, y hat die Aufgabe die geometrische Bedeutung: Es sollen alle Kurven $g(x, y) = 0$ gesucht werden, die mit $f(x, y) = 0$ alle reellen und imaginären Schnittpunkte im Unendlichen gemein haben. Solche Kurven $f=0$, $g=0$ heißen „perfekte Asymptotenkurven.“ Zu ihnen gehören die Kurven $g = fg_1 + C$ für jedes g_1 und $C \neq 0$. Gibt es noch andere, so heißen dieselben „singulär“. Es werden der Reihe nach vier besondere Fälle diskutiert: 1. $f(x,y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = \varphi(x)$, mit konstanten a_i; 2. $f = xy - 1$; 3. $f = a^2x^2 - b^2y^2 - 1$; 4. $f = y^2 - \varphi(x)$. My.

E. WAELSCH. Über die Resultante binärer Formen. Wien. Ber. **114**, 1143-1146.

In einer voraufgehenden Arbeit (F. d. M. **35**, 125, 1904) hat der Verf. eine independente Reihenentwicklung mehrfach binärer Formen gegeben. Diese wird hier verwendet zur Darstellung der Resultante zweier binären Formen als einer Summe von Gliedern, deren jedes die volle Überschiebung einer Komitante der ersten Form und der dieser vermöge des Hermiteschen Reziprozitätsgesetzes entsprechenden Komitante der zweiten Form ist. Das Charakteristische dieser Darstellung ist, daß Komitanten der einen Form mit Komitanten der andern Form allein bilinear verknüpft sind. Sei $a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 = (a\xi)$, $a_1 b_2 - a_2 b_1 = (ab)$; ferner sei, wenn die Formen a, b zwei Formen der Ordnung p, q sind, wo $q \leqq p$, mit $[a\,b]$ die q-te Überschiebung beider Formen bezeichnet. Die beiden gegebenen Formen seien $a = (a\xi)^n$, $b = (b\xi)^\nu = b_1 b_2 \ldots b_\nu$, wobei die zweite in ihre Linearfaktoren zerlegt gedacht ist.

Man bilde die mehrfache Überschiebung A von a:

$$A \equiv (A\xi)^m = (a, a)^{\alpha_2}, a)^{\alpha_3}, \ldots, a)^{\alpha_\nu}$$

mit den Exponenten $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ und der Ordnung $m = \nu n - 2\sum \alpha$. Ersetzt man hier a der Reihe nach durch die Potenzen $b_1^n, b_2^n, \ldots, b_\nu^n$, so entstehe aus A die Bildung A_b. Nun ist die Resultante R von a und b der Ausdruck $(a'b_1)^n (a''b_2)^n \ldots (a^{(\nu)} b_\nu)^n$. Wendet man hierauf des Verf. Reihenentwicklung an, so entsteht (1) $R = \sum [A\, A_b]\, c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu}$, wo

die Summe auszudehnen ist über alle möglichen A und die c gewisse Zahlenkoeffizienten sind. Permutiert man in (1) die $a', a'', \ldots, a^{(\nu)}$, und dividiert man die Summe durch ν', so bleibt R ungeändert, während man rechts auch an Stelle von A_b in jedem Gliede die Form einführen kann, die aus A_b entsteht, indem man die $b_1, \ldots, b_\nu$ permutiert und die Summe durch $\nu!$ dividiert. Dadurch ergibt sich aber gerade aus A_b diejenige Komitante B von b, die der Komitante A von a vermöge des Hermiteschen Reziprozitätsgesetzes entspricht, und man gelangt zu der invarianten Darstellung (II) $R = [AB]\, c_{a_2 \ldots a_\nu}$. My.

G. Voronoï. Sur une propriété du discriminant des fonctions entières.
Verh. d. 3. internat. Math. Kongr. Heidelb., 186-189.

Sei $F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ eine ganze Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten und nicht verschwindender Diskriminante D, ferner p eine nicht in D aufgehende Primzahl, und es sei $F(x)$ in irreduzible Faktoren mod. p zerlegt: $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_\nu(x)$. „Dann besteht hinsichtlich der Anzahl ν dieser Faktoren die Relation $\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-\nu}$."

Es genüge, den Beweis für $\nu = 1$, wo F selbst irreduzibel ist, genauer zu skizzieren. ϱ sei eine Wurzel von $F(x) = 0$. Die ganzen Zahlen $\varrho_0 = \varrho, \varrho_1 = \varrho^p, \ldots, \varrho^{n-1} = \varrho^{p^{n-1}}$ des Körpers $[\varrho]$ sind in ihm die verschiedenen Wurzeln der Kongruenz $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$. σ sei eine ganze und symmetrische, dem Körper $[\varrho]$ angehörige Funktion der $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$. Ersetzt man hierin ϱ_i durch die Wurzeln von $F(x) = 0$, so wird $\sigma(\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1})$ eine gewisse ganze Zahl σ, und es gilt die Kongruenz $\sigma(\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}) \equiv \sigma \pmod{p}$. Man wähle jetzt als Funktion σ das Quadrat des Differenzenprodruktes $\Pi(\varrho_i - \varrho_k)^2$ $(i < k)$, so entsteht die Kongruenz $\Pi(\varrho_i - \varrho_k)^2 \equiv D \pmod{p}$. Andererseits ist das Differenzenprodukt $\Pi(\varrho_i - \varrho_k)$ selbst eine ganze, von ϱ abhängende Zahl $\omega(\varrho)$ des Körpers $[\varrho]$.

Erhebt man auf die p-te Potenz, so entsteht $[\omega(\varrho)]^p = \Pi(\varrho_i^p - \varrho_k^p)$, und hieraus wiederum die Kongruenz

$$[\omega(\varrho)]^p \equiv (-1)^{n-1}\, \Pi(\varrho_i - \varrho_k) \pmod{p} \equiv (-1)^{n-1} \pmod{p}.$$

Endlich ist $D^{\frac{p-1}{2}} = [\omega(\varrho)]^{p-1}$, somit $D^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{n-1}$, und damit $\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-1}$.

Für $\nu > 1$ setze man $F^{(0)}(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_\nu(x)$. Ist dann $D^{(0)}$ die Diskriminante von $F^{(0)}(x)$, sind ferner $d_1, d_2, \ldots, d_\nu$ die Diskriminanten der $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x)$, so zerlegt sich $D^{(0)}$ in das Produkt der d_i, abgesehen vom Quadrate einer ganzen Zahl k, und es wird demnach $\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{d_1}{p}\right)\left(\frac{d_2}{p}\right) \ldots \left(\frac{d_\nu}{p}\right)$. Ist m_i der Grad von $\varphi_i(x)$,

so gilt $\left(\frac{d_i}{p}\right) = (-1)^{m_i - 1}$, und hieraus folgt ohne weiteres $\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-\nu}$.

Am Schlusse teilt der Verf. mit, daß sein Hauptergebnis nach einer Bemerkung von Hensel bereits 1897 von Stickelberger dem internationalen Kongreß in Zürich vorgelegt worden ist (F. d. M. **29**, 172, 1898). My.

L. Saalschütz. Zur Bildung der symmetrischen Funktionen. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 113-143.

Es soll eine symmetrische Funktion $V = \sum a^{p_1} b^{p_2} \dots f^{p_r}$ der Größen $a, b, c, \dots$ nach Potenzen der Elementargrößen $A_1 = -\sum a$, $A_2 = \sum ab$, $A_3 = -\sum abc$ usf. geordnet werden, so daß man mit einer Potenz von A_1 beginnt, dann die wachsenden Potenzen von A_2, in deren Koeffizienten A_1 vorkommt, folgen läßt usw. Es wird zunächst an die vier bekanntesten Methoden erinnert: 1. Die Newton-Waringsche Methode, die auf der Darstellung der Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung durch deren Koeffizienten beruht; 2. die Waringsche Methode: man bildet $A_1^{p_1-p_2} A_2^{p_2-p_3} A_3^{p_3-p_4} \dots$, führt die Multiplikationen aus, so daß eine Summe $\sum a^{p_1} b^{p_2} c^{p_3} \dots + C_1 \sum a^{q_1} b^{q_2} c^{q_3} \dots + \cdots$ entsteht, zieht diese von V ab, und verfährt mit dieser neuen symmetrischen Funktion analog, usf.; 3. die Cauchysche Methode, die die Wurzeln der Gleichung nach und nach durch Divisionen eliminiert; 4. Cayleys und Brioschis Methoden mit Hülfe der partiellen Differentialgleichungen.

Alle diese Methoden werden bei Funktionen höheren Grades, resp. Gewichtes rasch unbequem und praktisch fast undurchführbar. Der Verf. bildet eine Methode der sukzessiven Berechnung aus, wobei das Resultat nach Potenzen des letzten Koeffizienten der Gleichung A_n, resp. A_{n+1} geordnet wird.

In $V = V_n = \sum a^{p_1} b^{p_2} \dots e^{p_{r-1}} f^{p_r}$, wo die Anzahl n der Elemente $a, b, c, \dots, l \geqq r$ ist, werden die nach abnehmender Größe geordneten Exponenten an ihrer Stelle belassen und die Basen ohne Wiederholung variiert. Es sei bereits V_n durch die Koeffizienten $\alpha_1 = -\sum a$, $\alpha_2 = \sum ab, \dots$ der Gleichung mit den Wurzeln $a, b, \dots, l$ ausgedrückt, und als Funktion der α_k mit $\overline{V}_n$ bezeichnet. Sodann werde $\overline{V}_n$ nach Potenzen von α_n geordnet. Versteht man unter V_{n+1} die analog zu V_n gebildete Funktion, wo zu den Größen $a, b, \dots, l$ noch eine weitere, t, hinzukommt, und unter $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ die Elementarfunktionen der $a, b, \dots, l, t$, so entsteht die Aufgabe, V_{n+1} durch die A_k und zwar nur mit Hülfe des Ausdrucks für $\overline{V}_n$ darzustellen.

Man ordne einmal $V_{n+1} = V_n + \cdots$ nach Potenzen von t, andererseits $\overline{V}_{n+1}$ nach Potenzen von A_{n+1}:

$$\overline{V}_{n+1} = P_0^{(n+1)} + A_{n+1} P_1^{(n+1)} + \frac{1}{\alpha!} A_{n+2}^2 P_2^{(n+1)} + \cdots + \frac{1}{q!} A_{n+1}^q P_q^{(n+1)}.$$

Die Koeffizienten $P_k^{(n+1)}$ werden nach der Maclaurinschen Methode

bestimmt; hierbei werden in V_{n+1} die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eingeführt; $V_{n+1} = V_n + \cdots$, wo die Koeffizienten der Potenzen von t mit $f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)$ bezeichnet seien. Unterwirft man dann noch die Exponenten p einer geeigneten Beschränkung, so lassen sich die $V_2, V_3, \ldots$ bequem berechnen.

Die Vorteile dieser Methode sind, wie der Verf. selbst betont: 1. Zur Bestimmung der Koeffizienten von A_{n+1} bedarf man nur der Koeffizienten der Potenzen von A_n mit Ausschluß von $A_n^{(0)}$; 2. die Berechnung eines Koeffizienten bedarf nicht der gesonderten Aufstellung seiner Bestandteile in litteraler Hinsicht und der dann folgenden immer mühsamer werdenden Bestimmung ihrer Zahlenfaktoren, sondern der Differentiation ganzer Funktionen; 3. die Rechnung wird über ein gewisses n hinaus immer leichter und kürzer; 4. zur Vereinfachung der Rechnung sind Formeln entwickelt, die, wenn mehr als zwei Elemente in die symmetrische Funktion eingehen, bis zu Funktionen vom 23ten Grade ausreichen.

Daß sich die Ausführung bei höherem Grad der Funktion nicht gerade angenehm gestaltet, dürfte in der Natur des Problems liegen.

My.

R. F. Muirhead. Some proofs of Newton's theorem on sums of powers of roots. Edinb. M. S. Proc. **23**, 66-70.

Drei Beweise werden skizziert. Obgleich sie vermutlich nicht alle neu sind, ist doch jeder verhältnismäßig einfach und zeigt im einzelnen Unterschiede von den sonst üblichen Darstellungen. Gbs. (Lp.)

R. F. Muirhead. A proof of Waring's expression for $\sum \alpha^r$ in terms of the coefficients of the equation. Edinb. M. S. Proc. **23**, 71-74.

Die Wurzeln von $x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots \pm p_n = 0$ seien $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ und $S_r = \sum \alpha^r$. Für ein positives ganzzahliges m ist dann $(1 + \alpha x)^m (1 + \beta x)^m \ldots (1 + \lambda x)^m = (1 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_r x^n)^m$ eine Identität. Der Beweis wird aus der Gleichsetzung der Koeffizienten erhalten, und es ist zu bemerken, daß von unendlichen Reihen kein Gebrauch gemacht wird, der Beweis also elementar ist. Es werden auch Ausdehnungen der Formel betrachtet. Gbs. (Lp.)

C. A. Laisant. Sur les sommes des puissances semblables des racines; formules de Newton. Nouv. Ann. (4) 5, 512-514.

Da für die Gleichung

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_p x^{m-p} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

die Summe $S_p = x_1^p + x_2^p + \cdots + x_m^p$ nur von $A_0, A_1, \ldots A_p$, aber nicht von $A_{p+1}, \ldots A_m$ abhängt, hat S_p für alle Gleichungen, die in den

ersten $(p+1)$ Koeffizienten übereinstimmen, denselben Wert, also für die vorgelegte Gleichung auch denselben Wert wie für

$$A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \cdots + A_{p-1} x + A_p = 0.$$

Aus letzterer ergibt sich aber unmittelbar

$$A_0 S_p + A_1 S_{p-1} + \cdots + A_{p-1} S_1 + p A_p = 0,$$

so daß diese Relation auch für die Gleichung $m$ten Grades gilt, wenn $m \geqq p$. F.

F. THALREITER. Auflösung gewisser algebraischer Eliminationsaufgaben durch Benutzung der Teilungsgleichungen der $\wp$-Function. Diss. München. 59 S. 0°.

Dritter Abschnitt.

Niedere und höhere Arithmetik.

Kapitel 1.

Niedere Arithmetik.

R. Dedekind. Stetigkeit und irrationale Zahlen. III. Aufl. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 24 S. 8°.

Neue unveränderte Auflage der bekannten, zuerst 1872 erschienenen Schrift, in welcher Dedekind die irrationale Zahl als „Schnitt" im Gebiete der rationalen Zahlen definiert. F.

R. Baire. Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité. Paris: Vuibert et Nony. 59 S. 8°.

Eine von den sonst üblichen Verfahren in mancher Hinsicht abweichende Methode, um die irrationalen Zahlen zu behandeln. Der Verf. geht von der Dedekindschen „Schnitt-"Definition aus, führt dann aber sofort den Begriff „obere und untere Grenze" (als einen solchen Schnitt) ein und gelangt damit zu den Fundamentalreihen, durch welche G. Cantor die irrationalen Zahlen definiert hat. Um für diese Zahlen alle Rechenoperationen mit einem Schlage zu begründen, denkt sich Baire, daß eine stetige Funktion f beliebig vieler Variabeln zunächst für rationale Werte derselben innerhalb eines gewissen Bereiches bestimmt sei, und definiert sodann als Wert der Funktion für ein irrationales Wertsystem der unabhängigen Veränderlichen die Grenze (deren Existenz und Eindeutigkeit natürlich zunächst nachgewiesen wird), welcher sich der Funktionswert nähert, wenn man für die Veränderlichen rationale Werte einsetzt, die dem gegebenen irrationalen Wertsystem näher und näher kommen. Wählt man nun speziell als Funktion f die Summe, die Differenz, das Produkt oder den Quotienten zweier Variabeln, so hat man die Definition der Grundrechnungsarten für die irrationalen Zahlen. Aus

dem allgemeinen Satze, daß, falls zwei Funktionen für alle rationalen Werte ihrer Argumente übereinstimmen, sie auch für alle irrationalen, für welche sie überhaupt definiert sind, den gleichen Wert besitzen, ergibt sich sofort die Richtigkeit aller für rationale Zahlen geltenden Rechnungsregeln auch für irrationale Werte. F.

I. Alexandrow. Die Grundlagen der Arithmetik. Spaczinskis Bote Nr. 395, 241-248. (Russisch.)

Der Verf. ist mit der Darstellung von A. Klossovsky (F. d. M. **35**, 103, 1904) nicht einverstanden. Überzeugt, daß die Sprache der Mittelschule von jeder verwickelten Terminologie frei sein muß, gibt er zwei Systeme der Darstellung (die kürzere in Anmerkungen). Seine drei Axiome der Arithmetik lauten: „I. Das Resultat des Rechnens nach Einheiten ist von seinem Anfang und von der Unterbrechungsstelle unabhängig, also mit anderen Worten: um mehrere Zahlen zu addieren, kann man sie in beliebige Teile zerlegen, diese Teile in beliebiger Reihenfolge summieren und die Resultate der einzelnen Additionen vereinigen. II. Ist die Subtraktion richtig gemacht, so ist der Minuendus gleich der Summe aus dem Subtrahendus und der Differenz. III. Wird die Division richtig gemacht, so wird der Dividendus gleich dem Produkte aus dem Divisor und dem Quotienten. Si.

C. Arzelà. Corrispondenza. Periodico di Mat. (3) **3**, 44-45.

In diesem Briefe an Lazzeri berichtigt Arzelà eine Stelle der dritten Auflage seiner Algebra elementare, wo ein Schlußverfahren bezüglich der Irrationalzahlen nicht einwandsfrei ist. Lp.

A. Lanner. Die wissenschaftlichen Grundlagen des ersten Rechenunterrichts. Wien: C. Fromme. 49 S.

Die psychologisch-pädagogische Arbeit behandelt ausführlich die Frage, wie am zweckmäßigsten das Kind erst zählen und dann rechnen lernt. F.

F. Haacke. Entwurf eines arithmetischen Lehrganges für höhere Schulen. Teil II. Progr. (Nr. 253) Gymn. Wohlau. 23 S.

Der zweite Teil der Programmabhandlung (vgl. F. d. M. **35**, 192, 1904) sucht den Schülern die Einführung der irrationalen, der negativen und der imaginären Zahlen und das Rechnen mit diesen Größen möglichst plausibel zu machen und behandelt außerdem die Auflösung der Gleichungen ersten und zweiten Grades. F.

H. Müller und F. Pietzker. Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten. Ergänzungsheft für die Mittelklassen der Realschulen. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 89 S. gr. 8°.

Für die Tertia und Untersekunda höherer Lehranstalten bestimmt, umfaßt das Übungsbuch die wichtigsten Kapitel der im bürgerlichen und geschäftlichen Leben vorkommenden Aufgabengruppen, die eine Behandlung auf der Unterstufe ihrer Schwierigkeit halber nicht gestatten. Die praktischen Verhältnisse werden in einleitenden Abschnitten ausführlich dargelegt. Der zweite Abschnitt enthält Flächen- und Körperberechnungen, die allerdings großenteils wohl auch außerhalb des Rechenunterrichts ihre Stelle finden können und in vorhandenen Sammlungen ähnlich vorkommen. Sk.

Ed. Schulze und F. Pahl. Mathematische Aufgaben. Ausgabe für Gymnasien. I. Teil. Leipzig: Dürrsche Buchhdlg. VIII + 196 S. 8°.

Für die Mittelklassen der Gymnasien bestimmte planimetrische und arithmetisch-algebraische Aufgaben, die der unmittelbaren Einübung des Unterrichtsstoffes dienen sollen. Es sind deshalb im wesentlichen nur solche Aufgaben gewählt, welche ohne besondere Kunstgriffe durch direkte Anwendung der durchgenommenen Lehrsätze, bezüglich ohne umständliche Zahlenrechnungen gelöst werden können. Im arithmetischen Teil sind die erforderlichen Erklärungen und Sätze als Anmerkungen beigefügt. F.

H. Schubert. Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. 3. durchgesehene Auflage. Leipzig: G. J. Göschen. 147 S. (Samml. Göschen, Nr. 49).

Das Werkchen, das sich durch eine große Zahl schöner Aufgaben auszeichnet, insbesondere unter den angewandten, deren Zahl gegen die erste Auflage um etwa die Hälfte gestiegen ist, wird auch in der neuen Auflage seinen Zwecken wohl entsprechen. Sk.

W. P. Ermakov. Das angenäherte Rechnen. Spaczinskis Bote Nr. 388, 87-91; 389, 97-105; 390, 130-137. (Russisch.)

In den Mittelschulen haben die Schüler meist keine Vorstellung von dem angenäherten Rechnen; sie nehmen $\pi = 3{,}14$ und rechnen das Endresultat mit siebenstelligen Logarithmentafeln. Gescheites Rechnen soll in den Vordergrund gestellt werden. Besonders für technische Hochschulen ist es wichtig, angenäherte Rechnungen mit vollem Bewußtsein auszuführen. — Hier werden kurz die in der Praxis brauchbaren Regeln auseinandergesetzt. 1. Der absolute Fehler und der relative Fehler, Fehlergrenze. 2. Relativer Fehler, relative Fehlergrenze. 3. Genauigkeitsexponent.

4. Absolute Fehlergrenze von Summe und Differenz; Addition und Subtraktion mit vorgeschriebener Genauigkeit. 5. Relative Fehlergrenze bei der Multiplikation und Division. 6. Multiplikation und Division mit vorgeschriebener Genauigkeit. 7. Potenzieren und Wurzelausziehen mit vorgeschriebener Genauigkeit. 8. Zusammenhang zwischen dem relativen Fehler der Zahl und dem absoluten Fehler ihres Logarithmus. 9. Multiplikation und Division von vorgeschriebener Genauigkeit bei Benutzung der Logarithmen. 10. Ausrechnen mehrgliedriger Ausdrücke mit vorgeschriebener Genauigkeit. 11. Abgekürzte Multiplikation und Division angenäherter Zahlen. 12. Genaue Regel für das Weglassen der überflüssigen Ziffern bei der Multiplikation und Division angenäherter Zahlen. Si.

Fr. Rogel. Das Rechnen mit Vorteil. Leipzig: B. G. Teubner. 38 S. 8°.

Eine kurzgefaßte Zusammenstellung von Regeln und Vorschriften zur Erleichterung und Abkürzung des numerischen Rechnens und von Proben auf die Richtigkeit der gefundenen Resultate mit zahlreichen Beispielen, aber ohne eingehende Begründung. F.

V. Bobynin. Méthodes employées par les calculateurs extraordinaires pour résoudre les problèmes compliqués. Ens. math. 7, 343-356.

Hervorragende Kopfrechner ohne wissenschaftliche Vorbildung, wie Inaudi und Iwan Petroff, haben im Kopfe in verhältnismäßig kurzer Zeit durch planmäßiges Probieren Aufgaben gelöst, die nach den sonst üblichen Methoden auf quadratische, kubische oder lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten führen. F.

M. Oreschnikov. Einige Worte über die sogenannte „Regel der Zeichen“ in der elementaren Algebra. Spaczinskis Bote Nr. 394, 230-234. (Russisch.)

Statt der Cauchyschen Definition der Multiplikation ist es vorteilhafter, bei der Erklärung der Multiplikation negativer Zahlen ihren Gegensatz zu den positiven in den Vordergrund zu stellen und also zu sagen: 5 mit 3 multiplizieren heißt 5 dreimal addieren; deshalb 5 mit —3 multiplizieren muß heißen 5 dreimal subtrahieren; auch —5 mit —3 multiplizieren muß heißen —5 dreimal subtrahieren, also 5 dreimal addieren. Si.

O. Biermann. Eine Divisionsprobe. Monatsh. f. Math. 16, 365-368.

Die Neunerprobe, auf Divisionen angewandt. Sk.

E. LEBON. Sur les caractères de divisibilité. Ens. math. 7, 190-193.

Verallgemeinerung der Neuner- und Elferprobe auf beliebige Divisoren. Beispiele. Sk.

G. CALVITTI. Sulla divisibilità dei numeri. Suppl. al Period. 8, 49-51.

Für Mittelschüler werden die Regeln von Mariantoni und Conti (F. d. M. **29**, 136) erklärt und an Beispielen erläutert. Lp.

M. S. BRITMAN. Über eine Art von Zahlen. Spaczinkis Bote Nr. 400, 89-90. (Russisch.)

Für jede Zahl, welche die Faktoren 2 und 5 nicht enthält, kann man eine aus lauter Einsen bestehende Zahl finden, von welcher die erstere ein Teiler ist, wie für 7: 111111/7 = 15873; 111111/21 = 5291 usw. Si.

W. A. WHITWORTH. Question 6487. Ed. Times (2) 7, 43-46.

Alle Zahlen von 1 bis 140 mit Hülfe von vier Neunen auszudrücken. Algebraische Symbole und Dezimalpunkte dürfen gebraucht werden; aber der Ausdruck für jede Zahl muß vier Neunen enthalten und keine andere Ziffer. Dieselbe Aufgabe durch vier Vieren. Z. B.

$$34 = (99 + \sqrt{9}) : \sqrt{9} = 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{4} + \sqrt{4}.$$

Für die Neun sind zwei Lösungen abgedruckt, die eine von A. Cunningham, die andere von T. Wiggins gegeben. Lp.

S. C. GOULD. Question 15734. Ed. Times (2) 8, 83-86.

Alle verschiedenen Quadratzahlen anzugeben, welche mit allen zehn Ziffern geschrieben werden können, indem jede Ziffer nur einmal gesetzt wird. — Der Verf. gibt zuerst eine historische Übersicht über die Frage der Quadratzahlen, welche unter Ausschluß der 0 mit den übrigen neun Ziffern geschrieben werden können. Die letzte von Biddle veröffentlichte Tafel in Ed. Times **52**, 61 (F. d. M. **22**, 200, 1890), welche 29 solche Zahlen enthält, ist durch eine dreißigste zu ergänzen ($19569^2 = 382945761$). Nach Wiederholung der so vervollständigten Tafel gibt Gould jetzt eine zweite Tafel von 87 zehnziffrigen Quadraten, in denen nun auch die Null je einmal auftritt. Er vermutet, daß noch drei Zahlen fehlen, und macht einzelne Bemerkungen über die von ihm gefundenen Werte. Lp.

E. Netto. Notiz über die Wegschaffung von Wurzelgrößen aus algebraischen Gleichungen. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **9**, 310-311.

Es wird ein Faktor D in Determinantenform angegeben, mit dem man die linke Seite der Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu (\sqrt[n]{R})^\nu = 0$$

multiplizieren muß, um sie rational zu machen. Lwt.

N. P. Bertelsen. Om den Noiagtighed, der opnans ved Tabelopslag i firedfrede Logarithme- og Antilogarithmetabeller. Nyt. Tidss. for Math. **16** A, 65-74.

Untersuchungen über die Genauigkeit, welche erreicht werden kann mittels vierstelliger Logarithmentafeln und Antilogarithmentafeln. Die Untersuchungen des Verf. über die Fehlergrenzen an den verschiedenen Stellen der Tabellen sind sehr interessant und lehrreich. Als Hauptresultat ergibt sich, daß die Bestimmung der Zahlen genauer ist mittels Logarithmentafeln als mittels Antilogarithmentafeln. V.

I. Tschernuschenko. Über einige Eigenschaften der Logarithmen. Spaczinskis Bote Nr. 397, 14-19; 399, 59-66; 400, 86-89. (Russisch.)

Das Zeichen der Logarithmierung ist zwar bequem für die funktionelle Bedeutung, aber nicht passend, wenn wir die Logarithmierung als Operation betrachten wollen und ihre Eigenschaften in Analogie mit den Eigenschaften der vier Spezies stellen wollen. Der Verf. bezeichnet also $\log_b a = \frac{a}{b}$. Er zeigt dann: 1) $\frac{a^m}{b^m} = \frac{a}{b}$; 2) $\frac{b}{a} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}$; 3) $\frac{a}{d} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

Daraus folgt: a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c}{b}$; b) $b^{\frac{a}{c}} = a^{\frac{b}{c}}$; c) $a^{\sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^{n-k}}} = b^{\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^k}}$. Danach werden zwei Proportionen betrachtet. Erstens nennt der Verf. $\sqrt[b]{a}$ das radikale Verhältnis; dann wird $\sqrt[b]{a} = \sqrt[d]{c}$, also die Gleichheit zweier radikalen Verhältnisse, die radikale Proportion genannt. Eigenschaften: 1. wenn $\sqrt[b]{a} = \sqrt[d]{c}$, so ist $a^d = c^b$ und umgekehrt. Die radikale Proportion kann auch geschrieben werden: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ usw. Kontinuierliche radikale Proportion. Radikale Progression. $\sqrt[a_1]{a_2} = \sqrt[a_2]{a_3} = \sqrt[a_3]{a_4} = \cdots = q$.

Das Produkt aus den n Gliedern P_n ist mit der betreffenden Summe durch die Gleichung verbunden: $P_n : a_1 = q^{s_n - a_n}$. Die zweite ist die logarithmische Proportion: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; sie kann 8 Gestalten annehmen (wie die arithmetische und geometrische): $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ usw. Kontinuierliche logarithmische Proportion: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Daraus $b = a^{\sqrt{\frac{b}{a}}} = b^{\sqrt{\frac{a}{b}}}$, das logarithmische Mittel. Das logarithmische Mittel ist kleiner als das geometrische, wenn beide Zahlen größer oder beide kleiner sind als 1. Die logarithmische Progression (z. B. 3, 9, 81, 6561) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots (= q)$ hat die Eigenschaften: $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1} P_n = \sqrt[q-1]{\frac{a_n^q}{a_1}}$. Wird $\lim_{n=\infty} | a_n | = 1$, so wird $\lim_{n=\infty} P_n = \sqrt[1-q]{a_1}$. Si.

A. Krug. Lösung der Aufgabe 114 (L. Saalschütz). Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 186-187.

O. Meissner. Lösung der Aufgabe 114 (L. Saalschütz). Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 188-189.

J. Krug. Bemerkung zur Lösung von O. Meissner. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 305.

Gegeben sind zwei ganze ganzzahlige Funktionen von x, $f_1(x)$ vom ersten, $f_2(x)$ vom zweiten Grade. Woran läßt sich erkennen, ob es ganzzahlige Werte von x gibt, die die Kongruenz $f_2 \equiv 0 \pmod{f_1}$ befriedigen, und welches sind diese Werte? Lp.

Weitere Literatur.

F. Amodeo. Equazioni di primo grado ad una incognita. Appendice all' Aritmetica particolare e generale estratta dagli Elementi di algebra dello stesso autore, per uso delle scuole normali e tecniche. Napoli: Pierro. 31 S. 16mo.

C. Arzelà. Trattato di algebra elementare ad uso dei licei e degli istituti tecnici. Parte I. Firenze.

W. M. Baker and A. A. Bourne. A first algebra. London: George Bell and Sons. X u. 176 u. XXXV S. [Nature **72**, 393.]

W. M. Baker and A. A. Bourne. Elementary algebra, Part 2. Teacher's edition. London: George Bell and Sons.

W. M. Baker. Key to elementary algebra. Part 2. London: Bell.

W. G. Borchardt. Elementary algebra. London: Rivingtons. VII u. 492 u. LXIII S. [Nature **73**, 293.]

E. Borel. Algèbre (second cycle). 3e édition, revue, corrigée et augmentée. Paris: Colin. VII u. 403 S. 16mo.

E. Bortolotti. Aritmetica generale ed algebra per la Ia classe liceale. Roma: Segati. 120 S. 8o.

C. Bourlet. Précis d'algèbre, contenant cinq cent cinquante-sept exercices et problèmes rédigés conformément aux programmes du 31 mai 1902. Classes de seconde et première C et D. 2e édition. Paris: Hachette. 393 S. 16mo.

R. C. Bridgett. An introduction to algebra. London: Blackie. 96 S. 12mo.

C. Burali-Forti. Aritmetica e geometria per la quarta classe elementare. Torino: Paravia. 100 S. 16mo.

L. Carl. Algebraische Aufgaben zur Einführung in die Arithmetik. 2. Aufl. Oldenburg: G. Stalling. IV u. 48 S. 8o.

C. Carter. Graphic algebra for beginners. London: Simpkin. 8o. (Normal tutorial series.)

C. M. Clay. Examples in algebra. Eight thousand exercises and problems, carefully graded from the easiest to the most difficult. New York: Macmillan. VII u. 372 S. 12mo.

E. Combette. Cours abrégé d'algèbre élémentaire, conforme aux programmes officiels du 31 mai 1902, pour les classes de mathématiques A et B. 8e édition, entièrement refondue. Paris: Alcan. VIII u. 336 S. 8o.

C. C. Dassen. Tratado elemental de algebra de acuerdo con el concepto moderno de esta ciencia y los métodos mas rigurosos. Buenos Ayres: Hermanos. XVIII u. 528 S. 12mo.

G. Daviès. Mathématiques. 2e édition, revue et très augmentée. Paris: Dunod. XI u. 550 S. 16mo.

A. Faifofer. Elementi di algebra ad uso della prima classe liceale. Venezia: Sorteni. 193 S. 16mo.

H. Fenkner. Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie. Für den Unterricht an höheren Lehranstalten bearbeitet. Ausg. A. 1. Teil. 5. verb. Aufl. Berlin: O. Salle. VIII u. 256 S. gr. 8o.

H. Fenkner. Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus der Geometrie, Physik und Chemie. Für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten bearbeitet. Ausgabe A: Für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. Teil IIa: Pensum der Obersekunda. 3. verm. Aufl. Berlin: O. Salle. III u. 114 S. gr. 8o.

H. B. Fine. A college algebra. Boston: Ginn. VIII u. 595 S. 12mo.

N. Font et C. Hugon. Algèbre. Compléments à l'usage des élèves du deuxième cycle (sections C et D) (programmes du 31 mai 1902). Marseille: Ferran. VIII u. 150 S. 16mo.

Fourrey. Cours d'algèbre. (Cours moyens.) 4e édition. Paris. 259 S. 8o.

M. de Franchis. Elementi di aritmetica razionale ad uso delle scuole secondarie superiori. Palermo: Sandron. 188 S. 16mo.

A. Grévy. Éléments d'algèbre, à l'usage des élèves des classes de troisième A à première A et B (programmes du 31 mai 1902). 5e édition. Paris: Vuibert. 210 S. 16mo.

A. Grévy. Algèbre, à l'usage des élèves des classes de seconde et première D (programmes du 31 mai 1902). 3e édition. Paris: Vuibert. 120 S. 16mo.

A. Grévy. Traité d'algèbre, à l'usage des élèves de mathématiques A et B (programmes du 31 mai 1902). Paris: Vuibert. 502 S. 8o.

E. Gubler. Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra für Mittelschulen. 3. Heft. 48 S. Zürich: Orell Füssli. 8o.

H. Hartl. Zur Einführung in die Logarithmenlehre. Mit einer Sammlung von Beispielen, für deren logarithmische Ausführung keine Interpolationen nötig sind. Wien: Deuticke. 16 S. 8o.

H. E. Hawkes. Advanced algebra. (Mathematical texts.) Boston: Ginn. XIII u. 285 S.

P. Heegaard. Laerebog i matematik. Kjöbenhavn. 8o.

J. Jacob. Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien. I. Abteilung: Lehrstoff der 1. und 2. Klasse. Wien: F. Deuticke. 136 S. 8o.

Jos. Jacob. Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien. II. Abteilung. Lehrstoff der 3. und 4. Klasse. Wien: F. Deuticke. III u. 142 S. 8o.

A. Krebs. Allgemeine Arithmetik in elementarer Darstellung, für den Mittelschul- und Selbstunterricht in entwickelnder Lehrform bearbeitet. Heft I. Bern: Baumgart. III u. 79 S. 8o.

C. Lackermann. Die Elemente der Arithmetik. Ein Lehrbuch für den arithmetischen Unterricht an 6-klassigen höheren Lehranstalten. Vierte vermehrte, verbesserte Auflage, unter Berücksichtigung der preußischen Lehrpläne vom Juni 1901, bearbeitet von Kreuschmer. Breslau: Hirt. 72 S. 8o.

K. Langbein. Die Absolutorialaufgaben in Bayern. Aufgaben aus der kaufmännischen Arithmetik, Buchführung und Handelskunde an den bayr. Real- und Handelsschulen. 3. erw. Aufl. Nürnberg: C. Koch. VIII u. 114 S. kl. 8o.

A. E. Layng. A text-book of algebra; embodying graphic and other solutions and applications to arithmetic and geometry. Part I. With answers. London: Blackie. 206 S. 12mo.

J. Lightfoot. Graphic algebra. For elementary and intermediate students. With exercises and answers. London: Ralph. 92 S. 12mo.

N. Limarzi. Compendio pratico di aritmetica, algebra e geometria ad uso delle scuole tecniche e commerciali. Torino: Bertero. 64 S. 8o.

O. Lodge. Easy mathematics, chiefly arithmetic; being a collection of hints to teachers, parents, self-taught students and adults, and containing a summary or indication of most things in elementary mathematics useful to be known. London and New York: Macmillan. XV u. 436 S. 12mo.

W. R. Marsh. Elementary algebra. New York: Scribner. VII u. 395 S. 12mo (Marsh and Anton mathematical series).

A. Martinaud. Éléments d'arithmétique et de géométrie, à l'usage de l'enseignement secondaire, rédigés conformément aux programmes officiels de 1902. 3e édition. Paris: Belin. 235 S. 12mo.

A. Martinaud. Cours d'algèbre élémentaire, à l'usage de l'enseignement secondaire, rédigé conformément aux programmes officiels du 27 juillet 1905, et renfermant les matières des programmes d'admission aux écoles d'arts et métiers et de commerce (premier cycle). Paris: Belin. 358 S. 12mo.

A. Martini Zuccagni. Trattato di algebra complementare ad uso degli istituti tecnici, con molti esercizi risoluti: Livorno: Giusti. VIII u. 283 S. 8o.

F. Moraga y Sánchez. Programma di algebra y trigonometría. Madrid: Ratés. 24 S. 8o.

L. Naud et G. Hamelin. Cours résumé de mathématiques (arithmétique, système métrique, géométrie et algèbre) à l'usage des candidats aux examens de l'administration des postes et des télégraphes. Paris: Courrier des examens. 230 S. 8o.

H. Neveu. Cours d'algèbre théorique et pratique, suivi des notions de trigonométrie, à l'usage des élèves des écoles primaires supérieures, des écoles normales primaires et des candidats aux écoles nationales d'arts et métiers. Paris: Masson. VI u. 432 S. 16mo.

H. B. Newson. Graphic algebra for secondary schools. Boston: Ginn. III u. 19 S. 12mo.

E. L. Payne. Payne's natural methods in algebra; for district schools, high schools and normal schools. Topeka, Kan.: Crane. XI u. 176 S. 12mo.

L. Pedrotti. Risoluzione delle equazioni di 1° e 2° grado. Milano: Sonzogno. 61 S. 16mo. (Biblioteca del popolo, Nr. 376.)

S. Pincherle. Algebra elementare. 9ª edizione riveduta. Milano: U. Hoepli. VIII u. 210 S. (Manuali Hoepli.)

K. Rosenberg. Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Wien: A. Hölder. IV u. 255 S. gr. 8°.

N. Ruland. Praktische Anleitung zum gründlichen Unterrichte in der höheren Mathematik. Ausführliche Auflösung der in Dr. Ed. Heis Sammlung von Beispielen usw. enthaltenen Aufgaben. Teil 3: Kettenbrüche, Teilbruchreihen, Permutationen, Kombinationen, Variationen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, binomischer und polynomischer Lehrsatz, figurierte Zahlen, Gleichungen von höheren Graden, transzendente Gleichungen, Anwendung der Algebra auf Aufgaben aus der Geometrie, Physik und Astronomie. Zum Selbstunterrichte bestimmt. Zweite verbesserte Auflage. Bonn: Cohen. VIII u. 491 S. 8°.

J. Salinas y Angulo, M. Benítez y Parodi. Algebra. Elegida de texto en el concurso celebrado el 28 de febrero de 1885 por la Dirección general de Instrucción militar. 4ª edición. Madrid: Arias. XIX u. 772 S.

J. Sassenfeld. Hauptsätze der Elementarmathematik für das Gymnasium, mit Aufgabensammlung in der Algebra. Zweite Auflage. Unterstufe. Trier: Lintz. VIII u. 188 S. 8°.

A. Schultze. Elementary algebra. New York: Macmillan. XI u. 370 S. 12mo.

R. L. Short. Supplementary algebra. Boston: Heath. 45 S. 12mo. (Heath's mathematical monographs).

D. E. Shorto. Algebraical grounding. London: Rivingtons. 46 S. [Nature 72, 393].

B. F. Sisk. The foundation of higher arithmetic. New York: Silver, Burdette & Co. X u. 203 S. 12mo.

D. E. Smith. Algebra for beginners. Boston: Ginn. VI u. 154 u. 27 S.

F. H. Sommerville. First year in algebra. New York: American Book Company. 208 S. 12mo.

F. H. Sommerville. Answers to „First year in algebra“. New York: American Book Co. 14 S. 12mo.

J. C. Stone and J. F. Millis. Essentials of algebra; complete course: an adequate preparation for the college or technical school; for secondary schools. Boston: Sanborn. XII u. 412 S. 12mo.

J. H. Tanner. Key to „Elementary algebra“. New York: American Book Co. 128 u. 23 S. 12mo.

J. M. Taylor. A college algebra. 7th edition. Boston: Allyn. 363 S.

G. M. Testi. Corso di matematiche ad uso delle scuole secondarie superiori, e più specialmente degli istituti tecnici. Vol. II: Algebra elementare. 3ª edizione nuovamente modificata e corretta. Livorno: Giusti. XI u. 393 S. 8°.

L. Octavio de Toledo. Tratado de algebra. Tomo I. Parte elemental. Madrid: Murillo. 359 S.

O. Jahn. Einiges vom Zahlbegriff. Halle: 16 S. 4°.

A. Natucci. Sulla scelta del metodo per la teoria dei numeri irrazionali. Boll. di Mat. Bologna **4**, 108-114.

M. Pieri. Sopra una definizione aritmetica degli irrazionali. Boll. delle Sedute Acc. Gioenia, Nr. 87, 14-22.

P. Peter. Die Zahlenwelt im Bilde. Eine kleine mathematische Unterhaltung. Pr. Feldkirch. 21 S. 8°.

J. Morawetz. Über die Grundlagen der Arithmetik und Algebra im Mittelschulunterrichte. Salzburg. 34 S. 8°.

R. M. Pierce. Problems of number and measure: an outline and bibliography of the application of the Arabic system of notation in a radix other than ten, and an account of the power of the resulting new system of non-decimal arithmetic as the basis of a thoroughgoing reform of the metric systems of the world. New York: Pierce. 21 S. 12mo.

A. R. Rankin. An argument in symbols illustrating algebraic factoring by explanations of problems. Chicago: Flanagan Company. 24 S. 12mo.

A. Pařízek. Bemerkungen zur Bestimmung des gemeinschaftlichen Maßes und des kleinsten Vielfachen. Pr. Gymn. Hohenmauth. 15 S. (Böhmisch.)

A. Bindoni. A proposito di un articolo del prof. Loria sui caratteri di divisibilità. Boll. di Mat. Bologna **4**, 92-96.

N. Ghiulea. Über die Teilbarkeit der Zahlen. Gazeta Mat. Bukarest **11**, 7-10 (Rumänisch).

G. Biasi. Sulla divisibilità dei numeri. Boll. di Mat. Bologna **4**, 92-96.

G. Fontené. Notes d'arithmétique sur la divisibilité. Bull. sc. math. et phys. élém. **10**, 273-275.

E. Mandouce. Méthode nouvelle de calculs abrégés. Bordeaux: Maleyre. 83 S. 8°.

J. Rius y Casas. Extracción de raíces por sustracciones sucesivas. Revista trim. **5**, 92-95.

A. Pleskot. Eine Bemerkung zur Lösung der unbestimmten Gleichungen. Časopis. **34**, 161-164. (Böhmisch.)

C. Büchel. Ganzzahlige Werte bei Diophant. Den Teilnehmern der 48. Versammlung der Philologen und Schulmänner zu Hamburg 1905 als Festgabe dargeboten von dem Ortskomitee. Hamburg: Herold. 16 S. 8°.

J. H. Beal. Notes on equation writing and chemical and pharmaceutical arithmetic. Third edition, revised and enlarged. Columbus, Oh. XII u. 139 S. (1904).

Kapitel 2.

Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

P. Bachmann. Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. V. Teil: Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. Leipzig: B. G. Teubner. XXII. u. 548 S. 8°.

Erstes Kapitel: Die Zahlenkörper. Bringt die Definition der algebraischen, sowie der ganzen algebraischen Zahl. Durch die vier Grundoperationen entstehen aus ihr wieder algebraische Zahlen, durch Addition, Subtraktion und Multiplikation aus der ganzen wieder ganze algebraische Zahlen. Kurze Angabe der Kroneckerschen Grundvorstellung der Funktion. Es folgt ein Abriß der Galoisschen Theorie: Begriff der Irreduzibilität, Sätze über irreduzible Gleichungen. Hieraus Begriff der n voneinander unabhängigen Basen:

$$\varrho_1 w_1 + \varrho_2 w_2 + \cdots + \varrho_n w_n \neq 0$$

im Körper n-ten Grades. Norm, Spur. Darstellung jeder Zahl ζ in der Form:

$$\zeta = \varrho_1 w_1 + \varrho_2 w_2 + \cdots + \varrho_n w_n.$$

Ist $S(w)$ die Spur von w, so erhält die Diskriminante folgende Form:

$$\begin{vmatrix} S(w_1 w_1) & S(w_1 w_2) & \ldots & S(w_1 w_n) \\ S(w_2 w_1) & S(w_2 w_2) & \ldots & S(w_2 w_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Ist die Diskriminante $\neq 0$, so bilden $w_1, w_2, \ldots$ eine Basis. Jetzt erst werden die Substitutionen eingeführt und durch die beiden Axiome charakterisiert:

$$(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta', \quad (\alpha \cdot \beta)' = \alpha' \cdot \beta'.$$

Es gibt n Körpersubstitutionen. Sätze über Diskriminante und Relativdiskriminante.

Zweites Kapitel: Die Moduln. Dieselben werden genau nach Dedekind eingeführt. Dirichlet-Dedekind: Vorlesungen über Zahlentheorie. IX. Supplement.

Drittes Kapitel: Divisorensysteme. Höhere Kongruenzen. Als Analogon zu Dedekinds Moduln folgen Kroneckers Divisorensysteme. Der Begriff der primären Funktion liefert die Zerlegung der Funktion in Primfunktionen:

$$F(x) = c\,P(x)^{a}\,P_1(x)^{a_1} \ldots P_h(x)^{a_h}.$$

Fordert man ganze rationale Koeffizienten, so unterscheidet man nach Kronecker Moduln erster und zweiter Stufe. Die Theorie der Moduln $\{p, f(x)\}$ führt dann zu der eindeutigen Zerlegung:

$$F(x) \equiv c\,P(x)^{a}\,P_1(x)^{a_1} \ldots P_h(x)^{a_h} \pmod{p}$$

nach Primfunktionen $P(x), \ldots$ Ist α eine Wurzel der Primfunktion n-ten Grades $P(x)$, so besitzt das System von Zahlen:

$$a_0 + a_1\,\alpha + a_2\,\alpha^2 + \ldots + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} \pmod{p}$$

genau die Gesetze der ganzen rationalen Zahlen. Insbesondere gelten für dasselbe der (verallgemeinerte) Fermatsche Satz. Als Anhang folgt aus dieser Theorie der Satz, daß $F(x)$ nur dann durch p teilbar ist, wenn es die Form hat:

$$F(x) = p \cdot \varphi(x) + (x^p - x)\,\psi(x).$$

Viertes Kapitel: Die ganzen algebraischen Zahlen. In diesem Kapitel wird nach den einfachsten Sätzen über ganze algebraische Zahlen der Begriff des Ideals und der Ordnung mit dem Führer f aus der Theorie der Moduln (nach Dedekind) entwickelt.

Fünftes Kapitel: Die Entwicklung der Theorie am Beispiel des quadratischen Körpers erläutert. Außer dem im Titel angegebenen findet sich in diesem Kapitel noch eine kurze Geschichte der zahlentheoretischen Theorien bis zu Dedekind und Kronecker.

Sechstes Kapitel. Die Arithmetik der Körperideale. Der Fundamentalsatz der Idealtheorie wird zuerst nach Hurwitz, dann aus der Modultheorie nach Dedekind und schließlich nach dem von Hurwitz dem euklidischen Algorithmus nachgebildeten Verfahren bewiesen. Hierauf werden Kongruenzen, Restsystem, Norm eines Ideals definiert und die Lehre der Kongruenzen für einen Primidealmodul entwickelt. Daraus entspringt die Darstellung des Primideals in der Form $\mathfrak{p} = (p, P(\varrho))$

Siebentes Kapitel: Von den Diskriminantenteilern. Die Theorie der höheren Kongruenzen wird nach Hensel und Kronecker entwickelt, ähnlich wie es von Hilbert (Bericht über die algebraischen Zahlkörper) durchgeführt wurde. Ausführlich wird der Fall der außerwesentlichen Teiler der Diskriminante berührt und die Existenz dieses Falles an Beispielen dargetan. Der Satz über die Zerlegung der Primzahlen der Diskriminante wird zuerst nach Hensel, dann nach Dedekind bewiesen. Im Anschluß an letzteren Beweis geht der Verf. tiefer ein in die Theorie gewisser Ordnungen von Dedekind.

Achtes Kapitel: Von den Einheiten. Beweis der Existenz eines Systems unabhängiger Einheiten nach Dirichlet. Neue Herleitung mittels des Satzes von Minkowski, der nach Hurwitz dargestellt wird. Das Fundamentalsystem von Einheiten einer Ordnung.

Neuntes Kapitel: Ideale einer Ordnung und die Anzahl ihrer Klassen. Wie der Verf. angibt, handelt es sich in diesem Kapitel wesentlich um eine Ausführung der klassischen Arbeit Dedekinds: Festschrift zur Saekularfeier des Geburtstages von Carl Friedrich Gauß. Braunschweig 1877. „Über die Anzahl der Idealklassen etc.“

Zehntes Kapitel: Die zerlegbaren Formen. Definition der zerlegbaren Form und Einheitsform eines Körpers n-ten Grades. Jeder Idealklasse korrespondiert eine eindeutig bestimmte Formenklasse zerlegbarer Einheitsformen des Körpers mit der Diskriminante D.

Elftes Kapitel: Unterkörper und Oberkörper. Hilberts Theorie der Relativkörper. Definition von Relativdifferente, Relativdiskriminante. Zusammenhang dieser beiden Begriffe mit der Diskriminante des Ober- und Unterkörpers. Es folgen die Untersuchungen von Hensel, im Falle, daß ein Oberkörper aus zwei Unterkörpern zusammengesetzt wird und sein Grad gleich ist dem Produkt der Grade seiner Unterkörper.

Zwölftes Kapitel: Der Galoissche Körper. Hilberts Theorie des Galoisschen Körpers. Die Primzahlen werden zerlegt mittels der Aufstellung des Zerlegungskörpers, des Trägheitskörpers und der Verzweigungskörper. Im Galoisschen Körper kann nach Minkowski das System unabhängiger Einheiten als ein System konjugierter Einheiten gewählt werden.

Anhang: Reihenentwicklung der Zahlen. Hensel hat eine der Theorie der algebraischen Funktionen analoge Theorie der algebraischen Zahlen geschaffen, in der er von gewissen Reihenentwicklungen der Zahlen ausgeht. An der Hand dieser Theorie werden aufs neue die wichtigsten Resultate der Zerlegung einer Primzahl in ihre Primideale erhalten.

Fu.

P. Bachmann. Berichtigung. Deutsche Math. Ver. **14**, 396.

Der Verf. nimmt eine Bemerkung in seiner „Theorie der algebraischen Zahlkörper“ (Referat vorstehend) zurück, wonach ein Beweis von Hilbert unvollständig wäre. Fu.

P. Th. Pepin. Théorie des nombres. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **23**, 109-177.

Dies der dritte Teil der Zahlentheorie (vgl. F. d. M. **34**, 213, 1903 und **35**, 202, 1904), der die elementare Lehre von den quadratischen Resten nach Primzahl- und nach zusammengesetzten Moduln behandelt. Den Ausgangspunkt bildet das Gaußsche Lemma:

$$\left(\frac{A}{p}\right) = (-1)^{\mu},$$

mittels dessen auch das quadratische Reziprozitätsgesetz bewiesen wird. Den Schluß bildet die Erweiterung des Reziprozitätsgesetzes auf zusammengesetzte Moduln und die Lösung der allgemeinsten Kongruenz

$$x^2 \equiv A\,(M).$$

Die Theorie wird an zahlreichen Beispielen erläutert. Fu.

J. W. L. Glaisher. On the representations of a number as a sum of four squares, and on some allied arithmetical functions. Quart. J. 36, 305-358.

Jede ungerade Zahl m kann als Summe von vier Quadraten dargestellt werden, und jede Zahl $4m$ (m wieder ungerade) kann als Summe von vier ungeraden Quadraten dargestellt werden. Die Anzahl dieser letzteren Darstellungen ist zweimal so groß, wie die der Darstellungen von m. Der Verf. zeigt, wie man aus jeder Darstellung

$$m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

zwei Darstellungen von m erhält. Ist z. B. $a \not\equiv b \not\equiv c \not\equiv d$, so hat man bloß zu setzen:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= \alpha_1, & a-b+c+d &= \alpha_2, \\ a-b-c+d &= \beta_1, & a+b-c+d &= \beta_2, \\ a-b+c-d &= \gamma_1, & a+b+c-d &= \gamma_2, \\ a+b-c-d &= \delta_1, & a-b-c-d &= \delta_2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2 = 4m \text{ und } \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + \delta_2^2 = 4m.$$

Umgekehrt folgt aus jeder Darstellung von $4m$ mittels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eine Darstellung $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, wenn

$$\left.\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma+\delta), \pm b = \tfrac{1}{4}(\alpha-\beta-\gamma+\delta), \\ \pm c &= \tfrac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma-\delta), \pm d = \tfrac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma-\delta), \end{aligned}\right. \alpha+\beta+\gamma+\delta \equiv 0 \,(\text{mod. } 4)$$

(falls $\alpha - \beta + \gamma + \delta \equiv 0$ (mod. 4), folgen ähnliche Formeln).

Mit Hülfe dieses Resultates gelingt es, gewisse Funktionen $\lambda(m), P(m), \ldots$, die von den Zerlegungen $4m = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ abhängen, in einfacherer Gestalt darzustellen durch die entsprechenden a, b, c, d von $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Z. B. ist $\lambda(m)$, falls $\alpha' = (-1)^{\alpha-1}\alpha, \ldots$:

$$\lambda(m) = 6\sum(\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta') + 3\sum(\alpha'+\beta'+2\gamma) + 3\sum(\alpha'+\beta') + \sum\alpha',$$

wo die erste Summe über die Zerlegungen von $4m$ in vier verschiedene Quadrate, die zweite über die Zerlegungen von $4m$ in vier Quadrate, wovon zwei gleiche, usf. zu nehmen ist. Der Verf. findet den einfachen Ausdruck:

$$\begin{aligned} \lambda(m) &= \frac{1}{\gamma} \sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} a \quad \text{für } m \equiv 1 \,(\text{mod. } 4) \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{für } m \equiv 3 \,(\text{mod. } 4). \end{aligned}$$

Dabei ist die Summe über alle, positiv wie negativ auftretenden Zahlen, die als erstes Quadrat in der Zerlegung von m auftreten können, zu nehmen, und $s = a + b + c + d$.

Die Formeln werden an zahlreichen Beispielen erläutert und auf Spezialfälle angewendet. Fu.

J. W. L. GLAISHER. The arithmetical functions $P(m)$, $Q(m)$, $\Omega(m)$. Quart. J. **37**, 36-48.

In der vorstehend besprochenen Arbeit des Verf. sind die Funktionen $\lambda(m)$, $P(m)$, ... aus der Zerlegung einer Zahl $4m$ (m ungerade) in vier ungerade Quadrate erhalten worden. Zugleich ergab sich dort für die Funktion $\lambda(m)$ die Relation

$$\lambda(m_1 m_2) = \lambda(m_1)\, \lambda(m_2),$$

falls m_1, m_2 zwei zu einander prime, ungerade Zahlen sind. Dieses Resultat wird hier auf die übrigen Funktionen erweitert. Es gilt wie oben auch:

$$P(m_1 m_2) = P(m_1)\, P(m_2) \text{ usf.}$$ Fu.

K. PETR. Über die Darstellung der Zahlen als Summen von zehn und zwölf Quadraten. Časopis. **34**, 224-229. (Böhmisch.)

Aus der Beziehung

$$2\wp^{(IV)}(\omega_1) - \wp^{(IV)}(\omega_2) - \wp^{(IV)}(\omega_3) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 . \, 16\,(\theta_3^{12} + \theta_2^{12})$$

folgt leicht der bisher unbewiesene Satz von Liouville über die Darstellung einer geraden Zahl als Summe von zwölf Quadraten. Für zehn Quadrate hat man analog die Beziehung

$$\left[\theta_1\, \theta_2 \frac{\theta_3(v)}{\theta_1(v)}\right]^{(IV)}_{v=0} + \left[\theta_2\, \theta_3 \frac{\theta_3(v)}{\theta_2(v)}\right]^{VI}_{v=0} + \theta_3^{(IV)}\, \theta_3 - 3\theta_3''^2) = \pi^4 \cdot 5\theta_3^{10};$$

dabei sind $\theta_1(v)$, $\theta_2(v)$, $\theta_3(v)$ Thetafunktionen mit den Charakteristiken (1,0), (0,1), (0,0). Pe.

J. SCHRÖDER. Eine Relation zwischen größten Ganzen. Hamb. Mitt. **4**, 214-217.

Der Verf. leitet eine Beziehung ab, die ein Spezialfall einer von Busche (vgl. F. d. M. **33**, 195, 1902) gegebenen Formel ist, indem er die innerhalb einer Kurve

$$f(x, y) = 0$$

fallenden Punkte mit ganzen rationalen Koordinaten auf zwei Weisen abzählt: 1. mittels des Geradensystems $y = \nu \, (\nu = 1, 2, \ldots)$, 2. mittels des Geradensystems $x = \nu y \, (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$. Die erhaltene Relation wird auf einige einfache Beispiele angewendet. Fu.

P. A. Mac Mahon. Memoir on the theory of the partition of numbers Part III. Lond. Phil. Trans. **205** A, 37-59.

A. Cunningham. Quadratic partitions. London: R. E. Francis Hodgson. XXIII. u. 266 S. (1904). Angezeigt: Phil. Mag. (6) **9**, 617.

Die Tafeln sollen für Primzahlen p bis 100000 die Teiler von $p-1$ und deren Zerlegungen nach Maßgabe der folgenden vier Schemata ergeben: a^2+b^2, a^2+2b^2, a^2+3b^2, $\frac{1}{4}(a^2+27b^2)$, bis 25000 ferner die Zerlegungen nach dem Schema a^2-2b^2, und bis 10000 die Zerlegungen für die Schemata a^2-5b^2, $\frac{1}{4}(a^2-5b^2)$, a^2+7b^2, $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$.
Br.

A. Cunningham. Quadratic partition tables. — Errata. Messenger (2) **34**, 132-136.

Das Buch „Quadratic partitions“ von Cunningham, dessen Titel in F. d. M. **35**, 229, 1904, aufgenommen wurde (Referat vorstehend), enthält, wie am Anfange der gegenwärtigen Note berichtet ist, die Zerlegungen von Primzahlen p unter 100000 in a^2+b^2, c^2+2d^2, A^2+3B^2, $\frac{1}{4}(L^2+27M^2)$, bis $p=24977$ in e^2-2f^2, $p=\frac{1}{4}(x^2-5Y^2)$ bis 10000. Bei der Anfertigung dieser Tafeln benutzte der Verf. die folgenden früher veröffentlichten Schriften: 1. C. G. J. Jacobi (J. für Math. **30**, 174-180; Werke **6**, 265-271). 2. C. G. Reuschle, Neue zahlentheoretische Tabellen. Stuttgart 1856. 3. H. W. Lloyd Tanner in Lond. M. S. Proc. **24**, 256-262 (1873). In der vorliegenden Notiz werden Berichtigungen zu diesen Tafeln und zu denen des Verf. gegeben.
Lp.

A. Cunningham. Power-tables. — Errata. Messenger (2) **35**, 13-24.

Bei den Untersuchungen über die Zerlegung gegebener Zahlen von der Form $a^n \mp 1$ hat Cunningham sich der gedruckten Tafeln der Potenzen ganzer Zahlen bedient und hat dabei manche Fehler dieser Tafeln entdeckt. In dem vorliegenden Aufsatze werden 27 solcher Tafeln beschrieben und die gefundenen Fehler mitgeteilt. Lp.

A. Cunningham and H. J. Woodall. Determination of successive high primes. (Third paper, showing 213 new high primes.) Messenger (2) **34**, 184-192.

Diese Abhandlung ist die Fortsetzung zweier gleichbetitelten (F. d. M. **33**, 198, 1902 und **35**. 206, 1904); die Bezifferung der Artikel, Beispiele und Tabellen in dem vorliegenden Aufsatze fährt in der entsprechenden früheren Bezifferung fort. Das zunächst bearbeitete Beispiel betrifft den Bereich $p = 2^{26} \mp 1080$, sowie $p = \frac{1}{n}(2^{26} \pm 1080)$ mit $n = 3, 5, 7$. Die Rechnungen ergeben 213 Primzahlen dieser Bereiche. Durch die vereinigte Arbeit beider Autoren sind in den drei Artikeln 1466 große Zahlen als Primzahlen nachgewiesen, nämlich 160 mit 7 Ziffern, 1196 mit 8 Ziffern, 110 mit 9 Ziffern. Zerstreute Bemerkungen beziehen sich auf „Primpaare", d. h. Primzahlen mit der Differenz 2, und lange Folgen zusammengesetzter Zahlen. Lp.

A. Cunningham. Questions on the factorisations of high numbers. Ed. Times (2) **7**, 62, 72, 106-107; **8**, 50, 64-65, 83.

1. Question 15573. $N = 208^{13} - 1$ wird zerlegt in LM, wo
$$L = 53 \cdot 5591 \cdot 213\,262\,271,$$
$$M = 8971 \cdot 11623\,388\,671.$$

2. Question 15556. Zerlegung von $N = G_n^4 + 8 + F_n^4$, wo
$$G_n = F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \ldots F_{n-1},\ F_n = 2^{2^n} + 1,$$
z. B.
$$N = G_4^4 + 8 + F_4^4 = 2\,(2^{32} + 1)\,(2^{32} + 5)$$
$$= 2 \cdot 641 \cdot 6700417 \cdot 27 \cdot 47 \cdot 3384529.$$

3. Question 15608. $N = (2^{64} \mp 2^{32} + 1)^2 + 1$.
$$N = 2\,(2^{64} + 1)(2^{63} \mp 2^{32} + 1).$$
$$2^{64} + 1 = 274177 \cdot 67280421310721,$$
$$2^{63} - 2^{32} + 1 = 13 \cdot 37 \cdot 118 \cdot 1429 \cdot 118750098349$$
$$2^{63} + 2^{32} + 1 = 5 \cdot 109 \cdot 29 \cdot 1449 \cdot 40388473189.$$

4. Question 15481. $N = 96^{16} + 1$.
$$N = 13 \cdot 709 \cdot 7177 \cdot 11833 \cdot 37 \cdot 397 \cdot 53150113 \cdot 73 \cdot 613 \cdot 17537797.$$
(Vgl. F. d. M. **35** 206, 1904.)

5. Question 15698. $N = (2^{127} + 2^{63} + 1)^2 + 2^{64}$.
$$N = 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 14449 \cdot 40388473189$$
$$\cdot\, 118750098349 \cdot (18446744073709551617)^2,$$
wo der letzte quadratische Faktor zerlegbar ist in
$$(274177)^2\,(67280421310721)^2.$$

7. Question 15736. $N = 70600734^2 + 1$.
$$N = 1213 \cdot 2027117^2.$$
Allgemein $N = y^2 + 1 = q \cdot m^2$. Lp.

A. Cunningham. Questions on the theory of numbers. Ed. Times (3) 7, 38-39, 49-50, 68-69; 8, 18-19, 25, 35-36, 78.

1. Question 15539. Für welche Formen von m ist $x^3 \pm 1 \equiv 0 \pmod{m}$? Wie läßt sich x finden, wenn m gegeben ist? Beispiel $m = 99991$.

2. Question 15499. $N = 111\ldots 11$ bestehe aus q^n Einheiten im Zahlsystem mit der Basis $r = mq + 1$, wo q eine Primzahl; dann ist $N = Mq^n$.

3. Question 15521. Man bezeichne mit σN die Summe der Teiler von N mit Einschluß von 1, Ausschluß von N; Lösungen von $\sigma N = x^2$ (ein gerades Quadrat) zu finden.

4. Question 15591. Mit Ausschluß von $m = x^4 + 1$ die Formen von m zu bestimmen, für welche $x^{12} + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ ist. Bei gegebenem m die Zahl x zu finden, z. B. $m = 99961$.

5. Question 15663. Einen allgemeinen Ausdruck für Triangularzahlen zu finden, die mit einer n-mal wiederholten Ziffer und aus einer anderen ebenfalls n-mal wiederholten Ziffer geschrieben werden.

6. Question 15678. Wenn $F_x = 2^{2^x}$, so ist $F_m^4 + F_n^2$ immer in zwei Faktoren zerlegbar, wenn $n - m < 2$.

7. Question 15718. Fälle von Zahlen N zu finden, welche durch mindestens dreimalige Wiederholung derselben Einheit a oder b in zwei oder mehr Zahlsystemen von verschiedener Basis ausdrückbar sind, also

$$N = aa\ldots a = bb\ldots b.$$

Lp.

E. B. Escott. Questions 15500 and 15572. Ed. Times (2) 7, 81-85.

15500. Zwei große aufeinander folgende ganze Zahlen ($> 10^{14}$) zu finden, deren Primfaktoren alle unter 100 liegen. — 15572. Zwei große, aufeinander folgende ganze Zahlen ($> 10^{17}$) zu finden, deren Primfaktoren alle unter 200 liegen. — Die vom Verf. gegebene Methode erhellt aus dem folgenden Beispiele. Es ist

$$\frac{x^2(x-7)^2(x+7)^2}{(x^2-8^2)(x^2-5^2)(x^2-3^2)} = \frac{x^6 - 98x^4 + 2401x^2}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 14400}.$$

Wählt man x so, daß $x^6 - 98x^4 + 2401x^2$ durch 14400 teilbar ist, so unterscheiden sich Zähler und Nenner des durch 14400 gehobenen Bruches um eine Einheit. So wird für $x = 3325$ der Bruch gleich

$$\frac{306\,331\,585^2}{306\,331\,585^2 - 1},$$

und kein Faktor von Zähler und Nenner übersteigt die Zahl 200.

Lp.

R. W. D. Christie. Questions on the theory of numbers. Ed. Times (2) **7**, 52-53, 79-80, 103; **8**, 28-30, 58.

1. Question 15555. Es sei $p = a^2 + b^2$, $q = ac + bd$, $s = c^2 + d^2$, $ad - bc = 1$; dann ist $r^{2m} + 1 = ps$, $r^{6m} + 1 = p(p - 2q + s)$; allgemeiner $(pt + r^m)^2 + 1 = pS$, $(pt + r^{3m})^2 + 1 = pT$, wo r eine beliebige primitive Wurzel der Primzahl $4m + 1$, t eine ganze Zahl ist. Ähnliche Gleichungen für die Primzahl $p = 4m - 1$ aufzustellen.

2. Question 15574 Unendlich viele positive ganzzahlige Werte von X zu finden, welche zu demselben Y in der Pellschen Gleichung gehören: $X_n^2 - PY^2 = -1$; z. B. $70^2 - 29 \cdot 13^2 = -1$, $746^2 - 3293 \cdot 13^2 = -1$, usw.

3. Question 15628. Wenn $x_1^2 + 1 = p_1 y^m$ für alle ganzzahligen Werte von m, so ist $x_n^2 + 1 = p_n y^m$ in inf. — Verallgemeinerung. Z. B. $239^2 + 1 = 2 \cdot 13^4$, $85922^2 + 1 = 5 \cdot 17 \cdot 3041 \cdot 13^4$, in inf.

4. Question 15646. Die Gleichung $X^2 - 19Y^2 = -3$ in ganzen Zahlen zu lösen durch Benutzung anderer Näherungsbrüche als der gewöhnlichen Pellschen, z. B. $p_n/q_n = \frac{2}{1}, \frac{5}{1}, \frac{17}{4}, \frac{22}{5}, \frac{61}{14}$, in inf. Lp.

G. Torelli. Nuove formole per calcolare la totalità dei numeri primi non superiori a un limite assegnato, contenuti nella serie naturale, o in una progressione aritmetica. Nota II. Napoli Rend. (3) **11**, 101-109.

Dem Verf. gelingt es, die Anzahl der Primzahlen $< x$, die in der linearen Form $My + m_h$ enthalten sind (welche Anzahl er mit $\mathfrak{D}(My + m_h, x)$ bezeichnet), darzustellen in der Form:

$$\mathfrak{D}(My + m_h, x) = P_1(m_h, x) + \frac{\mu(2)}{2} P_2(m_h, x^{\frac{1}{2}}) + \frac{\mu(3)}{3} P_3(m_h, x^{\frac{1}{3}}) + \cdots,$$

wo $\mu(n)$ die bekannte μ-Funktion der analytischen Zahlentheorie ist, und

$$P_r(m_h, x) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]} \mu(m) \sum_{m^r n^r \equiv m_h}^{n < \frac{x}{m}} \frac{\lg n}{\lg m + \lg n}.$$

Diese letzte Funktion wird im Falle $r = 1$ noch näher bestimmt. Fu.

M. Cipolla. Estensione delle formole di Meissel-Rogel e di Torelli sulla totalità dei numeri primi che non superano un numero assegnato. Annali di Mat. (3) **11**, 253-267.

Es wird das Problem gelöst, die Summe der Funktionswerte $f(x)$ zu bestimmen, falls x alle Primzahlen kleiner als eine Zahl n durchläuft. Annahme ist, daß das Problem gelöst sei für die Primzahlen kleiner als $\sqrt{n}$. Methodisch werden hierbei die Entwicklungen von Meissel und Rogel angewendet. Fu.

E. Lebon. Sur le nombre des nombres premiers de 1 à N. Assoc. Franç. Grenoble **33**, 171-181.

In einer gleichbetitelten Abhandlung des Vorjahres (Palermo Rend. **18**, 260-268; F. d. M. **35**, 203, 1904) hatte der Verf. für die Anzahl der Primzahlen von 1 bis N eine Formel gegeben, die auch im Jahrbuche abgedruckt ist. In der gegenwärtigen Mitteilung wird gezeigt, wie die mühsamen Rechnungen abgekürzt werden können. Die entwickelten Regeln werden an Zahlenbeispielen erläutert. Lp.

H. v. Mangoldt. Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$. Math. Ann. **60**, 1-19.

Riemann hat für die Anzahl der Nullstellen der ξ-Funktion, deren reelle Teile zwischen 0 und $T > 0$ enthalten sind, den Näherungswert angegeben:

$$\frac{T}{2\pi} \lg \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}.$$

Der Verf. hat in einer früheren Arbeit (J. für Math. **114**, 255-305; F. d. M. **26**, 215, 1895) gefunden, daß der Fehler bei dieser Abschätzung kleiner bleibt (für $T > 12$) als

$$0{,}34\,(\lg T)^2 + 1{,}35 \cdot \lg T + 2{,}58.$$

Die vorliegende Arbeit verbessert diese Angabe, indem für die angegebene Differenz für $T > 28{,}558$ die obere Grenze

$$0{,}43200 \lg T + 1{,}91662 \lg \lg T + 13{,}07873$$

gefunden wird, die also nur bis zur Größenordnung von $\lg T$ geht.

Fu.

E. Landau. Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. S. M. F. Bull. **33**, 229-241.

Mellin hat für die ζ-Funktion die Relationen bewiesen:

$$|\zeta(\sigma + ti)| = O(t^{1-\sigma}), \text{ wenn } 0 < \sigma < 1,$$
$$|\zeta(\sigma + ti)| = O(\lg t), \text{ wenn } \sigma = 1,$$

wo σ, t reelle Variabeln sind und $O(g(t))$ eine Funktion ist, für die

$$\lim_{t=\infty} \frac{O(g(t))}{g(t)}$$

zwischen endlichen Grenzen bleibt. Diese Betrachtung hat Mellin verfeinert, indem er noch die folgende Relation hinzufügte:

$$|\zeta(\sigma+ti)| = O(\sqrt{t}), \text{ wenn } 0 < \sigma < \frac{1}{2}.$$

Dem Verf. gelingt es, diese Mellinschen Relationen durch die beiden folgenden, noch genaueren, zu ersetzen:

$$|\zeta(\sigma+ti)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sigma}\sqrt{\lg t}\right), \text{ wenn } 0 < \sigma \leqq \frac{1}{2},$$

$$|\zeta(\sigma+ti)| = O\left(t^{\frac{1}{3}(1-\sigma)}\sqrt{\lg t}\right), \text{ wenn } \frac{1}{2} \leqq \sigma < 1.$$

Zum Beweise wird wesentlich in den auftretenden Reihenentwicklungen der Voronoïsche Satz über die Funktion

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{x} \left[\frac{x}{n}\right]$$

angewendet, daß nämlich

$$\tau(x) = x \lg x + (2C-1)x + O(\sqrt[3]{x} \lg x).$$

Im letzten Abschnitt beweist der Verf. für die Funktion

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{x} \{\mu(n)\}^2$$

die Beziehung:

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\lg \lg x}\right).$$

Fu.

G. Giraud. I numeri perfetti. Periodico di Mat. (3) **3**, 124-129.

In diesem Aufsatze werden die bekannten Eigenschaften der vollkommenen Zahlen besprochen und einige Bemerkungen über die erweiterte Problemstellung hinzugefügt. In der Aufzählung der bekannten vollkommenen Zahlen fehlt die von Seelhoff entdeckte neunte: $2^{p-1}(2^p-1)$ für $p=61$. Man findet das nötige bei Wertheim, Anfangsgründe der Zahlenlehre (1902), die Literatur in Enzyklopädie **1**, 578. Lp.

Th. Gosset. On the factors of Fermat's numbers. Messenger (2) **34**, 153-154.

Für die Zahlen $2^{2^n}+1$ in den Fällen $n = 5, 6, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38$ wird je ein Primfaktor angegeben (dem Verf. von W. W. Rouse Ball mitgeteilt) und daneben die Zerlegung dieses Faktors in zwei komplexe Primfaktoren von der Form $a \pm bi$ gestellt, z. B. hat 2^{2^5+1} den Primfaktor 641, und dieser besitzt seinerseits die Faktoren $25 \mp 4i$.

Lp.

J. C. Morehead. Note on Fermat's numbers. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 543-545.

Für $F_n = 2^{2^n} + 1$ hat Pepin den Satz gegeben: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß F_n eine Primzahl ist, besteht darin, daß $P_n = \alpha^{\frac{1}{2}(F_n - 1)} + 1 \equiv 0 \pmod{F_n}$ ist, wo α ein quadratischer Nichtrest von F_n ist. Mit Hülfe von $\alpha = 3$ hat der Verf. gefunden, daß F_7 nicht eine Primzahl sein kann. Hiernach könnte man auf die Vermutung kommen, daß alle F_n für $n > 4$ zusammengesetzte Zahlen sind.

Lp.

P. de Sanctis. Prodotto delle cifre significative die alcune classi di numeri. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti 58, 83-96.

Verf. setzt seine früheren Untersuchungen (F. d. M. **33**, 197, 1902) fort über n-zifferige Zahlen im $(k+1)$-adischen Zahlsystem, wo die n Ziffern in h Gruppen von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ Ziffern eingeteilt sind. Fu.

P. Niewenglowski. Théorème d'arithmétique. Nouv. Ann. (4) 5, 103-105; Bull. sc. math. et phys. élém. **10**, 50-52.

Es sei $s = \sum \frac{1}{k}$ für $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, d der Hauptnenner dieser Brüche. Ist n nicht prim, so ist sd durch n nicht teilbar; ist n prim und > 2, so ist sd durch n teilbar; ist n prim und > 3, so ist sd durch n^2 teilbar.

Lp.

G. Calvitti. Sull' indice minimo di N relativo a p. Periodico di Mat. (3) **3**, 130-142.

Es seien gegeben eine Zahl A, eine Gruppe C von Ziffern und eine zur Basis des Zahlsystems prime Zahl p; es soll die kleinste Anzahl von Malen bestimmt werden, wie oft man zur Rechten von A die Gruppe C schreiben muß, um eine zu A nach dem Modul p kongruente Zahl zu erhalten, also in dem Falle, wo A ein Vielfaches von p ist, ein Vielfaches von p. So kann man unter anderem das Plateausche Theorem in Angriff nehmen: Wenn in einem Zahlsystem mit der Basis g eine beliebige Zifferngruppe des Systems gegeben wird, ferner eine zu g prime Zahl, so existieren unendlich viele Vielfachen von p, welche in dem gegebenen System durch eine wiederholte Schreibung dieser Gruppe entstehen. Bei der Behandlung dieser Aufgaben kommt man auf die Kongruenz:

$$a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^x \equiv 0 \pmod{p^k},$$

kurz als $(a)_x \equiv 0$ bezeichnet. Über diese Kongruenz wird der Lehrsatz bewiesen: Die kleinste Wurzel der Kongruenz $(a)_x \equiv 0 \pmod{p^k}$ für eine Primzahl p ist gleich dem Produkte aus der kleinsten Wurzel m_1

der Kongruenz $(a)_x \equiv 0 \pmod{p}$ und aus dem Quotienten von p^k durch p^t, die größte in $(a)_{m_2}$ enthaltene Potenz von p. Das Verfahren, den kleinsten Index von N bezüglich einer gegebenen Zahl p zu berechnen, wird näher entwickelt. Aus den abgeleiteten Sätzen ergibt sich eine Regel für die Teilbarkeit von Zahlen, die mit der von Loria im Boll. di Mat. **1**, 3-13 (1902) angegebenen übereinstimmt. Lp.

M. Cipolla. Theoria de congruentias intra numeros integro. Revue de Math. 8, 89-117.

In der von Peano begünstigten flexionslosen neulateinischen Sprache und in der Begriffsschrift des Formulario wird eine Übersicht über die Theorie der Kongruenzen zwischen ganzen Zahlen gegeben. Nach einer Übersicht über die Werke, welche die Theorie der Kongruenzen behandeln, werden in den verschiedenen Paragraphen folgende Gegenstände behandelt: § 1. Kongruenzen im allgemeinen. § 2. Reste besonderer Funktionen. § 3. Theoreme von Euler, Fermat und Wilson. § 4. Kongruenzen ersten Grades. § 5. Kongruenzen zweiten Grades. § 6. Binomische Kongruenzen. § 7. Theorie der Gaußschen Zahl. Primitive Wurzeln. Indizes. § 8. Anwendungen. Den einzelnen Paragraphen sind viele Literaturnachweise beigegeben. Lp.

A. Capelli. Ein Beitrag zum Fermatschen Satz. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 148-150.

Wenn a und b teilerfremd sind, so folgt aus dem Fermatschen Satze $a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}$. Der Quotient von $a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} - 1$ durch ab läßt sich in der Gestalt $\left[\frac{a^{\varphi(b)-1}}{b}\right] + \left[\frac{b^{\varphi(a)-1}}{a}\right]$ darstellen, wie auf einfache Weise gezeigt wird. P.

M. Lerch. Zur Theorie des Fermatschen Quotienten $\frac{a^{p-1}-1}{p} = q(a)$. Math. Ann. **60**, 471-490.

Setzt man

$$q(a) = \frac{a^{p-1}-1}{p}$$

(p ungerade Primzahl), so genügt die Funktion $q(a)$ verschiedenen Kongruenzeigenschaften, die der Verf. in der vorliegenden Arbeit angibt. Die hauptsächlichsten Resultate sind die folgenden: Es wird

$$\sum_{a=1}^{p-1} q(a) \equiv \frac{(p-1)!+1}{p} \pmod{p}.$$

Ist $[z]$ das größte Ganze von z, so ist:

$$q(a) \equiv \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu \cdot a} \left[\frac{\nu \cdot a}{p}\right] \qquad (\text{mod. } p)$$

für jede zu p prime ganze Zahl a. Diese Kongruenz ergibt für $a = 2, 4, 8, \cdots$ interessante Anwendungen. Ferner führt sie auf

$$\sum_{a=1}^{p-1} a q(a) \equiv \frac{1}{2} \qquad (\text{mod. } p).$$

Mittels Einführung des Legendreschen Symbols $\left(\frac{\nu}{p}\right)$ beweist der Verf. die Relationen:

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) q(\nu) \equiv 0 \ (\text{mod. } p),$$

falls $p \equiv 3$ (mod. 4) ist, und

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) q(\nu) \equiv (-1)^{\frac{p-5}{4}} \cdot 2 \cdot B_n \ (\text{mod. } p),$$

falls $p \equiv 1$ (mod. 4) und B_n die n-te Bernoullische Zahl ist. Ist $Cl(-p)$ die Klassenanzahl des quadratischen Körpers $(\sqrt{-p})$, so ist

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) \nu q(\nu) \equiv 0 \ (\text{mod. } p), \ \text{wenn } p \equiv 1 \ (\text{mod. } 4)$$
$$\equiv Cl(-p) \ (\text{mod. } p), \ \text{wenn } p \equiv 3 \ (\text{mod. } 4).$$

Eine Anwendung dieser Formeln ist das Resultat, daß die unbestimmte Gleichung

$$ax - py = 1$$

gelöst wird durch

$$x = a - 12 \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu \cdot \left[\frac{a\nu}{p}\right] \quad (p \text{ Primzahl}).$$

Zum Schlusse werden ähnliche Kongruenzen auch für einen zusammengesetzten Modul n gebildet durch Betrachtung der allgemeinen Funktion:

$$q(a) = \frac{a^{\varphi(m)} - 1}{m} \qquad (a \text{ prim zu } m).$$

Fu.

R. Daublebsky v. Sterneck. Über die Kombinationen der Potenzreste einer Primzahl zu bestimmten Summen. Wien. Ber. **114**, 711-758.

Es seien ν untereinander inkongruente Elemente $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ des vollständigen Restsystems (mod. M) gegeben. Es wird gefragt, wie viele aus diesen Elementen gebildete Kombinationen zur i-ten Klasse, als Summe betrachtet, einer bestimmten Zahl n nach M kongruent sind?

Ist $(n)_i$ diese Anzahl bei Kombinationen ohne Wiederholung, $[n]_i$ bei Kombinationen mit Wiederholung, so bestehen folgende Rekursionsformeln:

$$i\,(n)_i = \sum_{\lambda=1}^{i} (-1)^{\lambda-1} \sum_e (n-\lambda e)_{i-\lambda}$$

(wobei e alle gegebenen Elemente zu durchlaufen hat) und

$$i\,[n]_i = \sum_{\lambda=1}^{i} \sum [n-\lambda e]_{i-\lambda}.$$

Diese Formeln werden angewendet vom Verf. auf die folgenden Fälle: Es sei M eine Primzahl und 1. die e die quadratischen Reste, 2. die e die kubischen Reste, 3. die e die n-ten Reste dieser Primzahl. Die obigen Rekursionsformeln werden in diesen Fällen genauer bestimmt und ihr Zusammenhang mit den Gleichungen der Kreisteilungstheorie beleuchtet.

Fu.

L. S. E. v. Rechtenstamm. Theorie der Polygonalreste. Monatsh. f. Math. **16**, 167-192.

Ist m eine bestimmte ganze rationale Zahl $\geqq 3$, so betrachtet der Verf. den Bereich der Zahlen

$$F(a) = \frac{2}{m-2}\,a + \frac{1}{2}\,\frac{m-4}{m-2}, \qquad a = 1, 2, 3, \ldots,$$

die er mit kleinen griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots$ bezeichnet. Für diese Zahlen definiert er als additive Operation

$$\alpha\,(+)\,\beta = \alpha + \beta - \frac{1}{2}\,\frac{m-4}{m-2},$$

als multiplikative Operation

$$\alpha\,(\cdot)\,\beta = \left(\frac{m}{2} - 1\right)\alpha\cdot\beta - \left(\frac{m}{4} - 1\right)(\alpha+\beta) + \frac{m}{8}\,\frac{m-4}{m-2}.$$

Die beiden Operationen befriedigen das kommutative, assoziative und distributive Gesetz; da ferner $\alpha < \beta$, wenn $a < b$, so kann man für diese Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ genau dieselbe Zahlentheorie entwickeln, wie für die ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers. Insbesondere gelten der Fermatsche Satz und der Wilsonsche Satz. Aber auch die ganze Theorie der quadratischen Reste wird für das System der $\alpha, \ldots$ entwickelt und das quadratische Reziprozitätsgesetz bewiesen.

Der Zweck dieser Theorie liegt in der Anwendung auf die Polygonalreste. Die Zahlen $\frac{1}{2}[(m-2)a^2 - (m-4)\,a]$ $(a = 1, 2, 3, \ldots)$ sind die m-Eckszahlen. Unter dem m-Ecksrest von k versteht man eine Zahl, die nach k einer m-Eckszahl kongruent ist. Ist k zu $2\,(m-2)$ prim, so heißt k regulärer Modul. Aus der Theorie der quadratischen Reste der $\alpha, \beta, \ldots$ ergibt sich dann einfach, daß l dann und nur

dann m-Ecksrest des regulären Moduls k ist, wenn $(8m-16)l-(m-4)^2$ quadratischer Rest von k ist.

Schließlich geht der Verf. auch noch auf den Fall irregulärer Moduln ein. Fu.

E. Schönbaum. Einige Kapitel aus der Zahlentheorie. Časopis **34**, 265-300. (Böhmisch.)

Die wichtigsten Sätze über die Legendresche E-Funktion. Eine Ableitung der Sätze über die Teilbarkeit der Faktoriellen; insbesondere wird eine vereinfachte Darstellung der Untersuchungen von Landau (Nouv. Ann. (3) **19**, 344-362; F. d. M. **31**, 183, 1900) gegeben.

Pe.

K. Petr. Ein geometrischer Beweis des Wilsonschen Satzes. Časopis **34**, 164-166. (Böhmisch.)

Von den $(p-1)!$ p-Ecken, deren Eckpunkte mit den Eckpunkten eines gegebenen regulären p-Eckes übereinstimmen, sind $p-1$ regulär, die übrigen je p miteinander kongruent; dabei ist p eine Primzahl. Daraus folgt unmittelbar der Wilsonsche Lehrsatz. Pe.

V. d'Escamard. Nuova dimostrazione di un teorema sulle congruenze. Batt. G. [(2) **12**] **43**, 379-380.

Diese Arbeit beweist, daß die elementar-symmetrischen Funktionen von $1, 2, 3, \ldots, p-1$ (p eine Primzahl) durch p teilbar sind, und daß $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Hierzu wird in der Form:

$$(x+1)(x+2)\ldots(x+p-1)$$

für x der Reihe nach $1, 2, \ldots, p-1$ eingesetzt; die Koeffizienten werden mittels Determinanten ausgerechnet. Fu.

A. Cunningham. Haupt-exponents of 2. Quart. J. **37**, 122-145.

Unter dem Hauptexponent einer Basis a nach dem (Primzahl-) Modul p versteht man die kleinste Zahl x, für die

$$a^x \equiv 1 \pmod{p}$$

(a, p, x ganze rationale Zahlen). Ist dann $x=(p-1)/\nu$, so heißt ν der maximale Index von a. Der Verf. gibt eine Tabelle dieser Indizes ν für alle Primzahlen und Primzahlpotenzen, nicht größer als 10000, als Modul genommen, bei der Basis $a=2$. Dabei sind die Fälle $\nu=1$, und $\nu=2$ weggelassen worden. Der Text gibt die Hülfsmittel, die

dem Verf. beim Berechnen der Tafel notwendig waren. Ist z. B. $p = 2nx + 1$, n eine zweite Primzahl, und

$$p = \frac{X^n - Y^n}{X - Y}$$

(X, Y zwei zueinander prime ganze Zahlen), so ist nur dann $2^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p}$, wenn $X = 2nx$, oder $Y = 2ny$, oder $X + Y = 2ny$. Zum Schluß betrachtet der Verf. auch die bis jetzt erschienenen Tafeln und Arbeiten über diesen Gegenstand. Fu.

L. Saalschütz. Zur Lehre von den quadratischen Resten. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 220-230.

Hier wird ein vollständiges Restsystem nach einem Primzahlmodul $p \equiv 1 \pmod{4}$ in gewisse Perioden eingeteilt, und zwar, indem man zuerst quadratische Reste und Nichtreste, dann biquadratische Reste und Nichreste usf. scheidet, also so viel Scheidungen vornimmt, als 2 in $p - 1$ aufgeht. Die so erhaltenen Einteilungen entsprechen genau den von Gauß in der Kreisteilung (Disquisitiones arithmeticae) allgemein dargestellten Kreisteilungsperioden. Fu.

W. Mantel. Résidus quadratiques de polynômes. Nieuw Archief (2) **6**, 374-386.

Die Gesamtheit der ganzzahligen Polynome einer Veränderlichen, betrachtet modulis einer Primzahl p und eines modulo dieser Primzahl irreduziblen ganzzahligen Polynoms $F_n(x)$ vom Grade n, bildet einen endlichen Körper von p^n Elementen. Für diese Körper, wie sie Serret, Cours d'Algèbre Supérieure III, 3 (von der 4. Aufl. an) betrachtet, wird das quadratische Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{f_m(x)}{F_n(x)}\right)\left(\frac{F_n(x)}{f_m(x)}\right) = (-1)^{\frac{p^m-1}{2}\,\frac{p^n-1}{2}}$$

aufgestellt, ähnlich, wie Hilbert in seiner Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers (Math. Ann. **51**, 1-127; F. d. M. **29**, 169, 1898) das Reziprozitätsgesetz für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper behandelt. Nur trägt die Untersuchung für den endlichen Körper einen durchaus elementaren Charakter und bedarf nicht der komplizierten Begriffsbildungen der Idealtheorie, „dont parle de cœur léger le savant de Göttingue“. T.

J. Kraus. Bemerkung zur Lehre von den diophantischen Gleichungen. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 204-206.

Die Bedeutung des Algorithmus

$$ar_\lambda - r_{\lambda+1} = ka_\lambda \; (0 < r_\lambda < k, 0 \leqq a_\lambda < a; \lambda = 1, 2, 3, \cdots)$$

für die Lösung der diophantischen Gleichung $ax - by = c$ wird beleuchtet. Die Rolle, die die Zahl $k = b - a$ spielt, wird besonders betont. Ihre Wichtigkeit für die Lösung aller Gleichungen $ax - by = c$ mit demselben $k = a - b$ will Verf. an anderer Stelle besprechen. Lwt.

G. Calvitti. **Sull' analisi indeterminanta di primo grado a due incognite.** Suppl. al Period. 8, 113-118.

Entwicklung eines einfachen, kurzen Algorithmus zur Lösung der diophantischen Gleichung $ax + by = c$. Lp.

A. Pleskot. **Bemerkung zur Lösung der unbestimmten Gleichungen.** Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 403-406.

Vereinfachungen zu der Notiz in derselben Zeitschrift Bd. 33 (F. d. M. **33**, 209, 1902). Lp.

E. Sós. **Die diophantische Gleichung** $\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 97-102.

Zunächst wird die Gleichung (1) $\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ untersucht; ihre Lösungen haben die Form

$$x_1 = y_1 (y_1 + y_2), \; x_2 = y_2 (y_1 + y_2), \; x = y_1 y_2,$$

wo y_1 und y_2 beliebige relativ prime Zahlen sind; eine solche Lösung wird irreduzibel genannt. Es sei $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_\nu^{a_\nu}$, wo $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ Primzahlen, die Exponenten a_k ganze Zahlen sind. Dann gehören zu x im ganzen $2^{\nu-1}$ wesentlich verschiedene irreduzible Lösungen der Gleichung (1). Die Anzahl aller zu x gehörigen Lösungen von (1) ist

$$\tfrac{1}{2}\left\{\prod_{k=1}^{\nu} (1 + 2a_k) + 1\right\}.$$

Hiernach wird die Lösung der allgemeinen Gleichung des Titels bewirkt, wobei $2^n - 1$ ganzzahlige Parameter nach Art von y_1 und y_2 bei der Gleichung (1) eingeführt werden; die aufgestellten Formeln werden an der Gleichung $\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ erläutert, und zuletzt wird die Gleichung $\frac{a}{x} = \sum \frac{a_k}{x_k}$ kurz betrachtet. Lp.

P. Zühlke. Über eine quadratische Kongruenz. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **4**, 10-11.

P. Zühlke. Bemerkung zu dem Vortrage „Über eine quadratische Kongruenz". Ebenda, 59-60.

Der Vortrag hatte sich mit der Aufgabe beschäftigt, alle n-ziffrigen Zahlen zu bestimmen, die ihren Quadraten in bezug auf den Modul 10^n kongruent sind. Infolge der stattgefundenen Besprechungen nach dem Vortrage waren dann Nachforschungen über frühere Behandlungen dieser Aufgabe angestellt worden; über die Ergebnisse derselben wird in der zweiten Note berichtet. Ref., der hierbei mitwirkte, hat bei Gelegenheit einer von Blaikie gestellten gleichen Frage (F. d. M. **35**, 213, 1904) die wichtigsten Quellen namhaft gemacht. Lp.

J. Blaikie. Question 15557. Ed. Times (2) **7**, 60-61.

Ist n eine solche Zahl mit r Ziffern, daß ihr Quadrat mit denselben r Ziffern wie die Zahl selbst endigt, so hat $10^r + 1 - n$ die gleiche Eigenschaft. Das Quadrat von $n - 1$ endigt mit denselben r Ziffern, wie $10^r + 1 - n$. Der Kubus von $n - 1$ endigt mit denselben r Ziffern, wie $n - 1$. Ist n eine solche Zahl von r Ziffern, deren Kubus mit denselben r Ziffern endigt, so hat $10^r - n$ die nämliche Eigenschaft. — Beweise von A. Cunningham und F. Wiggins. Vgl. F. d. M. **35**, 213, 1904. Lp.

A. Gutzmer. Nombres dont les carrés se terminent par les mêmes chiffres. Mathesis (3) **4**, 269-270 (1904).

T. Hayashi. Questions d'arithmétique. Mathesis (3) **5**, 269-270.

J. L. Lagrange. Über die Lösung der unbestimmten Probleme zweiten Grades (1768). Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben von E. Netto. Leipzig: Wilhelm Engelmann. 131 S. 8° (1904, Ostwalds Klassiker Nr. 146).

Die Abhandlung: „Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré", welche am 24. November 1768 von Lagrange der Berliner Akademie vorgelegt wurde, erschien im 23. Bande der Hist. Mém. Ac. Berlin, der 1769 ausgegeben ist. Da in ihr zum ersten Male direkte allgemeine und neue Methoden für die Lösung der Gleichungen von der Form $A + Bt^2 = u^2$ und allgemein jeder Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen oder gebrochenen Zahlen entwickelt werden, war es angezeigt, diese klassische Arbeit der Ostwaldschen Sammlung einzuverleiben. Als sachkundiger Zahlentheoretiker hat sich Netto der Mühe unterzogen, die Schrift den heutigen Mathematikern in

einer leicht lesbaren Form zu bearbeiten. In seiner etwas freien und an manchen Stellen gekürzten Ausgabe wird es den Studenten eine mühelose Aufgabe sein, die Schlüsse Lagranges in kürzester Zeit zu verfolgen. Einzelne Stellen, in denen, wie Ref. meint, die Übersetzung den Sinn der Lagrangeschen Gedanken nicht genau wiedergibt, können hier nicht besprochen werden.

In den Anmerkungen (S. 128-131) hätte wohl etwas mehr geschehen können. Das Verhältnis der vorliegenden Schrift zu der vorangehenden Behandlung in der Arbeit Lagranges „Solution d'un problème d'arithmétique" (Oeuvres **1**, 671-731) mußte besprochen werden; der Verweis auf Konen, „Geschichte der Gleichung $t^2-Du^2=1$" verlangt vom Studenten die Anschaffung eines neuen Buches, was doch durch die Anmerkungen zur Ostwaldschen Sammlung entbehrlich gemacht werden soll. Und wenn Lagrange in Nr. 29 (S. 43) Huygens die Entwicklung eines Bruches in einen Kettenbruch zuschreibt, so konnte der Herausgeber darauf aufmerksam machen, daß vor Huygens schon Bombelli diese Entwicklung vorgenommen hat (vgl. Wertheim in Abhdlg. z. Gesch. d. Math. **8**, 147-160; F. d. M. **29**, 28, 1898). Die Huygenssche Schrift wird bei M. Cantor zitiert als „Descriptio automati planetarii", veröffentlicht 1698; Lagrange nennt sie „De automato planetario" (1728). Lp.

A. Aubry. Théorie de l'équation de Pell. Mathesis (3) **5**, 233-239.

Historische und didaktische Darlegung der Aufgabe. Mn. (Lp.)

J. Schröder. Eine Eigentümlichkeit der Näherungswerte von $\sqrt{2}$. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 206-207.

Der Kettenbruch $K=1+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\dots}}$

habe die Näherungswerte $\frac{P_a}{Q_a}$. Die Relationen

$$(\sqrt{k}-1)^a=(-1)^{a-1}(\sqrt{k}\cdot Q_a-P_a) \qquad (a=1,2,3\dots)$$

bestehen nur für $k=2$. Vgl. dazu: Arch. (3) **9**, 310 (P. Epstein, Referat S. 274). Lwt.

P. Epstein. Zu 108 (W. F. Meyer) Lösung einer Aufgabe. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 185-186.

Enthält eine Berichtigung zu der von anderer Seite auf S. 95 desselben Bandes gegebenen Lösung einer zahlentheoretischen Aufgabe. Lwt.

P. Epstein. Zu der Mitteilung von Herrn J. Schröder über die Näherungswerte von $\sqrt{2}$. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 310.

Das Schrödersche Resultat ist aus der Theorie der Pellschen Gleichung bekannt, folgt aber auch aus einer weniger bekannten Relation.
Lwt.

E. B. Escott. Question 15697. Find all the integral solutions, if possible, of the equation $x^2 - 17 = y^3$. Ed. Times (2) 8, 53-54.

R. F. Davis und A. Cunningham zeigen, wie man unendlich viele Lösungen finden kann; beiden Methoden fehlt aber der Nachweis, daß man nach ihnen alle Lösungen durch einen bestimmten Algorithmus findet, oder wie Cunningham sagt: „Eine wirklich allgemeine Lösung dieser Aufgabe ist schwer zu finden.“ Lp.

G. Arnoux. Notions générales sur les espaces arithmétiques résolvants et décomposants. Assoc. Franç. Grenoble **33**, 182-199.

G. Arnoux. Solution des équations arithmétiques du 3e degré au moyen de la formule de Cardan. Assoc. Franç. Grenoble **33**, 199-230.

Die beiden Abhandlungen sind Fortsetzungen früherer Arbeiten des Verf. (vgl. F. d. M. **35**, 208, 1904) und setzen zu ihrem Verständnisse die Kenntnis jener Vorgängerinnen voraus. In der ersten faßt der Verf. die Aufgabe, die er sich gestellt, in folgender Weise: „In verschiedenen Abhandlungen auf den Kongressen von Ajaccio und von Montauban habe ich Verfahren angegeben, um in einem arithmetischen Raum sowohl irreduzible Faktoren der Zahl jeder Zelle einzuschreiben, als auch die reellen Lösungen, welche die Gleichung befriedigen, die entsteht, wenn man diese Zahl gleich Null setzt. Ich nehme jetzt die Frage in allgemeiner Weise wieder auf, indem ich gewisse Prinzipien darlege, aus denen die verschiedenen Verfahren fließen. Hierzu werde ich Sätze ohne irgendwelchen Beweis aussprechen; ich begnüge mich, zu zeigen, daß die Praxis sie in absoluter Art bestätigt. Durchweg werde ich so kurz wie möglich sein; ich gebe Einzelheiten in den zugehörigen Rechnungen nur, weil sie wenig geläufig sind, obgleich sie äußerst einfach sind. Um meine Abhandlung nicht mit Figuren zu überladen, werde ich mich auf die beziehen, welche ich in meinen vorangehenden Studien gegeben habe, indem ich sie auf genaue Weise kenntlich mache.“ Hiernach ist wohl klar, daß ein näheres Referat sich von selbst verbietet.

Bezüglich der in der zweiten Arbeit behandelten Aufgabe drückt sich der Verf. so aus: „Die allgemeine Formel dritten Grades ist $x^3 + cx^2 + bx + a = 0$, und die Formel des Cardano löst den besonderen Fall, in welchem $c = 0$. Was nun die arithmetischen Funktionen betrifft, so stellt die allgemeine Gleichung einen Kubus dar, die spezielle

$x^3 + 0 \cdot x^2 + bx + a = 0$ eine Ebene. Ich habe in verschiedenen Abhandlungen angedeutet, wie man von der allgemeinen Gleichung zu der speziellen übergeht, und umgekehrt, wie man nach Lösung der letzteren aus der Ebene zum Kubus übergeht; ich werde hier nicht auf diesen Gegenstand eingehen. Ich werde die Frage für sich behandeln bei den Moduln von der Form $3n + 1$ und $3n - 1$, und dann werde ich die Resultate in eine synoptische Tafel zusammenfassen". Also auch hier geht der Verf. von der Methode aus, die er in großer Breite früher entwickelt hat, um jetzt einzelne Beispiele zu behandeln. Lp.

M. Bauer. Zur Theorie der binomischen Kongruenzen. Ungar. Ber. **20**, 34-38.

Der Verf. behandelt, gemäß der Gaußschen Methode (Disquisitiones arithmeticae), die Kongruenz $x^n - 1 \equiv 0 \pmod{N}$, wo n und N irgendwelche ganze rationale Zahlen sind. Statt aber nach der allgemeinen Zerlegbarkeit zu fragen, beschränkt er das Problem auf den Fall, wo $x^n - 1$ in lauter lineare Faktoren nach dem Modul N zerfällt, und gibt die Bedingungen an, denen n und N genügen müssen, damit letzteres eintritt. Fu.

M. Bauer. Zur Theorie der höheren Kongruenzen. Ungar. Ber. **20**, 39-42.

Gegeben sei eine irreduzible algebraische Gleichung $f(x) = 0$. Dann beweist der Verf., daß für alle Primzahlen p, die zur Diskriminante von $f(x)$ prim oder in der Körperdiskriminante von $K(x)$ enthalten sind, in eindeutiger Weise die Zerlegung gilt:

$$f(x) \equiv \prod_1^s {}_i F_{i\alpha}(x) \pmod{p^\alpha} \qquad (\alpha > 1);$$

dabei ist $F_{i\alpha}(x)$ nach p^α irreduzibel und

$$F_{i\alpha}(x) \equiv f_i(x) \pmod{p};$$

$$f(x) \equiv \prod_1^s {}_i f_i(x)^{e_i} \pmod{p}$$

ist die Zerlegung von $f(x)$ in irreduzible Faktoren. Fu.

M. Cipolla. Formole di risoluzione della congruenza binomia quadratica e biquadratica. Napoli Rend. (3) **11**, 13-17.

Es seien p und q zwei voneinander verschiedene Primzahlen und p ungerade. Ferner sei q quadratischer Rest von p. Dann wird gezeigt, daß sich die Lösung der Kongruenz $x^2 \equiv q \pmod{p}$ darstellen läßt in der Form:

$$x \equiv \pm 2 \left(q s_1 + q^2 s_3 + q^3 s_5 + \cdots + q^{\frac{p-3}{2}} s_{p-4} + s_{p-2}\right) \pmod{p}$$

wo $$s_r \equiv 1^r + 2^r + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^r \pmod{p}.$$

Dieses Resultat wird schließlich verallgemeinert auf den Fall der Kongruenzen:

$$x^2 \equiv q \pmod{p^\lambda} \text{ und } x^4 \equiv q \pmod{p}.$$

Fu.

M. Cipolla. Estensione di un metodo di Legendre alla risoluzione della congruenza $x^{2^m} \equiv a \pmod{2^k}$. Napoli Rend. (3) **11**, 304-309.

Diese Arbeit gibt durch Verallgemeinerung eines Verfahrens von Legendre ein Mittel, um bei großen Zahlen einfach die Lösungen der Kongruenz

$$x^{2^m} \equiv a \pmod{2^k}$$

anzugeben. Nimmt man die 2^m-te Potenz der Reihenentwicklung:

$$\sqrt[2^m]{1+z} = 1 + c_1 z - c_2 z^2 + c_3 z^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot c_n z^n + \cdots,$$

so erhält man eine Rekursionsformel für die c_n. Diese gestattet die Darstellung einer Lösung x_0 der obigen Kongruenz in der Form

$$x_0 \equiv 1 + 2^s \cdot A \cdot c_1 - 2^{2s} \cdot A^2 \cdot c_2 + 2^{3s} \cdot A^3 \cdot c_3 - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot 2^{ns} \cdot A^n \cdot c_n \pmod{2^k},$$

wo $a = 1 + 2^s \cdot A$. (A ungerade und $s \geqq m + 2$). Fu.

R. Birkeland. Nogle talteoretiske Saetninger. Archiv for Math. og Naturvid. **26**, Nr. 10, 1-9.

Der Verf. beweist unter anderem den Satz: Wenn $f(x)$ eine ganze rationale Funktion mit ganzen rationalen Koeffizienten ist, so ist, wenn m durch α^p teilbar ist, die Summe $f(1) + f(2) + \cdots + f(m)$ eine durch α^{p-1} teilbare ganze Zahl, wo α eine Primzahl und $p > 1$ ist.

Gbg.

A. Aubry. Sur les triangles rectangles en nombres entiers. Mathesis (3) **5**, 6-13.

Eine hauptsächlich geschichtlich gehaltene Übersicht über die Untersuchungen bezüglich der Lösungen von $x^2 + y^2 = z^2$ und verwandter Fragen. Mn. (Lp.)

Th. Meyer. Zur Berechnung der Pythagoreischen Zahlen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 337-340.

Aus Anlaß der Notiz von Hromádko (F. d. M. **35**, 214, 1904) geht der Verf. auf andere elementare Berechnungen über, welche vollständigere Lösungen geben, ohne jedoch auf die erschöpfenden Darstellungen in den Werken über Zahlentheorie (z. B. bei Wertheim) Rücksicht zu nehmen. Am Schlusse wird die Zerlegung eines Quadrates in mehr als zwei Quadrate gestreift; dieser Gegenstand ist bekanntlich von Artemas Martin während einer Reihe von Jahren als Sport behandelt

Lp.

G. Candido. Un triangolo rettangolo notevole. Suppl. al Period. **9**, 21-23.

Wenn der halbe Umfang und der Inhalt eines Dreiecks durch ein und dasselbe Produkt lmn von drei Primzahlen sich ausdrücken lassen, so ist die einzige Lösung $l=1, m=2, n=3$, und die Seiten sind 3, 4, 5. — Wenn die Seiten eines Dreiecks als ganze Vielfache des Inkreisradius r ausdrückbar sind, so ist die einzige Lösung $a=3r$, $b=4r$, $c=5r$.

Lp.

A. H. Bell. Question 15627. Give a formula for all integral right-angled triangles where the difference between the sides containing the right angle is 7. Ed. Times (2) **7**, 88-89.

Lösungen von A. Cunningham und R. W. D. Christie, J. Blaikie, D. Biddle und W. H. Blythe, C. Bickerdike. Von diesen ist die erste die allgemeinste, weil sie an Stelle der Zahl 7 eine beliebige Differenz d setzt.

Lp.

A. S. Werebrüssow. Die allgemeine Lösung der Gleichung $x^3+y^3=x'^3+y'^3$. Mosk. Math. Samml. **25**, 417-437. (Russisch.)

Die Formel von Mirimanoff (F. d. M. **34**, 226, 1903) gibt nicht sämtliche Lösungen der Gleichung. Der Verf. hat die allgemeine Formel gegeben:

$$[M\psi \mp \omega\varphi^2]^3+[-N\psi \pm \omega\varphi^2]^3=[M\varphi \mp \omega\psi^2]^3+[-N\varphi \pm \omega\psi^2]^3$$

(Interm. des Mathém. **9**, 164, 1902). Gegenwärtig betrachtet er die Eigenschaften der quadratischen Form $(a \cdot b)=a^2+ab+b^2$ und beweist dann seine Formel, von welcher die von Binet als ein Spezialfall erscheint. Beispiele. Tafel der Darstellungen der Zahlen von 1 bis 1000 in der Form $(a \cdot b)$.

Si.

A. S. Werebrüssow. Über die Gleichung $x^5+y^5=Az^5$. Mosk. Math. Samml. **25**, 466-473. (Russisch.)

Mit Hülfe der Bezeichnung $(u, v)=u^2+uv-v^2$ wird die obige Gleichung in die Form gebracht:

$$\text{(a)}\ (x+y)(x^2-xy+y^2, x^2-2xy+y^2)=Az^5.$$

Die Teiler von (u, v) sind Primzahlen von der Form $5n \pm 1$; die Zahl

5 kann nur im ersten Grade auftreten. Die Primzahl (u, v) kann durch eine unendlich große Anzahl von Wertepaaren (u, v) dargestellt werden; denn es ist

$$(u, v) = -(v, -u); \ (u, v) = (u, u-v) = (u+v, u+2v) = (2u-v, v-u) = (u+v, -v).$$

Wird die Form (u, v) mit der ersten Potenz der Pellschen Gleichung: $9^2 - 5.\ 4^2 = 1$ multipliziert, so wird

$$u^2 + uv - v^2 = \tfrac{1}{4}[(18u + 29v)^2 - 5(8u + 13v)^2] = {}^1/_4\,[(2u' + v')^2 - 5v'^2],$$

und somit gibt es für jede Potenz der Pellschen Gleichung 6 Darstellungen der Primzahl in der Form (u, v); für die Zahl 5 aber nur drei Darstellungen. Zusammengesetzte Zahlen besitzen 2^p Reihen von Darstellungen (wo p die Anzahl der verschiedenen Primzahlen der Form $5n \pm 1$, welche in der darzustellenden Zahl auftreten). Multiplikationssatz $(a, b)(s, t) = (as + bt, bs + (a+b)t)$. Die Gleichung (a) zerfällt in zwei Gleichungen

$$A = A_0\, A_1,\ Z = Z_0\, Z_1,\ x + y = A_0\, Z_0^5, \quad (x^2 - xy + y^2, x^2 - 2xy + y^2) = A_1\, Z_1^5,$$

wo Z_1 nur aus Primzahlen von der Form $5n+1$ besteht. Die allgemeine Form:

$$Az_0^5 = (x+y)\cdot(s, t) = (s, t)\sqrt{(4u - 3v)s + (v - 3u)t}.$$

Die Lösung der Aufgabe: nach dem gegebenen Z die möglichen Werte von s und t und daraus von x und y zu finden, hängt davon ab, ob $u - 2v$ quadratischer Rest oder Nichtrest modulo 5 wird. Zahlenbeispiele. Si.

Edm. Maillet. Sur les équations indéterminées $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$. Annali di Mat. (3) **12**, 145-178.

Die Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$ enthält die berühmte Fermatsche Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ als Spezialfall. Der Verf. sucht auf ähnliche Weise wie Kummer aus der Theorie der λ-ten Einheitswurzeln über die Möglichkeit, respektive Unmöglichkeit der Auflösbarkeit dieser allgemeineren Gleichung in speziellen Fällen etwas aussagen zu können. Seine Resultate sind: Die Gleichung:

$$x^a + y^a = a\cdot z^a\ (a > 2)$$

ist in ganzen reellen Zahlen unmöglich zu lösen, falls 1. $a \equiv 0 \pmod{4}$, 2. falls a gerade und durch eine Primzahl der Form $4n+3$ teilbar ist, 3. falls $2 < a \leqq 100$ und $a \neq 37, 59, 67, 74$, 4. falls a keinen Primteiler > 17 hat.

Die Gleichung

$$x^a + y^a = b\cdot a\cdot z^a$$

ist unmöglich in reellen ganzen Zahlen zu lösen, falls 1. $a \equiv 0 \pmod{4}$,

$b \not\equiv 0 \pmod{4}$, 2. falls a von der Form $4n+2$ und teilbar durch einen Primteiler $\lambda = 4h+3$ ist, während $b \not\equiv 0 \pmod{\lambda}$.

Hieraus erscheint es dem Verf. wahrscheinlich, daß die beiden Gleichungen:

$$x^a + y^a = az^a, \quad x^a + y^a = 2az^a$$

unmöglich sind zu lösen für $a > 2$, resp. $a > 3$. Fu.

Edm. Maillet. Sur l'équation indéterminée $x^a + y^a = bz^a$. C. R. **140**, 1229-1230.

Auszug aus der vorstehend besprochenen Abhandlung. Fu.

Edm. Maillet. Sur le dernier théorème de Fermat. Toulouse Mém. (10) **5**, 132-133.

Dieser Brief teilt der Akademie von Toulouse die Überreichung einer Abhandlung an die Pariser Akademie über gewisse dem Fermatschen Satze nachgebildete Theoreme mit. Vgl. die vorstehende Notiz. Fu.

G. Remoundos. Sur quelques points de la théorie des nombres. C. R. **140**, 135-137.

Der Verf. zeigt, welche Analogie zwischen dem Lindemannschen Satze von der Unmöglichkeit der Gleichung:

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \cdots + A_n e^{\alpha_n} = 0$$
$$(A_1, A_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \text{ algebraische Zahlen})$$

und dem Borelschen Theorem von der Unmöglichkeit der Gleichung:

$$P_1(z)\, e^{H_1(z)} + P_2(z)\, e^{H_2(z)} + \cdots + P_n(z)\, e^{H_n(z)} = 0$$
$$(P_1(z), \ldots, H_1(z), \ldots \text{ ganze rationale Funktionen von } z)$$

herrscht. Die Analogie zum Picardschen Satze über Funktionen mit ν Zweigen sieht der Verf. in dem folgenden, von ihm stammenden Theorem: Es ist unmöglich, 2ν algebraische Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ anzugeben, so daß die Gleichungen:

$$\varphi(z) = a_1, \quad \varphi(z) = a_2, \ldots, \quad \varphi_{2\nu}(z) = a_{2\nu}$$

Wurzeln der Form Ae^{α} zulassen, A und α algebraische Zahlen, $\varphi(z)$ eine algebraische Funktion. Fu.

G. Candido. Sulle equazioni $x^2 - ay^2 = z^n$, $x^2 - ay^2 = \pm b^n$. Batt. G. **43**, [(2) **12**], 93-96.

Störmer hat die Gleichung $x^2 - y^2 = z^3$ gelöst mit Hilfe der Identität:

$$[x(x^2+3y^2)]^2 - [y(y^2+3x^2)]^2 = (x^2-y^2)^3.$$

Die vorliegende Arbeit ist eine Erweiterung dieses Resultats auf die beiden im Titel angegebenen allgemeineren Gleichungen. Als x und y sind im wesentlichen die Ausdrücke

$$[p+\sqrt{p^2-q}]^n+[p-\sqrt{p^2-q}]^n,$$
$$\frac{[p+\sqrt{p^2-q}]^n-[p-\sqrt{p^2-q}]^n}{2\sqrt{p^2-q}}$$

zu nehmen. Fu.

A. Bang. Nyt Bevis for at Ligningen $x^4-y^4=z^4$ ikke kan have rationale Lösninger. Nyt. Tidss. for Math. **16** B, 35-36.

Neuer Beweis für den Satz, daß $x^4-y^4=z^4$ keine rationalen Lösungen hat. Der Verf. zeigt: Wenn es eine Lösung in positiven ganzen Zahlen gibt, indem $x=u$, so könnte man immer eine andere Lösung finden, wo $x=v$ und $v<u$. Also gibt es überhaupt keine Lösung in ganzen Zahlen. Die Betrachtungen sind vollständig elementar. V.

K. Kommerell. Die ganzzahligen positiven Lösungen der unbestimmten Gleichung $xyz(x+y-z)=t^2$. Math. naturw. Mitt. (2) 7, 74-78.

Der Verf. zeigt, daß diese Lösungen x, y, z, t sich auf folgende Weise darstellen lassen:

$$x=\frac{T-a(d^2y_1-e^2z_1)}{2},\ y=ad^2y_1,\ z=ae^2z_1,\ t=adey_1z_1\ U^2,$$

wenn a, d, e, y_1, z_1 beliebige ganze rationale Zahlen sind (einzig muß d^2y_1 zu e^2z_1 relativ prim; y_1 und z_1 ohne quadratischen Teiler sein) und T und U irgendwelche Lösungen der Form

$$T^2-DU^2=\sigma^2,$$

wo

$$D=4y_1z_1,\quad \sigma=a(d^2y_1-e^2z_1).$$

Fu.

E. Busche. Über eine Kroneckersche Beziehung zwischen Geometrie und Zahlentheorie. Math. Ann. **60**, 285-316.

Kronecker hat ebene Punktgitter von ganzen rationalen Zahlen aufgestellt, wo er jedem Punkt den größten gemeinschaftlichen Teiler seiner Koordinaten zuordnete. Die vorliegende Arbeit behandelt das allgemeine Punktgitter aller rationalen Koordinaten, wo wieder jedem Punkt der (richtig verallgemeinerte) größte gemeinsame Teiler seiner Koordinaten als „Nummer" zugeordnet ist. Für dieses Gebilde wird zunächst die Aufgabe gelöst, die Anzahl der Punkte mit der Nummer t im Innern eines Bereiches anzugeben. In der Lösung wird die Anzahl

aller Gitterpunkte eines Bereiches als bekannt vorausgesetzt. Dieses Problem wird hierauf spezialisiert auf den Fall, daß der gegebene Bereich ein Rechteck mit den Ecken $(0,0), (\alpha-1, 0), (\alpha-1, \beta-1), (0, \beta-1)$ sei. Ein weiteres Resultat ist, daß es in der Kroneckerschen Ebene unendlich viele, beliebig große, einfach zusammenhängende Gebiete gibt, die die Nummer t nicht enthalten.

Eine neue Art von Sätzen erhält man, wenn man die linearen Transformationen unseres Gitters studiert und eine Maßbestimmung für die Punktgebilde festlegt. Letztere Untersuchungen gipfeln in dem Theorem, daß in der Kroneckerschen Ebene jedes Element mit jedem gleichartigen derselben Nummer gleichberechtigt ist, falls man die vom Verf. angegebene Maßbestimmung benutzt. Fu.

H. Minkowski. Zur Geometrie der Zahlen. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 164-173.

Der Verf. erläutert geometrisch ohne Beweise eine Reihe von Sätzen und Problemen aus der Geometrie der Zahlen, und zwar das Fundamentaltheorem über die Existenz eines Gitterpunktes in einem konvexen Gebiet mit Mittelpunkt von einem gewissen Inhalt, die zu zwei Linearformen gehörigen Diagonalketten, die Verallgemeinerung eines Satzes von Tschebyscheff auf zwei Linearformen, eine neue Methode zur Ermittelung der Einheiten in einem kubischen Zahlkörper, das Problem der dichtesten Lagerung von Oktaedern, einen Satz über die Approximation einer Linearform im Körper der vierten Einheitswurzeln und neue Kriterien für reelle quadratische und kubische Irrationalzahlen, von denen das letztere von Kollros (Dissertation, Zürich 1904) entwickelt, aber noch nicht bewiesen ist. P.

R. Fueter. Die Theorie der Zahlstrahlen. J. für Math. 130, 197-237.

Einleitung: Kronecker hat bewiesen, daß jede im Bereich der rationalen Zahlen Abelsche Gleichung sich lösen läßt durch Kreiskörper, d. h. durch $e^{2\pi i z}$, wo z eine bestimmte rationale Zahl ist. Sein „Jugendtraum“ war, dieses Resultat auch auf den quadratisch imaginären Körper zu verallgemeinern, wo die Stelle der Exponentialfunktion durch die Modulfunktion eingenommen wird. Die vorliegende Arbeit löst dieses Problem. Sie geht noch weiter, indem sie einen ganz allgemeinen Galoisschen Körper zugrunde legt und in diesem soweit die Theorie der Abelschen Gleichungen entwickelt, als es zur Lösung des Kroneckerschen Jugendtraumes notwendig ist.

I. Teil. 1. Kap. Die allgemeine Abelsche Gleichung in einem Galoisschen Körper wird zurückgeführt auf ein System von Gleichungen mit gewissen Eigenschaften: Ihre Gruppe ist zyklisch, die Koeffizienten sind rational.

2. Kap. Der Zahlstrahl wird allgemein definiert als ein Bereich, der durch Multiplikation und Division von Größen entsteht. Die der Körpertheorie entsprechende Theorie dieser Gebilde wird entwickelt. Definition des Kongruenzstrahles mit seinem Führer.

3. Kap. Die Primzahlen, die in der Relativdiskriminante der in Kap. 1 erhaltenen Gleichungen enthalten sind, müssen gewissen Kongruenzen nach dem Relativgrad genügen.

4. Kap. Mit Hülfe der in Kap. 3 erhaltenen Resultate lassen sich Strahlen des Grundkörpers definieren, deren Führer in der Relativdiskriminante des relativ-abelschen Körpers enthalten sind und deren Klassenanzahl durch den Relativgrad teilbar ist. Diese Strahlen heißen Klassenstrahlen. Der größte für einen gegebenen Führer mögliche Klassenstrahl heißt Stern. Fu.

M. Cipolla. Teoria dei numeri complessi ad N unità. Periodico di Mat. (3) **2**, 162-173, 209-219.

Fortsetzung und Schluß des im Vorjahre begonnenen Referates (F. d. M. **35**, 223, 1904). Die einzelnen Teile des ganzen Überblicks über diese Theorie sind betitelt: Einleitung. Assoziative Körper — Hankelsche Körper. § 1. Vorläufige Definitionen — Fundamentale Operationen. § 2. Systeme mit einer assoziativen Multiplikation. § 3. Assoziative Körper. § 4. Hankelsche Körper. Schlußsatz: Theorem von Frobenius. Der Körper der reellen Zahlen, der Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen und derjenige der Hamiltonschen Quaternionen sind die einzigen Hankelschen Körper. — Kommutative Weierstraßsche Körper. Dieses Thema füllt den ganzen letzten Artikel. Lp.

H. E. Hawkes. On quaternion number-systems. Math. Ann. **60**, 437-447.

Das Problem ist, alle höheren Systeme komplexer Größen von n Einheiten (die eine Haupteinheit, Modul, besitzen) aufzustellen. Dasselbe ist vom Verfasser Math. Ann. **58**, 361-379 (F. d. M. **35**, 224, 1904) für Nicht-Quaternionsysteme gelöst worden. Hier wird das Problem allgemein in Angriff genommen, indem zunächst 3 verschiedene Normalformen der Systeme aufgestellt werden. Äquivalente Systeme müssen, auf Normalform gebracht, gleiche Einheiten haben. Zur Klassifikation braucht man also nur die Normalsysteme aufzufinden. So werden die Quaternionensysteme für $n = 7$ Einheiten aufgestellt. Fu.

S. Epsteen and J. H. Maclagan-Wedderburn. On the structure of hypercomplex number systems. American M. S. Trans. **6**, 172-178.

Sind $e_1, \ldots, e_n$ die Einheiten eines komplexen Zahlensystems E mit assoziativer Multiplikation, so nennen die Verf. alle aus m linear unabhängigen Zahlen $x_1, \ldots, x_m$ des Systems linear ableitbaren Zahlen einen

Komplex von der Ordnung m. Sie definieren, was unter der Summe $E_1 + E_2$ und unter dem Produkte $E_1 E_2$ der zwei Komplexe E_1, E_2 zu verstehen ist, und können so die Tatsache, daß E ein Zahlensystem ist, in der einfachen Form: $E^2 \leqq E$ aussprechen. Ist $E E_2 \leqq E_2$, $E_2 E \leqq E_2$, so bildet der Komplex E_2 ein in E invariantes Zahlensystem. Stellt man dann E in der Form $E_1 + E_2$ dar und betrachtet alle modulo E_2 kongruenten Zahlen von E als gleich, so erscheint E_1 als ein neues, das System E begleitendes, zu dem Systeme E_2 komplementares Zahlensystem. Konstruiert man nun zu E eine Reihe von größten invarianten Untersystemen (eine Normalreihe) nebst den zugehörigen begleitenden Zahlensystemen, so werden diese begleitenden Zahlensysteme alle einfach (sie enthalten keine invarianten Untersysteme), ihre Ordnungszahlen werden, von der Reihenfolge abgesehen, für jede Normalreihe dieselben usw., kurz alle die Sätze, die C. Jordan und Hölder zuerst für diskontinuierliche Gruppen aufgestellt haben, übertragen sich vollständig auf komplexe Zahlensysteme. El.

S. Epsteen. Note on the structure of hypercomplex number systems. Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 69-71.

Die Note soll zeigen, wie der Lehrsatz III, S. 176 der vorstehend besprochenen Note in der symbolischen Bezeichnungsweise ohne Zuhülfenahme der charakteristischen Konstanten $\gamma_{i_1 i_2 i_3}$ bewiesen werden kann. Lp.

O. Bohler. Über die Picardschen Gruppen aus dem Zahlkörper der dritten und vierten Einheitswurzel. Diss. Zürich. Zürcher & Fusser. 1905. 102 S.

Es sei Γ eine Gruppe linearer Transformationen S. In einem Raume R_ν ($\nu \geqq 2$) wird jeder S von Γ eindeutig ein geometrisches Gebilde σ (Punkt, Linie, Fläche etc.) zugeordnet. Der Raum wird so angenommen, daß in ihm Γ eigentlich diskontinuierlich ist. Andererseits liege irgend eine Klasse von Formen f vor; irgend einer Form f der Klasse werde in R ebenfalls ein Gebilde (f) zugeordnet. Bei geeigneter Wahl von σ und (f) wird man eine einfache Invariante zwischen beiden finden, und in ihr erhält die Theorie der Gruppe Γ für eine Form f eine sichere Basis. Der Verfasser behandelt das hiermit gestellte Problem, wenn f eine definite Hermitesche, resp. eine Dirichletsche Form ist, während die S von Γ unimodular sind und ihre Koeffizienten entweder ganze komplexe Zahlen, oder aber ganze Zahlen von der Form $u + \varrho v$, wo ϱ eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet. Solche Gruppen heißen Picardsche, insbesondere die erstere schlechtweg die Picardsche Gruppe.

Nach den Untersuchungen von Klein-Fricke in der Theorie der automorphen Funktionen (F. d. M. **28**, 334, 1897) ist die Picardsche Gruppe erst im dreidimensionalen „ζ-Halbraume“ diskontinuierlich. Für

die hier maßgebenden arithmetischen Zwecke empfiehlt es sich, lieber das Innere einer Kugel zugrunde zu legen, die als absolutes Gebilde einer hyperbolischen Maßbestimmung anzusehen ist. Das Kugelinnere ist dann der oben erwähnte Raum R. Im einzelnen sei besonders erwähnt die Theorie der Reduktion einer definiten Hermiteschen Form und der Algorithmus dieser Reduktion, ferner die entsprechende Theorie für eine Dirichletsche Form und die Einführung derjenigen Invariante, auf die die Theorie der Transformationen der Dirichletschen Form gegründet wird. Die analogen Untersuchungen werden wiederum für die Picardsche Gruppe aus dem Zahlkörper der dritten Einheitswurzel durchgeführt.

My.

H. Weber. Über komplexe Primzahlen in Linearformen. J. für Math. **129**, 35-62.

Einleitung: Dirichlets Beweis für den Satz, daß eine Linearform unendlich viele Primzahlen darstellt, leidet an dem Mangel, daß seine Methode nicht einheitlich ist. Der Verf. hat in seiner Arbeit über Zahlengruppen (Math. Ann. **48**, **49**, **50**; F. d. M. **28**, 83, 1897) allgemeine Grundsätze aufgestellt, wie dieses Problem einheitlich durchzuführen ist. Er will diese Aufgabe im einfachen Fall des quadratischen Körpers $(\sqrt{-1})$ als Rationalitätsbereich ausführen.

§ 1. Allgemeine Sätze über $k(\sqrt{-1})$. Einteilung seiner Zahlen in Klassen nach einem allgemeinen Modul μ, wobei assoziierte Zahlen in dieselbe Klasse fallen. Diese Klassen bilden eine Abelsche Gruppe.

§ 2. Fall der unzerlegbaren Primzahl $q \equiv 3 \pmod{4}$. Bedingungen dafür, daß eine Linearform in $k(\sqrt{-1})$ unendlich viele solcher Primzahlen q darstellt.

§ 3. Zu jeder Klasse von § 1 gehören h Einheitswurzeln als Gruppencharaktere.

§ 4. Ist $Z(n)$ die Anzahl der Zahlen $\mu\xi + \alpha$ [ξ durchlaufe alle ganzen Zahlen von $k(\sqrt{-1})$, deren Norm $\leqq n$ ist], so ist $\frac{Z(n)}{n}$ von der Wahl von α unabhängig und nähert sich mit wachsendem n einem endlichen Grenzwert. Hieraus geht hervor, daß:

$$A(s) = \Sigma\xi \frac{1}{(N(\mu\xi + \alpha))^s} = \sum_1^\infty {}_n\, Z(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right),$$

($N(\mu\xi + \alpha)$ die Norm von $\mu\xi + \alpha$), welche Beziehung das Resultat ergibt, daß

$$A(s) = \frac{\pi}{m(s-1)} + G \quad , \quad m = N(\mu),$$

wo G einen bestimmten endlichen Wert für $s = 1$ annimmt, der allein von der Wahl der Klasse des α abhängt.

§ 5. Sind $\chi_i (i = 1, 2, 3, \ldots, h)$ die h Charaktere der Klassen nach μ, und setzt man:

$$Q_i(s) = \Sigma \frac{\chi_i(\alpha)}{(N(\alpha))^s}$$

so ergibt sich, falls α in der Klasse A liegt:

$$\frac{1}{h} \overset{i}{\Sigma} \chi_i(A^{-1}) \log Q_i(s) = \Sigma \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{N(\mathfrak{p})^{2s}} + \cdots$$

wo die erste Summe über alle Primideale in A, die 2te über alle Primideale, deren Quadrat in A liegt, usf. zu erstrecken ist. Da Q_1 (wie aus § 4 folgt) für $s = 1$ über alle Grenzen wächst, so wird, falls Q_2, $Q_3, Q_4, \ldots$ von 0 verschiedene Grenzwerte annehmen, die linke Seite für $s = 1$ unendlich groß; also müßte auch rechts $\Sigma \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}$ über alle Grenzen wachsen, d. h. es gäbe unendlich viele Primideale in A. Um das noch fehlende Stück zu beweisen, betrachtet der Verf. das Produkt:

$$(s - 1)\, Q_1(s)\, Q_2(s) \ldots Q_h(s),$$

das im wesentlichen $(s - 1)\, \zeta(s)$ ist, wo $\zeta(s)$ die ζ-Funktion eines allgemeinen Körpers, des Klassenkörpers in bezug auf die Klassen A ist. Das Produkt ist also von 0 verschieden für $s = 1$, und endlich, falls es einen solchen Körper gibt.

§ 6. Hier wird schließlich noch die Existenz dieses Körpers mit Hülfe der Teilungsgleichungen der lemniskatischen Funktionen erbracht.

Fu.

W. Lietzmann. Zur Theorie der n-ten Potenzreste in algebraischen Zahlenkörpern. Math. Ann. **60**, 263-284.

Der Verf. legt einen Körper zugrunde, der den Körper der n-ten Einheitswurzeln enthält, wobei über n keine spezielle Annahme gemacht wird. Er entwickelt für diesen allgemeinen Fall die Theorie der n-ten Potenzreste, indem er das Potenzrestsymbol

$$\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\}$$

definiert und dann dessen enge Beziehung zum Begriff des Potenzrestes darlegt. Mit diesem Symbol beherrscht man dann zugleich die Zerlegungsgesetze der Primideale in dem relativ-zyklischen Oberkörper $(\sqrt[n]{\mu})$. Schließlich gibt der Verf. noch die Fassung des Reziprozitätsgesetzes in diesem Körper an. Das Hauptgewicht legt der Verf. darauf, zu zeigen, wie man statt des Falles der bisher allein betrachteten l^h-ten Einheitswurzeln auch den Fall der allgemeinen n-ten Einheitswurzeln behandeln kann. Methodisch wird dabei der von Fueter stammende Begriff des Zahlstrahls verwendet.

Fu.

W. LIETZMANN. Zur Theorie der n-ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern. II. Über n-te Normenreste. Math. Ann. **61**, 372-391.

Diese Arbeit geht analog der vorstehend besprochenen Arbeit des Verf. vor, nur steht jetzt an Stelle des Potenzrestsymbols das Normenrestsymbol. Unter Anwendung des Begriffes des „Zahlstrahles" wird n-ter Normenrest und n-tes Normenrestsymbol

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right\}$$

definiert und die Übereinstimmung beider gezeigt, wiederum bei ganz allgemeinem n. Als wichtiges Resultat ist auch noch der folgende Satz hervorzuheben, daß das allgemeine Reziprozitätsgesetz n-ter Reste bewiesen ist, falls es für die l^h-ten Reste bewiesen ist. (l^h ein Teiler von n, l Primzahl.) Fu.

W. LIETZMANN. Referate über algebraische Zahlentheorie. Math.-naturw. Blätter **2**, 5-7, 33-36.

Erläuterung der Begriffe Zahlkörper, Zahlring, Zahlstrahl, Ideal. Sk.

K. HENSEL. Über die zu einem algebraischen Körper gehörigen Invarianten. J. für Math. **129**, 68-85.

D. MIRIMANOFF, K. HENSEL. Sur la relation $\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-h}$ et la loi de réciprocité. J. für Math. **129**, 86-87.

Ist n der Grad eines Körpers und h die Gesamtzahl aller reellen und der Paare konjugiert-imaginärer Wurzeln einer den Körper bestimmenden Gleichung, so sind die Basisdiskriminanten des Körpers sämtlich positiv oder sämtlich negativ, je nachdem $n - h$ gerade oder ungerade ist. Dieser Satz läßt sich in der Weise verallgemeinern, daß man das Verhalten des Basisdiskriminanten D rücksichtlich einer Primzahl p untersucht; ist alsdann

$$D = p^\delta D_0,$$

wo p^δ die höchste in D enthaltene Potenz von p bedeutet, so ist für zwei verschiedene derartige Diskriminanten D und $\bar{D}$:

$$\bar{\delta} \equiv \delta \pmod{2},$$
$$\left(\frac{\bar{D}_0}{p}\right) = \left(\frac{D_0}{p}\right).$$

Der Beweis wird durch vollständige Bestimmung der Invarianten S und $\left(\frac{D}{p}\right)$ erbracht, welche sich außer von h noch von dem Grade und der Ordnung der in p aufgehenden Primdivisoren und möglicherweise

auch von einigen weiteren bei der Primzahlzerlegung von p auftretenden charakteristischen Anzahlen abhängig erweisen. In dem Anhange zeigt Mirimanoff, daß das quadratische Reziprozitätsgesetz eine Konsequenz der obigen Sätze ist, und Hensel, daß auch der Ergänzungssatz über den quadratischen Charakter der 2 darunter fällt. Lsg.

K. Hensel. Über die arithmetischen Eigenschaften der algebraischen und transzendenten Zahlen. Deutsche Math.-Ver. **14**, 545-558.

Dieser auf Wunsch des Vorstandes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung auf der Meraner Naturforscherversammlung gehaltene Vortrag enthält zunächst ein Referat über die Untersuchungen des Verf. bezüglich der algebraischen und transzendenten Zahlen. Die von ihm bei den algebraischen Zahlen gewonnenen Ergebnisse hat er in vier früheren Abhandlungen veröffentlicht (vgl. F. d. M. **32**, 209, 1901; **35**, 226-228, 1904). Wegen der die transzendenten Zahlen betreffenden Resultate, die nicht unangefochten geblieben sind, müssen die ausführlicheren Veröffentlichungen abgewartet werden, von denen inzwischen eine im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **16**, 299-319 (1907) erfolgt ist. Lp.

O. Meissner. Über die Darstellbarkeit der Zahlen quadratischer und kubischer Zahlkörper als Quadratsummen. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 202-203.

Sei n eine positive ganze Zahl. Jede Zahl $\alpha + \beta\sqrt{n}$ des quadratischen Körpers $P(\sqrt{n})$ sind durch fünf Quadrate darstellbar, von denen vier reell sind. Zur Darstellung der Zahlen von $P(\sqrt[3]{n})$ und $P(\varrho\sqrt[3]{n})$ reichen 12, bzw. 24 Quadrate. Lwt.

Weitere Literatur.

M. Bauer. Untersuchungen über die dem Bereiche [1] entstammenden Genusbereiche. Math. és phys. lapok **14**, 1-12, 88-109.

C. Büchel. Ganzzahlige Werte bei Diophant. Den Teilnehmern der 48. Versammlung der Philologen und Schulmänner zu Hamburg 1905, als Festgabe dargeboten von dem Ortskomitee. 16 S. Hamburg: Herold. Lex. 8°.

G. Csorba. Über doppelte Partition. Zweite und letzte Mitteilung. Math. és phys. lapok **14**, 320-360. (Ungarisch.)

M. Kiseljak. Grundlagen einer Zahlentheorie eines speziellen Systems von komplexen Größen mit drei Einheiten. Bonn.

D. Nasturas. Über die Partition der ganzen Zahlen. Gazeta Mat. Bukarest **11**, 57-61. (Rumänisch.)

Prompt. Remarques sur le théorème de Fermat. Grenoble: Allier. 32 S. 16mo.

J. Rius y Casas. Sobre ciertos sistemas incompletos de restos con relación á un módulo dado. Revista trim. **5**, 27-32.

G. de Rocquigny-Adanson. Sur les nombres polygones. Mathesis (3) **5**, 214-215.

M. Salvadori. Esposizioni della teoria delle somme di Gauss e di alcuni teoremi di Eisenstein. (Tesi, Friburgo.) Pisa. 116 S. 8°.

R. Sauer. Eine polynomische Verallgemeinerung des Fermatschen Satzes. Diss. Giessen. 18 S. 8°.

H. Schubert. Die Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie. Den Teilnehmern der 48. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Hamburg 1905 als Festgabe dargeboten vom Ortskomitee. Hamburg: Herold. 58 S. Lex. 8°.

H. G. A. Verkaart. Derniers chiffres des puissances. Mathesis (3) **5**, 215.

C. R. Wallner. Die Verteilung der Primzahlen nach neuen Gesichtspunkten behandelt. Diss. München. 53 S. 8°.

G. Wolff. Über Gruppen der Reste eines beliebigen Moduls m algebraischen Zahlkörper. Berlin: Mayer u. Müller. (Diss. Göttingen.) 46 S. 8°.

B. Theorie der Formen.

M. Lerch. Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers. Acta Math. **29**, 333-424.

Einleitung: Die vorliegende Arbeit ist ein Abdruck der Abhandlung, die 1900 den Grand prix der Académie ès sciences in Paris erhalten hat. Das Problem war, die Bestimmung der Klassenanzahl der quadratischen Formen zweier Variabeln mit ganzen, rationalen Koeffizienten zu fördern. Nach kurzer Angabe der Dirichletschen und Kroneckerschen Entwicklungen für die Klassenanzahl wird auf die praktische Unbrauchbarkeit derselben, besonders im Falle positiver Diskriminanten, hingewiesen. Die Entwicklungen des Verf. hingegen bringen praktisch

brauchbare Formeln. Die wichtigsten sind die folgenden: Es sei $Cl(D)$ die Klassenanzahl der Diskriminante D, so ist

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2\pi}{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta}}}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

$$\frac{1}{\tau} Cl(-\Delta) = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{1+e^{\frac{m\pi\sqrt{2\Delta}}{\Delta}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{\text{sin hyp}\, \frac{2m\pi}{\sqrt{2\Delta}}},$$

wo $\Delta > 0$ ist.

$$Cl(D) \lg E(D) = \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{\pi}} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2} dx + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{n^2\pi}{D}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2} Cl(D) \lg E(D) = \sqrt{D} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{2D}}}+1} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \lg \frac{1+e^{-\frac{n\pi\sqrt{2D}}{D}}}{1-e^{-\frac{n\pi\sqrt{2D}}{D}}},$$

wo

$$E(D) = \frac{T+U\sqrt{D}}{2} \quad \text{und} \quad T^2 - D\,U^2 = 4.$$

Kap. 1. Zunächst werden die beiden bekannten Formeln

$$Cl(-\Delta) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{\sqrt{\Delta}}{2h\pi} \qquad (\Delta > 0),$$

$$Cl(D) \lg \frac{T+U\sqrt{D}}{2} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{\sqrt{D}}{h}$$

auf einem wesentlich von Hermite herrührenden Wege bewiesen. Die rechts stehenden Summen werden dann auf verschiedene Weise, z. B. mittels Gammafunktionen ausgewertet. Es entstehen so Vereinfachungen, die in speziellen Fällen mit Vorteil anzuwenden sind.

Kap. 2. Den Ausgangspunkt bildet die Relation:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2 x\pi}{D}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{Dx}}.$$

Statt also das Integral über den Ausdruck links von 0 bis ∞ zu erstrecken, kann man dasselbe nur von 0 bis $z\,(>0)$ nehmen und dazu das Integral von z bis ∞ des Ausdruckes rechts addieren. Diese Summe ist von z unabhängig. Wendet man dieses Prinzip an, so gelangt man unmittelbar zu der ersten und dritten der unter Einleitung angeführten Formeln. Fu.

H. HOLDEN. On various expressions for h, the number of properly primitive classes for a determinant $-p$, where p is a prime of the form $4n+3$. (First paper.) Messenger (2) **35**, 73-80.

H. HOLDEN. On various expressions for h, the number of properly primitive classes for a determinant $-p$, where p is of the form $4n+3$, and is a prime or the product of different primes. (Second paper.) Messenger (2) **35**, 102-110.

H. HOLDEN. On various expressions for h, the number of properly primitive classes for any negative determinant, not involving a square factor. (Third paper.) Messenger (2) **35**, 110-117.

Als wesentlichen Inhalt des ersten Artikels stellt der Verf. selbst folgende Formeln zusammen. Bedient man sich der Bezeichnungen:

$$4\frac{x^p-1}{x-1}=4X_1\, X_2=Y^2+pZ^2,\ H=\frac{h}{2-2/p},$$

so gelten die Beziehungen:

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_{x=1}=(-1)^{\frac{1}{2}(h-1)}\cdot 2/p\cdot pH,\ \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_{x=1}=$$
$$(-1)^{\frac{1}{2}(h-1)}\cdot 2/p\cdot\frac{p(p-3)}{2}H,$$

$$\left(\frac{dZ}{dx}\right)_{x=-1}=-h,\ \left(\frac{d^2Z}{dx^2}\right)_{x=-1}=\frac{(p-3)h}{2},$$

$$\Sigma\frac{1}{1-r^\alpha}-\Sigma\frac{1}{1-r^\beta}=i\sqrt{p}\cdot H,\ \Sigma\frac{1}{1+r^\alpha}-\Sigma\frac{1}{1+r^\beta}$$
$$=2/p\cdot i\sqrt{p}\cdot h,$$

wo die beiden letzten Gleichungen dieselben sind, welche Bachmann (Zahlentheorie **2**, 227-230) als von Schemmel herrührend angibt.

Am Schlusse dieses Artikels werden die Werte von Y_p und Z_p für $p=37$ und 43 hingesetzt, wobei sich herausstellt, daß die Legendresche Regel für Y_{43} versagt. Endlich findet man noch die Werte von Y_p für $p=7, 11, 19, 23, 31, 43$ in $X=x-1$.

Der zweite Artikel entwickelt einige Formeln zur Bestimmung von h. Während man sonst h in Gliedern von den quadratischen Charakteren der ganzen Zahlen zwischen 0 und $\frac{1}{2}p$ ausdrückt, ermöglichen diese Formeln eine Unterteilung und in gewissem Grade eine Verengerung jener Grenzen.

In der dritten Mitteilung werden folgende Resultate gewonnen:

1. Für $-D=p=4n+1$:
$$h=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}n/p,\ h=\Sigma(-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}n/p.$$
2. Für $-D=p=4n+3$:
$$h=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}n/p,\ h=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)+\ (n^2-1)}n/p.$$

3. Für $-D = 2p = 2(4n+1)$ oder $2(4n+3)$:

$$h = \Sigma(-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)} n/p,\ h = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{8}(n^2-1)} n/p.$$

Die Summen erstrecken sich überall auf alle positiven ungeraden Zahlen, die kleiner als $-D$ sind. Lp.

Pepin. Relations qui existent entre les formes quadratiques de deux déterminants D et De^2. Journ. de Math. (6) **1**, 333-346.

Diese Arbeit ist eine präzise Ausführung der art. 213 und 214 der Disquisitiones arithmeticae von Gauß. Es handelt sich um Aufstellung der linearen Transformationen einer binären Form f der Determinante D in eine Form F der Determinante e^2D $(e > 1)$. Zunächst werden, indem man e auf alle möglichen Weisen in ein Produkt $m \cdot n$ zerlegt, die diesen Teilern m, n entsprechenden Formen aus f mit der Determinante e^2D abgeleitet, und dann wird gezeigt, daß jede Form F, die f enthält, einer solchen äquivalent sein muß. Sucht man also alle diese unimodularen Substitutionen, so ergeben diese die Transformationen von f in F in einfacher Weise. Fu.

O. Pund. Über den Begriff des Geschlechts bei den quadratischen Formen. Hamb. Mitt. **4**, 206-210.

Der Verf. leitet den Begriff des Geschlechtes der binären quadratischen Formen mit ganzen rationalen Koeffizienten aus dem Prinzip der unimodularen linearen Substitutionen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ab, wo a, b, c, d rationale Zahlen sind. Er findet, daß es immer eine solche Substitution gibt, falls die beiden Formen in demselben Gaußschen Geschlechte sind, und umgekehrt. Fu.

A. Markoff. Tchebychef's theory of congruences. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 337.

Die von Lehmer im Amer. M. S. Bull. (2) **8**, 401-402 (F. d. M. **33**, 222, 1902) angegebenen Fehler sind in der neuen russischen Ausgabe der Theorie der Kongruenzen von Tschebyschef (1901) durch die Herausgeber Markoff und Iwanof schon verbessert gewesen.

Lp.

A. Laparewicz. Anwendung der binären quadratischen Formen auf die Zerlegung der Zahlen in Primfactoren. Prace mat.-fiz. **16**, 45-70. (Polnisch.)

Der Zweck dieser Arbeit ist die ausführliche Beschreibung und Anwendung der von Gauß (Disq. arithm. §§ 329-334) herrührenden zwei Methoden zur Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren. Dn.

E. LASKER. Zur Theorie der Moduln und Ideale. Math. Ann. 60, 20-115.

E. LASKER. Bemerkung und Fehlerverzeichnis zu meiner Arbeit: „Zur Theorie der Moduln und Ideale". Math. Ann. 60, 607-608.

Die vorliegende umfangreiche Abhandlung hat zum Ziele, die Theorie der Elimination für die Theorie der Moduln und der Ideale zu verwerten. Sie zerfällt in vier Kapitel, von denen das erste der Entwicklung einiger Eliminationssätze gewidmet ist.

Der Verf. beweist hier zunächst den Satz: Besteht zwischen h Formen $u_1, u_2, \ldots, u_h$ von $m\ (\geqq h)$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_m$, die zusammen mit $m-h$ Linearformen mit unbestimmten Koeffizienten eine nicht verschwindende Resultante ergeben, eine identische Beziehung:

$$(1) \qquad p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_h u_h = 0,$$

so lassen sich die Formen p_h wieder linear durch die u_h ausdrücken:

$$(2) \qquad p_i = \sum_{a=1}^{h} q_{ia} u_a,$$

derart, daß die q_{ia} ein alternierendes System bilden und die Relation (1) also eine evidente Folge von (2) wird.

Hieraus folgt ein zweiter Satz über die zu obigem Formensystem $u_1, u_2, \ldots, u_h$ gehörige Anzahlfunktion $H(u_1, u_2, \ldots, u_h)(R)$, welche die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen für Formen R-ter Ordnung angibt, die durch das Modulsystem $u_1, u_2, \ldots, u_h$ teilbar sein sollen. Wird nämlich

$$\varphi(R) + \frac{(R+1)(R+2)\ldots(R+m-1)}{1\cdot 2\ldots(m-1)}$$

und $\Delta_a f(R) = f(R) - f(R-a)$ gesetzt, so ist, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_h$ die Ordnungen resp. von $u_1, u_2, \ldots, u_h$ sind:

$$H(u_1, u_2, \ldots, u_h)(R) = \Delta_{a_1} \Delta_{a_2} \ldots \Delta_{a_h} \varphi(R),$$

falls $R > a_1 + a_2 + \cdots + a_h - m$; falls aber $R = a_1 + a_2 + \cdots + a_h - m$, gleich dem obigen Werte plus $(-1)^{m-h}$. Ist ferner $h = m$, so gilt der weitere Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Form F durch das Modulsystem $u_1, u_2, \ldots, u_m$ teilbar ist, besteht darin, daß F zu einer bestimmten Form Ω in kontragredienten Variabeln und vom Grade $a_1 + a_2 + \cdots + a_m - m$ apolar ist. Diesen Sätzen schließen sich zwei weitere bereits bekannte über die Zerlegbarkeit algebraischer Mannigfaltigkeiten in irreduzible Gebilde an. Die hier angegebenen Sätze bilden die Grundlage für die Ausführungen der folgenden drei Kapitel, von denen das zweite nach einem historischen Résumé über die Grundlagen der modernen Idealtheorie, die Moduln und Ideale im Raum $x_1, x_2, \ldots, x_m$, das dritte die Erweiterungen, welche im Gebiete der Potenzreihen möglich sind, schließlich das letzte die Erweiterung auf Formen mit mehreren Reihen von Variabeln zum Gegenstande hat. Eine speziellere Wiedergabe des Inhaltes ist hier wegen der großen Fülle des Stoffes und des komplizierten Charakters der vor-

getragenen und bewiesenen Sätze nicht möglich. Von besonderem Interesse sind namentlich die Übertragungen der Hilbertschen Sätze über Moduln in den Math. Ann. **36** auf Potenzreihen mehrerer Veränderlicher. So gilt analog dem ersten Hauptsatze dieser Theorie das folgende Theorem: Bilden $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ eine unendliche Reihe von Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, die sämtlich für $x_1 = x_2 = \cdots = x_{m-1} = 0$ verschwinden, so läßt sich eine Zahl k so bestimmen, daß für jeden Index $i > k$ ebensolche Potenzreihen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ existieren, für welche

$$f_i = p_1 f_1 + p_2 f_2 + \cdots + p_k f_k$$

ist. Lsg.

Kapitel 3.

Kettenbrüche.

A. Pringsheim. Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. Münch. Ber. **35**, 359-380.

Das früher (1898) vom Verf. angegebene Hauptkriterium für die Konvergenz der Kettenbrüche mit komplexen Gliedern wird unter Wahrung des elementaren Charakters der Ableitung dahin verbessert: Für die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ist hinreichend, daß $|b_1| \geqq 1$ und für $\nu > 1$ noch $|b_\nu| - |a_\nu| \geqq 1$ ist. Nur ein ganz bestimmter Ausnahmefall existiert. Wird der Kettenbruch durch passend spezialisierte äquivalente Kettenbrüche ersetzt, so ändert sich die Form des Kriteriums. So ergibt sich z. B. ein früher vom Verf. aufgestelltes, sowie das von Helge v. Koch aus der Theorie der unendlichen Determinanten gewonnene Kriterium, beide etwas genauer, als bisher bekannt war. Auch werden mühelos Sätze erhalten wie der, der die Konvergenz des Kettenbruches

$$\left[\frac{\varepsilon_\nu \cdot \nu^2}{2\nu + 1}\right]_1^\infty$$

ausspricht, wenn nur $|\varepsilon_\nu| = 1$ ist.

Den Schluß bildet eine Auseinandersetzung mit van Vleck: die Fassung seines Konvergenzsatzes fordert geradezu Mißverständnisse heraus, und im übrigen kommt ihm nicht die zugeschriebene Allgemeinheit zu, indem der Satz sowie einige andere Theoreme van Vlecks in Pringsheimschen Kriterien enthalten sind. Lwt.

O. Perron. Note über die Konvergenz von Kettenbrüchen mit positiven Gliedern. Münch. Ber. **35**, 315-322.

Für Kettenbrüche mit positiven Gliedern werden hinreichende Konvergenzkriterien abgeleitet. Nicht die schärfsten, aber die für die Anwendung bequemsten sind die folgenden. Die Kettenbrüche

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \text{ und } \left[\frac{a_{\nu+x}}{b_{\nu+x}}\right]_{\nu=1}^\infty$$

haben die ν-ten Näherungsbrüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ und $\frac{A_{\nu,x}}{B_{\nu,x}}$. Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ konvergiert, wenn

1) $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{b_\nu b_{\nu-1}}{a_\nu} > 0.$

2) $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{B_{2\lambda-1,\nu}}{A_{2\lambda-1,\nu}} \cdot b_\nu > 0$

3) $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{A_{2\lambda,\nu} \cdot B_{\nu-1}}{B_{2\lambda,\nu} \cdot B_\nu} > 0$

für irgendeinen Wert λ

ist. Die beiden letzten Kriterien nehmen mit wachsendem λ an Schärfe zu. Das zweite Kriterium enthält das erste als speziellen Fall; das erste ist weniger scharf, die beiden anderen sind oft schärfer als das Pringsheimsche Kriterium. Lwt.

O. Perron. Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche. Münch. Ber. **35**, 495-503.

Die bereits bekannten Kriterien werden einfach und naturgemäß abgeleitet. Der Wert der Arbeit liegt in der Methode. Lwt.

L. Kollros. Sur l'approximation périodique des irrationnelles cubiques. Darb. Bull. (2) **29**, 21-24.

Ist x eine quadratische Irrationalzahl, so ist die Minkowskische Funktion $y = ?(x)$ rational; ist x rational, so ist y ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz von 2 ist. Und umgekehrt. Sätze ähnlicher Art werden für eine neue Funktion aufgestellt, die durch anschauliche Zuordnung der Flächenstücke zweier Quadrate entsteht. Lwt.

W. P. Welmin. Zerlegung der Zahl e in den gewöhnlichen Kettenbruch. Mosk. Math. Samml. **25**, 501-504. (Russisch.)

Es handelt sich um die Kettenbruchdarstellung mit lauter positiven unvollständigen Quotienten, welche der Reihe nach die Werte haben: 1, 2. 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, ... $2n$, 1. 1, $2(n+1)$, 1, ..., und welche auf Grund der Eulerschen Entwicklung (Introd. in analysin **1**, § 370) leicht zu beweisen ist. Si.

Auric. Sur la généralisation des fractions continues algébriques. C. R. **141**, 499-500.

$S_1, S_2, \ldots, S_p$ seien p Reihen oder Polynome, die nach fallenden Potenzen von z geordnet sind. S_1 besitze als Glied höchsten Grades Az^K, der höchste Grad jeder folgenden Reihe S sei immer um i kleiner als der Grad der vorhergehenden. Durch Division werden aus $S_1, S_2, \ldots, S_p$ weitere Funktionen $S_{p+1}, S_{p+2}, \ldots$ mit denselben Eigenschaften abgeleitet. Die Annahme $p = 2$ führt zu gewöhnlichen Kettenbrüchen. Wie für diese in einer früheren Mitteilung werden hier vier Spezialfälle untersucht. Lwt.

Auric. Sur les fractions continues algébriques. C. R. **141**, 344-346.

Der Charakter der Funktion

$$F_1 = \lambda - \cfrac{\mu_2}{\lambda_2 - \cfrac{\mu_3}{\lambda_3 - \cdots}}$$

wird in vier einfachen Fällen untersucht, indem über die Polynome λ_i, μ_i von z und $\frac{1}{z}$ spezielle Annahmen gemacht werden. Lwt.

P. Sweschnikow. Über die Entwickelung einer Funktion in Kettenbrüche. Spaczinskis Bote Nr. 394, 222-230; 395, 254-260; 396, 279-282; 397, 9-13; 398, 34-38; 399, 49-55.

Die Darstellung der Frage in russischen Lehrbüchern befriedigt den Verf. nicht, auch fehlt sie meistens. Nach Angabe der Eigenschaften der Kettenbrüche mit lauter positiven, lauter negativen, endlich beliebigen Teilzählern beschäftigt er sich daher mit den Entwicklungen von

$$(1+x)^m, \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, e, x \operatorname{tg} x, e^x, \operatorname{arctg} x, \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \log(1+x)$$

in Kettenbrüche, indem er die betreffenden Potenzreihen in Kettenbrüche verwandelt. Diese Arbeit ist nicht überflüssig; denn wenigstens im russischen Unterricht wird die Kettenbruchtheorie meistens zu sehr vernachlässigt. Si.

R. de Montessus de Ballore. Sur les fractions continues algébriques. Palermo Rend. **19**, 185-257; Thèse, Paris: A. Hermann, 85 S. 4°.

R. de Montessus de Ballore. Sur les fractions continues algébriques de Laguerre. C. R. **140**, 1438-1440.

Zu einer durch die Entwicklung $Z(z) = S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots$ gegebenen Funktion läßt sich der Quotient $W_{pq} = U_p / V_q$ zweier Polynome von den Graden p, q so bestimmen, daß

$$Z(z) - W_{pq} \equiv 0 \pmod{z^{p+q}}$$

wird. Die Funktionen W_{pq} denke man sich mit Padé, wie die Elemente der unendlichen Determinante $|W_{pq}|$ geschrieben. Unter den Kettenbrüchen, als deren Näherungsbrüche eine Folge W_{pq} mit wachsender Indexsumme $p+q$ angesehen werden kann, sind die drei von Padé aufgestellten Typen von hervorragender Bedeutung auch für die vorliegende Arbeit: die W_{pq} sind die Elemente einer Horizontal- oder Vertikalreihe der Matrix $\| W_{pq} \|$ (Typus A); die Näherungsbrüche liegen in einer Parallelreihe zur Hauptdiagonale (Typus C); die $W_{p,q}$ liegen auf einem treppenförmigen Linienzuge, der am oberen oder linken Rand beginnt und mit gleichen, abwechselnd zu den beiden Rändern parallelen Stufen in das System vordringt. Die Zähler und die Nenner dreier aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche genügen derselben homogenen linearen Gleichung (natürlich bei verschiedenen Anfangswerten). Die Koeffizienten sind Polynome von z und dem Index n.

Wenn die Folge der Näherungsbrüche einer bestimmten Grenze zustrebt, so ist der Grenzwert, d. h. der Kettenbruch, eine Darstellung der Funktion $Z(z)$, die z. B. für den Typus A bei Abwesenheit von wesentlich singulären Punkten im allgemeinen einen um so größeren Konvergenzradius hat, eine je tiefere Horizontalreihe man wählt. Die Konvergenzbetrachtungen knüpfen sich in allen Fällen an die Reihe

$$\left(\frac{U}{V}\right)_0 + \left[\left(\frac{U}{V}\right)_1 - \left(\frac{U}{V}\right)_0\right] + \left[\left(\frac{U}{V}\right)_2 - \left(\frac{U}{V}\right)_1\right] + \cdots,$$

von der der Quotient R_n des $(n+1)$-ten und n-ten Gliedes daraufhin untersucht wird, ob sein absoluter Betrag $\gtreqless 1$ ist. Die Rekursionsformeln gestatten eine solche Umformung, daß mit Benutzung des Ausdrucks $\lim R_n \ (n=\infty)$ die Entscheidung der Konvergenzfrage von dem Verhalten der Wurzeln einer quadratischen Gleichung abhängt. Wenigstens ist, wenn gewisse Voraussetzungen erfüllt sind, die Konvergenz sichergestellt, sobald die beiden Wurzeln verschiedene Moduln haben.

Die Form der Rekursionsgleichungen weist auf einen Zusammenhang mit linearen Differentialgleichungen hin. In der Tat rührt von Laguerre die Bemerkung her, daß die meisten untersuchten algebraischen Kettenbrüche einer Differentialgleichung

$$(az+b)(cz+d)\,Z' = (pz+q)\,Z + \Pi(z)$$

genügen, in der a, b, c, d, p, q Konstanten und $\Pi(z)$ ein Polynom ist. Mit solchen Kettenbrüchen beschäftigt sich diese Arbeit auch fast ausschließlich. In vielen Fällen nimmt dann das oben angegebene Konvergenzkriterium die einfache Gestalt an: Der Kettenbruch liefert eine Darstellung der Funktion $Z(z)$, die in allen Punkten der z-Ebene konvergiert außer in den Punkten des geradlinig von $z=-\frac{b}{a}$ bis $z=-\frac{d}{c}$ geführten Schnittes.

Die Tragweite der Methoden wird an einigen von Gauß angegebenen Kettenbrüchen: $\log(1+z)$, $\log\frac{1+z}{1-z}$, $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\omega}$ und weniger speziellen hypergeometrischen Reihen, erprobt, bei denen freilich die Rekursionsgleichungen zum Teil erst nach einer identischen Umformung algebraischen Charakter erhalten. Dasselbe gilt von der letzten Anwendung auf die Lagrangeschen Kettenbrüche für $\int\frac{dz}{1+z^{\omega}}$.

Die zweite Arbeit läßt für den Fall $p=0$ und reeller a, b, c, d, q anschaulich hervortreten, warum die Strecke $\left(-\frac{b}{a}\cdots-\frac{d}{c}\right)$ eine singuläre Linie ist. Für einen ganz bestimmten Index ν bilden nämlich die Nenner der Näherungsbrüche eine Sturmsche Kette

$$V_n, V_{n-1}, \ldots, V_\nu, V_{\nu-1} \qquad (n > \nu - 1),$$

und die $n-\nu+1$ reellen Wurzeln der Gleichung $V_n = 0$ liegen alle zwischen $-\frac{b}{a}$ und $-\frac{d}{c}$.

Lwt.

H. Padé. Sur la convergence de la table des réduites d'une fraction rationnelle. C. R. **141**, 241-243.

Mitteilung einiger Resultate über Näherungsbrüche, die inzwischen — wenn auch auf anderem Wege — von de Montessus gewonnen und in seiner Dissertation veröffentlicht worden sind.

Lwt.

H. Padé. Sur les réduites d'une certaine catégorie de fonctions. C. R. **141**, 708-710.

H. Padé. Sur les développements en fractions continues de la fonction $F(h, 1, h', u)$ et la généralisation de la théorie des fonctions sphériques. C. R. **141**, 819-821.

H. Padé. Sur la convergence des fractions continues régulières de la fonction $F(h, 1, h', u)$ et de ses dégénérescences. C. R. **141**, 997-999.

Es sei $U_{\mu\nu}/V_{\mu\nu}$ ein Näherungsbruch der Funktion $f(x) = \sum a_n x^n$ $(\mu \gtreqless \nu + 1)$. Zwischen je p aufeinanderfolgenden Koeffizienten a_n bestehe eine lineare Abhängigkeit besonderer Art. Dann existieren zwei lineare Differentialgleichungen $P=0$, $Q=0$, denen die Polynome $U_{\mu\nu}$ und $V_{\mu\nu}$ genügen.

Für die einfachsten Rekursionsbeziehungen ($p = 2$) wird $P = 0$ die Differentialgleichung einer hypergeometrischen Reihe, deren eines Integral $V_{\mu\nu}$ ist und deren anderes Integral mit der im Titel der zweiten Arbeit erwähnten Verallgemeinerung der Kugelfunktionen zusammenhängt.

Die eingeführten Hülfsmittel eignen sich vorzüglich zur Untersuchung der Konvergenz der drei Typen „regulärer" Kettenbrüche. Man erhält auch unter Umständen (nur auf singulären Linien nicht) konvergente Darstellungen von Funktionen, die durch divergente oder besser: nur für den Nullpunkt konvergente Potenzreihen definiert sind.

Diese wenigen Andeutungen mögen vorerst genügen, da die kurzen, aber inhaltreichen Mitteilungen in einer größeren Arbeit ausgeführt werden sollen. Lwt.

Vierter Abschnitt.

Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

S. Minetola. Sopra alcune classi notevoli di permutazioni. Batt. G. [(2) **12**] **43**, 375-378.

Die Anzahl derjenigen Permutationen von n Elementen, bei denen kein Element seinen ursprünglichen Platz innehat, werde mit P''_n, die Komplementarzahl mit P'_n bezeichnet, so daß $P'_n + P''_n = P_n = n!$ ist. In analoger Weise seien unter den P'_n Permutationen P''_{n-1} von der Art, daß nur eines ihrer Elemente den Anfangsplatz beibehalten hat, usf. Man erhält alsdann die Beziehung

$$P_n = P''_n + \binom{n}{1} P''_{n-1} + \binom{n}{2} P''_{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} P''_1 + 1.$$

Ferner ergibt sich:

$$P''_n = (n-1)(P''_{n-1} + P''_{n-2}),$$

und da, wie die Ausrechnung sofort zeigt,

$$P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2}),$$

ist, so folgt

$$P'_n = (n-1)(P'_{n-1} + P'_{n-2}).$$

Einige weitere Formeln ähnlicher Art bilden den Schluß der Note.

Ot.

Ch. Bioche. Sur les permutations polyédriques. S. M. F. Bull. **33**, 88-89.

Verallgemeinerung der gewöhnlichen und der zyklischen Permutationen. Auf wieviel verschiedene Weisen kann man n Elemente den n Ecken eines vorgeschriebenen Polyeders zuordnen? Spezialfälle. Sk.

Claude-Gaspard Bachet Sieur de Méziriac. Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. Quatrième édition revue et simplifiée. Paris: Gauthier-Villars. VI u. 164 S. 8°.

Die Vorrede dieser neuen Ausgabe des berühmten Buches lautet: „Obgleich zahlreiche Werke mathematischer Mußestunden in den letzten Jahren erschienen sind, hat man doch gemeint, es sei möglich, eine neue Auflage des Buches von Bachet de Méziriac zu veröffentlichen. Unter einem heiteren Titel hat der Autor ein ernstes Werk geschaffen, und unsere Zeitgenossen werden sich noch immer gern den vergnüglichen und ergötzlichen Aufgaben zuwenden, die Bachet 1612 veröffentlicht hat."

Das ist alles, was die neue Auflage dem Leser erklärt; es bleiben dabei Fragen offen, die Ref. nicht beantworten kann. Bachet selbst hat zwei Auflagen besorgt, die erste 1612, die zweite 1624. Darauf sind in dem Verlage von Gauthier-Villars drei Auflagen erschienen, bearbeitet von Labosne, nämlich 1874 die dritte, 1879 die vierte, 1884 die fünfte. Die gegenwärtige von 1905 wird nun wieder als die vierte bezeichnet. Soll das vielleicht heißen, daß wir einen Abdruck der vierten Auflage zu einem billigeren Preise (3,50 fr. statt 6 fr.) erhalten? Dann hätte aber doch der Herausgeber Labosne irgendwo erwähnt werden müssen; er erscheint nur in einigen mit A. L. unterzeichneten Fußnoten.

Abgesehen von diesem Rätsel, das uns damit aufgegeben ist, und das dem Bibliographen zumutet, die früheren Auflagen sich zur Vergleichung zu verschaffen, was Ref. nicht konnte, ist die Veröffentlichung den Wünschen der gegenwärtigen Zeit nach dem Besitz solcher unterhaltsamen und belehrenden Aufgaben entgegengekommen. Und wenn man auch nicht erfährt, wieviel von dem vorliegenden Buche authentisches Eigentum des ehrenwerten und gelehrten Sieur de Méziriac ist, so kann man sich doch freuen, daß er uns noch heute Anregung zu scharfsinnigen Überlegungen gibt.

Die Teile des Werkes sind: I. Problèmes plaisants et délectables (S. 1-77, Nr. I-XIX). II. S'ensuivent quelques autres petites subtilités des nombres qu'on propose ordinairement (S. 79-103, Nr. I-VII). III. Supplément aux problèmes plaisants et délectables (S. 105-135, Nr. I-XI). IV. Notes (S. 137-161). I. Sur les multiples communs. II. Deux nombres A et B étant donnés, trouver le plus petit multiple de l'un surpassant d'un nombre donné R un multiple de l'autre. III. Trouver un nombre qui, divisé par des nombres donnés, laisse des restes assignés. IV. Sätze über Summen gewisser Produkte.

In dem Bulletin des publications nouvelles de la librairie Gauthier-Villars von 1905 befindet sich S. 62-63 eine ausführliche Anzeige zu dieser „durchgesehenen und vereinfachten vierten Auflage" des vielbegehrten Buches mit seinen anmutigen Aufgaben, die den hohen Ernst des Verf. in seinem Spiel bezeugen. In der Anzeige sind die Auf-

gaben Nr. V (S. 17) und Nr. XVIII (S. 66) als Nr. VIII und Nr. XXIII bezeichnet, ein weiterer Beitrag zu der eingangs aufgeworfenen Frage nach dem Verhältnis der vorliegenden Ausgabe zu den früheren. Lp.

G. Tarry. Carrés cabalistiques eulériens de base $8n$. Ass. Franç. Grenoble **33**, 95-111.

„Es gibt magische Quadrate von einer besonderen Art, welche die Aufmerksamkeit Eulers auf sich gezogen haben, nämlich solche, welche, in dem Zahlensystem mit der Basis n des Quadrates geschrieben, eine Lösung der Aufgabe der n^2 Offiziere bilden, oder mit anderen Worten in allen horizontalen Zeilen und vertikalen Spalten sowie den beiden Diagonalen die n ersten Ziffern enthalten, welche die n verschiedenen Regimenter darstellen, und die n zweiten Ziffern, welche die n verschiedenen Grade darstellen. Solche Quadrate sollen Eulersche heißen. Den Namen „magisches Schema" geben wir einem algebraischen Quadrate, aus welchem man immer ein magisches Quadrat erhält, wenn man den es bildenden Buchstaben beliebige Werte beilegt. Ich habe zehn kabbalistische Eulersche Schemata der Basis 8 gefunden, d. h. solche, aus denen man immer ein Eulersches panmagisches Quadrat im ersten Grade und magisches im zweiten Grade erhält, wenn man den sieben in die Zusammensetzung jedes einzelnen von ihnen eingehenden Buchstaben beliebige Werte erteilt." Diese zehn Schemata sind auf den Seiten 96-105 abgedruckt. Danach werden erläuternde Bemerkungen gemacht. „Die zehn Schemata sind alle verschieden; anders ausgedrückt: es ist unmöglich, daß zwei kabbalistische Eulersche Zahlquadrate, die aus zwei verschiedenen Schematen abgeleitet werden, identisch sind oder nach Permutationen der Zeilen und Spalten identisch gemacht werden." Unter anderem wird zuletzt gezeigt, wie man aus den 1600 Zahlen von 0 bis 1599 ein kabbalistisches Eulersches Quadrat zur Basis 40 mit trimagischen Diagonalen konstruieren kann. Lp.

B. Hanumanta Rau, T. Dennis. Solution of question 8108. Ed. Times (2) **8**, 65-68.

Dennis behandelt die vor Jahren gestellte Aufgabe: Zwei Springer werden auf zwei Quadrate eines Schachbretts gestellt; jeder soll 31 mal so gezogen werden, daß kein Quadrat mehr als einmal benutzt wird. Lp.

P. Mansion. Calcul des probabilités, sa portée objective et ses principes. Paris: Gauthier-Villars. IV u. 120 S.

Das Heft enthält eine Sammlung von fünf Abhandlungen des Verf. aus den Jahren 1902, 1903 und 1904 (vgl. F. d. M. **33**, 238, 1902; **34**, 257-258, 1903; **35**, 244, 317, 1904), so daß eine eingehendere Besprechung unnötig ist. Über den Hauptinhalt des Werkchens möge nur

das Folgende aus dem Vorwort erwähnt werden. In dem ersten, zweiten, vierten und fünften Artikel werden mit größerer Schärfe, als es bis jetzt geschehen ist, die Wahrscheinlichkeiten berechnet, auf die man beim Beweis des Theorems von Bernoulli und des Gesetzes der großen Zahlen, sowie auch bei mehreren Fragen über die sogenannten Wahrscheinlichkeiten *a* posteriori geführt wird. In dem dritten Aufsatz über die objektive Tragweite der Wahrscheinlichkeitsrechnung setzt der Verf. seine Ansichten über die Sicherheit der Grundlagen dieser Wissenschaft und über die Zulässigkeit der davon gemachten Anwendungen auseinander. Bö.

R. de Montessus. La loi des grands nombres. Ens. math. 7, 122-138.

Der Verf. entwickelt seine Ansichten darüber, wie der Mathematiker im Gegensatz zum Philosophen eine rein logische Theorie des Zufalls aufzubauen und den moralischen Wert dieser Theorie zu erkennen vermöge. Er denkt sich die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ähnlicher Weise, wie es bei der Mechanik geschehen ist, die sich nach und nach von der Methaphysik frei gemacht hat und eine logische Wissenschaft geworden ist. Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen ist zunächst nur ein Erfahrungsprinzip, d. h. ein Prinzip, das durch Induktion aus einigen besonderen Erfahrungen abgeleitet und auf das sodann durch eine logische Erweiterung die Wahrscheinlichkeitsrechnung gegründet wird. Zu diesem Zwecke wird auf Grund des Prinzips eine Definition aufgestellt, die das Prinzip enthält, daß nämlich durch das Verhältnis der Anzahl der günstigen Fälle zu der der möglichen Fälle die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses dargestellt wird. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung erreicht somit ihr Ziel, mittlere Ergebnisse zu liefern, und besitzt dadurch einen moralischen Wert.

Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einem Kapitel der Algebra findet hiermit ihren Abschluß. Bö.

E. Borel. Remarques sur certaines questions de probabilité. S. M. F. Bull. 33, 123-128.

Borel meint, nach der Definition des Integrals, die Lebesgue in seinen Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives gegeben hat (F. d. M. 35, 377, 1904), könne man solche Fragen der Wahrscheinlichkeitslehre in Angriff nehmen, die nach den klassischen Methoden der Integration sich als unzulänglich erwiesen haben. Dazu kommt noch die Anwendung der Mengenlehre. Als Beispiel wird die Wahrscheinlichkeit behandelt, daß x, wenn $0 < x < 1$, kommensurabel ist, wenn man von Einheiten der n-ten Ordnung absieht. Lp.

A. M. Nesbitt, M. W. Crofton, G. R. Dick. Question 15523. Ed. Times (2) 8, 36-37; 9, 49-51.

Die Aufgabe lautet: Jemand hat seine m Hüte in der Kleiderablage hängen; er wird von n Freunden besucht, von denen jeder einen Hut ablegt. Beim Fortgehen nimmt jeder der n Freunde einen der $m+n$ Hüte. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, daß kein Gast seinen Hut hat. Für diese Aufgabe hatten im Vorjahre J. Blackie und D. Biddle eine übereinstimmende Lösung gefunden (vgl. F. d. M. **35**, 237, 1904). Nesbitt, der Aufgabensteller, weist an dem oft behandelten Beispiele $m=0$ die Unrichtigkeit jener Lösung nach, kann aber nicht den gemachten Fehlschluß nachweisen. Im folgenden Jahre (1906) gelangen Crofton und Dick auf verschiedenen Wegen zu der richtigen Lösung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit p:

$$p = 1 - \frac{n}{m+n} + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} - \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)} + \cdots$$

Diese Formel wird durch Abzählung der möglichen und der günstigen Fälle der Verteilung gewonnen. Lp.

S. P. Bauerjee. Question 15105. Ed. Times (2) 8, 102-103.

Nach einem Punkte O innerhalb eines Dreiecks ABC zieht man die Linien BO und CO; diese treffen die Gegenseiten bzw. in E und F. Den Mittelwert des Dreiecks AEF zu finden. Die Rechnung ergibt

$$\frac{\pi}{12 \sin^2 A}(b^2 + c^2 - 2bc \cos A\,(\pi^2 - 9)).$$

Lp.

K. Pearson. The problem of the random walk. Nature 72, 294, 342

Lord Rayleigh. The problem of the random walk. Nature 72, 318.

Ein Mensch bricht von einem Punkte O auf und läuft l Meter in gerader Linie; dann wendet er sich um einen beliebigen Winkel und läuft abermals l Meter in einer zweiten Geraden. Dieses Verfahren wiederholt er n-mal. Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß er nach diesen n Gängen in einer Entfernung zwischen r und $r+\delta r$ vom Ausgangspunkte O ist. Auf diese von Pearson gestellte Frage erwidert Lord Rayleigh unter Verweisung auf mehrere Veröffentlichungen, abgedruckt in seinen Scientific papers **1**, 491 u. **4**, 370, daß für großes n die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$w = \frac{2}{n} e^{-r^2/n} \cdot r dr.$$

Lp.

A. Kluyver. Een vraagstuk van meetkundige waarschijnlijkheid. Amst. Versl. **14**, 325-334.

Verf. behandelt das folgende von Pearson gestellte Problem (vgl. das vorstehende Referat): „Eine Person geht von einem Punkte O aus eine Strecke l geradlinig vorwärts, biegt sodann in einem beliebigen Winkel ab und bewegt sich wiederum um l weiter. Sie wiederholt diesen Prozeß n-mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der alsdann erreichte Abstand von O zwischen r und $r+dr$ liegt?" Die Lösung dieser sowie der allgemeineren Aufgabe, bei der die durchlaufenen Strecken als verschieden lang angenommen werden, beruht auf der Theorie der Besselschen Funktionen und führt zu gewissen von diesen Funktionen abhängenden bestimmten Integralen. Werden die Strecken mit $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ bezeichnet, und soll der Abstand des Endpunktes der Wanderung vom Ausgangspunkte unter einer gegebenen Länge c bleiben, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$W_n(c; a, a_1, \ldots, a_{n-1}) = c\int_0^\infty J_1(uc)\, J_0(ua)\, J_0(ua_1) \ldots J_0(ua_{n-1})\, du.$$

Die Umwandlung dieses Ausdruckes für einige andere, der ursprünglichen ähnliche Problemstellungen bildet den wesentlichen Inhalt der Abhandlung. Ot.

W. P. Ermakow. Die Methode der kleinsten Quadrate. (Bearbeitung der Versuchsergebnisse.) Kiew Univ. Nr. 3, 1-22. (Bericht d. Phys.-Math. Ges. Kiew 1904.) (Russisch.)

Die großen Schriften über die Methode der kleinsten Quadrate, welche die Theorie der bestimmten Integrale usw. benutzen, sind für den Praktiker wenig brauchbar. Ihm sind genaue einfache Regeln dafür nötig, wie die Versuchsergebnisse zu bearbeiten sind. Diese Regeln können in kurzer, klarer und streng begründeter Form dargestellt werden. Die Methode der kleinsten Quadrate ist unabhängig von der Wahrscheinlichkeitstheorie darzustellen, von welcher nur das Gesetz der großen Zahlen von Wichtigkeit für die Methode ist. Der Praktiker möge aber das Gesetz benutzen, ohne dessen Beweis zu wissen. Diese Ideen bestimmen die Darstellung des Verf., welche zwar die Kürze erreicht hat, allein anstatt der „strengen Begründung" nur die Grundlagen begrifflich klar zu machen bestrebt gewesen ist. Si.

S. Wellisch. Über das natürliche Erhaltungsprinzip. Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 202-207.

Die mechanische Begründung der Methode der kleinsten Quadrate hat so vielerlei Wege genommen, daß dem Verf. ein Rückblick auf die wichtigsten Entwicklungsstadien des mit dieser Methode verwandten mechanischen Prinzips der möglichsten Erhaltung des Naturzustandes (des Prinzips der kleinsten Wirkung) von Interesse zu sein scheint. Es werden

die verschiedenen Behandlungsweisen dieses Prinzips und seines Zusammenhanges mit der Methode der kleinsten Quadrate in der Zeit von Huygens bis auf Henke besprochen, wobei zum Schluß noch auf eine Arbeit des Verf.: Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichts elastischer Systeme in der „Öster. Zeitschrift für Vermessungswesen, Wien 1904", hingewiesen wird (F. d. M. **35**, 244, 1904). Bö.

F. Y. Edgeworth. The law of error. Cambr. Trans. **20**, 36-65, 113-141.

Die Abhandlungen setzen die Untersuchungen des Verf. aus Phil. Mag. (5) **41** fort (vgl. F. d. M. **27**, 184, 1896). Verschiedene Methoden zur Auffindung einer dritten, vierten, allgemein t-ten Annäherung an das zusammengesetzte Fehlergesetz werden entwickelt. Lp.

C. V. L. Charlier. Über das Fehlergesetz. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. **2**, Nr. 8, 9 S.

C. V. L. Charlier. Die zweite Form des Fehlergesetzes. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. **2**, Nr. 15, 8 S.

C. V. L. Charlier. Researches into the theory of probability. Lunds Univ. Arsskr. (2) **1**, Nr. 5, 51 S.

Es wird gezeigt, daß das Fehlergesetz sich durch diejenigen Funktionsentwicklungen ausdrücken läßt, die der Verf. in einem besonderen Aufsatze (Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. **2**, Nr. 20, 35 S.) mitgeteilt hat (Referat in diesem Bande, Abschnitt VII, Kap. 1). Msn.

F. R. Helmert. Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen. Berl. Ber. 1905, 594-612.

Bei Ausgleichungen von Beobachtungsreihen kann man die übrigbleibenden Fehler auf mehrfache Weise (z. B. durch Vorzeichenprüfungen und durch Prüfungen der mittleren Fehlergröße) daraufhin untersuchen, ob sie sich hinlänglich als zufälligen Ursprungs betrachten lassen. Über die Genauigkeit solcher Kriterien des Zufalls scheint aber bis jetzt nur wenig bekannt zu sein. Der Verf. zeigt nun, daß man sich für die Angabe der Genauigkeit bei den genannten Prüfungen der mittleren Abweichungen bedienen kann, die nach Art des Gaußschen mittleren zu befürchtenden Fehlers gebildet werden. Interessant ist diese Untersuchung auch deshalb, weil bei den Vorzeichenprüfungen die zu betrachtenden Größen eine diskrete Wertreihe mit dem Intervall 2 bilden.

Im folgenden sollen die Hauptergebnisse zusammengestellt werden.

1. Bezeichnet man die Vorzeichen mit $V_i = +1$ oder $= -1$ und ist s ihre Summe, so ist im Durchschnitt unendlich vieler Wiederholungen der Beobachtungsreihe $s = 0$ mit dem mittleren Fehler $= \pm \sqrt{n}$.

Ein Näherungswert für die relative Häufigkeit W der Fälle, wo s innerhalb $\pm\sqrt{n}$ liegt, ist 0,683 ... Wegen der diskreten Werte der s bedarf aber W noch einer Verbesserung, die angenähert zu

$$+\sqrt{\frac{2}{n\pi e}} = +\frac{0{,}484\ldots}{\sqrt{n}}$$

ermittelt wird, wodurch die Übereinstimmung mit den streng berechneten Werten von W viel besser wird. Ist s (absolut genommen) wesentlich größer als $\sqrt{n}$, so sind systematisch wirkende Fehlereinflüsse angedeutet, dieses jedoch auch schon dann, wenn s nahe bei $\sqrt{n}$ liegt.

2. Ist f die Anzahl der Zeichenfolgen und w die der Zeichenwechsel in einer Fehlerreihe, so ist in demselben Sinne wie vorher $f - w = 0$ mit dem mittleren Fehler $= \pm\sqrt{n-1}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß $f - w$ innerhalb $\pm\sqrt{n-1}$ liegt, gleich $0{,}683 + \frac{0{,}484}{\sqrt{n-1}}$.

3. Ist das Gesetz des Vorkommens des wahren Fehlers ε eine gerade Funktion, so ist der Durchschnittswert von $[\varepsilon] = 0$ mit dem mittleren Fehler $= \pm\mu\sqrt{n} = \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}$ $(\mu^2 = [\varepsilon\varepsilon] : n)$.

Liegt der Wert von $[\varepsilon]$ außerhalb der Grenzen $\pm\sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}$, so hat man Anlaß, zu vermuten, daß in den ε systematische Einflüsse enthalten sind, da bei zufälligem Charakter der ε die Wahrscheinlichkeit von $[\varepsilon]$, innerhalb der bezeichneten Grenzen zu fallen, ungefähr doppelt so groß ist wie für außerhalb.

4. Gelegentlich der Bildung von $[\varepsilon\varepsilon]$ wird man die Summe der Quadrate der positiven und der negativen Fehler miteinander vergleichen. Man erhält im Durchschnitt:

Quadratsumme der pos. Fehler = Quadratsumme der neg. Fehler mit dem m · F · $= \pm\nu^2\sqrt{n} = \pm\sqrt{[\varepsilon^4]}$ $(\nu^4 = [\varepsilon^4] : n)$.

Liegt der Unterschied beider Quadratsummen außerhalb der mittleren Fehlergrenzen, so sind in demselben Grade wie in den früheren Fällen systematisch wirkende Ursachen zu vermuten.

5. Die beiden letzten Prüfungsarten sind nicht besonders durchgreifend, da systematische Fehlerursachen häufig die positiven und negativen Fehler gleichmäßig beeinflussen. Man sucht daher den mittleren Beobachtungsfehler durch verschiedene Gruppierung der Beobachtungen mehrfach zu bestimmen, so daß einmal systematische Einflüsse möglichst eliminiert werden, andererseits aber wirksam sind, wie es z. B. durch das Abbesche Kriterium geschieht. Man ordnet die Fehler ε nach der Variable, deren systematischen Einfluß man vermutet, und bildet:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}^2 + \varepsilon_n^2 = A,$$

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)^2 + (\varepsilon_n - \varepsilon_1)^2 = B$$ und

findet dann im Durchschnitt:

$$A - \frac{B}{2} = 0 \text{ mit dem m} \cdot \text{F.} = \pm\mu^2\sqrt{n}, \text{ oder,}$$

da $A = n\mu^2$ ist, auch

$$\frac{2A}{B} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}}; \sqrt{\frac{A}{n}} - \sqrt{\frac{B}{2n}} = 0 \pm \frac{\mu}{2\sqrt{n}}.$$

Modifiziert man das Abbesche Kriterium in der Weise, daß man bildet

$$[\varepsilon^2] - \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_n^2}{2} = A^*, (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)^2 = B^*,$$

so wird sein

$$A^* - \frac{B^*}{2} = 0 \pm \mu^2 \sqrt{n-1},$$

$$\frac{2A^*}{B} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{n-1}},$$

$$\sqrt{\frac{A^*}{n-1}} - \sqrt{\frac{B^*}{2(n-1)}} = 0 \pm \frac{\mu}{2\sqrt{n-1}}.$$

6. Sind nicht wahre Fehler ε, sondern übrigbleibende Fehler λ einer Ausgleichung gegeben, und behandelt man sie nach den vorstehenden Formeln als wahre Fehler, so wirkt der Zwang, den die Ausgleichung in den λ ausübt, wie ein systematischer Fehlereinfluß. Man kann den systematischen Beobachtungsfehler dann also nur erkennen, wenn dieser Zwang gering ist, d. h., wenn der Quotient $m:n$ aus der Anzahl m der bestimmten Elemente und der Anzahl n der Beobachtungen klein ist. Eine Berücksichtigung dieses Ausgleichungszwanges wird schließlich noch für das Abbesche Kriterium in dem einfachen Falle des arithmetischen Mittels durchgeführt. Setzt man nämlich

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = A',$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2 = B',$$

so ist näherungsweise

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1} = \frac{A'}{n-1}$$

oder auch

$$2\mu^2 = \frac{B'}{n-1},$$

so daß für den Durchschnitt unendlich vieler Fälle gilt:

$$2A' = B',$$

$$A' - \frac{B'}{2} = 0 \pm \mu^2 \sqrt{n-2},$$

$$\frac{2A'}{B'} = 1 \pm \frac{\sqrt{n-2}}{n-1} \text{ oder nahe } = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ für ein großes } n,$$

$$\sqrt{\frac{A'}{n-1}} - \sqrt{\frac{B'}{2(n-1)}} = 0 \pm \frac{\mu}{2\sqrt{n}}.$$

Ein konstanter Fehler der Beobachtungen kann selbstverständlich hierdurch nicht erkannt werden.

7. Zum Schluß wird noch an einem Beispiel (an den Unterschieden in den Schwingungsdauern zweier invariablen Halbsekundenpendel bei einer Reihe zur Bestimmung der Schwerkraft) gezeigt, daß die Betrachtung der Zeichenfolgen und -wechsel sowie das Abbesche Kriterium einen systematischen Einfluß andeuten, der im vorliegenden Falle durch die Veränderlichkeit der Pendel verursacht sein wird. Bö.

J. Schnöckel. Graphisch-analytische Ausgleichung eines ebenen Linienzuges nach der Methode der kleinsten Quadrate. Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 430-435.

Es wird die graphisch-analytische Ausgleichung eines ebenen Linienzuges nach der Methode der kleinsten Quadrate unter der Voraussetzung behandelt, daß seine Darstellung in der Form von Potenzreihen, deren Koeffizienten Momente verschiedener Ordnung der zu bestimmenden Kurve sind, erfolgen soll. Verf. schließt sich hierbei an ein Verfahren an, das er in der Zeitschrift für Math. u. Phys. **51**, 41-51 (vgl. auch F. d. M. **35**, 708, 1904) zur Entwicklung der Momente verschiedener Ordnung für ein ebenes Polygon vorgeschlagen hat. Eine zu integrierende Kurve ersetzt man dann zweckmäßig durch eine eckige Figur, die sich ihr möglichst gut anschließt.

Die zur Ermittlung der Koeffizienten entwickelten Formeln stützen sich auf die bekannten von J. P. Gram (J. für Math. **94**) hergeleiteten Reihenentwicklungen. Bö.

G. Holtsmark. Über eine Anwendung der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie auf Größen, welche sich nicht rein zufällig ändern. Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 410-419.

Bei den Feldversuchen mit Ackergewächsen, Düngung usw. wird gewöhnlich ein großes Feld in kleinere Parzellen geteilt; diese werden mit den verschiedenen Versuchsgegenständen beschickt, und schließlich werden die Ernten der einzelnen Parzellen miteinander verglichen. Mehrere Versuchsfehler werden sich dabei geltend machen; besonders kommt hier die Verschiedenheit der Boden und der natürlichen Wachstumsbedingungen in Betracht. Andererseits unterscheiden sich Wachstumsbedingungen zweier unmittelbar aneinander grenzenden oder in relativ kleinem Abstand befindlichen Parzellen weniger voneinander als solcher, die relativ weit voneinander entfernt sind.

Will man mit Hülfe der Fehlerwahrscheinlichkeit ein Maß für die Genauigkeit der Versuchsresultate ermitteln, so wird der mittlere Fehler mit der Ausdehnung des Feldes wachsen. Diesen Übelstand sucht eine Methode von Bastian R. Larsen zu vermeiden, indem er nicht sämtliche Parzellen mit den zu vergleichenden Versuchsobjekten, sondern einen

Teil — z. B. jede dritte Parzelle, die Maßparzellen — mit einem bestimmten Versuchsgegenstand beschickt. Für beide Fälle entwickelt der Verf. Ausdrücke für die mittleren Fehler und kommt dabei zu nachstehenden Ergebnissen:

1. Bei Anwendung der Fehlerwahrscheinlichkeit auf Elemente, die in einer bestimmten geometrischen Lage festgehalten sind, und bei denen der Unterschied zwischen zwei beliebigen Elementen mit wachsender Entfernung zunimmt, nimmt der berechnete mittlere Fehler mit wachsender Anzahl der Elemente nach einem Gesetze zu, das durch eine vom Verf. entwickelte Formel dargestellt wird.

2. Durch Anwendung von „Maßparzellen“ nach Larsens Methode läßt sich der mittlere Fehler bedeutend herabdrücken. Bei dieser Methode wird zwar auch der mittlere Fehler mit wachsender Anzahl der Elemente zunehmen, er nähert sich aber rasch einer Grenze, die nur von der Differenz zwischen den zusammenstoßenden Elementen abhängt.

Die erhaltenen Resultate werden an einem älteren Versuche Larsens geprüft und bestätigt gefunden. Bö.

G. F. Lipps. Die Bestimmung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegenstandes. Leipz. Ber. 57, 1-32.

Das Problem der Abhängigkeitsbestimmung wurde aus Anlaß eines speziellen Falles zuerst von Galton und Pearson aufgenommen. Um es in allgemeinster Form zu erfassen, trifft Verf. folgende Festsetzungen. Irgend zwei auf ihre Abhängigkeit zu prüfende Merkmale werden durch a und b bezeichnet. Sind die Merkmale unveränderlich, so daß lediglich ihr Vorhandensein oder Fehlen in Betracht kommt, so wird das Vorhandensein und das Fehlen von a, bzw. b durch a_1 und a_2, bzw. b_1 und b_2 angedeutet. Sind hingegen die Merkmale der Abstufung irgend welcher Spezialisierung fähig, so werden die verschiedenen Formen von a durch $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$, die von b durch $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_s$ angegeben, wo die Reihenfolge der a und der b entweder objektiv begründet ist oder beim Fehlen eines objektiv ordnenden Prinzips auf subjektiver Willkür beruht. Die Merkmale a und b sind alsdann voneinander abhängig, wenn die $a_\varkappa$ und b_λ in ihrem Auftreten voneinander abhängig sind. Ist dies nicht der Fall, so sind die Merkmale a und b voneinander unabhängig.

Zur rechnerischen Behandlung des Problems benutzt Verf. das Urnenschema, dessen Anwendbarkeit er leicht nachweist. Im übrigen eignet sich die Beweisführung, ihres Formelreichtums wegen, für die referierende Darstellung nicht. Es sei nur noch erwähnt, daß das Verfahren Galtons und Pearsons, einen einzigen Wert (den „Korrelationskoeffizienten“) als schlechthin gültiges Maß der Abhängigkeit hinzustellen, als unzulässig erwiesen wird. Ot.

F. Ludwig. Neue Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie. Zs. f. Math. u. Phys. **50**, 163-164 (1904); **52**, 106-111.

Fortsetzungen III und IV des Literaturnachweises (vgl. F. d. M. **34**, 268, 1903). In IV werden besonders besprochen: Davenport, Statistical methods (F. d. M. **35**, 241, 1904) und G. Duncker, Symmetrie und Asymmetrie bei bilateralen Tieren, Archiv v. W. Roux **17**, 533 bis 682, 1904. Lp.

Ch. Henry et L. Bastien. Recherches sur la croissance de l'homme et sur la croissance des êtres vivants en général. Ass. Franç. Grenoble **33**, 797-807.

Versuch, die Abhängigkeit zwischen dem Alter x und dem Gewichte y eines Menschen durch eine empirische Gleichung auszudrücken. Vier Perioden erfordern eine getrennte Behandlung. Die Gleichungen zwischen x und y sind immer Hyperbeln; y bedeutet das Gewicht in Kilogrammen, x das Alter in Jahren, mit Ausnahme der ersten Kurve, wo x Monate bezeichnet.

I. Fötus: $x^2 + 25\,xy - 30\,y^2 - 162\,y = 0.$

II. 0 bis 2 Jahre: $31{,}5\,x^2 - 25\,xy + 2\,y^2 + 200\,x - 25\,y + 57 = 0.$

III. 2 bis 19 Jahre: $y^2 - 6{,}08\,xy + 7{,}27\,x^2 - 11{,}11\,x + 19{,}4\,y - 207{,}62 = 0.$

IV. 19 Jahre bis zum Tode: $(0{,}5\,y - x)(10\,y + x) + 679\,x - 442\,y + 6{,}721 = 0.$

In ähnlicher Weise werden Gleichungen für die Größe und für das Verhältnis vom Gewicht zur Größe aufgestellt. Zuletzt werden die entsprechenden Verhältnisse von Fritillaria imperialis verglichen. Lp.

Fr. Galton. Nomenclature of kinship; its extension. Nature **73**, 150-151.

Erläuterung der im Vorjahre (F. d. M. **35**, 242, 1904) gemachten Vorschläge an der Verwandtschaft des Königs Haakon VII. von Norwegen. Lp.

Fr. Galton. Average number of kinsfolk in each degree. Nature **71**, 248.

Nochmalige Erläuterung eines vorjährigen Artikels (F. d. M. **35**, 243, 1904) an dem Beispiel eines Sackes voller weißen und schwarzen Kugeln. Lp.

A. Meyer. La théorie des élections et la représentation proportionnelle. Rev. générale des Sc. **16**, 111-123, 158-171.

I. Studien über das Majoritätssystem und die verschiedenen Systeme der proportionalen Vertretung. II. Kritische Prüfung der Theorien, auf welche sich das d'Hondtsche System stützt. Der Verf. verwirft den Mansionschen Beweis (vgl. F. d. M. **34**, 272-273, 1903).

Fe. (Lp.)

D. M. Y. Sommerville. On the distribution of the proper fractions. Edinb. Roy. Soc. Proc. **26**, 116-129.

Über die geeignete Verteilung der in statistischen Arbeiten auftretenden, nicht reduzierten Brüche in Klassen. Lp.

E. Maillet. Sur la mortalité d'une collectivité d'individus dont l'âge est assez peu différent. Soc. Philom. Bull. (9) **7**, 268-272.

Es seien $k_1, k_2, \ldots, k_n$ Personen der Altersjahre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu einer Gesamtheit vereinigt, die stets positive Altersdifferenz $x_k - x_1$ möge niemals größer als einige Jahre sein, und es bezeichne $y = f(x)$ das Gesetz der Sterbenswahrscheinlichkeiten, so daß $f(0) = 1$ ist. Es ist die Aufgabe, die Zahl der nach einer gewissen Zeit θ noch lebenden Mitglieder der Gesamtheit zu bestimmen. Verf. zeigt, daß zunächst ganz allgemein die gesuchte Zahl ebenso berechnet werden kann, wie wenn alle Personen das gleiche, von θ abhängige Alter ξ hätten, sobald nur — wie es übrigens meist der Fall ist — die gegebenen Altersklassen nicht unter 15 liegen. Als weiteres und wichtigeres Ergebnis beweist er, daß ξ für die ganze praktisch in Betracht kommende Ausdehnung der gebräuchlichen Sterbetafeln fast unabhängig von θ ist und ungefähr mit dem anfänglichen Durchschnittsalter der Personengesamtheit zusammenfällt; dabei wird allerdings vorausgesetzt, daß letzteres, je nach den verwendeten Sterbetafeln, nicht über 40 bis 50 Jahren liegt. Die Geringfügigkeit des entstehenden Fehlers wird an einem praktischen Beispiele nachgewiesen. Ot.

C. Goldziher. Un critérium pour l'application de la loi de mortalité de Gompertz-Makeham. C. R. **141**, 677-680.

Die von Gompertz aufgestellte Sterblichkeitsformel lautet in der verbesserten Fassung Makehams:

$$p_x = sg^{c^x(c-1)},$$

wobei p_x die Überlebenswahrscheinlichkeit für ein erreichtes Alter x und s, g, c Konstanten bezeichnen, die aus der Beobachtungsreihe der p_x zu bestimmen sind. Die Anwendbarkeit des Gesetzes hängt nun in erster Linie von der Regelmäßigkeit der Originalreihe ab. Für die weniger regelmäßigen Reihen fehlte es bisher an einem Kriterium für die Bestimmung der Grenzen, innerhalb deren die Anwendung möglich ist. Die Aufgabe kommt darauf hinaus, eine Regel für die Bestimmung derjenigen

Gruppen der Zahlen p_x anzugeben, mit deren Hülfe die Konstanten s, g, c berechnet werden können. Die Lösung gelingt mittels gewisser linearer Funktionen von p_x und x, die durch wiederholte Logarithmierung der ursprünglichen Formel erhalten werden.

Weiterhin wird für den Fall, daß die Ausgleichung der aus jenen Funktionen gefundenen Werte mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate bewirkt werden kann, ein neues Verfahren zur Berechnung der Größen c und g angegeben und endlich s als Funktion dieser Größen durch die Formeln

$$\log s = \frac{1}{n}\left(c^x\, m\, \frac{c^n - 1}{c - 1} + \sum_{(x)}^{x+n-1} \log p_x\right)$$

und

$$s = \frac{\sum_{(x)} E_x - \sum_{(x)} \Theta_x}{\sum_{(x)} E_x\, g^{c^x(c-1)}}$$

dargestellt; hierbei wird mit E_x die Zahl der beobachteten Personen des Alters x, mit Θ_x die Zahl der zwischen den Altersjahren x und $x + 1$ Gestorbenen bezeichnet. Ot.

Weitere Literatur.

O. Kammer. Inversionen bei Permutationen mit Wiederholung. Pr. Alsfeld 21 S. 4°.

H. S. J. Curzon. Permutations and combinations made easy. London: Simpkin. 12mo (Normal tutorial series).

W. W. Rouse Ball. Mathematical recreations and essays. Fourth edition. London: Macmillan and Co. XVI u. 402 S. [Nature **72**, 364-365.]

M. Cashmore. Chess magic squares. Brit. Ass. Rep. South Africa, 350.

G. de Massas. A propos du calcul des probabilités. Rev. scient. (5) **3**, 788-789.

F. P. Cantelli. Sui fondamenti del calcolo della probabilità. Il Pitagora **12**, 21-25, 35-39.

A. Loiselle et H. Piéron. La question des séries pour le calcul des probabilités. Rev. scient. (5) **3**, 536-537.

H. Piéron. Les contradictions du calcul des probabilités. Rev. scient. (5) **3**, 662-663.

H. Poincaré. Rapport sur un Mémoire de M. Bachelier intitulé: „Les probabilités continues“. C. R. **141**, 647-648.

C. Janet. La probabilité à la roulette. Rev. scient. (5) **3**, 632-633.

G. Fontené. Problème de l'héritage. Bull. sc. math. élém. **10**, 130-132.

L. Nina. La teoria del lotto di stato. Torino. 352 S. 8°.

L. Gérard. Théorie des erreurs. Bull. sc. math. élém. **10**, 291-294.

V. Gama. Determinación del error probable de un lado de un polígono en función del error probable angular cuando el polígono ha sido ajustado. Mem. Soc. cient. „Antonio Alzate“ **22**, 95-118.

Fr. Rogel. Note über den Ausgleich von Streckenmessungen. Prag. Ber. 1905, Nr. 30, 2 S.

K. Nitz. Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Diss. Königsberg. 32 S. 8°.

Biometrica. Journal for the statistical study of biological problems. Edited in consultation with F. Galton by W. F. R. Weldon, K. Pearson, and C. B. Davenport. Vol. **4**, Parts 1, 2. Cambridge, 232 S. Inhalt:

E. H. J. Schuster. Results of crossing grey (house) mice with albinos.

R. Pearl. Biometrical studies of man I: Variation and correlation in brain-weight.

R. J. Gladstone. Study of the relations of the brain to the size of the head.

J. Blakeman. Biometric constants of English brain-weights.

K. Pearson. „Das Fehlergesetz und seine Verallgemeinerungen durch Fechner und Pearson“, a rejoinder.

R. Pearl and W. N. Fuller. Variation and correlation in the earthworm.

K. Pearson. Mathematical contributions to the theory of evolution. Parts 13 and 14.

13. On the theory of contingency and its relation to association and normal correlation.

14. On the general theory of skew correlation and non linear regression.

London: Draper's research memoirs. Biometric series. Nrs. 1-2, 1904/5.

E. Colardeau. Approximations dans les mesures physiques et dans les calculs numériques qui s'y rattachent. Paris 8°.

R. Bergemann. Reaktionen auf Schalleindrücke nach der Methode der Häufigkeitskurven bearbeitet. Diss. Leipzig. 42 S. 8°.

E. Macquart. Examen critique des divers procédés de répartition proportionnelle en matière électorale. Rev. scient. (5) **3**, 545-554, 584-591.

A. Manes. Versicherungswesen. Leipzig: B. G. Teubner. XII u. 468 S.

J. Schellwien. Die Erlebensfallversicherung. Halle. IV u. 87 S. 8°.

M. M. DAWSON. Practical lessons in actuarial science. Elementary textbook. Second revised edition. Two volumes. New York.

C. L. LANDRÉ. Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. Jena. XXIV u. 506 S. 8°.

LOWENTHAL. Essai sur les rapports entre la natalité et la mortalité. Rev. scient. (5) **3**, 1-10, 38-46.

L. QUERTON. Assurance et assistance mutuelles au point de vue médical. Bruxelles. IV u. 145 S. kl. 8°.

R. POUSSIN. Sur l'application des procédés graphiques aux calculs d'assurance. Paris. 126 S. 8°.

H. CUNYNGHAME. A geometrical political economy. Oxford: Clarendon Press. 128 S. (1904). [Nature **73**, 386.]

H. DOUGHARTY. Annuities and sinking funds. Simple and compound interest. Tables and notes. London. 8°.

T. K. STUBBINS. Tables of the present value of annuities payable by monthly, quarterly and half-yearly instalments at from 3 to 8 per cent by intervals of $\frac{1}{2}$ per cent. 2nd edition. London. 8°.

C. S. ORTU. Introduzione ad un corso di matematica finanziario. Genova: Costello. 42 S. 4°.

J. PATOU. Petit traité mathématique et pratique des opérations commerciales et financières. Vol. II: Éléments d'algèbre financière. Paris: Vuibert et Nony. 424 S. 8°. (Bibliothèque d'enseignement technique.)

F. VINTÉJOUX. Nouvelles tables d'intérêts composés et d'annuités et précis de la théorie et pratique des opérations financières à long terme, particulièrement des emprunts. Paris. XII u. 226 S.

C. E. SPRAGUE. The accountancy of investment. Including a treatise on compound interest, annuities, amortisation and the valuation of securities. New York. 83 S. 8°.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Kapitel 1.

Allgemeines.

E. B. van Vleck. Selected topics in the theory of divergent series and of continued fractions. The Boston Colloquium, Sept. 2-5, 1903, 75-187.

Von den sechs Vorlesungen über das im Titel angegebene Thema handeln die vier ersten als „erster Teil" über divergente Reihen, die beiden letzten als „zweiter Teil" über algebraische Kettenbrüche. Um den Inhalt dieser reichhaltigen Vorträge, die naturgemäß hauptsächlich referierend gehalten sind, aber auch die persönliche Auffassung des Redners wiedergeben, den Absichten des Verf. entsprechend vorzuführen, schließen wir uns an die Einleitungen der beiden Teile genau an.

Das durch jede divergente Reihe gestellte Problem ist wesentlich funktionentheoretisch. Wenn eine divergente Reihe von Zahlen gegeben wird, ist ihre Genesis gewöhnlich in einer bekannten oder unbekannten Funktion zu finden. Der Wert, den wir mit ihr verknüpfen, wird als die Grenze eines passend gewählten konvergenten Prozesses definiert, und die Elemente des Prozesses sind die Glieder der gegebenen Reihe, oder sie sind Funktionen, welche diese Glieder zu einzelnen Grenzen haben. Sehr gewöhnlich ist die gegebene Zahlenreihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ mit der Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ verknüpft, und die Frage kommt somit auf die der Bestimmung der Bedingungen oder Beschränkungen zurück, unter denen der letzteren Reihe ein Wert beigelegt werden darf, wenn x sich der Einheit nähert. Das ursprüngliche Thema ist also die divergente Potenzreihe, und auf diese soll die Aufmerksamkeit ausschließlich beschränkt bleiben.

Bei einer umfassenden Betrachtung zeigt dieses Thema wenigstens vier verschiedene Ansichten. Gegeben ist in jedem Falle eine Potenz-

reihe mit einem Konvergenzradius, der nicht unendlich ist. Man nehme an, der Radius sei größer als Null und der Konvergenzkreis nicht eine natürliche Begrenzung. Dann definiert die Reihe innerhalb dieses Kreises eine analytische Funktion. In dem Bereiche der Divergenz außerhalb des Kreises kann der Wert der Funktion durch den üblichen Prozeß der analytischen Fortsetzung erhalten werden. Theoretisch ist der Weg der Bestimmung der Funktion befriedigend; Poincaré hat nämlich gezeigt, daß die Funktion überall in dem Bereiche, in welchem sie regulär ist, vermittelst einer abzählbaren Folge von Elementen $P_n(x - a_n)$ erhalten werden kann. Bei einer praktischen Anwendung des Weierstraßschen Verfahrens ist jedoch die Arbeit eine so übermäßige, daß das Verfahren fast wertlos wird, falls man die Zwecke der Definition ausnimmt. Deshalb bemüht man sich gegenwärtig um die Auffindung eines durchführbaren Ersatzes. In dieser Verbindung kann auf die Forschungen von Borel und Mittag-Leffler Bezug genommen werden. Da nach Ansicht des Redners die Leistungen des ersteren sowohl anregend als auch praktisch sind, wurden sie der zweiten Vorlesung zugrunde gelegt.

Eine zweite Ansicht des Themas, die mit der Fortsetzung der durch die Potenzreihe definierten Funktion innig zusammenhängt, ist die Bestimmung der Lage und des Charakters ihrer Singularitäten in dem Bereiche der Divergenz. Dieser Gegenstand wird in der dritten Vorlesung abgehandelt.

Wenn der Konvergenzkreis eine natürliche Grenzlinie ist, scheint es trotz der früheren Meinung Poincarés, die zum Gegenteil neigte, nicht außerhalb der Möglichkeit zu liegen, wenigstens innerhalb einer gewissen Klasse von Fällen eine geeignete, obschon eine nicht-analytische Art zur Fortsetzung der Funktion über die Grenzlinie hinweg ausfindig zu machen in andere Gebiete hinein, in denen sie wiederum analytisch ist. Die Borelsche These und ihre neuerliche Fortsetzung in Acta Math. nebst einigen vortrefflichen Bemerkungen von Fabry scheinen etwa alles zu sein, was in dieser Richtung gemacht ist. Eine ganz kurze Erörterung des Gegenstandes wird in der vierten Vorlesung in Verbindung mit Reihen aus Polynomen und rationalen Brüchen gegeben.

Schließlich haben wir die Sphinx der wirklich divergenten Potenzreihe, derjenigen Reihe, welche nur für $x = 0$ konvergiert. Auf den Brennpunkt dieses interessanten Problems wird die Aufmerksamkeit in den ersten beiden Vorlesungen vorzüglich konzentriert. Bei Anwendung des Ausdrucks divergent auf Potenzreihen wird er daher auf Reihen beschränkt, die einen Konvergenzradius Null haben. Im übrigen werden zur Ergänzung und zum Ausgleich empfohlen die Schriften von Borel: „Leçons sur les séries divergentes“ (F. d. M. **32**, 248, 1901) und Hadamard: „La série de Taylor et son prolongement analytique“ (F. d. M. **32**, 412, 1901).

Die Titel der ersten vier Vorlesungen sind: 1. Asymptotische Konvergenz (77-92). 2. Die Anwendung der Integrale auf divergente Reihen (92-107). 3. Über die Bestimmung der Singularitäten der durch Potenz-

reihen definierten Funktionen (107-120). 4. Über Reihen aus Polynomen und aus rationalen Brüchen (120-134). Die beiden Vorlesungen des zweiten Teiles sind betitelt: 1. Padés Tafel der Näherungswerte und ihre Anwendungen (134-153). 2. Die Verallgemeinerung der Kettenbrüche (154-166).

Über den zweiten Teil läßt sich der Verf. auf S. 134 wie folgt aus:

„Sowohl bei einer Rückschau, als auch bei einer Ausschau erscheint als eine der anregendsten und wichtigsten Methoden zur Erforschung divergenter Potenzreihen das Instrument der algebraischen Kettenbrüche. Aus diesem Grunde habe ich es gewagt, zwei anscheinend so beziehungslose Gegenstände wie divergente Reihen und Kettenbrüche zu einem einzigen Kursus zu verkoppeln. Doch werde ich mich nicht auf die Betrachtung des letzteren Gegenstandes unter der alleinigen Bezugnahme auf die Theorie der divergenten Reihen beschränken. Meine Absicht ist vielmehr, eine Art von Bericht über den gegenwärtigen Stand der Theorie der algebraischen Kettenbrüche zu erstatten. Am Schlusse der nächsten Vorlesung ist anhangsweise eine Bibliographie der mit dem Gegenstande zusammenhängenden Schriften zugefügt; auf sie wird überall in dieser und der nächsten Vorlesung durch Nummern in eckigen Klammern verwiesen.

Unter dem Ausdruck „algebraischer" Kettenbruch wird zum Unterschied von einem Kettenbruch mit numerischen Elementen ein solcher verstanden, bei welchem die Elemente, d. h. die Teilzähler und Teilnenner, Funktionen einer einzigen Variable x oder mehrerer Variabeln sind. Obgleich der Ausdruck algebraisch mir nicht glücklich gewählt zu sein scheint, werde ich ihn nichtsdestoweniger annehmen und ihn gebrauchen, um die Klasse der hier für die Betrachtung in Aussicht genommenen Kettenbrüche anzuzeigen."

Die oben erwähnte Bibliographie erstreckt sich auf Schriften in lateinischer, italienischer, französischer, deutscher und englischer Sprache und ist sachlich geordnet. Sie umfaßt 128 Nummern. Wegen einer kurzen Übersicht über algebraische Kettenbrüche wird auf den Enzyklopädieartikel von Osgood verwiesen (II B 1, §§ 38-39; F. d. M. **33**, 390, 1902). Lp.

O. Biermann. Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. X u. 221 S. gr. 8°.

Das Buch enthält die Vorlesungen, die der Verf. mehrfach an einer technischen Hochschule vor Studenten gehalten hat, die schon einen ersten Kursus über Mathematik gehört hatten. Es soll kein erschöpfendes Handbuch sein, sondern weiteren Bedürfnissen solcher Techniker und Naturforscher dienen, die zu rechnen haben; es behandelt nämlich mathematische Näherungsmethoden, ohne viele mathematische Kenntnisse vorauszusetzen. — Inhaltsverzeichnis:

I. Abschnitt. Das Rechnen mit genauen und ungenauen Zahlen. Einleitung. Addition. Multiplikation. Division und Rangbestimmung. Fouriersche Divisionsmethode. Das Rechnen mit ungenauen Zahlen.

II. Abschnitt. Das rechnerische Prinzip in der höheren Analysis. Unendliche Reihen in der Rechnung, ihre Auswertung. Berechnung des Logarithmus. Das Restglied der Binomialreihe.

III. Abschnitt. Näherungsweise Auflösung von Gleichungen. Die graphische Darstellung einer Funktion und einer Abhängigkeit. Eine geometrische Lösungsmethode algebraischer Gleichungen. Mehrfache Nullstellen. Mehmkesche Methode. Konstruktive Bestimmung der Lösungen eines Systems von Gleichungen. Rechnerische Bestimmung der Lösungen a) eines Systems von Gleichungen, b) einer algebraischen Gleichung. Verallgemeinerung der Newtonschen Näherungsmethode. Transzendente Gleichungen.

IV. Abschnitt. Interpolations- und Differenzenrechnung. 1. Abteilung. Die ganze rationale Funktion als Interpolationsfunktion. Die einfachsten ganzen rationalen Näherungsfunktionen und ihr Restglied. Die allgemeine ganze rationale Interpolationsfunktion und ihr Restglied. Die Verwendung der ganzen Interpolationsfunktion zur Darstellung einer Abhängigkeit. Eine praktische Verwertung der Interpolationsfunktion. Berechnung ihrer Koeffizienten. Die beste Näherungsfunktion. Die Newtonsche Näherungsfunktion. Anwendungen der Interpolationsformeln. — 2. Abteilung. Differenzenrechnung. Die Differenzen verschiedener Ordnungen und die Differenzenquotienten. Bestimmung von Werten ganzer Funktionen. Die aus ungenauen Tafelwerten entspringenden Fehler. — 3. Abteilung. Die ganze Interpolationsfunktion zweier Variabeln. Die ganze rationale Funktion als Näherungsfunktion und ihr Restglied. Die verallgemeinerte Newtonsche Näherungsfunktion. Verallgemeinerung der Lagrangeschen Formel. — 4. Abteilung. Die trigonometrische Interpolationsfunktion a) in der Lagrangeschen Gestalt, b) in Gestalt einer endlichen Reihe. Harmonische Analysatoren. Die Methode von Fischer-Hinnen zur Bestimmung Fourierscher Konstanten. Bestimmung der Koeffizienten der Näherungsfunktion nach Runge. Das Restglied.

V. Abschnitt. Anwendung der Interpolationsrechnung auf die näherungsweise Quadratur und Kubatur. Die Rechteck-, Trapez-, Simpson- und Cotessche Formel. Eigenschaften der Simpsonschen Formel. Näherungsweise Kubatur. Besondere Wahl der ganzen rationalen Näherungsfunktion zum Behufe der besten Quadratur. Näherungsweise Rektifikation und Komplanation. Eine näherungsweise Lösungsmethode von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

VI. Abschnitt. Einige mathematische Instrumente. Der Rechenschieber. Eine graphische Methode zur Flächenbestimmung. Der Integraph. Amslers Polarplanimeter.

Nachtrag: Der Grundgedanke der Ausgleichsrechnung. — Sachregister. — Namenregister.

Die Darstellung ist gut, das Buch wird denjenigen, für die es bestimmt ist, willkommen sein. Wünschenswert wäre nach Ansicht des Referenten eine Vermehrung der Beispiele. Wz.

G. Kowalewski. Über gewisse Scharen unendlicher Reihen und eine Verallgemeinerung des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz. Leipz. Ber. **57**, 154-160.

Die Reihen einer Schar sollen gleichmäßig konvergent heißen, wenn es zu jedem positiven ε einen Index ν gibt derart, daß bei allen Reihen der Schar $|u_{\nu+1}+u_{\nu+2}+\cdots+u_{\nu+p}|<\varepsilon\ (p=1,2,3,\ldots)$.

Ist die reelle Funktion $f(x)$ in dem endlichen oder unendlichen Intervall (a,b) von beschränkter Variation (d. h. gibt es eine Zahl K derart, daß stets $|f(a)-f(a_1)|+|f(a_1)-f(a_2)|+\cdots+|f(a_p)-f(b)|<K$ ist, wie und in welcher Anzahl man auch die Werte $a_1<a_2<\cdots<a_p$ aus (a,b) herausgreifen mag) und ist $A_0+A_1+A_2+\cdots$ eine konvergente Reihe reeller Glieder, so erhält man eine Schar gleichmäßig konvergenter Reihen, wenn man jeder monotonen Folge $x_0\leqq x_1\leqq x_2\leqq\cdots$ aus (a,b) die Reihe $A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+\cdots$ zuordnet.

Dieser Satz ist anwendbar auf die Funktion $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$, $f(0)=1$, $f(\infty)=0$, die Funktion $\Phi(h)=A_0\,f(0)+A_1\,f(h)+A_2\,f(2h)+\cdots$ $(x_0=0, x_1=h, x_2=2h, \ldots, x_n=nh, \ldots, h>0)$ ist im Intervall $(0,\infty)$ gleichmäßig konvergent, daher ist

$$\sum_0^\infty A_n=\lim_{h=0}\left\{A_0+A_1\left(\frac{\sin h}{h}\right)+A_2\left(\frac{\sin 2h}{2h}\right)^2+\cdots\right\}$$

Untersuchung von $\Phi(h)$ für ein gegen Null konvergierendes h, wenn statt der Voraussetzung, daß $A_0+A_1+A_2+\cdots$ konvergiert, angenommen wird, daß die Summen $S_n=A_0+A_1+\cdots+A_n\,(n=0,1,2,\ldots)$ zwischen endlichen Grenzen liegen. Wz.

G. D. Birkhoff. A theorem concerning uniform convergence. Annals of Math. (2) **6**, 90-92.

Wenn die Reihe $u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ im Intervall $a\leqq x\leqq b$ gleichmäßig konvergiert, wie auch ihre Glieder geordnet werden mögen, so ist auch die Reihe ihrer absoluten Beträge $|u_1(x)|+|u_2(x)|+\cdots$ in demselben Intervall gleichmäßig konvergent. Wz.

J. A. Gmeiner. Über die disjunktiven Konvergenz- und Divergenzkriterien zweiter Art für unendliche Reihen mit positiven Gliedern. Monatsh. f. Math. **16**, 113-124.

Die positiven Zahlen $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, ..., $\varphi(n)$, ... seien so gewählt, daß die unendliche Reihe $\sum 1/\varphi(n)$ divergiert, $\sum a_n$ sei eine unendliche Reihe positiver Glieder, es sei $q_n = 1 : q'_n = a_{n+k+1} : a_{n+k}$, $\overline{\lim} f(n)$ bedeute „obere und untere Unbestimmtheitsgrenze von $f(n)$ für $n = \infty$“, dann gilt:

Kriterium A: Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert oder divergiert, je nachdem $\overline{\underline{\lim}} \{\varphi(n) q'_n - \varphi(n+1)\} > 0$ oder < 0 ist.

Kriterium B: Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert oder divergiert, je nachdem $\overline{\underline{\lim}} \{\varphi(n) - q_n \varphi(n+1)\} > 0$ oder < 0 ist.

Die Kriterien A und B sind, wie an Beispielen gezeigt wird, im allgemeinen nicht äquivalent (äquivalent heißen zwei Kriterien, wenn sie, auf irgend eine Reihe angewandt, entweder zugleich wirksam sind oder zugleich versagen), sie sind aber äquivalent, wenn $\varphi(n)$ noch den Bedingungen $\lim \varphi(n) = +\infty$ und $\lim \varphi(n+1)/\varphi(n) = 1$ für $n = \infty$ genügt, z. B. wenn $\varphi(n)$ eine der Funktionen n, $n \log n$, $n \log n \log_2 n$, ... $n \log n \log_2 n \ldots \log_r n$ ist. — Die logarithmischen Kriterien von der Form A und B sind einander vollständig äquivalent. Wz.

P. Lévy. Sur les séries semi-convergentes. Nouv. Ann. (4) 5, 506-511.

Die Summe einer semi-konvergenten Reihe komplexer Glieder kann unendlich viele Werte annehmen, wenn die Reihenfolge geändert wird. Kann sie einen beliebigen Wert annehmen? — Unter Umständen ist das der Fall.

In der Reihe $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ konvergiere u_n für $n = \infty$ gegen Null, u_n werde durch eine Strecke OA_n dargestellt, die in a_n einen um O mit einem willkürlichen konstanten Radius beschriebenen Kreis schneidet, a_n liege auf derselben Seite von O wie A_n. Es ist möglich, daß die Werte von n, für die a_n im Innern eines Bogens bc des Kreises liegt, in unendlicher Anzahl vorhanden sind, und daß die absoluten Beträge der entsprechenden Glieder eine unendliche Summe haben. Ist diese doppelte Bedingung nicht erfüllt, so hat der Rang dieser Glieder keinen Einfluß auf die Summe der Reihe; ist sie erfüllt, so existiert auf bc sicher ein solcher Punkt, für den jeder beliebig kleine Bogen $b'c'$, der in seinem Innern a enthält, dieselbe Eigenschaft hat wie bc; ist die gegebene Reihe nicht absolut konvergent, so gibt es wenigstens einen solchen Punkt auf dem Kreise. Dann heißt a ein Unbestimmtheitspunkt der Reihe $u_1 + u_2 + \cdots$ Je nachdem diese Eigenschaft ac' oder ab' zukommt, heißt a ein Unbestimmtheitspunkt der Seite des Bogens ac oder ab. Man zerlege die Geraden OA_n, für welche a_n im Innern von ab' liegt, in zwei Komponenten der Richtung Oa und der dazu senkrechten Richtung Oa_1; wenn dann die Komponenten der Richtung Oa_1 eine unendliche Summe haben, wie klein auch ab' ist, so heißt a von der ersten Art der Seite des Bogens ab, wenn nicht, so von der zweiten Art. Alle Unbestimmtheitspunkte der Reihe $u_1 + u_2 + \cdots$ bilden auf dem Kreise eine Menge E; wenn eine unendliche Anzahl von Punkten dieser Menge

zur Grenze einen Punkt a hat und sich auf derselben Seite dieses Punktes befindet, so ist für diese Seite a ein Unbestimmtheitspunkt erster Art. Man kann die Menge E willkürlich wählen und ihre Punkte der Bedingung unterwerfen, auf der einen oder der anderen Seite von der ersten oder der zweiten Art zu sein; es wird immer eine Reihe geben, die diesen Bedingungen genügt. Wz.

A. Brown. On the convergence of a reversed power series. Brit. Ass. Rep. South Africa, 318-321.

„Die Umkehrung der Reihe $y = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$ ist konvergent für alle Werte von y, für welche

$$|y| < \sqrt{(\lambda \beta_1 + 2\lambda^n \beta_n)^2 + \lambda^{2n} \beta_n^2} - (\lambda\beta_1 + 2\lambda^n \beta_n),$$

wo λ eine beliebige Größe ist und $\lambda^n \beta_n$ die größte des Systems $|\lambda b_1|, |\lambda^2 b_2|, |\lambda^3 b_3|$." Lp.

A. Capelli. Sulle progressioni infinite di numeri reali. Napoli Rend. (3) **11**, 80-90, 204-205.

Damit eine Reihe reeller Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nur durch die Ordnung der Glieder von einer Reihe nicht zunehmender Glieder verschieden sei, ist notwendig und hinreichend, daß in ihr nach willkürlicher Wahl eines Gliedes nur eine endliche Anzahl (oder Null) von größeren Gliedern existiert.

Wenn in einer unendlichen Reihe jedes Glied nur von einer endlichen Anzahl anderer Glieder übertroffen wird, so kann man aus ihr immer eine unendliche Reihe nicht zunehmender Glieder absondern, die ein willkürlich angegebenes Glied enthält.

Wenn eine unendliche Reihe reeller Zahlen keine unendliche, nicht zunehmende Reihe enthält, so wird sie notwendigerweise eine unendliche Reihe wachsender Glieder enthalten.

In jeder unendlichen Reihe reeller Zahlen ist eine monotone unendliche Reihe enthalten.

Nennt man diejenigen Glieder einer Reihe A singulär, die nicht einen Teil einer unendlichen, monotonen in A enthaltenen Reihe ausmachen, so ist die Anzahl der singulären Glieder in einer Reihe reeller Zahlen endlich.

Es seien $A_1, A_2, \ldots, A_h$ die singulären Glieder einer reellen Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$; nimmt man sie aus der Reihe heraus, so wird das erste Glied der übrig bleibenden Reihe einer monotonen, in der ursprünglichen enthaltenen unendlichen Reihe U angehören; wenn dies Glied auch einer wachsenden unendlichen Reihe angehört, so soll unter U diese letztere, wenn nicht, so soll unter U die nicht zunehmende verstanden werden.

Es sei $a_1', a_2', a_3', \ldots$ die durch Unterdrückung der singulären und der Glieder von U aus $a_1, a_2, a_3, \ldots$ hervorgehenden Reihe, $A_1', A_2', \ldots, A_h'$ ihre singulären Glieder. Verfährt man mit dieser Reihe ebenso wie mit

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ und wendet das Verfahren auf die neue Reihe an, usw., so erhält man monotone Reihen $U, U', U'', \ldots$, die alle in $a_1, a_2, a_3, \ldots$ enthalten (aus $a_1, a_2, a_3, \ldots$ abtrennbar) sind, ebenso wie ihre singulären Glieder $A_1, A_2, \ldots, A_k; A'_1, A'_2, \ldots, A'_k; A''_1, A''_2, \ldots, A''_k; \ldots$; die Reihe dieser letzteren ist endlich.

Jede unendliche Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von reellen Zahlen kann, wenn von einer endlichen Anzahl bestimmter Glieder abstrahiert wird, in der angegebenen Weise in eine endliche oder unendliche Folge von unendlichen monotonen Reihen $U, U', U'', \ldots$ zerlegt werden, die sämtlich in $a_1, a_2, a_3, \ldots$ enthalten sind.

Jede Reihe reeller Zahlen kann zerlegt werden in drei Arten von Reihen A, W, V, die in ihr enthalten sind und folgende Beschaffenheit haben: A ist eine endliche Reihe, die aus den singulären Gliedern der gegebenen Reihe besteht; W ist eine unendliche Reihe, die mittels sukzessiver Trennung in eine endliche oder unendliche Zahl von wachsenden unendlichen Reihen, V ist eine unendliche Reihe, die, wenn sie wirklich existiert, in nicht zunehmende unendliche Reihen zerlegt werden kann.

Jede Reihe reeller Zahlen kann, abgesehen von einer endlichen Reihe (der singulären Werte), in drei Reihen von den Typen $\overline{V}, \overline{W}, \Omega$ zerlegt werden. Die Reihen $\overline{V}$ können in lauter abnehmende Reihen zerlegt werden und enthalten keine wachsende unendliche Reihe; die Reihen $\overline{W}$ können in lauter wachsende unendliche Reihen zerlegt werden und enthalten keine abnehmende unendliche Reihe. — Die Reihen Ω können zerlegt werden in lauter wachsende wie in lauter abnehmende unendliche Reihen, sie können jedoch nicht zerlegt werden in zwei Reihen von demselben Typus wie $\overline{V}$ und $\overline{W}$. Wz.

H. Andoyer. Sur la sommation des séries. S. M. F. Bull. **33**, 36-41.

Es sei eine konvergente Reihe u_n $(n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots)$ gegeben, der Quotient $u_{n+1} : u_n$ sei in die Reihe $\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_q}{n^q} + \frac{A_{q+1}}{n^{q+1}}$ entwickelbar, wo q eine beliebige ganze positive Zahl, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$ Konstanten, A_{q+1} eine Funktion von n bedeutet, die für $n = \infty$ eine Grenze besitzt.

Setzt man $s_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_{n+1} + u_n$, $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$, so ist die Summe der Reihe $S = s_n + r_n$. Bezeichnet man durch z_n eine Funktion von n, die für $n = \infty$ die Grenze 0 hat, und setzt man $u'_n = u_n + z_{n+1} - z_n$, so ist die Reihe der Größen u'_n konvergent; setzt man $r'_n = u'_{n+1} + u'_{n+2} + \cdots$, so erhält man $r_n = z_{n+1} + r'_n$; setzt man $z_n = u_n t_n$, so erhält man

$$u'_n = u_n \left(1 - t_n + \frac{u_{n+1}}{u_n} t_{n+1}\right).$$

wo $r_n = u_{n+1} t_{n+1} + r'_n$ ist. Durch passende Wahl von t_n kann man einen angenäherten Wert von r_n zwischen leicht zu bestimmenden Grenzen und dadurch auch S_n mit einer fixierbaren Annäherung erhalten.

Für die Wahl von t_n werden die Fälle $\alpha_0 < 1$ und $\alpha_0 = 1$ unterschieden und die Beispiele $u_n = \frac{(-1)^{n-n_0} C}{n-1}$, C, n_0 konstant ($C = 1$, $n_0 = 2$, $n = 10$ liefert für $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ das Ergebnis: S_n liegt zwischen 0,69314742 und 0,69314692) und $u_n = 1 : (n-1)^2$ behandelt. Wz.

P. Boutroux. Sur les relations récurrentes convergentes. C. R. **141**, 705-708.

Mittels der rekurrenten Relation (1) $\varphi_n = F(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \ldots)$ werde eine unendliche Folge von Größen φ_n definiert, von denen eine endliche Anzahl $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ willkürlich gewählt seien. Wenn dann die φ_n gegen eine von den $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ unabhängige Grenze konvergieren, so heißt die Relation (1) konvergent, und φ ist eine Wurzel der Gleichung (2) $x = F(x, x, \ldots)$. Wenn es rekurrente Relationen gibt, deren Konvergenz für beliebige Werte der in ihr vorkommenden Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sicher ist, so werden sie als wesentlich konvergent bezeichnet. F sei eine holomorphe Funktion von $\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \ldots$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Wenn die Grenze α des Verhältnisses $(\varphi_n - \varphi)/(\varphi_{n-1} - \varphi)$ existiert, so heißt α der Konvergenzkoeffizient der Relation (1); der Grenzwert α' des Verhältnisses $\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha}\right) / \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - \frac{1}{\alpha}\right)$ heißt der zweite Konvergenzkoeffizient von (1), usw.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß bei variierenden Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die Relation (1) nicht aufhört zu konvergieren, bestehen darin, daß erstens für die Nachbarschaft der Anfangswerte von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, wofür (1) konvergiert und Konvergenzkoeffizienten verschiedener Ordnungen zuläßt, der Konvergenzkoeffizient α der Gleichung $\alpha = \varphi/\varphi_{(1)}$ genügt, wo φ die Wurzel vom kleinsten Modul der Gleichung (2) und $\varphi_{(1)}$ diejenige Wurzel von (2) bedeutet, deren Modul unmittelbar über $|\varphi|$ liegt, und daß zweitens die Wurzel φ von (2) die einzige ihres Moduls sei. Wz.

W. Fr. Meyer. Eine auf unendliche Produkte sich beziehende Fehlerabschätzungsregel. Acta Math. **30**, 93-98.

Es sei $\Pi = (1 + v_0)(1 + v_1) \ldots (1 + v_\nu) \ldots (1 + v_{\nu+p-1}) \ldots$ ein unendliches konvergentes Produkt reeller Größen, $|v_n| = u_n < 1$ für $n \geqq \nu$.

Ist Π absolut konvergent, so soll der Fehler des Produktes Π abgeschätzt werden, wenn man hinter dem Faktor $1+v_{\nu-1}$ abbricht, d. i. die Differenz $P_{\nu,p}-1$, wo $P_{\nu,p}$ das Restprodukt

$$(1+v_\nu)(1+v_{\nu+1})\ldots(1+v_{\nu+p-1})$$

bedeutet; bezeichnet man durch $R_{\nu,p}$ den Rest der u-Reihe, so ergibt sich für die Fehlerabschätzung

$$|P_{\nu,p}-1|<e^{\frac{1}{1-u}R_\nu}-1<\frac{\frac{1}{1-u}R_\nu}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{1-u}R_\nu}.$$

Ist Π bedingt konvergent, so ist es auch die Reihe der v, und die der v^2 ist konvergent; es läßt sich bei gegebenem $n=\nu$ eine feste obere (positive) Grenze ϱ_ν angeben, so daß $|R_{\nu,p}|=|v_\nu+v_{\nu+1}+\cdots+v_{\nu+p-1}|$ für jedes p unterhalb ϱ_ν bleibt; dann bleibt auch $\sum v_n^2 (n=\nu,\ldots,\nu+p-1)$ bei gegebenem ν und beliebigem p unterhalb einer festen oberen Grenze V_ν. Dann ergibt sich, da alle u_n für $n \geqq \nu$ unter einer gewissen Grenze u liegen, für die Fehlerabschätzung

$$|P_{\nu,p}-1|<e^{\varrho_\nu+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-u)^2}V_\nu}-1<\frac{\varrho_\nu+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-u)^2}V}{1-\frac{1}{2}\varrho_\nu-\frac{1}{4}\frac{1}{(1-u)^2}V_\nu}.$$

Es sei das unendliche Produkt

$$\Pi=(1+v_0)(1+v_1)\ldots(1+v_\nu)\ldots(1+v_{\nu+p-1})$$

vorgelegt, die v_i seien komplexe Größen von der Art, daß $|v_i|=u_i<1$ ist; die Reihen der $v, v^2, \ldots, v^{n-1}$ $(n>1)$ seien bedingt, die Reihe der v^n unbedingt konvergent; ν werde so groß vorausgesetzt, daß die absoluten Werte der

$$R^k_{\nu,p}=v^k_\nu+v^k_{\nu+1}+\cdots+v^k_{\nu+p-1},\; R_{\nu,p}=u^n_\nu+u^n_{\nu+1}+\cdots+u^n_{\nu+p-1}$$

unter gewisse Grenzen ϱ^k_ν, V_ν herabgedrückt werden, die mit wachsendem ν unendlich klein werden; von u_ν an seien alle $u_i \leqq u$, wo auch u mit wachsendem ν unendlich klein wird, dann gilt für das Restprodukt $P_{\nu,p}$

$$|l\,P_{\nu,p}|<\varrho^1_\nu+\frac{1}{2}\varrho^{(2)}_\nu+\frac{1}{3}\varrho^{(3)}_\nu+\ldots+\frac{1}{n-1}\varrho^{(n-1)}_\nu+\frac{1}{n}\frac{V_\nu}{1-u};$$

bezeichnet man die rechte Seite mit γ (die für $n=\infty$ den Grenzwert 0 hat), so ergibt sich für die Fehlerabschätzung die Regel:

$$|P_{\nu,p}-1|<e^\gamma-1<\frac{\gamma}{1-\frac{1}{2}\gamma}.$$

Wz.

E. L. Dodd. On iterated limits of multiple sequences. Math. Ann. **61**, 95-108.

Es handelt sich um die iterierten unteren und oberen Grenzen von mehrfachen Folgen der Ordnung $r \geqq 2$.

Eine Folge A heißt monoton, wenn $a_{\nu'_1 \nu'_2 \ldots \nu'_r} \geqq a_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_r}$ für $\nu'_1 \geqq \nu_1, \nu'_2 \geqq \nu_2, \ldots, \nu'_r \geqq \nu_r$.

I. Die Grenze und die iterierten Grenzen einer monotonen Folge existieren sämtlich (endlich oder unendlich) und sind einander gleich.

Angenommen, es sei für $\varepsilon > 0$ möglich, n_1 zu finden, so daß, wenn ν_1 willkürlich, aber größer als n_1 angenommen ist, n_2 zu finden, so daß für $\nu_2 > n_2$ ein $n_3, \ldots$ und schließlich ein n_r existiert, so daß für $\nu_r > n_r$ $a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \geqq b - \varepsilon$ ist. — Dies soll kurz ausgedrückt werden: „Unter der Bedingung C ist $a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \geqq b - \varepsilon$."

Es sei für ein $\varepsilon > 0$ und ein beliebig großes n_1 möglich, $\nu_1 > n_1$ zu finden, so daß, wenn n_2 beliebig groß genommen wird, $\nu_2 > n_2$ genommen werden kann, so daß ... schließlich für n_r $\nu_r > n_r$ genommen werden kann, so daß $a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \geqq b - \varepsilon$ ist. Kürzer: „Unter der Bedingung D ist $a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \geqq b - \varepsilon$."

Die Aussage: „Unter der Bedingung C' ist $a_{\nu_1 \ldots \nu_r} < G$" ist so zu verstehen, daß es möglich ist, $G > 0$ und $n_1, n_2, \ldots, n_r$ wie in C zu wählen. — Die Aussage: „Unter der Bedingung D' ist $a_{\nu_1 \ldots \nu_r} > G$" bedeutet, daß es möglich ist, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ wie in D zu finden.

Es sei $1 \leqq p < r$ und $i_1 \, i_2 \ldots i_p \, i_{p+1} \ldots i_r$ eine Permutation der r ganzen Zahlen $1, 2, \ldots, r$, wo immer $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ für $p > 1$ ist. In C wurde verlangt, daß $n_{i_{p+1}}$ existiert, und vorausgesetzt, daß $\nu_{i_{p+1}}$ beliebig, aber $> n_{i_{p+1}}$ gewählt werden könne; jetzt werde angenommen, daß $n_{i_{p+1}}$ beliebig groß anzunehmen sei und die Existenz von $\nu_{i_{p+1}} > n_{i_{p+1}}$ verlangt.

Eine ähnliche Änderung bei C sei für $n_{i_{p+2}}, \nu_{i_{p+2}}, \ldots, n_{i_r}, \nu_{i_r}$ zu machen. Die so erhaltene Bedingung wird Γ genannt.

II. a) Wenn unter der Bedingung C $a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \geqq b - \varepsilon$ ist, wo b endlich oder unendlich ist, so ist $\underset{\nu_1}{\underline{\lim}} \ldots \underset{\nu_r}{\underline{\lim}} a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \geqq b$.

b) Wenn unter der Bedingung D $a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \leqq b + \varepsilon$ ist, so ist $\underset{\nu_1}{\underline{\lim}} \ldots \underset{\nu_r}{\underline{\lim}} \leqq b$.

c) Wenn unter der Bedingung C $a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \leqq b + \varepsilon$ ist, so ist $\underset{\nu_1}{\overline{\lim}} \ldots \underset{\nu_r}{\overline{\lim}} \leqq b$.

d) Wenn unter der Bedingung D $a_{\nu_1 \ldots \nu_r} \geqq b - \varepsilon$ ist, so ist $\underset{\nu_1}{\overline{\lim}} \ldots \underset{\nu_r}{\overline{\lim}} \geqq b$.

III. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß $\underline{\lim}_{\nu_1} \dots \underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \dots \nu_r} = \underline{b}$, $\overline{\lim}_{\nu_1} \dots \overline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \dots \nu_r} = \overline{b}$ (endlich oder unendlich) ist, sind:

a) $\underline{b}$ endlich. Unter der Bedingung C $a_{\nu_1 \dots \nu_r} \geqq \underline{b} - \varepsilon$ und unter der Bedingung D $a_{\nu_1 \dots \nu_r} \leqq \underline{b} + \varepsilon$.

b) $\underline{b} = +\infty$. Unter der Bedingung C' $a_{\nu_1 \dots \nu_r} > G$.

c) $\underline{b} = -\infty$. Unter der Bedingung D' $a_{\nu_1 \dots \nu_r} < -G$.

d) $\overline{b}$ endlich. Unter der Bedingung C $a_{\nu_1 \dots \nu_r} \leqq \overline{b} + \varepsilon$, unter D $a_{\nu_1 \dots \nu_r} \geqq \overline{b} - \varepsilon$.

e) $\overline{b} = +\infty$. Unter der Bedingung D' $a_{\nu_1 \dots \nu_r} > G$.

f) $\overline{b} = -\infty$. Unter der Bedingung C' $a_{\nu_1 \dots \nu_r} < -G$.

IV. Die notwendigen Bedingungen dafür, daß $\lim_{\nu_1} \dots \lim_{\nu_r} = b$ (endlich oder unendlich) ist, sind für

a) b endlich. Für C $|b - a_{\nu_1 \dots \nu_r}| \leqq \varepsilon$.

b) $b = +\infty$. Für C' $a_{\nu_1 \dots \nu_r} > G$.

c) $b = -\infty$. Für C' $a_{\nu_1 \dots \nu_r} < -G$.

Wenn $\lim_{\nu_1} \dots \lim_{\nu_r}$ existiert, so sind diese Bedingungen hinreichend.

V. a) Wenn unter der Bedingung Γ

$$a_{\nu_1 \dots \nu_r} \leqq \underline{\lim}_{\nu_{i_{p+1}}} \underline{\lim}_{\nu_{i_{p+2}}} \dots \underline{\lim}_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \dots \nu_r} + \varepsilon \quad \text{ist,}$$

so ist $\underline{\lim}_{\nu_1} \dots \underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \dots \nu_r} \leqq \underline{\lim}_{\nu_{i_1}} \dots \underline{\lim}_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \dots \nu_r}$.

b) Wenn unter der Bedingung Γ $a_{\nu_1 \dots \nu_r} \geqq \overline{\lim}_{\nu_{i_{p+1}}} \dots \overline{\lim}_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \dots \nu_r} - \varepsilon$ ist, so ist $\overline{\lim}_{\nu_1} \dots \overline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \dots \nu_r} \geqq \overline{\lim}_{\nu_{i_1}} \dots \overline{\lim}_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \dots \nu_r}$.

VI. Wenn $\lim_{\nu_1} \dots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \dots \nu_r}$ und $\lim_{\nu_{i_1}} \dots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \dots \nu_r}$ existieren (endlich oder unendlich), und wenn unter der Bedingung Γ

$$\left| a_{\nu_1 \dots \nu_r} - \lim_{\nu_{i_{p+1}}} \dots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \dots \nu_r} \right| \leqq \varepsilon \quad \text{ist,}$$

so ist $\lim_{\nu_{i_1}} \dots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \dots \nu_r} = \lim_{\nu_1} \dots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \dots \nu_r}$.

VII. Wenn $\lim\limits_{\nu_{i_1}} \ldots \lim\limits_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \ldots \nu_r} = \lim\limits_{\nu_1} \ldots \lim\limits_{\nu_r} a_{\nu_1 \ldots \nu_r}$ existieren und endlich sind, so ist unter der Bedingung $C \left| a_{\nu_1 \ldots \nu_r} - \lim\limits_{\nu_{i_{p+1}}} \ldots \lim\limits_{\nu_{i_r}} \right| \leqq \varepsilon$.

Anwendungen auf dreifache Folgen und unendliche Reihen. Wz.

V. Jamet. Sur le développement de Taylor. Revue de Math. spéc. **15**, 213.

Bestimmung des Restgliedes in der Cauchyschen Form. Sk.

J. Richard. Sur un théorème d'analyse. Revue de Math. spéc. **16**, 338-339.

Beweis des Taylorschen Satzes. Sk.

R. Schumann. Potenzreihenentwicklung und Methode der kleinsten Quadrate. A. Wüllner-Festschrift. Leipzig: B. G. Teubner 15-22.

Es sei $f(x)$ eine durch ihre Eigenschaften bekannte reelle analytische Funktion des reellen Arguments x in eine Potenzreihe

$$\sum A_\lambda (x-a)^\lambda \, (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

zu entwickeln. Nimmt man die A als beliebig oder nicht genau bekannt an und bezeichnet $f(x) - \sum A_\lambda (x-a)^\lambda$ für solche Werte der A, die den wahren Werten nahe liegen, für den beliebigen Punkt x durch $v(x)$, so muß die Quadratsumme aller $v(x)$, die über sämtliche Punkte zu erstrecken ist, für welche $f(x)$ bekannt ist, ein Minimum sein; das Gewicht des Beitrages eines einzelnen Punktes sei $g(x)\,dx$, dann muß (1) $\int g(x)(v(x))^2 dx =$ Minimum sein in bezug auf die in $v(x)$ enthaltenen Parameter A. Die Bedingung (1) wird „Forderung engsten Anschlusses" genannt.

Um die A zu bestimmen, wird statt x das komplexe Argument z eingeführt. Es wird (3) $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{\lambda} A_\lambda (z-z_1)^\lambda$ gesetzt und gefordert, daß

$$(4) \qquad \delta \int\limits_{\mathfrak{K}} \left[f(z) - \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{\lambda} A_\lambda (z-z_1)^\lambda \right]^2 dz = 0$$

werde. Ist k ein beliebiger Wert von λ, so ergibt sich für A_k die Normalgleichung

$$0 = 2 \int\limits_{\mathfrak{K}} f(z)(z-z_1)^k dz - 2 \cdot 2i\pi \, A_{-k-1} \, (k = -\infty, \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots +\infty)$$

und hieraus $A_{-1} = A_{-2} = \ldots = 0$, $A_0 = f(z_1)$, $A_{+1} = f'(z_1):1!, \ldots$ $A_{+l} = f^{(l)}(z_1):l!, \ldots$, die gesuchte Entwicklung ist also die Taylorsche. Wz.

G. C. A. VALEWINK. Over asymptotische ontwikkelingen (Über asymptotische Entwickelungen). Diss. Haarlem: de Erven Loosjes 138 S. 8°.

Das erste Kapitel bietet eine Übersicht über die älteren Untersuchungen von Laplace und von Cauchy. Im zweiten wird die strengere und genauere Auffassung von Stieltjes dargelegt und wird beispielsweise die asymptotische Entwicklung des Integrallogarithmus li $(e^{\pm a})$ ausführlich behandelt. Dann folgt im dritten Kapitel eine Auseinandersetzung der Poincaréschen Untersuchungen über die bei den asymptotischen Reihen zulässigen Operationen. Die beiden letzten Kapitel handeln über Differentialgleichungen und ihre formellen Lösungen in der Gestalt von divergenten Reihen. Insbesondere findet dabei die asymptotische Darstellung der beiden Integrale der Besselschen Differentialgleichung eine eingehende Erörterung. Kl.

G. SADUN. Un criterio di convergenza della serie di Lagrange. Periodico di Mat. (3) 3, 74-76.

„Man lege dem Parameter u der Gleichung $z-u-tf(z)=0$ Werte bei, welche einer Wurzel u_0 der Gleichung $f(z)=0$ hinreichend nahe liegen; beschreibt man nun in der z-Ebene um $z=u$ einen Kreis Γ vom Radius $|u_0-u|$, und die Funktion $f(z)$ bleibt innerhalb Γ und auf der Peripherie für jene Werte endlich, ist innerhalb Γ von Null verschieden und verschwindet auf der Peripherie nur in u_0, so ist die Reihe

$$u+tf(u)+\frac{t^2}{2!}\frac{df^2(u)}{du}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}f^n(u)}{du^{n-1}}+\cdots$$

sicher konvergent für alle Werte von t innerhalb des Kreises mit dem Zentrum $t=0$ und mit dem Radius M_0, wo M_0 das Minimum des absoluten Betrages der Funktion $\frac{z-u}{f(z)}$ auf der Peripherie eines beliebigen Kreises mit dem Zentrum $z=u$ innerhalb Γ bezeichnet.“ Lp.

E. W. BARNES. The Maclaurin sum-formula. Lond. M. S. Proc. (2) 3, 253-272.

Die Maclaurinsche Summenformel für einen Parameter kann in größter Allgemeinheit in der Form

$$\sum_{n=0}^{m-1}\varphi(a+m\omega)=Y(a)+\sum_{n=0}^{l+1}\frac{S_n'(a)}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\int^{x}\varphi(x)\,dx\right]_{x=m\omega}+J_l$$

geschrieben werden, wo Y_a eine Funktion von a und den Koeffizienten der Entwicklung von $\varphi(x)$ bedeutet und $\varphi(x)$ in die Laurentsche Reihe zu entwickeln und die obere Grenze im Integral so zu wählen ist, daß das entsprechende Glied an dieser Grenze verschwindet.

Wenn $\varphi(x)$ eine (möglicherweise nicht eindeutige) Funktion ist, die keine Singularitäten außerhalb eines mit endlichem Radius um den Nullpunkt beschriebenen Kreises hat, außerhalb dessen $a, a+\omega, \ldots, a+m\omega$ und $m\omega$ liegen, so ist J_l eine Größe, deren Modul für ein großes m höchstens von der Ordnung $1 : m^{l+1}$ ist. Wenn $\varphi(x)$ eine ganze Funktion ist, deren Ordnung kleiner als 1 ist, so konvergiert J_l gegen Null, wenn l für alle (beliebig großen) Werte von m unendlich groß wird, und die Maclaurinsche Reihe ist absolut konvergent. Im allgemeinen hat die Maclaurinsche Summenformel keinen Sinn, wenn die Ordnung der ganzen Funktion $\varphi(x)$ größer oder gleich 1 ist, wenn nicht die Theorie der asymptotischen Reihen zur Auswertung der Reihen für $Y(a)$ und der ihr folgenden Reihe benutzt wird.

Die vorstehende Formel wird für mehrere Parameter verallgemeinert.

Wz.

W. P. Ermakov. Die Fouriersche Reihe. Kiew Univ. Nr. 2, (Bericht d. Phys.-math. Ges. Kiew 1904), 1-16. (Russisch.)

Der Verf. meint, der Dirichletsche Beweis der Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen durch die trigonometrischen Reihen sei zu verwickelt und passe nicht für den Unterricht an den technischen Hochschulen; deshalb hat er, überzeugt von der Wichtigkeit der trigonometrischen Reihenentwicklungen für die mathematische Behandlung der Naturerscheinungen, eine einfache Begründung der Entwicklung versucht. Doch scheint dem Ref. der Versuch mißlungen. Der Verf. nimmt drei der x-Achse parallele aufeinander folgende Strecken, sucht für sie die Reihenentwicklung, und nach näherer Prüfung wendet er das Ergebnis auf den Fall einer einzelnen Strecke an. Die Summe derartiger Reihen giebt ihm die Entwicklung für eine Folge solcher Strecken. Werden die einzelnen Strecken unendlich klein, ihre Anzahl aber unendlich groß, so wird, wie der Verf. meint, eine beliebige Kurve erhalten und also die Reihenentwicklung im allgemeinen begründet.

Si.

E. W. Hobson. On the failure of convergence of Fourier's series. Lond. M. S. Proc. (2) 3, 48-61.

Wenn für einen Wert der Veränderlichen x die Fouriersche Reihe nicht gegen den Wert $f(x)$ konvergiert, wenn dies jedoch bewirkt werden kann durch Einführung eines geeigneten Systems von Klammern, wobei die Glieder in jeder Klammer miteinander vereinigt gedacht werden, aber die Reihenfolge der Glieder nicht geändert wird, so heißt die Reihe quasikonvergent mit der Summe $f(x)$.

Ist $f(x)$ eine für das Intervall $(-\pi, \pi)$ definierte integrierbare endliche Funktion, so existiert in diesem Intervall eine Menge von Punkten L, deren Mächtigkeit derjenigen des ganzen Intervalls gleich ist, so daß in jedem Punkte von L die Fouriersche Reihe entweder gegen

$f(x)$ konvergiert oder quasi-konvergent ist mit der Summe $f(x)$. Die Komplementarmenge hat die Mächtigkeit 0 und enthält alle Punkte, in denen die Reihe divergent ist oder gegen einen von $f(x)$ verschiedenen Wert konvergiert oder oszilliert, ohne quasi-konvergent zu sein.

Die Menge L ist im Intervall überall dicht und hat die Kardinalzahl des Kontinuums. Die Komplementarmenge kann überall dicht sein oder nicht.

Die Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ können so gewählt werden, daß die stetige Funktion $\sum_1^{\infty} c_n f(x, \xi_n)$ so beschaffen ist, daß die Fouriersche Reihe nicht gegen den Wert der Funktion konvergiert, und zwar für jeden Punkt einer überall dichten Menge von Punkten $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Wz.

H. Lebesgue. Recherches sur la convergence des séries de Fourier. Math. Ann. **61**, 251-280.

Ist $f(x)$ eine für $0 \leqq x < 2\pi$ definierte Funktion, so ist $f(x)$ durch die Bedingung $f(x+2\pi) = f(x)$ für jedes Intervall definiert; $f(x)$ besitze in dem vom Verf. in seiner These (Intégrale, longueur, aire. Annali di Mat. (3) **7**; F. d. M. **33**, 307, 1902) definierten Sinne ein Integral im Intervall $(0, 2\pi)$, dann hat $f(x)$ in jedem endlichen Intervall ein Integral.

In der zu $f(x)$ gehörenden Fourierschen Reihe

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px),$$

$$a_p = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos px dx, \; b_p = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin px dx$$

ist die Summe der $m+1$ ersten Glieder

$$S_m = \frac{1}{\pi} \int_\beta^{\beta+\pi} \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} f(x+2t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} [f(x+2t) - f(x-2t)]\, dt.$$

Die Konvergenz der Fourierschen Reihe gegen $f(x)$ hängt von der Konvergenz des Integrals J_m gegen 0 ab:

$$J_m = \pi(S_m - f(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(t)}{\sin t} \sin(2m+1)t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t) \sin(2m+1)t dt,$$

wo $\varphi(t) = \sin t\, \psi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)$ ist.

Die für die Konvergenz der Fourierschen Reihe gegen $f(x)$ geltenden Bedingungen in der Form, wie sie von Dirichlet, Lipschitz, Lipschitz-Dini, Jordan aufgestellt sind, sind in dem Ergebnis des Verf. enthalten:

Die Fouriersche Reihe konvergiert im Punkte x gegen die Funktion, wenn das Integral von $|\varphi(t)|$ für $t = 0$ die Ableitung 0 hat, und wenn die Größe $\int_\delta^a |\psi(t+\delta) - \psi(t)| dt$ $(\pi > a > 0, \delta > 0)$ mit δ gegen Null konvergiert.

Durch Anwendung auf einen Fejérschen Satz ergibt sich:

Die Fouriersche Reihe einer Funktion f ist summierbar nach dem Verfahren des arithmetischen Mittels im Punkte x und ermöglicht die Berechnung von $f(x)$, wenn für $t = 0$ die zugehörige Funktion $|\varphi(t)|$ die Ableitung ihres unbestimmten Integrals ist. Wz.

H. Lebesgue. Sur une condition de convergence des séries de Fourier. C. R. **140**, 1378-1381.

Es sei $f(x)$ eine Funktion von der Periode 2π und besitze ein Integral; es werde $\varphi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)$ gesetzt, dann gilt: Die Fouriersche Reihe der Funktion $f(x)$ wird im Punkte x konvergent sein, wenn 1) $|\varphi(t)|$ für $t = 0$ die Ableitung des zugehörigen unbestimmten Integrals ist, und wenn

$$2) \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\varphi(t)}{\sin t} - \frac{\varphi(t+\delta)}{\sin(t+\delta)} \right| dt \qquad (\delta > 0)$$

mit δ gegen Null konvergiert. Wz.

H. Lebesgue. Sur la divergence et la convergence non-uniforme des séries de Fourier. C. R. **141**, 875-877.

Es gibt stetige Funktionen, deren Fouriersche Reihen überall konvergieren, ohne überall gleichmäßig konvergent zu sein.

$f(x)$ sei eine Funktion, deren absoluter Betrag niemals M übersteigt. Wenn man von f nichts weiter weiß, so kann man für die absoluten Werte der sukzessiven Summen der Fourierschen Reihe keine obere Grenze angeben. Man kann jedoch eine solche obere Grenze angeben, wenn man weiß, daß f in dem den betreffenden Punkt umgebenden Intervall $(x-h, x+h)$ Null ist.

Um eine stetige Funktion f zu erhalten, deren Fouriersche Reihe für $x = 0$ divergiert, suche man f unter den Grenzen von stetigen Funktionen F_p von Moduln, die kleiner als 1 sind, wobei F_p die Eigen-

schaft hat, daß für $x = 0$ eine der Summen der Fourierschen Reihe p übersteigt. Man bilde eine stetige Funktion f mit einer nicht gleichmäßig konvergenten Fourierschen Reihe, indem man f in der unmittelbaren Nachbarschaft der Werte $x_1, x_2, \ldots$, die gegen eine Grenze konvergieren, so wählt, daß in x_p eine der Summen der Fourierschen Reihen von f größer als p ist. Wz.

M. Radaković. Bemerkung über die Summierung Fourierscher Reihen. Monatsh. f. Math. **16**, 321-328.

Es sei der Verlauf einer Fourierschen Reihe

$$F(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ C_\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{p} t\right) + D_\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{p} t\right) \right\}$$

in einem Periodenintervall durch einen einfachen Ausdruck $f(t)$ gegeben, so daß für $0 \leqq t \leqq 2p$ $F(t) = f(t)$ ist, dann ist der Verlauf der Reihe

$$G(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{C_\nu}{a^2 - b^2\nu^2} \sin\left(\frac{\nu\pi}{p} t\right) + \frac{D_\nu}{a^2 - b^2\nu^2} \cos\left(\frac{\nu\pi}{p} t\right) \right\}$$

in dem Periodenintervall, der etwa durch den Ausdruck $g(t)$ darstellbar ist, durch die Beziehung

$$g(t) = \frac{\pi}{abp} \int_{\alpha=0}^{\alpha=t} f(\alpha) \sin\left[\frac{a\pi}{bp}(t-\alpha)\right] d\alpha$$

$$+ \frac{\pi}{2abp \sin\left(\frac{a\pi}{b}\right)} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2p} f(\alpha) \cos\left[\frac{a\pi}{bp}(t+p-\alpha)\right] d\alpha$$

$0 \leqq t \leqq 2p$ gegeben. Man kann also die Summe der Reihe für $G(t)$ berechnen, wenn die Summe der Reihe für $F(t)$ bekannt ist. Wz.

C. Severini. Sulla serie di Fourier. Nota. Ven. Ist. Atti [(8) 7] **64**, 801-813.

Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion mit einem Werte für jeden Wert der reellen Veränderlichen x, die eine obere endliche Grenze für ihre absoluten Werte besitzt, die Periode 2π hat und integrierbar ist im Intervall $(-\pi \ldots +\pi)$. Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in einem Punkte x, in dem keine Unstetigkeit zweiter Art stattfindet, $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ mittels der Fourier-

schen Reihe darstellbar sei, die Konvergenz einer solchen Reihe oder die Möglichkeit, eine ganze positive Zahl n zu bestimmen, so daß

$$\left| \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\beta) \frac{\cos(2n+r)\beta \sin(r+1)\beta}{\sin\beta} d\beta \right| \leqq \sigma \; (r=1,2,\ldots\infty),$$

wo σ eine positive, beliebig klein gegebene Größe bedeutet. Wz.

C. Runge. Über die Zerlegung einer empirischen Funktion in Sinuswellen. Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 117-123.

Wenn 12 gleichmäßig über die Periode verteilte Ordinaten eine empirische periodische Funktion mit hinreichender Genauigkeit wiedergeben, so kann die Funktion in Sinuswellen zerlegt werden (C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen, S. 147). Bei 24 Ordinaten kann die Rechnung auf eine wiederholte Rechnung mit 12 Ordinaten zurückgeführt werden. Wz.

E. Borel. Sur l'interpolation des fonctions continues par des polynomes. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 229-232.

Wenn man eine in einem Intervalle stetige Funktion $f(x)$ durch Interpolation nach der Lagrangeschen Formel durch die Werte an q äquidistanten Punkten des Intervalls darzustellen sucht, so kann es vorkommen, daß sich diese Darstellung um so mehr von $f(x)$ entfernt, je größer q angenommen wird. Es ist jedoch möglich, eine Darstellung $\Pi_q(x) = \sum_{p=0}^{p=q} f\left(\frac{p}{q}\right) \Pi_p\, q(x)$ zu finden, so daß $\lim_{q=\infty} \Pi_q(x) = f(x)$ wird, wenn man (vorausgesetzt, daß es sich um das Intervall $0\ldots 1$ handelt) $\varphi_{pq}(x) = 0,\ qx - p - 1, - qx + p + 1,\ 0$ setzt, je nachdem x in den Intervallen $0 \ldots \frac{p-1}{q}, \frac{p-1}{q} \ldots \frac{p}{q}, \frac{p}{q} \ldots \frac{p+1}{q}, \frac{p+1}{q} \ldots 1$ liegt, und dann ein Polynom $\Pi_{pq}(x)$ so bestimmt, daß $|\varphi_{pq}(x) - \Pi_{pq}(x)| < \frac{1}{q^2}$ oder $< \frac{1}{q^3}$ im Intervalle $0\ldots 1$ wird. Diese Entwicklung läßt keine Differentiation, aber Integrationen beliebig oft zu. Aber es lassen sich durch Integration andere Polynome finden, mit deren Darstellung auch beliebig oft wiederholte Differentiation zulässig wird. P.

S. Bernstein. Sur l'interpolation. S. M. F. Bull. **33**, 33-36.

Mittels $|x|$ kann die Berechnung der für praktische Zwecke als Darstellungskurven benutzten gebrochenen Linien, die durch experimentell bestimmte Punkte gehen, auf einen analytischen Algorithmus zurückgeführt werden.

Ist $y = F(x)$ eine eindeutige und stetige Funktion von x im Intervall $(0 \ldots 1)$, so kann die gebrochene Linie $y_n = F_n(x)$ durch

$$A_0|x| + A_1\left|x - \frac{1}{n}\right| + \cdots + A_n\left|x - \frac{n}{n}\right|$$

dargestellt werden, wo

$$A_k = \frac{n}{2}\left\{F\left(\frac{k+1}{n}\right) + F\left(\frac{k-1}{n}\right) - 2F\left(\frac{k}{n}\right)\right\} (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

und

$$A_0 = \frac{1}{2}\left\{F(1) + n\,F\left(\frac{1}{n}\right) - (n-1)\,F(0)\right\},$$

$$A_n = \frac{1}{2}\left\{F(0) + n\,F\left(\frac{n-1}{n}\right) - (n-1)\,F(1)\right\} \quad \text{ist.}$$

Wenn $F(x)$ Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzt, so hat man für $n = \infty$ $A_k = \frac{1}{2}\,F''\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ und

$$A_0 = \frac{1}{2}\left\{F(1) + F(0) + F'(0)\right\},\ A_n = \frac{1}{2}\left\{F(1) + F(0) - F'(1)\right\}.$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 F''(z)\,|x - z|\,dz + \frac{1}{2}\left\{F(1) + F(0) - F'(1)\right\} + \frac{x}{2}\left\{F'(0) + F'(1)\right\}.$$

Unter Benutzung unstetiger Funktionen kann man noch einfachere Formeln erhalten. Wz.

O. Biermann. Ein Problem der Interpolationsrechnung. Monatsh. f. Math. **16**, 49-53.

Soll die ganze Funktion n-ten Grades $g_n(x)$, die an den $\nu + 1$ Stellen a_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$ dieselben Werte annimmt, wie eine Funktion $f(x)$ eine solche Form haben, daß eine ganze Funktion $(n+1)$ten Grades, die außer diesen Bedingungen noch der folgenden $g_{n+1}(a_{n+1}) = f(a_{n+1})$ genügt, in folgender Form

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) + A_{n+1}\prod_{\nu=0}^{n}(x - a_\nu)$$

darstellbar sei, wo $g_n(x) = A_0 + A_1(x - a_0) + A_2(x - a_0)(x - a_1) + \dots + A_n(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_{n-1})$ ist, so ist $A_0 = g(a_0)$,

$$A_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{g(a_\mu)}{(a_\mu - a_0)\dots/(a_\mu - a_\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n). —$$

Soll die Funktion $g(x, y)$ an den $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Stellen $a_0\,b_0, a_1\,b_0, \dots, a_n\,b_0;\ a_0\,b_1, \dots, a_{n-1}\,b_1; \dots, a_0\,b_{n-1}, a_1\,b_{n-1};\ a_0\,b_n$ die Werte $f_0, f_{10}, \dots, f_{n0}; f_{01}, f_{11}, \dots, f_{n-1,1}, \dots, f_{2n-1}, f_{1\,n+1}; f_{0n}$ annehmen, so kann sie in der Form $A_{00} + A_{10}(x - a_0) + A_{20}(x - a_0)(x - a_1) + \dots + A_{n0}(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_{n-1}) + [A_{01} + A_{11}(x - a_0) + \dots + A_{n-1\,1}(x - a_0)\dots(x - a_{n-2})](y - b_0) + [A_{02} + A_{12}(x - a_0) + \dots + A_{n-2\,2}(x - a_0)\dots(x - a_{n-3})](y - b_0)(y - b_1) + \dots + [A_{0n}](y - b_0)(y - b_1)\dots(x - b_{n-1})$ dargestellt werden, wo

$$A_{lm} = \sum_{\lambda=0}^{l} \sum_{\mu=0}^{m} \frac{f_{\lambda\mu}}{(a_\lambda - a_0)\dots/\dots(a_\lambda - a_2)(b_\mu - b_0)\dots(b_\mu - b_m)} \quad \text{ist.}$$

Wz.

Weitere Literatur.

S. Pincherle. Lezioni di analisi algebrica date nella Reale Università di Bologna e redatte per uso degli studenti. Fasc. I. Bologna: Zanichelli. 143 S. 8°.

W. N. Roseveare. On convergence of series. Math. Gazette **3**, 246-250.

H. A. Webb. On the convergence of infinite series of analytic functions. Lond. Phil. Trans. **204** A, 481-497.

G. Faber. Über die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher. Karlsruhe. 36 S. 8°.

G. Pirondini. Contributo alla teoria delle serie. Memoria. Parma: Rossi-Ubaldi. 32 S. 8°.

E. H. Pérez. Demostración de las fórmulas de Taylor y de Maclaurin para las funciones de variable real. Revista trim. de Mat. **5**, 72-75.

Kapitel 2.
Besondere Reihen.

A. Campagnuolo. **Il triangolo di Tartaglia nello sviluppo della potenza n^{esima} del trinomio.** Batt. G. **43** [(2) **12**], 290-292.

Die Koeffizienten der Entwicklung von $(a+b+c)^0, (a+b+c)^1, (a+b+c)^2, (a+b+c)^3, (a+b+c)^4, \dots$ sind bezüglich:

```
1
1 | 1  1
1 | 2  2 | 1   2  1
1 | 3  3 | 3   6  3 | 1   3   3  1
1 | 4, 4 | 6, 12, 6 | 4, 12, 12, 4 | 1, 4, 6, 4, 1
. . . . . . . . . . . . . . . . . .
```

z. B. $(a+b+c)^4 = 1\cdot a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 + 12ab^2c + 12abc^2 + 4ac^3 + 1\cdot b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + 1\cdot c^4$.

Wz.

T. Hayashi. Un théorème relatif aux valeurs moyennes. Nouv. Ann. (4) 5, 355-357.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n voneinander verschiedene positive Zahlen und P_n^r das Produkt aller Summen von r beliebigen dieser n Zahlen; solcher Summen gibt es C_n^r. Setzt man

$$\frac{(P_n^r)^{\frac{1}{C_n^r}}}{r} = N_r, \quad \text{so ist} \quad N_1 < N_2 < \cdots < N_r < N_{r+1} < \cdots < N_n.$$

Wz.

G. Candido. Alcune formule sulla serie di Fibonacci. Suppl. al Period. 8, 85.

Über die Glieder der Reihe mit dem Rekursionsgesetze

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{mit} \quad u_0 = 0,\ u_1 = 1$$

werden 11 Relationen als Übungsaufgaben zum Beweise für Studenten vorgelegt, z. B.:

$$2\,[u_n^4 + u_{n+1}^4 + u_{n+2}^4] = [u_n^2 + u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2]^2.$$

Lp.

M. Cipolla. Intorno alle differenze di 0^q e alle identità aritmetiche. Periodico di Mat. (3) 3, 13-17.

Unter 0^q wird die arithmetische Reihe q-ter Ordnung $0^q, 1^q, 2^q, 3^q, \ldots, n^q, \ldots$ verstanden, für deren r-te Differenz $\Delta^r 0^q$ die Formel gilt

$$\Delta^r 0^q = r^q - \binom{q}{1}(r-1)^{q-1} + \binom{q}{2}(r-2)^{q-2} - \cdots + (-1)^q$$

$$(r < q), \text{ aber } \Delta^q 0^q = q!,\ \Delta^r 0^q = 0\ (r > q).$$

Ist $[1, q]^r$ die Summe der Produkte der Zahlen $1, 2, \ldots, q$ zu je r Faktoren $(r \leqq q)$, so gilt die Formel

$$[1, q]^{q-r}\,\Delta^r 0^q - [1, q]^{q-r-1}\,\Delta^r 0^{r+1} + \cdots + (-1)^{q-r}\,\Delta^{q-r}\,\Delta^r 0^q.$$

Aus diesen Formeln werden unter Benutzung des Begriffes der numerischen Integration zahlreiche arithmetische Identitäten hergeleitet.

Lp.

D. André. Sur les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons régulières d'ordre quelconque. S. M. F. Bull. 33, 159-170.

Schon vor 30 Jahren hat der Verf. den Begriff der regulären Kombinationen der Ordnung a von m Elementen zu je n eingeführt (F. d. M. 8, 110, 1876). Er versteht darunter die Kombinationen von m Elementen zu je n, in denen jedes Element höchstens a-mal vorkommt. Ihre Anzahl wird mit $(m, n)_a$ bezeichnet und $(m, 0)_a = 1$ definiert.

In den Summen

$$S_m^i = \sum_\lambda (m, i + 4\lambda)_a \qquad \left(\begin{matrix} \lambda = 0, 1, 2, \cdots, \left[\frac{ma - i}{4}\right] \\ i = 0, 1, 2, 3 \end{matrix}\right)$$

hatte bereits Estanave gewisse Periodizitäten bemerkt. Wie hier bewiesen wird, kommen die Periodizitäten durch die Kongruenzen

$$S_{m+4}^i \equiv S_m^i \pmod{10}$$

zum Ausdruck, die für alle i, a und m gelten, solange m nicht kleiner als 4 wird. Lwt.

R. Vercellin. Sulla somma delle potenze simili dei primi n numeri della serie naturale. Suppl. al Period. 9, 18-21.

Elementare Herleitung dieser Formeln unter Benutzung rekurrenter Relationen. Lp.

P. A. MacMahon. On a deficient multinomial expansion. Lond. M. S. Proc. (2) 2, 478-485.

Cayley hat bewiesen: „Wenn $\{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\}^p$ die Entwicklung von $(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots)^p$ bedeutet, wofern man nur diejenigen Glieder beibehält, in welchen $a_2 + a_3 + a_4 + \cdots \ngtr p - 1$, $a_3 + a_4 + \cdots \ngtr p - 2, \ldots$ ist, so ist

$$X^n = 1 \times (X + x_1)^n - \binom{n}{1} \times \{x_1\}^1 (X + x_1 + x_2)^{n-1}$$
$$+ \binom{n}{2} \times \{x_1 + x_2\}^2 (X + x_1 + x_2 + x_3)^{n-2}$$
$$- \binom{n}{3} \times \{x_1 + x_2 + x_3\}^3 (X + x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{n-3} + \cdots \text{“}$$

Die Zahl der Glieder der Entwicklung von $\{x_1 + x_2 + x_3\}^q$, $q \geqq 3$, $a_1 \geqq 1$, $a_1 + a_2 \geqq 2$, $a_1 + a_2 + a_3 = q$, wird durch

$$\underset{\geqq}{\Omega} \frac{\frac{1}{a_1 a_2^2 a_3^3}}{(1 - a_1 a_2 a_3 x_1)(1 - a_2 a_3 x_2)(1 - a_3 x_3)}$$

dargestellt, worin das Zeichen $\underset{\geqq}{\Omega}$ bedeutet, daß in der Entwickelung alle

Glieder, die negative Potenzen der Größen α enthalten, zu beseitigen und dann diese Größen gleich Eins zu setzen sind. Der Ausdruck hat den Wert $\frac{1}{2}(q+2)(q-1)$.

Im allgemeinen Falle, d. h. für $\{x_1 + x_2 + \cdots + x_p\}^q$, $q \geqq p$ ergibt sich der Ausdruck

$$\Omega \frac{\dfrac{1}{\alpha_1 \alpha_2^2 \ldots \alpha_p^p}}{(1-\alpha_1 \ldots \alpha_p x)(1-\alpha_2 \ldots \alpha_p x) \ldots (1-\alpha_{p-1}\alpha_p x)(1-\alpha_p x)};$$

bezeichnet man ihn durch $H_{p,q}$, so ist $H_{p,q} = H_{p-1,p-1} + H_{p-1,p} + \cdots + H_{p-1,q}$. Wz.

P. Barbarin. Sur les développements en séries de sin x et cos x. Ens. math. 7, 187-189.

Die Reihen

$$U = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdots,$$

$$V = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdots$$

sind für jeden Wert von x konvergent, weil die Reihen ihrer absoluten Beträge nach dem d'Alembertschen Kriterium konvergent sind. Um zu zeigen, daß $U = \cos x$, $V = \sin x$ ist, wird gesetzt:

$$S_0 = 1, \Sigma_0 = x; S_1 = 1 - \frac{x^2}{2!}, \Sigma_1 = x - \frac{x^3}{3!}; S_2 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \Sigma_2 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}; \ldots$$

ferner

$$y_0 = S_0 - \cos x, z_0 = \Sigma_0 - \sin x; y_1 = S_1 - \cos x, z_1 = \Sigma_1 - \sin x; y_2 = S_2 - \cos x, z_2 = \Sigma_2 - \sin x; \ldots$$

Dann ist y_p die nach x genommene Ableitung von z_p, z_p diejenige von $-y_{p+1}$; für positive Werte von x gilt folgendes: y_0 ist positiv, also ist z_0 eine wachsende und positive Funktion von x, da sie für $x = 0$ verschwindet; dagegen ist y_1 eine beständig abnehmende und negative Funktion, ebenso z_1; folglich wachsen y_2 und z_2 beständig und sind positiv; y_3 und z_3 nehmen beständig ab und sind negativ. Allgemein: die Funktionen y_{2n} und z_{2n}, die für $x = 0$ verschwinden, wachsen beständig und sind positiv, während die Funktionen y_{2n+1} und z_{2n+1}, die für $x = 0$ ver-

schwinden, abnehmen und negativ sind. Daher ist für positive Werte von x

$$S_{2n} > \cos x > S_{2n+1}, \ \Sigma_{2n} > \sin x > \Sigma_{2n+1};$$
$$S_{2n+2} > \cos x > S_{2n+1}, \ \Sigma_{2n+2} > \sin x > \Sigma_{2n+1};$$

also hat man für $n = \infty$: $\cos x = U$, $\sin x = V$.

Mittels $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$ ergibt sich die Richtigkeit dieser Gleichungen auch für negative Werte von x. Wz.

N. Nielsen. Sur les fonctions trigonométriques. Ens. math. 7, 292-300.

Um die Koeffizienten der Formel

$$\cos(n\varphi) = a_{n0}(\cos\varphi)^n + a_{n2}(\cos\varphi)^{n-2} + a_{n4}(\cos\varphi)^{n-4} + \cdots$$

zu bestimmen, wird die Entwicklung von

$$1/(1-q) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n+1}/(1-q)$$

für q gleich $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ und $2x\cos\varphi - x^2$ benutzt; es ergibt sich dadurch

$$a_{n0} = 2^{n-1},\ a_{n2r} = (-1)^r \frac{2n-r}{r}\binom{n-r-1}{r-1}2^{n-2r-1}.$$

Im Anschluß daran werden die Formeln

$$\sin x = 2^{n-1}\sin\frac{x}{\pi}\sin\frac{x+\pi}{n}\sin\frac{x+2\pi}{n}\cdots\sin\frac{x+(n-1)\pi}{n},$$

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

und die Diskriminante Δ_n der Gleichung $a_{n0}x^n + a_{n2}x^{n-2} + a_{n4}x^{n-4} + \cdots = \omega$ abgeleitet; es ergibt sich Δ_n gleich

$$\frac{n^n(1-\omega^2)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{(n-1)^2}} \text{ oder } \frac{n^n(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}-1}(1+\omega)}{2^{(n-1)^2}},$$ je nachdem n ungerade oder gerade ist. Wz.

W. Ermakoff. Restes de quelques séries usuelles. Ens. math. 7, 437-442.

Mittels des Rolleschen Satzes wird für die Funktionen e^x, $(1+x)^m$, $\log(1+x)$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\sin x$ und die hypergeometrische Reihe der Rest bestimmt.

Es wird z. B. $e^x = 1 + x + x^2/2! + \cdots + x^{n-1}/(n-1)! + qx^n/(n-1)!$ gesetzt; dann hat die Funktion

$$F(z) = e^{-z}\left\{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{qz^n}{(n-1)!}\right\} - 1$$

die Wurzel $z = 0$ und $z = x$; zwischen 0 und x muß daher nach dem Rolleschen Satze eine Wurzel von $F'(z)$

$$F'(z) = \frac{e^{-z} z^{n-1}(qn - qz - 1)}{(n-1)!}$$

liegen, sie sei ϑx, wo $0 < \vartheta < 1$ ist; man hat daher $qn - q\vartheta x - 1 = 0$, also $q = 1/(n - \vartheta x)$, daher ist der Rest der Reihe gleich

$$x^n/(n-1)!\,(n - \vartheta x).$$

Der Rest für die andern vorher genannten Funktionen ist bzw.

$$\binom{m}{n-1}\frac{x^n}{n + (n-m)\vartheta x}, \mp x^n/n(1 + \vartheta x),$$

$$\mp x^{2n+1}/(2n+1)(1 + \vartheta x^2), \mp x^{2n+1}/(2n-1)!\,[2n(2n+1) + \vartheta x^2],$$

$$\frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\cdots(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{(n-1)!\,\gamma\cdot(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-2)} \cdot \frac{x^n}{n(\gamma+n-1) - (\alpha+n)(\beta+n)\vartheta x}.$$

Wz.

J. W. L. Glaisher. On the series for $\frac{1}{\pi}$ and $\frac{1}{\pi^2}$. Quart. J. 37, 173-198.

Mittels der Entwickelungen von $2K/\pi$, $2E/\pi$, $2J/\pi$, $2G/\pi$ nach Potenzen von k^2 werden Reihen hergeleitet, z. B.

$$\frac{32}{3675}\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot8} + \frac{1^2}{2^2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10} + \frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12} + \cdots,$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1^2}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2} + \cdots,$$

$$\frac{16}{9}\frac{1}{\pi} = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2} + \frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2} + \cdots,$$

$$\frac{128}{225}\frac{1}{\pi} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2} + \cdots,$$

$$\frac{16}{9}\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\cdot4} + \frac{1^2}{2^2\cdot4^2\cdot6} + \frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8} + \cdots,$$

$$\frac{32}{75}\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2\cdot4} + \frac{1}{2^2\cdot4^2\cdot6} + \frac{1^2}{2^2\cdot4^2\cdot6\cdot8} + \frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8\cdot10} + \cdots,$$

$$\frac{256}{3675}\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2\cdot4\cdot6} + \frac{1}{2^2\cdot4\cdot6\cdot8} + \frac{1^2}{2^2\cdot4^2\cdot6\cdot8\cdot10} + \frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8\cdot10\cdot12} + \cdots,$$

$$\frac{8}{25}\frac{1}{\pi}=\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 7}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3\cdot 11}\cdot\frac{1^2}{2^2 4^2}-\frac{1}{7\cdot 15}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\cdots,$$

$$\frac{4}{\pi}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1^2}{2^2\cdot 4^2}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots,$$

$$\frac{4}{\pi}=\frac{2\cdot 1}{2}+\frac{2\cdot 1^2}{2^2\cdot 4}+\frac{2\cdot 1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}+\cdots.$$

Aus der Entwicklung von $\sqrt{1-x^2}$ und $1/\sqrt{1-x^2}$ nach den Legendreschen Funktionen $P_2(x)$, $P_4(x)$, ... ergibt sich:

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2}+\frac{5}{1\cdot 4}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{3\cdot 6}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2+\frac{13}{5\cdot 8}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2-\cdots,$$

$$\frac{2}{\pi}=1-3\left(\frac{1}{2}\right)^2+7\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2-11\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2+15\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2-\cdots,$$

$$\frac{8}{\pi}=2\cdot 3\cdot 4\left(\frac{1}{2}\right)^2-6\cdot 7\cdot 8\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2+10\cdot 11\cdot 12\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2-\cdots,$$

$$\frac{6}{\pi}=-1+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 7}{2\cdot 4}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 15}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2+\cdots.$$

Wz.

J. C. Kluyver. Over de sommen van gelijknamige machten der omgekeerden van de geheele getallen. (Über die Summen der gleich hohen inversen Potenzen der ganzen Zahlen. Handel. Nederl. Nat. en Geneesk. Congr. **10**, 181-184.

Setzt man $g_{2h+1}(t)=(-1)^{h-1}\cdot\frac{2}{(2\pi)^{2h+1}}\sum_1^\infty\frac{\sin 2\pi nt}{n^{2h+1}}$, so ist

$$(-1)^{h-1}\cdot\frac{2}{(2\pi)^{2h+1}}\,\zeta(2h+1)=\int_0^1 g_{2h+1}(t)\cos\frac{\pi t}{2}\,dt$$

$$=\int_0^1 g_{2h+1}\frac{t}{2}\cos\frac{\pi t}{2}\,dt.$$

Beide Integraldarstellungen der Summe $\zeta(2h+1)=\sum_1^\infty\frac{1}{n^{2h+1}}$ erlauben diese Summe auszudrücken mittels Glieder L_q von der Gestalt

$$L_q=\int_0^1(1-t)^{q-1}\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2}\,dt=(q-1)!\left\{\frac{1}{q!}-\sum_1^\infty\frac{B_n\pi^{2n}}{(2n+q)!}\right\}.$$

In dieser Weise findet man

$$\zeta(3)=\frac{2}{7}\pi^2\left\{\frac{1}{2}-\sum_1^\infty\frac{B_n\pi^n}{(2n+2)!}\right\}=\frac{4}{5}\pi^2\left\{\frac{1}{6}-\sum_1^\infty\frac{B_n\pi^{2n}}{(2n+3)!}\right\}.$$

Kl.

F. G. Teixeira. Sur les démonstrations de deux formules pour le calcul des nombres de Bernoulli. Ens. math. 7, 442-446.

I. Beweis der Formel

$$B_{2n-1} = (-1)^n \frac{2n}{2^{2n}-1} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \Big[i^{2n-1} - i(i-1)^{2n-1}$$
$$+ \binom{i}{2}(i-2)^{2n-1} - \binom{i}{3}(i-3)^{2n-1} + \dots \pm \binom{i}{i-1} 1^{2n-1} \Big]$$

mittels der Hermiteschen Formel $y^{(n)} = n! \sum A_i f^i(u) : i!$, worin $y = f(u)$ und u eine gegebene Funktion von x ist, und mit Hülfe der Substitution $y = u^{-1} = (1 + e^x)^{-1}$.

II. Ist $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, so ist

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum \frac{n! f^i(u) u'^{\alpha} u''^{\beta} \dots (u^{(n)})^{\lambda}}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^{\beta} (3!)^{\gamma} \dots (n!)^{\lambda}},$$

wo die Summation sich auf alle ganzzahligen positiven Lösungen (einschließlich der Null) der Gleichung $\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + n\lambda = n$ erstreckt, und wo $i = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda$ ist. Wendet man diese Formel auf

$$y = \log \frac{\pi x}{\sin \pi x} = -\log\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \dots\right)$$

an, so erhält man (für $n = 2m$)

$$B_{2m-1} = \frac{m(2m)!}{2^{2m-1}} \sum (-1)^i \frac{(i-1)!}{\beta! \delta! \omega! \dots} \left(-\frac{1}{3!}\right)^{\beta} \left(\frac{1}{5!}\right)^{\delta} \left(-\frac{1}{7!}\right)^{\omega} \dots,$$

wo die Summation sich auf alle ganzzahligen positiven Lösungen (einschließlich der Null) der Gleichung $\beta + 2\delta + \dots = m$ bezieht und $i = \beta + \delta + \dots$ ist. Wz.

S. Z. Sserebrennikov. Tafel der ersten 90 Bernoullischen Zahlen. Petersb. Abh. (8) **16**, Nr. 10, 1-8. (Russisch.)

Die Zahlen sind mit Hülfe von Rekursionsformeln berechnet und mit Hülfe der Theoreme von Staudt und von Adams kontrolliert. Die ersten 62 Zahlen stimmen mit der Tafel von Adams (J. für Math. **85**) überein. Si.

E. Humbert. Limite de $\frac{x^p}{a^x}$ $(a > 1)$ pour x infiniment grand et positif. Revue de Math. spéc. **15**, 138-139.

Für den Schulunterricht mit möglichst elementaren Mitteln abgeleitet. Sk.

J. Trautwein. Zinseszins- und Rentenrechnung. Progr. (Nr. 280) Domgymn. Halberstadt 1905. 24 S.

Die Arbeit gibt eine Erweiterung des gewöhnlich durchgenommenen Stoffes, sie ist als Leitfaden für den Schüler gedacht. — Ihr Inhalt ist:

Zinseszinsrechnung: Jährliche Zahlungstermine. Monatliche, vierteljährliche und halbjährliche Zahlungstermine.

Rentenrechnung. Jährliche Rentenzahlung. Monatliche, vierteljährliche und halbjährliche Rentenzahlung. Verwandlung einer Jahresrente in eine Monats-, Vierteljahrs- oder Halbjahrsrente. Schuldentilgung. Periodische Renten. In geometrischer Reihe steigende Renten. In geometrischer Reihe fallende Renten. In arithmetischer Reihe steigende Renten. In arithmetischer Reihe fallende Renten. Wz.

Weitere Literatur.

A. Haas. Der binomische und polynomische Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen. Nach System Kleyer bearbeitet. Teil 1: Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten. Heft I. Bremerhaven.

A. Martini Zuccagni. Il teorema binomiale di Newton e i principi dell' analisi indeterminata di primo grado, ad uso dei licei. Appendice al Tratato di algebra ad uso dei licei, dello stesso autore. Livorno: Giusti. 27 S. 8°.

M. Sasso. Formole della quarta e quinta potenza dei polinomi e loro applicazione. Avellino: Pergola. 21 S. 8°.

F. Wicke. Über ultra-Bernoullische und ultra-Eulersche Zahlen und Funktionen und deren Anwendung auf die Summation von Reihen. Diss. Jena. 68 S. 8°.

W. N. Burchby. Euler's summation of reciprocal powers and related series. Colorado College Publ. **11**, 191-208.

K. Krüse. Die unendliche geometrische Reihe. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 161-174.

Beispiel für die Behandlung auf der obersten Stufe der Mittelschule. Lp.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Kapitel 5.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Ed. Goursat. Cours d'analyse mathématique. Tome II. Théorie des fonctions analytiques. — Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. — Éléments du calcul des variations. Paris: Gauthier-Villars. VI u. 640 S. gr. 8°.

Der erste Band dieses „Cours de la Faculté des Sciences de Paris" ist in F. d. M. **33**, 292, 1902, seine englische Übersetzung in F. d. M. **35**, 293, 1904, angezeigt und gewürdigt worden. In der Vorrede zu dem jetzt zu besprechenden zweiten Bande sagt der Verf.: „Dieser Band enthält das Ende meines Lehrganges an der Fakultät der Wissenschaften. Die Theorie der analytischen Funktionen beansprucht fast die Hälfte des Bandes; das ist durch die vorwiegende Rolle dieser Funktionen in der neueren Analysis hinreichend begründet. Bei dieser Darlegung habe ich mich fast stets auf den Cauchyschen Standpunkt gestellt. Ich will damit nicht das Interesse der einzig auf den Eigenschaften der Potenzreihen beruhenden Methoden in Frage stellen; denn nach meiner Ansicht stehen die beiden Theorien nicht im Gegensatz zueinander, sondern ergänzen sich auf wunderbare Weise. Wenn der ausschließliche Gebrauch der Potenzreihen auf manche systematischen Köpfe verführerisch wirken kann, so glaube ich doch nicht, daß es irgend einem von ihnen hätte einfallen können, die so einfachen und so fruchtbaren Cauchyschen Methoden aus dem Unterricht zu verbannen.

Obgleich ich mich nicht dazu habe verpflichten wollen, die immer etwas engen Grenzen einer Prüfungsordnung nie zu überschreiten, so ist dieser Band doch in erster Linie ein Lehrbuch. In keiner Weise habe ich den Leser bis an die augenblicklichen Grenzen der Wissenschaft zu führen gesucht. Ich habe nur danach getrachtet, für einige jüngere Theorien neben den längst klassisch gewordenen Theorien Raum zu

schaffen. Mein Ziel ist erreicht, wenn ich bei dem einen oder anderen Leser den Wunsch rege gemacht habe, mehr davon zu erfahren."

In bezug auf diese bescheidene Charakterisierung des neuen Bandes braucht Ref. nur auf die oben erwähnten Anzeigen des ersten Bandes zu verweisen und kann hier wiederholen, daß der ganze Goursatsche Cours d'analyse mathématique ein glänzendes Zeugnis von der Höhe ist, auf dem der mathematische Unterricht in Frankreich sich augenblicklich befindet, sowie daß der Student, der sich den Inhalt des vorliegenden Bandes angeeignet hat, für das Studium der neueren funktionentheoretischen Originalarbeiten gut ausgerüstet ist.

Das Buch umfaßt die Kapitel XIII bis XXIII. Im XIII. Kapitel werden die elementaren Funktionen einer komplexen Variable behandelt. Nach den allgemeinen Begriffsfeststellungen über monogene Funktionen werden die Potenzreihen mit imaginären Gliedern nebst den elementaren Transzendenten untersucht. Hieran schließt sich die Erörterung der konformen Abbildung und die Betrachtung der unendlichen Produkte.

Das XIV. Kapitel ist der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen nach Cauchy gewidmet. In vier Abschnitten beschäftigt sich die Darstellung zunächst mit den zwischen imaginären Grenzen genommenen bestimmten Integralen, geht danach auf das Cauchysche Integral ein, an das die Reihen von Taylor und Laurent angeknüpft werden, und entwickelt dann die Theorie der singulären Punkte und der Residuen. Anwendungen auf verschiedene bestimmte Integrale zeigen die Fruchtbarkeit der allgemeinen Theoreme, und die Ermittelung der Perioden der bestimmten Integrale weist auf die in dem folgenden Kapitel enthaltenen Untersuchungen der höheren Transzendenten hin.

Nach diesen Vorbereitungen wird im XV. Kapitel die Theorie der eindeutigen Funktionen in Angriff genommen. Ein Abschnitt über die Weierstraßschen Primteiler und das Mittag-Lefflersche Theorem eröffnet die Auseinandersetzung. In meisterhafter Weise werden dann auf zwei Bogen die Grundlehren der Theorie der doppeltperiodischen Funktionen vorgetragen und die Hauptsätze über die Funktionen $\wp u$, ζu, σu sowie die Thetafunktionen abgeleitet. Das Umkehrungsproblem für elliptische Integrale und die Kurven vom Geschlechte 1 im letzten Abschnitte dieses Kapitels vervollständigen den knappen Abriß über die Theorie der elliptischen Transzendenten.

Das kurze XVI. Kapitel dient zum weiteren Ausbau der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen, indem die analytische Fortsetzung erörtert wird. Der Definition einer analytischen Funktion durch eines ihrer Elemente folgt die Besprechung der lakunären Räume und der Schnitte. Im Schlußkapitel (XVII) dieses Teiles des Buches werden die analytischen Funktionen mehrerer Variabeln betrachtet. Die allgemeinen Eigenschaften bilden den Gegenstand des ersten Abschnittes, die impliziten und die algebraischen Funktionen den des zweiten. Hier findet der Abelsche Satz seine Stelle.

Nunmehr beginnt auf S. 306 die Theorie der Differentialgleichungen, die auf die Kapitel XVIII bis XXII verteilt ist. Das XVIII. Kapitel

enthält dasjenige, was in einem ersten elementaren Lehrgange hierüber mitgeteilt zu werden pflegt: Die Bildung der Differentialgleichungen, die elementaren Methoden zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung und höherer Ordnungen, letztere jedoch unter Ausschluß der linearen Differentialgleichungen.

Die Existenztheoreme werden im XIX. Kapitel in den Abschnitten erledigt: 1. Grenzkalkul, 2. Methode der sukzessiven Näherungen, Cauchy-Lipschitzsche Methode, 3. erste Integrale, Multiplikator, 4. infinitesimale Transformationen.

Das dann folgende XX. Kapitel über die linearen Differentialgleichungen zeigt abermals das glänzende Geschick Goursats in der Darstellung eines großen Gebietes auf dem engen Raum von vier Bogen. Zunächst werden die allgemeinen Eigenschaften dieser Differentialgleichungen erläutert und die Fundamentalsysteme definiert. Einige besondere Differentialgleichungen, unter ihnen die mit konstanten Koeffizienten werden zur Bestätigung jener allgemeinen Lehren benutzt. Dann folgt die bedeutsame Lehre von den regulären Integralen, von der ja die neueren Arbeiten über die linearen Differentialgleichungen ausgegangen sind. Endlich werden auch noch Systeme linearer Gleichungen der Betrachtung unterworfen. Der Leser erhält somit eine erste Vorstellung von der Richtung, in der sich dieses Gebiet entwickelt hat.

Den nicht linearen Differentialgleichungen gilt es im XXI. Kapitel etwas näher zu treten. Zuerst werden einige Ausnahmefälle betrachtet, in denen die Anfangswerte der Variabeln nicht die beim Existenzbeweise angenommenen Bedingungen befriedigen. Dann werden gewisse Differentialgleichungen erster Ordnung behandelt, die als Definitionsgleichungen für transzendente Funktionen benutzt werden, und endlich werden die singulären Integrale erörtert, ihre geometrische Bedeutung erklärt.

Den partiellen Differentialgleichungen werden in dem einzigen Kapitel XXII (S. 527-589) vier Abschnitte zugebilligt: 1. lineare Gleichungen erster Ordnung, 2. totale Differentialgleichungen, 3. Gleichungen erster Ordnung mit drei Variabeln, 4. Gleichungen von höherer als der ersten Ordnung.

Das Schlußkapitel XXIII liefert auf S. 590-632 die Elemente der Variationsrechnung. Zunächst werden nach der üblichen Weise die erste und die zweite Variation abgeleitet und die Kriterien von Legendre und Jacobi entwickelt. Dann folgt in einem zweiten Abschnitt ein Abriß der Weierstraßschen Methode. Lp.

J. Pierpont. Lectures on the theory of functions of real variables. Volume I. Boston, New York, Chicago, London: Ginn & Company. XII u. 560 S. gr. 8°.

Diese „Vorlesungen über die Theorie der Funktionen reeller Variabeln" bilden ein eigentümlich anziehendes Lehrbuch der Differential- und Inte-

gralrechnung; sie erinnern den Ref. an einen Ausspruch von Weierstraß über einen jüngeren Dozenten, der in die erste Vorlesung über Differentialrechnung gleich alle feinen und exakten Begriffsbestimmungen der Funktionentheorie hineinlegen wollte, welche der Meister selbst in seinen für höhere Semester berechneten Vorträgen in bekannter Schärfe entwickelte. „Lehren Sie die jungen Leute differenzieren und integrieren und überlassen Sie die Funktionentheorie meinen späteren Vorlesungen!" Dies ist eben der natürliche Entwicklungsgang bei jedem Studenten mittlerer Begabung: zuerst wird der Mechanismus der neuen Rechnungen begriffen und eingeübt; nachher wird der streng logische Aufbau der Begriffe in allen Feinheiten erfaßt. Pierpont nimmt seine Zuhörer, wie sie nach einem ersten Lehrgange der Infinitesimalrechnung ihm gewöhnlich übergeben werden, und nun gewöhnt er sie in seinem zweiten strengeren Kursus an ein scharfes Durchdenken des zuerst leichtfüßig durcheilten neuen Ideenreiches. „Es ist notwendig, daß der Student in den Formen ε, δ von Cauchy und Weierstraß denken lerne."

„Um eine Grundlage zu gewinnen, hat der Verf. mit der Entwicklung des reellen Zahlsystems nach der Weise von Cantor und Dedekind begonnen; er fordert nur die Theorie der ganzen Zahlen. Zur Erlangung einer hinreichenden Allgemeinheit hat er anfangs die einfacheren Eigenschaften der Punktmengen benutzt, ohne aber zu versuchen, jeden Satz mit aller möglichen Allgemeinheit aufzustellen. In dieser Beziehung hat sich der Verf. eine nicht eng bemessene Freiheit gestattet. Manche Sätze sind unter sehr weiten Bedingungen aufgestellt, andere dagegen unter äußerst engen ausgesprochen. Einzelne dieser letzteren werden später wieder aufgenommen.

Zwei Hauptzüge dieses Bandes sollen hier erwähnt werden. Erstens ist die euklidische Darstellungsform gewählt worden; jeder Satz wird mit seinen zugehörigen Bedingungen aufgestellt und dann bewiesen. Zum Lesen wird dadurch das Buch zweifelsohne weniger reizvoll; allein auf der andern Seite wird seine Brauchbarkeit als Nachschlagebuch erhöht. Denn man spart auf diese Weise oft die Mühe, eine verwickelte Beweisführung zu durchfliegen, um verschiedentliche Bedingungen aufzulesen, die manchmal ohne irgendwelche ausdrückliche Erwähnung im Laufe der Schlußbildung eingeführt sind. Zweitens sind zahlreiche Beispiele ungenauer Schlußformen, die allgemein in mustergültigen Werken über Infinitesimalrechnung gefunden werden, im ersten Teil des Bandes hin und wieder eingeflochten worden. Nach des Verf. Erfahrung stachelt nichts den kritischen Hang der Studenten so mächtig an wie die Aufforderung, in einer Beweisführung, welche er auf einer früheren Stufe seiner Ausbildung als korrekt ansah, nunmehr die Mängel nachzuweisen."

Zur genaueren Übersicht lassen wir hier die Titel der 16 Kapitel des Buches folgen. I. Rationale Zahlen. II. Irrationale Zahlen. III. Potenzen und Logarithmen. IV. Die elementaren Funktionen. Begriff einer Funktion im allgemeinen. V. Erste Begriffe über Punktmengen. VI. Grenzen von Funktionen. VII. Stetigkeit und Unstetigkeit von Funktionen. VIII. Differentiation. IX. Implizite Funktionen. X. Un-

bestimmte Formen. XI. Maxima und Minima. XII. Integration. XIII. Eigentliche Integrale. XIV. Uneigentliche Integrale. Unendlicher Integrand. XV. Uneigentliche Integrale. Unendliches Integrationsintervall. XVI. Vielfache eigentliche Integrale.

Pierpont ist ein ausgezeichneter Kenner der ganzen bezüglichen Literatur. Die „Criticisms", welche er in den Text eingestreut hat, sind sehr lehrreich. Kronecker sagt in seinem Briefe an Cantor zur Einleitung der Verhandlungen in der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Bd. **1**, 24, 1891): „Es fehlt stets an den Angaben, welche Irrwege und Holzwege zu vermeiden sind." Der Verf. des vorliegenden Buches hat den Mut gehabt, vor solchen Irrwegen Warnungstafeln aufzustellen. Man sieht daraus, daß er ein einsichtiger und temperamentvoller Lehrer ist. Sein Werk wird gute Früchte tragen. Lp.

W. Fr. Meyer. Differential- und Integralrechnung. Zweiter Band: Integralrechnung. Mit 36 Figuren. Leipzig: G. J. Göschensche Verlagshandlung. XVI u. 443 S. 8° (Sammlung Schubert XI).

Schon bei der Anzeige des ersten Bandes (F. d. M. **32**, 288, 1901) wurde nachdrücklich hervorgehoben, daß Meyer bei der Abfassung seinen eigenen Weg gegangen ist, und daß daher sein Werk den Genuß gewährt, der nur bei dem Lesen originaler Schriften erzeugt wird. Auch in dem Vorworte zu dem vorliegenden zweiten Bande versichert der Verf., „daß er den ganzen Stoff selbständig durchgearbeitet und ihn sozusagen noch einmal von neuem gefunden hat; eine ziemliche Reihe von Einzelheiten dürfte sogar Anspruch auf wirkliche Neuheit machen." Wer das Buch liest, wird dies sofort bestätigen. Ein interessantes Werk ist also die Meyersche Differential- und Integralrechnung, und jeder Lehrer wird manche feine Bemerkung verwerten können. Indem sich aber der Verf. den ihm reichlich zufließenden Gedanken überlassen hat, ist er weniger darauf bedacht gewesen, den Stoff allseitig mit gleicher Sorgfalt zur Darstellung zu bringen und ihn so übersichtlich zu ordnen, daß ein Neuling leicht dasjenige herausfinden kann, was bei einer bestimmten Aufgabe nötig ist. Die begrifflichen Erörterungen sind vortrefflich; sie werden breit und verständlich vorgetragen, an bestimmten Beispielen erläutert, vielseitig beleuchtet. Die formale Seite der Rechnung ist, wie von dem Invariantentheoretiker zu erwarten war, mit Eleganz behandelt. Der Leser wird den Eindruck einer wirklich gehaltenen Vorlesung gewinnen, in der ein geistvoller und kenntnisreicher Lehrer die Schwierigkeiten des Gegenstandes überwinden lehrt. Es fehlt jedoch die rückschauende Übersicht, welche ein erfahrener Lehrer von Zeit zu Zeit gibt; es fehlt ein leicht zu überfliegendes Sachregister, das jeden gesuchten Gegenstand schnell auffinden lehrt.

Überschlägt man zuletzt den ganzen Inhalt, so ist man einerseits erfreut über die Menge von Dingen, welche zum Vortrage gekommen

sind, andererseits aber erstaunt, wie wenig von der eigentlichen Integralrechnung gegeben ist. Die Disposition ist nämlich die folgende: Abschnitt III. Grundlagen der Integralrechnung. Anwendungen. Kap. I. Grundlagen der Integralrechnung (1-73). Kap. II. Quadratur von Kurven. Kubatur von Rotationskörpern und verwandten. Rektifikation von Kurven. Komplanation von Rotationsflächen (74-157). Kap. III. Tangente und Normale einer Kurve. Differentialgleichungen erster Ordnung (158-220). Kap. IV. Krümmung von Kurven und Flächen. Einfache Differentialgleichungen zweiter Ordnung (221-279). Abschnitt IV. Systematische Integralrechnung. Kap. I. Auswertung elementarer Integrale (280-370). Kap. II. Sätze über Integrale (371-443). Diese Anordnung stimmt mit derjenigen überein, welche neuerdings vielfach gewählt wird. Die eigentlich systematische Integralrechnung wird zu Gunsten der Anwendungen hinter die letzteren gelegt. Eine Zusammendrängung der systematischen Integralrechnung auf 90 Seiten, also etwa ein Fünftel des Buches, zeigt aber, daß den ersten Kapiteln ein zu großer Raum gewährt ist. Die Kapitel III und IV des dritten Abschnittes, welche ja eigentlich zur Differentialrechnung gehören, sind nur lose durch die Darstellung mit der Integralrechnung verknüpft. Das Kapitel II desselben Abschnittes hätte durch eine größere Sparsamkeit bei der Vorführung und Durchrechnung der vielen Aufgaben bedeutend gekürzt werden können. Wie weit endlich der Verf. sich ausdehnt, möge das genauere Inhaltsverzeichnis des letzten Abschnitts zeigen. § 35. Elliptische Integrale und Funktionen (371-389). § 36. Das Additionstheorem der elliptischen, trigonometrischen, hyperbolischen Funktionen und der Exponentialfunktion (389-402). § 37. Differentiation des Integrals nach einem Parameter (403-404). § 38. Entwicklung von Integralen in Reihen (404-414). § 39. Integrale totaler Differentiale (414-422). § 40. Doppelintegrale (422-443). — Der § 37, der sich nur auf den Fall bezieht, bei welchem die Grenzen des Integrals von dem Parameter unabhängig sind, hätte eine größere Ausführlichkeit beanspruchen können. Lp.

M. Chini. Lezioni di calcolo infinitesimale (Teorie d'introduzione). Napoli: Lit. Castello 1903-04. 195 S. 8⁰ (lith.).

M. Chini. Lezioni di calcolo infinitesimale (P. I. funzioni ad una variabile). Genova: Tipo-Lit. L'Industriale. 1905. XXI u. 289 S. 8⁰ (lith.).

Inhalt des ersten Heftes: Zahlmengen, Reihen, Funktionen einer Veränderlichen, Grenzwerte, unendlich kleine und unendlich große Größen, stetige Funktionen, Funktionenreihen. Inhalt des zweiten Heftes: Einleitung (eine kurze Übersicht des im ersten Hefte behandelten Stoffes), bestimmte Integrale und deren Grundeigenschaften, Ableitungen und darauf bezügliche Sätze, Rolles Theorem, Differentiale, Integralfunktionen, primitive Funktionen und unbestimmte Integrale, Integration aller rationalen,

irrationalen und transzendenten Funktionen, höhere Ableitungen, Taylorsche Formel und deren Anwendungen, Maxima und Minima, unbestimmte Formen, Fläche und Bogenlänge einer ebenen Kurve. Vi.

E. Cesàro. Elementi di calcolo infinitesimale con numerose applicazioni geometriche. Seconda edizione, notevolmente ampliata. Napoli: Alvaro. VIII u. 526 S. 4°.

Diese neue Auflage des trefflichen Werkes des der Wissenschaft zu früh entrissenen italienischen Mathematikers bietet der ersten gegenüber (vgl. Referat in F. d. M. **30**, 262, 1899) nicht viel Neues dar: ein dem Corso di analisi algebrica des Verf. (F. d. M. **25**, 372, 1893-94) entnommenes Kapitel über Bernoullische und Eulersche Zahlen und einige Seiten über krummlinige Koordinaten, Schwerpunkte, die Weierstraßsche Funktion und die Differentialrechnung. Die größte Sorgfalt widmet der Verf. den Übungen und den analytischen und geometrischen Anwendungen, welche beträchtlich vermehrt und um sehr interessante Sachen bereichert sind (vgl. F. d. M. **35**, 294, 1904). Vi.

G. Scheffers. Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Mit 344 Fig. Leipzig: Veit & Comp. VIII u. 670 S. 8.

Das Buch ist vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik bestimmt und soll in erster Linie dem Selbststudium dienen. Es verlangt demgemäß ein Minimum von Vorkenntnissen. Das hervorragende pädagogische Talent des Verf. ist allgemein bekannt, und man konnte von ihm nur ein Buch erwarten, das seinem Zweck vollauf gerecht wird. Die Anordnung des Stoffes ist folgende: 1. Größen und Funktionen. 2. Begriff des Differentialquotienten. 3. Das Differenzieren algebraischer Ausdrücke. 4. Grundbegriffe der Integralrechnung. 5. Die logarithmischen Funktionen. 6. Die Exponentialfunktionen. 7. Die goniometrischen und zyklometrischen Funktionen. 8. Höhere Differentialquotienten. 9. Berechnung der Funktionen. 10. Methoden der Integralrechnung. 11. Funktionon von mehreren Veränderlichen. 12. Anhang (bestehend aus einigen Tafeln). — Sachregister. G. K.

L. Kiepert. Grundriß der Differential- und Integralrechnung. I. Teil: Differentialrechnung. Zehnte vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von Max Stegemann. Mit 181 Figuren im Texte. Hannover: Hellwingsche Verlagsbuchhandlung. XX u. 816 S. gr. 8°.

Die neunte Auflage dieses Werks ist in F. d. M. **32**, 290, 1901, angezeigt worden. Über ein so oft besprochenes Buch, dessen Vorzüge

allgemein bekannt sind, braucht hier nur das erwähnt zu werden, was die neue Auflage von den früheren unterscheidet. Kiepert sagt hierüber selbst in der Vorrede: „Sollen mathematische Kenntnisse einem festen Bau gleichen, welcher der Gefahr des Zusammensturzes nicht ausgesetzt ist, so muß die Herleitung der einzelnen Sätze in organischem Zusammenhange erfolgen. Auch das Verständnis wird wesentlich erleichtert, wenn beim Unterricht nach Möglichkeit an das bereits Bekannte angeknüpft wird. Diese Grundsätze hat der Verf. bei den früheren Auflagen befolgt und auch bei der vorliegenden zehnten Auflage festgehalten. Trotzdem sind Wortlaut und Inhalt der neunten Auflage an zahlreichen Stellen geändert; auch sind etliche Untersuchungen, z. B. die Herleitung der Newtonschen Interpolationsformel, hinzugefügt worden. Bei den Kurven doppelter Krümmung sind die Sätze über die Schmiegungsebene, die Hauptnormale, Binormale, den Krümmungskreis, den Kontingenzwinkel, den Torsionswinkel, den Halbmesser der zweiten Krümmung und die Schmiegungskugel hinzugetreten. Bei der Theorie der Flächen sind noch die Sätze für die Krümmung, die Hauptnormalschnitte, die Krümmungsmittelpunktsfläche und das Gaußsche Krümmungsmaß aufgenommen, und zwar erfolgte diese Aufnahme auf den ausdrücklichen Rat einiger Fachgenossen.“ Der Zuwachs der neuen Auflage gegen die vorangehende ist danach nicht unbeträchtlich; der Umfang ist um 66 Seiten gestiegen. Von der fünften Auflage, der ersten, die Kiepert bearbeitet hat (F. d. M. **19**, 251, 1887), bis zur gegenwärtigen zehnten hat ein Anwachsen dieses ersten Teils von 465 Seiten auf 816 stattgefunden. Lp.

R. Fricke. Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt. Vierte Auflage. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. XV u. 214 S., 74 Fig.

Das ursprünglich nur für technische Hochschulen geschriebene Buch wurde in der dritten Auflage so umgestaltet, daß es nunmehr allen Studierenden der Mathematik als Hülfsbuch neben den Vorlesungen und bei Wiederholungen empfohlen werden kann. Die vierte Auflage unterscheidet sich in der Anlage nicht von der dritten. Es sind nur bei einigen Definitionen und Beweisen Änderungen eingetreten. G. K.

R. Schröder. Die Anfangsgründe der Differentialrechnung und Integralrechnung. Leipzig: B. G. Teubner. VII u. 131 S. 8°, 27 Fig.

Nach den preußischen Lehrplänen von 1901 hat der Lehrer in der Prima die Freiheit, die Elemente der höheren Analysis zu behandeln, wenn er mit dem vorgeschriebenen Stoff fertig ist. „Aus der Praxis eines solchen Unterrichts“ ist vorliegendes Buch entstanden, das für Schüler höherer Lehranstalten und Fachschulen sowie zum Selbstunterricht

bestimmt ist. Der Inhalt ist folgender: 1. Begriff und Eigenschaften des Differentialquotienten, 2. Bestimmung der vieldeutigen Symbole (0/0, ∞/∞ usw.), 3. Maxima und Minima, 4. Untersuchung ebener Kurven, 5. Integralbegriff und Integrationsmethoden, 6. Quadratur ebener Flächenstücke, 7. Rektifikation ebener Kurven. 8. Anwendungen auf Mechanik.

G. K.

Fr. Junker. Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Mit 46 Figuren im Text. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig: G. J. Göschensche Verlagshandlung. 129 S. (Samml. Göschen Nr. 146).

Die erste Auflage dieses Büchleins ist in F. d. M. **33**, 296, 1902, angezeigt. Die Anzahl der Aufgaben ist von 437 auf 462 vermehrt worden, dadurch ist die Seitenzahl von 119 auf 129 gestiegen. Wir haben bei der Besprechung der ersten Auflage anerkannt, daß die Aufgaben geschickt gewählt und für die Einübung der Lehren der Differentialrechnung bei Anfängern gut geeignet sind. Gleichzeitig haben wir den Wunsch geäußert, daß die vorhandenen Fehler bei einer neuen Auflage ausgemerzt werden möchten. Der Verf. scheint zu einer genaueren Revision nicht die Zeit gewonnen zu haben. Fast allen Fehlern, die Ref. in der ersten Auflage sich angemerkt hat, ist er wieder begegnet. Wir wollen hier nennen die Nummern 257, 270, 277, 278, 362, 426, 427, 435. Aufgabe 426 ist identisch mit 430, 428 mit 431. Lp.

E. Bortolotti. Lezioni sul calcolo degli infinitesimi date nella R. Università di Modena raccolte dal Dr. A. Barbieri. Modena: Soliani. VII u. 63 S. 8°.

Von dem Begriffe der oberen und unteren Unbestimmtheitsgrenze einer Funktion ausgehend, definiert der Verf. eine Funktion als endlich, unendlich oder unendlichklein in einem Punkte, je nachdem ihre Unbestimmtheitsgrenzen beide endlich oder beide unendlich sind, oder die obere Unbestimmtheitsgrenze ihres absoluten Betrages gleich Null ist. Er entwickelt dann die gewöhnliche Theorie der Ordnungen des Unendlichen und Unendlichkleinen. Die Tatsache aber, daß es Funktionen gibt, deren Ordnung sich durch keine noch so große oder noch so kleine Zahl ausdrücken läßt, führt ihn dazu, die Definition der Gleichheit der Ordnungen folgendermaßen zu modifizieren: Setzt man $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \varphi(x)^{\varepsilon(x)}$, und ist die untere Unbestimmtheitsgrenze von $\varepsilon(x)$ für $x = \lambda_0$ gleich Null, so sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ von gleicher Ordnung (des Unendlichen oder des Unendlichkleinen). Es erweist sich ferner als angemessen, für die Ordnungen verschiedene Einheiten je nach dem Bedürfnis zu wählen. Diese Begriffe werden auf die Theorie der sogenannten unbestimmten Ausdrücke $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \text{ usw.}\right)$ angewandt. Zur Berechnung von $\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ unter

der Voraussetzung, daß $f(x)$ und $\varphi(x)$ für $x = x_0$ beide unendlich oder beide unendlichklein sind, hat man drei Methoden, von welchen die erste die Berechnung dieser Grenze auf die von:

$$\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} = \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)},$$

die zweite auf die von $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, die dritte auf die von $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ oder von $\frac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ zurückführt. Es gelten nämlich die folgenden Sätze:

a. Ist $\varphi'(x)$ zu(ab)nehmend und $\varphi(+\infty)$ unendlichgroß (klein), so folgt:

$$\limsup_{x=+\infty} \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| \leqq \limsup_{x=+\infty} \left| \frac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)} \right|,$$

$$\liminf_{x=+\infty} \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| \geqq \liminf_{x=+\infty} \left| \frac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)} \right|;$$

insbesondere ist:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=+\infty} \frac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)},$$

wenn diese letzte Grenze existiert.

b. Unter denselben Umständen hat man:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

sobald die letzte Grenze existiert.

c. Wiederum unter denselben Umständen gibt der Grenzwert von $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, wenn er überhaupt existiert, die Ordnung des Unendlichwerdens von $f(x)$ in bezug auf die von $\varphi(x)$ als Einheit an.

d. Ist:

$$\frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} = 1 + a_n, \quad \frac{\Delta f(x_n)}{\Delta \varphi(x_n)} : \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = 1 + b_n > 0,$$

wo x_n eine abzählbare Zahlenmenge darstellt und $\varphi(x_n)$ bei zunehmendem n zu(ab)nimmt und für $n = \infty$ unendlichgroß (klein) wird, bezeichnen ferner β_1, β_2 die untere und die obere Unbestimmtheitsgrenze von:

$$\frac{\lg\left(1 + \frac{a_n b_n}{1 + a_n}\right)}{\lg(1 + a_n)}$$

für $n = \infty$, und ist ε eine beliebige positive Zahl, so ist die Ordnung von $f(x_n)$ in bezug auf die von $\varphi(x_n)$ als Einheit kleiner als $1 + \beta_2 + \varepsilon$ und größer als $1 + \beta_1 - \varepsilon$; ist insbesondere $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, so ist $1 + \beta$ die Ordnung von $f(x_n)$.

Eine Folge dieser Sätze sind die Formeln:

$$\lim_{x=\infty}|F(x)|^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=\infty}\frac{F(x+1)}{F(x)},$$

$$\lim_{x=\infty}|F(x)|^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x=\infty}\frac{F'(x)}{F(x)}},$$

welche unter der Voraussetzung gelten, daß die rechts vorkommenden Grenzwerte überhaupt existieren.

Die jedem Paragraphen beigefügten zahlreichen Beispiele und Übungen sind dazu geeignet, das Verständnis der Theorie zu erleichtern und das Interesse des Lesers zu erwecken. Vi.

G. Vitali. Sugli ordini di infinito delle funzioni reali. Bologna: Gamberini e Parmeggiani. 9 S. 8°.

E. Bortolotti. Sugli ordini di infinito delle funzioni reali. Atti della Soc. dei naturalisti e matematici di Modena (4) **7**, 93-99.

Vitali will zeigen, daß es möglich ist, zu jeder reellen positiven in einem Intervall $a \dots b$ zunehmenden und für $x = b$ unendlichen Funktion eine Zahl zu bestimmen, welche das Wachstum (crescenza) der Funktion charakterisiert. Bortolotti bestreitet diese Möglichkeit. Vi.

Ch. Michel. L'énoncé exact du théorème de Rolle. Revue de Math. spéc. **16**, 337-338.

„Wenn $f(x)$ eine bestimmte Funktion ist, die für jeden Wert von x zwischen zwei Grenzen a und b, die endlich oder unendlich groß sein können, eine Ableitung besitzt, und wenn diese Funktion der Null zustrebt, falls x sowohl dem Werte a als auch dem Werte b sich unbeschränkt nähert, so gibt es mindestens einen Wert zwischen a und b, für den die Ableitung verschwindet." Sk.

V. Ramaswami. Notes on inequalities. Edinb. M. S. Proc. **23**, 89-93.

Wenn $f(x), f'(x), f''(x)$ stetig sind von $x = B$ bis $x = A > B$, und wenn $B < b < a < A$, dann ist

$$(1) \qquad f'(a) \gtrless \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \gtrless f'(b),$$

je nachdem $f''(x) \gtrless 0$ ist in dem Intervalle (B, A). Eine beträchtliche Zahl von Ungleichheiten, die zumeist, wenn nicht alle, wohl bekannt sind, wird aus (1) hergeleitet. Die Behandlung ist zwar nicht neu, regt aber durch Frische im einzelnen an. Gbs. (Lp.)

Weitere Literatur.

P. APPELL. Éléments d'analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et des physiciens. 2e édition. Paris: Gauthier-Villars. VII u. 714 S. 8°.

K. ARNDT. Grundbegriffe der höheren Mathematik für Chemiker. Berlin: Mayer u. Müller. 60 S. 8°.

W. CAIN. A brief course in the calculus. New York: Van Nostrand. X u. 280 S. 8° (Van Nostrand series of text-books).

H. S. CARSLAW. Introduction to the infinitesimal calculus. Notes for the use of science and engineering students. London: Longmans 8°.

M. CHANDRIKOW. Die Elemente der mathematischen Analysis. (Fortsetzung.) Kiew. Univ. Nr. 1-7, 9, 321-895.

A. J. M. CREFCOEUR. Cours d'analyse. Partie II: Calcul des différences et calcul des variations. Paris. 8°. (Partie I: Calcul différentiel et intégral. 1902, 336 S.)

H. DÖLP. Grundzüge und Aufgaben der Differential- u. Integralrechnung nebst Resultaten. Neu bearb. von E. Netto. 11. Aufl. Gießen: A. Töpelmann. IV u. 216 S. gr. 8°.

J. GRAHAM. Elementary treatise on the calculus. For engineering students. Third edition, revised. London: Spon. 288 S. 8°.

W. A. GRANVILLE. Elements of the differential and integral calculus. With the editorial cooperation of P. F. Smith. Boston and London: Ginn and Co. XIV u. 463 S. [Nature **72**, 26-27.]

H. H. HARRISON. Engineering mathematics simply explained. Text-book for apprentices, students, and engineers. London: Marshall. 166 S. 8°.

A. LODGE. Integral calculus for beginners. London: George Bell and Sons. XIII u. 203 S. [Nature **73**, 337.]

D. J. LUBELZA. Lecciones de cálculo infinitesimal. Vol. I: Diferencial (escalar y vectorial). Madrid: Ratés. XVI u. 128 S. 8°.

O. LÜBECK. Differentialrechnung. Zweite neu bearbeitete Auflage. Strelitz. 111 S. 8°.

J. W. MELLOR. Higher mathematics for students of chemistry and physics, with special reference to practical work. Second edition, enlarged. London: Longmans, Green and Co. XXI u. 631 S. [Nature **73**, 290-291.]

E. PICARD. Traité d'analyse. Tome II. Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. Introduction à la théorie des équations différentielles. Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann. 2e édition, revue et augmentée. Paris: Gauthier-Villars. XV u. 587 S. gr. 8°.

ROUCHÉ ET LÉVY. Analyse infinitésimale, à l'usage des ingénieurs. Tome 2. Paris: Gauthier-Villars. VII u. 648 S. 8°.

Kapitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Funktionen von Differentialen. Maxima und Minima).

L. Mina. Formole generali delle derivate successive d'una funzione, espresse mediante quelle della sua inversa. Batt. G. **43** [(2) **12**], 196-212.

Es werden drei Formeln für $\frac{d^n x}{dy^n}$ als Funktion von $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$ angegeben. Besonders elegant ist die erste, wo

$$\frac{d^n x}{dy^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}} W$$

ist und W die Wronskische Determinante der Funktionen

$$1, \frac{dy}{dx}, \frac{d\frac{y^2}{2}}{dx}, \ldots, \frac{d\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}}{dx}$$

bedeutet, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die durch

$$1!\,2!\ldots(n-1)!$$

dividierte Wronskische Determinante von

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 y^2}{dx^2}, \ldots, \frac{d^2 y^{n-1}}{dx^2}.$$

G. K.

J. Richard. Dérivée d'une série. Revue de Math. spéc. **15**, 116-117.

A. Labrousse. Sur les séries entières. Revue de Math. spéc. **15**, 117-119.

Unter sich und von dem in Godefroys Théorie élémentaire des séries wenig abweichende Beweise des Satzes: Die Ableitung einer Reihe von Funktionen ist innerhalb ihres Konvergenzbereichs dargestellt durch die Reihe der Ableitungen ihrer Glieder. Sk.

J. Richard. Sur la dérivée n^e de e^{-x^2}. Revue de Math. spéc. **16**, 363-364.

Setzt man

$$D^n(e^{-x^2}) = P_n\, e^{-x^2},$$

so ist P_n ein Polynom n-ten Grades mit lauter reellen und verschiedenen Wurzeln. Die Beweismethode entstammt den Vorlesungen Hermites über Legendresche Polynome (vgl. Tisserand, Recueil complémentaire d'exercices, Nr. 15, p. 24). Sk.

A. Bindoni. Metodo indiretto per la ricerca dei massimi e minimi di una funzione di variabile reale. Periodico di Mat. (3) 2, 226-229.

An die Spitze wird der Satz gestellt: Gegeben sei eine Funktion y der reellen Variable x; wenn die inverse Funktion x der Variable y nicht reell ist in einem Bereiche $(y_1 - \varepsilon_1, y_1)$ links von y_1 und reell in einem Bereiche $(y_1, y_1 + \varepsilon_2)$ rechts von y_1, und wenn außerdem, falls $y_1 = y(x_1)$ gesetzt wird, y im Punkte x_1 stetig ist, dann ist y_1 ein Minimum von y. Analog ein Satz für das Maximum. Hieraus werden praktische Regeln abgeleitet. Lp.

R. Grilli. Massimi e minimi d'una funzione intera di una variabile. Suppl. al Period. 8, 52-54.

Ableitung der bekannten Regeln. Lp.

E. Quitmann. Über Minimallagen in ebenen Gebieten. Diss. Münster. Borna-Leipzig: R. Noske. 45 S.

Das über ein ebenes Gebiet U erstreckte Integral

$$\iint \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\}\, dx\, dy$$

wird bekanntlich ein Minimum, wenn (x_0, y_0) mit dem Schwerpunkt von U zusammenfällt. Einer Anregung von Dehn folgend, beschäftigt sich der Verf. mit einer Verallgemeinerung hiervon. Es werden n Punkte

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

genommen, und zu jedem Punkt (x_i, y_i) wird dasjenige Teilgebiet U_i von U bestimmt, dessen Punkte näher an (x_i, y_i) als an den $n - 1$ übrigen Punkten liegen. Sodann wird gefragt, wann

$$\sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{U_i} \{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\}\, dx\, dy$$

ein Minimum ist. Als notwendige Bedingung ergibt sich, daß jeder Punkt (x_i, y_i) der Schwerpunkt von U_i sein muß, und es läßt sich zeigen, daß wirklich Minimallagen der n Punkte existieren. Eingehend behandelt wird der Fall $n = 2$. G. K.

Weitere Literatur.

C. Wargny. Reglas fundamentales de la diferenciación. Rev. de Mat. Santiago de Chile 2, 255-259, 271-279, 287-304.

L. A. Silva. Sobre un teorema de máximos y mínimos. Rev. de Mat. Santiago de Chile 2, 242-244.

F. Villareal. Maximo cuadrilátero. Rev. de Ciencias Lima 8, 226-235.

Kapitel 3.

Integralrechnung.

J. G. Leathem. Volume and surface integrals used in physics. Cambridge: University Press. VI u. 48 S. 8vo (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Nr. 1).

G. H. Hardy. The integration of functions of a single variable. Cambridge: University Press. VIII u. 53 S. 8° (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Nr. 2).

Die Cambridge University Press gibt eine Reihe von Schriften über reine Mathematik und theoretische Physik heraus, von denen hier die beiden ersten vorliegen. Diese Schriften sollen dazu beitragen, den mathematischen Unterricht in England auf einem hohen Niveau zu halten, indem sie die neuen Methoden und Resultate der fortschreitenden Wissenschaft den Lesern zugänglich machen. Nicht erschöpfende, sondern vor allem klare Darstellungen werden angestrebt. G. K.

H. Hahn. Über den Fundamentalsatz der Integralrechnung. Monatsh. f. Math. **16**, 161-166.

Der Fundamentalsatz der Integralrechnung, daß sich zwei stetige Funktionen, welche dieselbe Ableitung haben, um eine additive Konstante unterscheiden, gilt nur dann allgemein, wenn man die Werte $+\infty$ und $-\infty$ für die Ableitung ausschließt. Dieses Resultat stand bisher keineswegs fest und wird hier zum erstenmal durch ein Beispiel bewiesen.

G. K.

H. Lebesgue. Remarques sur la définition de l'intégrale. Darb. Bull. (2) **29**, 272-275.

$f(x)$ sei in (a, b) stetig. Man teile (a, b) in r gleiche Teile. $\varphi_r(x)$ sei in jedem dieser Teilintervalle linear und an den Endpunkten jedes Teilintervalls gleich $f(x)$. Ferner sei $\Phi_r(x)$ diejenige (leicht angebbare) primitive Funktion von $\varphi_r(x)$, welche für $x = a$ verschwindet. Es ist nicht schwer zu beweisen, daß $\Phi_r(x)$ für $r = \infty$ gleichmäßig einem Grenzwert $F(x)$ zustrebt, der $f(x)$ als Ableitung hat. Ebenso leicht gelingt es, zu zeigen, daß die Riemannsche Rechtecksumme dem Grenzwerte $F(b) - F(a)$ zustrebt. Der Verf. kann seine Beweise ohne die Formel $\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x + \vartheta h)$ führen. G. K.

W. H. Young. On the general theory of integration. Lond. Phil. Trans. (A) **204**, 221-252.

Unter dem etwas unbestimmten Titel verbirgt sich eine systematische Untersuchung über die Möglichkeit, die von Riemann und Darboux

aufgestellten Definitionen für die Integrale von Funktionen, die innerhalb der Integralgrenzen überall unstetig sind, zu übertragen auf diskontinuierliche Punktmengen im Cantorschen Sinn, und zwar auf abzählbare infinite Punktmengen. Mit Hülfe eines Kunstgriffes, der allerdings im letzten Grunde auf eine Beschränkung des Problems hinausläuft, gelingt die Aufstellung von entsprechend verallgemeinerten Definitionen, die auch auf mehrfach ausgedehnte Bereiche und mehrfache Integrale übertragbar sind. Es ist nicht möglich, in kurzen Worten die Resultate oder gar den Weg ihrer Gewinnung hier anzudeuten. Bemerkt soll nur werden, daß der Geltungsbereich der Definitionen sorgfältig bestimmt wird, und daß die zum Teil analogen, aber enger begrenzten Resultate von Lebesgue mit in die Darstellung verarbeitet sind. Br.

L. Schlesinger. Sur quelques points élémentaires du calcul intégral. Ens. math. 7, 356-366.

L. Schlesinger. Über zwei elementare Fragen der Integralrechnung. Math. és phys. lapok 14, 265-274. (Ungarisch.)

Bemerkungen über den Existenzbeweis des bestimmten Integrals und über die krummlinigen Integrale exakter Differentiale, speziell über diejenigen Sätze, aus denen das Theorem von Cauchy-Goursat fließt. G. K.

C. A. Laisant. Intégration des fonctions inverses. Nouv. Ann. (4) 5, 253-257.

Ist

$$y = f(x), x = \varphi(y),$$
$$F(x) = \int f(x)\,dx, \Phi(x) = \int \varphi(x)\,dx,$$

so besteht die leicht herleitbare Beziehung

$$\Phi(x) = x\varphi(x) - F(\varphi(x)),$$

eine Relation, deren gute Brauchbarkeit zur Berechnung von Integralen an einzelnen Beispielen gezeigt wird. Sie stellt das Analogon dar zur Differentiationsformel inverser Funktionen und scheint als solche wie diese der Aufnahme in Vorlesungen und Lehrbücher wert. Sk.

J. J. Bielankin Note über die Integration binomischer Differentiale. Kiew Polyt. J. 5, Heft 3, 1-4.

„Die Berechnung des (unbestimmten) Integrals in integrablen Fällen wird durch ‚passende‘ Anwendung der partiellen Integration erleichtert.“ Si.

G. MAUPIN. Note relative aux volumes des foudres ovales. Revue de Math. spéc. **16**, 361-363.

Elementares, aus der Praxis genommenes Beispiel der Integralrechnung.
Sk.

E. LAMPE. Einige Übungsaufgaben zur Integralrechnung. Verhandl. Naturforsch. Ges. Breslau $\mathbf{2}_1$, 1-7.

E. LAMPE. Einige Übungsaufgaben zur Integralrechnung. Deutsche Math. Ver. **14**, 25-33.

Verf. veröffentlicht hier einige Proben aus den Übungen, die er an der Technischen Hochschule in Charlottenburg zu seinen Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung abhält. G. K.

Weitere Literatur.

E. N. BARISIEN. Exercices de calcul intégral. Mathesis (3) **5**, 58-59, 146-147, 175-176.

G. VITALI. Sulla condizione di integrabilità delle funzioni. Boll. delle Sed. Acc. Gioenia Nr. 79, 27-30.

L. S. DE LA CAMPA. Integraciones dependientes de la rectificación de curvas. I. Rev. trim. de Mat. **5**, 131-134.

Kapitel 4.

Bestimmte Integrale.

H. BRUNN. Beziehungen des du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie. Berlin: G. Reimer. X u. 135 S. 4°.

Die Schrift behandelt ein eigenartiges Grenzgebiet, indem es Beziehungen zwischen der Reihenlehre, der Integralrechnung und der Mengenlehre zur Analysis situs der Ovale untersucht. Bei dieser wechselseitigen Durchdringung so verschiedenartiger Disziplinen ist es schwierig, den leitenden Gedankengang herauszufinden. Dies muß auch der Verfasser selbst gefühlt haben, da er in seiner, obwohl vier Quartseiten umfassenden Vorrede darauf verzichtet hat, eine Analyse seiner Untersuchungen zu geben, und sich auf die Betonung einiger Hauptmomente beschränkt, die als solche kaum verständlich sind. Es handelt sich, wie er sagt, um die verschiedenen Erscheinungsformen eines einzigen Satzes. Die einfachste dieser Formen ist das „Abelsche Lemma" für endliche Summen und reelle Größen, die bekannteste dagegen der

(von Weierstraß zuerst gefundene) „du Bois-Reymondsche Mittelwertsatz“ für bestimmte Integrale. Diese sollen zugleich auf die Theorie der Ovale angewendet werden.

Das Abelsche Lemma (J. für Math. **1**, 314) lautet in der Fassung, wie sie hier gewählt wird: „Sind $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ nicht zunehmende, positive oder auch nullwerdende Zahlen, und $A_0 \equiv a_0$, $A_1 \equiv a_0 + a_1, \ldots$, $A_n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ eine Reihe über H und unter K fallender reeller Zahlen, so fällt $\sum\limits_0^1 \varepsilon_i a_i$ über $\varepsilon_0 H$ und unter $\varepsilon_0 K$.“ Läßt man die a komplex sein, während die ε reell bleiben, so gelangt der Verfasser zu einer teilweisen Verallgemeinerung, die in geometrischer Sprache aussagt: „Liegen die Punkte A innerhalb eines beliebigen Kreises der Zahlenebene, so liegt auch der Punkt $\sum \varepsilon a$ innerhalb dieses Kreises“. Hierbei ist (ohne Schaden der Allgemeinheit) ε_0 gleich der Einheit angenommen. Es wird ein gewisses dreieckig angeordnetes Schema S von Werten konstruiert, das dem Beweise der angegebenen Verallgemeinerung zugrunde liegt.

Es fragt sich nun, wie ein Gebiet G beschaffen sein müßte, damit die Werte des Schemas S (bei komplexen a) sämtlich innerhalb G liegen. Ein solches Gebiet G muß dann jede gerade Verbindungsstrecke zweier ihm angehörigen Punkte völlig in sich enthalten, darf also mit jeder Geraden seiner Ebene höchstens ein Stück gemein haben, nach außen nirgends konkav begrenzt sein. Ein solches Gebiet heißt ein „Ovalgebiet“, seine Begrenzung ein „Oval“. Allgemein im R_n, für den die meisten Ergebnisse bei höheren komplexen Zahlen a gültig bleiben, spricht der Verfasser von „Eigebieten“ und von deren Begrenzungen als „Eigebilden“.

Ein Eigebiet ist also definiert als ein im R_n innerhalb endlicher Grenzen liegendes Punktgebiet, dem jede gerade Verbindungsstrecke zweier ihm angehörigen Punkte vollständig angehört. Dabei beschränkt sich der Verfasser auf „abgeschlossene“ Eigebiete E, d. h. solche Punktmengen, die jeden ihrer Grenzpunkte mitenthalten. Der lineare Raum niedrigster Dimension, der zur Existenz von E notwendig ist, heißt der von E „aufgespannte“ Raum. „Hauptlinear“ eines Raumes R_n heißt eine lineare Mannigfaltigkeit R_{n-1}, die durch eine lineare Gleichung zwischen den Punktkoordinaten des R_n dargestellt wird. Liegt dann eine beliebige abgeschlossene Punktmenge P in einem R_n vor, so wird unter „Stützlinear“ von P jedes Hauptlinear des R_n verstanden, das auf seiner einen Seite keinen Punkt von P liegen hat, im übrigen selbst (mindestens) einen Punkt von P enthält (Verallgemeinerung der Tangentialebene). Dies wird im besondern auf Eigebilde übertragen. Zwei Eigebilde sind identisch, wenn ihre entsprechenden (d. h. parallelen) Stützlineare es sind. Die Verallgemeinerung des Abelschen Lemmas spricht sich jetzt dahin aus, daß, wenn die höheren komplexen Größen $A_0, A_1, \ldots, A_n$ zu einem Eigebiet E gehören, so auch die Größe $a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n$ für $1 \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_n \geqq 0$. Eine sorgfältigere Untersuchung wird der delikaten Frage gewidmet, inwieweit

die Punkte auch auf der Begrenzung von E liegen können. Hierbei dient als ein wesentliches Moment der zahlentheoretische Hülfssatz, daß die obige Form $a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n$ mit der anderen

$$\alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n \; (\sum \alpha_i = 1,\; 1 \geqq \alpha_i \geqq 0)$$

äquivalent ist. Es greifen hier Untersuchungen ein, die Minkowski in seiner „Geometrie der Zahlen" über „Zellen" angestellt hat. Die Eigebilde werden dabei gewissen Ähnlichkeitstransformationen unterworfen. Um die Ergebnisse auch auf den Fall auszudehnen, daß die ε beliebig monotone reelle Größen sind, schaltet der Verfasser ein Kapitel über Punktsummen- und Punktdifferenzgebiete ein. Die durch Addition eines beliebigen Punktes a des Gebietes $\mathfrak{A}$ und eines beliebigen Punktes b des Gebietes $\mathfrak{B}$ entstehenden Punkte $a + b$ bedecken ein Gebiet, das „Punkt-Summengebiet aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$" heißt. Analog wird das „Punktdifferenzgebiet aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$" definiert. Dann ist das Punktsummengebiet $\mathfrak{C}$ aus zwei Eigebieten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ selbst ein Eigebiet, und zwar ein abgeschlossenes, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgeschlossen sind. Entsprechendes gilt für das Punktdifferenzgebiet. Allgemeiner gilt der Satz: „Sind die $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ Eigebiete, so ist auch $\alpha_1 \mathfrak{A}_1 + \alpha_2 \mathfrak{A}_2 + \cdots + \alpha_n \mathfrak{A}_n$ ein solches, wenn die α beliebige endliche Faktoren bedeuten. Daraufhin gestattet der oben für die Punkte A_k aufgestellte Satz folgende Ausdehnung: „Sind die A_k Punkte des Eigebietes E, wo $\varepsilon_0 \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_n < 0$, so ist $\sum_0^n \varepsilon_k a_k$ ein Punkt des Eigebietes F, wo sich F aus den Gebieten $(\varepsilon_0 - \varepsilon_n) E$ und $\varepsilon_n E$ additiv zusammensetzt". Hier lassen sich auch die Bedingungen aufstellen, unter denen der Punkt $\sum \varepsilon_k a_k$ im besondern auf der Begrenzung von F liegt. Die eben erwähnten Ungleichungen zwischen den ε lassen sich entbehren, wenn man nur festsetzt, daß die ε_k eine monotone Reihe reeller Werte bilden. Dann kann es auch eintreten, daß der Punkt $\sum \varepsilon_k a_k$ auf die Begrenzung von F zu liegen kommt. Endlich dürfen auch die ε komplexe monotone Werte sein.

Im zweiten Abschnitte wird der Grenzübergang zur unendlichen Reihe $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots$ verfolgt. Die zum (abgeschlossenen) Eigebiet E gehörigen Punkte A_ν sollen jetzt eine unendliche Reihe bilden, ebenso wie die a_ν und die positiven nirgends steigenden ε_ν; überdies sollen sich die A_ν bei wachsendem ν einem Grenzpunkte A nähern, der dann ebenfalls zu E gehören muß. Unter diesen Voraussetzungen nähern sich auch die Punkte $\sum_0^n \varepsilon_\nu a_\nu$ bei wachsendem n einem zu E gehörigen Grenzpunkte A_ε. Dieser Grenzpunkt gehört auch dem Eigebiet $\varepsilon_0 E$ an, und es lassen sich mit Hülfe des Begriffes des Stützlinears die Bedingungen angeben, unter denen er auf der Begrenzung von $\varepsilon_0 E$ liegt. Weiß man von den ε_ν nur, daß sie eine monotone unendliche Reihe von reellen endlichen Werten, mit einem endlichen Grenzwerte ε, bilden, so gehört der Grenzpunkt A_ε zu dem aus $(\varepsilon_0 - \varepsilon) E$ und εE additiv zusammengesetzten Eigebiete J, und man kann entscheiden, wann er im besondern der Begrenzung dieses Gebietes J angehört.

Der dritte Abschnitt ist der Verallgemeinerung des zweiten Mittelwertsatzes der bestimmten Integrale gewidmet und ihrem Eingreifen in die Theorie der Ovale. Das Abelsche Lemma ist zuerst von Bonnet auf bestimmte Integrale einer reellen Variable angewendet worden. Weierstraß und du Bois-Reymond haben den Bonnetschen Satz in einer Weise erweitert, die der Verallgemeinerung des (endlichen) Abelschen Lemmas auf monotone ε parallel läuft.

Der Bonnetsche Satz hat zwei Formen:

$$f(a)\,A < \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx < f(a)\,B, \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx. \tag{2}$$

Hier bezeichnet $f(x)$ eine von a bis b positive, nirgends steigende Funktion, und $g(x)$ wie $f(x)g(x)$ müssen in diesem Intervall integrabel sein. A und B können eine untere und obere Grenze der Werte des Integrales $\int_a^x g(x)\,dx$ bedeuten oder auch speziell das Minimum und Maximum dieser Werte; ξ ist ein mittlerer Wert zwischen a und b. Bei der Verallgemeinerung auf komplexe Größen (wo der Integrationsweg genauer festzusetzen ist) bieten sich zwei analoge Formen des Satzes dar; doch treten dieselben weiter auseinander als im reellen Falle, da die Bedingungen für ihre Anwendbarkeit sich merklich differenzieren. Die Punkte (x, y) des stetigen Integrationsweges seien auf eine reelle, monoton steigende, stetige unabhängige Veränderliche t bezogen, so daß der kleinste Wert t_0 von t dem Anfangspunkte (x_0, y_0), der größte Wert t' von t dem Endpunkte (x', y') des Weges entspricht: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, wo φ, ψ eindeutige Funktionen von t sind. Die den Werten t entsprechenden Punkte

$$z = x + i\,y,$$

$$A(t) = X^{(t)} + i\,Y^{(t)} = \int_{t_0}^{t} g(x, y, i)\,d(x + i\,y),$$

$$L(t) = X^{(t)} + i\,Y^{(t)} = \int_{t_0}^{t} f(x, y)\,g(x, y, i)\,d(x + i\,y)$$

bilden in der Darstellungsebene drei stetige Linien $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}$. Die Funktion $g(x, y, i)$ muß nicht, kann aber Funktion von x und $i\,y$ allein, oder ganz von z allein sein.

Die Funktion $f(x, y) = \chi(t)$ bleibe im ganzen Intervall, absolut genommen, unter einer endlichen positiven Größe F und sei eine im Intervalle (t_0, t') niemals steigende, positive Funktion. Endlich seien die Funktionen g und $f \cdot g$ im Intervalle „integrabel“.

„Gehören dann die Werte $A(t) = X^{(t)} + i\,Y^{(t)}$ einem Ovalgebiete E der Darstellungsebene an, so gehört der Wert $L(t) = X^{(t)} + i\,Y^{(t)}$ zum Ovalgebiete $\chi(t_0)\,E$." An die Stelle der Grenzen A und B des reellen Falles tritt die Begrenzung von E, an die Stelle der Annahme, daß A und B speziell Minimum und Maximum des Integrales $\int_a^x g(x)\,dx$ vorstellen, die entsprechende, daß E das eingeschränkteste Oval darstellt, das die Punkte $A(t)$ überhaupt noch alle enthält. Der angeführte Satz erhält sodann seine analytische Einkleidung. — Nunmehr kommt die zweite Form der Verallgemeinerung des Bonnetschen Satzes in Betracht. Es soll also der Punkt $L' = X' + i\,Y'$ durch ein einziges Integral über $g(x, y, i)$ dargestellt werden, in dessen obere Grenze irgend ein Mittelwert eingeht. Der Ansatz

$$\int_{t_0}^{t'} f(x, y)\,g(x, y, i)\,dz = \chi(t_0)\int_{t_0}^{\tau} g(x, y, i)\,dz \qquad (t_0 \leqq \tau \leqq t')$$

erweist sich als im allgemeinen unmöglich. Man kann nur eine Darstellung erwarten von der Art

$$\int_{x_0, y_0}^{x', y'} f(x, y)\,g(x, y, i)\,dz = f(x_0, y_0)\int_{x_0, y_0}^{\xi, \eta} g(x, y, i)\,dz,$$

wo links und rechts im allgemeinen über verschiedene Wege integriert wird, links von t_0 bis t', für $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, rechts etwa von s_0 bis s' für $x = \vartheta(s)$, $y = \omega(s)$. Somit müssen jetzt $g(x, y, i)$ und $\int g(x, y, i)\,dz$ auch für andere als die Werte $z = \varphi(t) + i\,\psi(t)$ definiert sein, nämlich für ein gewisses ganzes zusammenhängendes Gebiet $[z] = [x + i\,y]$. Dann ist aber auch die angegebene Darstellung vermittelst eines dem Gebiete $[z]$ entnommenen Wertes $\xi + i\,\eta$ immer möglich. Eine weitere Verallgemeinerung bezieht sich auf den Fall, wo $f(x, y)$ auf dem Integrationswege reell und monoton ist. Sodann wird die Weierstraß- P. du Bois-Reymondsche Form des zweiten Mittelwertsatzes auf die obigen verallgemeinerten Voraussetzungen übertragen. Es zeigt sich, daß diese Form im wesentlichen das nämliche aussagt wie der soeben angedeutete Bonnetsche Satz (im komplexen Gebiet) für monotone $\chi(t)$.

Der schwierigste Teil der Untersuchung bezieht sich jetzt auf das „Randproblem", d. i. auf die Frage, wann der Integralwert

$$\int_{t_0}^{t'} f(x, y)\,g(x, y, i)\,dz$$

nicht ins Innere, sondern auf den Rand des zugehörigen Ovalgebietes fällt. Wenn auch das Hauptergebnis ohne weiteres als plausibel erscheint, so erfordert sein strenger Beweis vielerlei Vorbereitungen und umständliche Sorgfalt. Die Schwierigkeit des Beweisganges ist eben dadurch be-

dingt, daß Sätze, die sich zunächst auf das Innenliegen von Punkten beziehen, verwendet werden, um Randentfernungsgrenzen für die innenliegenden Punkte abzuleiten. Das Ergebnis läßt sich etwa so zusammenfassen. Für $\chi(t_0) = 1$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $L(t')$ auf dem Rande von E liegt, die, daß alle Punkte $A(t)$, deren Argumente t sich als zum Intervall (t_0, t') gehörige Bewegungsstellen von $\chi(t)$ erweisen, einschließlich des Punktes $A(t')$, auf einer Geraden liegen, die nicht ins Innere von E eindringt, also eine Stützgerade (Tangente) von E ist.

Der Hauptwert dieser Untersuchungen scheint mehr in dem analytischen Teile zu liegen. Es ist vorderhand noch nicht recht ersichtlich, welches die entsprechenden rein topologischen Sätze über Ovale sind.

Man vergleiche noch die einschlägigen Arbeiten Pringsheims (F. d. M. **31**, 309, 1900) und des Verfassers (F. d. M. **35**, 981, 1904).

My.

G. Kowalewski. Eine Verallgemeinerung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung. Deutsche Math. Ver. **14**, 85-92; Verh. Naturf. Ges. Breslau **2**$_1$, 8-9.

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des zweiten Mittelwertsatzes, die das genaue Analogon einer von Weierstraß herrührenden Verallgemeinerung des ersten Mittelwertsatzes ist. Wenn $\psi(x)$ in (a, b) monoton ist und $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ in (a, b) im Riemannschen Sinne integrierbar sind, so gelten die Formeln

$$\int_a^b f\,\psi\,dx = \sum_{\varrho=1}^{n} \lambda_\varrho \left\{ \psi(a) \int_a^{\xi_\varrho} f_i\,dx + \psi(b) \int_{\xi_\varrho}^{b} f_i\,dx \right\}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ gewisse Werte aus (a, b), und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ erfüllen die Bedingungen

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqq 0,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

G. K.

G. Kowalewski. Über den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung. Math. Ann. **60**, 151-156.

Weierstraß bewies den zweiten Mittelwertsatz durch partielle Integration, wodurch der Satz aber weniger allgemein ausfiel, als bei P. du Bois-Reymond. Hier wird gezeigt, wie man durch eine Modifikation des Weierstraßschen Beweises diese Einschränkung der Allgemeinheit vermeiden kann.

G. K.

Ph. Freud. Über die uneigentlichen bestimmten Integrale. Monatsh. f. Math. 16, 11-24.

Es werden hier zwei von den verschiedenen Definitionen für uneigentliche Integrale mit unendlich vielen Unendlichkeitsstellen verglichen. Die eine ist insofern allgemeiner, als sie bei dem Integranden eine allgemeinere Klasse von Unendlichkeitsstellen zuläßt. Interessant ist es, daß Funktionenpaare f_1, f_2 existieren, die nach beiden Definitionen Integrale haben, während $f_1 + f_2$ zwar nach der spezielleren Definition ein Integral besitzt, nicht aber nach der scheinbar allgemeineren.

G. K.

G. Fubini. Sugli integrali definiti di una funzione finita. Boll. delle Sed. Acc. Gioenia Nr. 80, 19-23.

G. Fubini. Sugli integrali definiti di una funzione finita. Periodico di Mat. (3) 2, 229-230.

Das bestimmte Integral wird als Grenze einer eigentümlichen unendlichen Reihe definiert.

Lp.

M. Chini. Sopra certi limiti dipendenti dal concetto di integrale definito. Periodico di Mat. (3) 2, 285-288.

Verallgemeinerung der von Fubini gegebenen Auffassung in der vorstehend angezeigten Note.

Lp.

G. H. Hardy. Notes on some points in the integral calculus. XVII. On the integration of series. Messenger (2) 35, 126-130.

Vgl. F. d. M. 35, 313, 1904. Man hat den Satz (vgl. Stolz, „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung“ 1, 428): Wenn $\int_a^A f(x)\,dx$ absolut konvergent ist und die Funktion $\varphi(x)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe $\Sigma\varphi_n(x)$ entwickelt werden kann, so ist

$$\int (f(x)\,\Sigma\,\varphi_n(x))\,dx = \Sigma\int f(x)\,\varphi_n(x)\,dx.$$

Der Satz versagt, wenn $\varphi(x)$ an der Grenze unendlich wird; z. B. genügt er nicht zum Beweise, daß

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Sigma\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\int_0^1 x^{2n+m}\,dx.$$

Deshalb beweist Hardy das folgende Theorem: Wenn $f(x)$ stetig im Bereiche (a, A) ist und $\varphi(x)$ in eine Reihe stetiger Funktionen

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots$$

entwickelt werden kann, die im Bereiche $(a, A - \varepsilon)$ gleichmäßig konvergiert, wie klein auch die positive Größe ε gewählt wird, wenn endlich das Integral

$\int_a^A \bar{\varphi}(x)\,dx$ konvergent ist, wo $\bar{\varphi}(x) = |\varphi_0(x)| + |\varphi_1^a(x)| + \cdots,$

dann ist

$$\int_a^A \varphi(x) f(x)\,dx = \Sigma \int_a^A \varphi_n(x) f(x)\,dx.$$

Hiernach folgt z. B. für $0 < a < 1$:

$$\int_0^1 (1-x)^{-a} f(x)\,dx = \Sigma \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\,\Gamma(n+1)} \int_0^1 x^n f(x)\,dx.$$

Zum Schlusse wird das Theorem noch verallgemeinert. Lp.

R. d'Adhémar. Sur les dérivées des intégrales définies. Brux. S. sc. **29** A, 201-204.

Bestimmung einer solchen Ableitung in einem Falle, bei welchem die klassische Regel sie als die Differenz zweier unendlichen Größen gibt, obschon sie endlich ist. Mn. (Lp.)

---

zur Kammer. Die Summenformel anstatt des Integrals für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 127-131.

Wiederholung allgemein bekannter Dinge. Lp.

N. Nielsen. Sur quelques applications intégrales d'une série de coefficients binomiaux. Palermo Rend. **19**, 129-139.

Es wird die Funktion

$$W(x) = \sum_0^\infty \Delta^s W(1) \cdot \binom{x-1}{s}$$

betrachtet unter der Annahme, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{W(n)}{n^k} = 0$$

ist. Verf. leitet unter besonderen Voraussetzungen verschiedene Integraldarstellungen für $W(x)$ ab und gibt mehrere Anwendungen. G. K.

N. NIELSEN. Notiz über den Integrallogarithmus. Monatsh. f. Math. **16**, 7-10.

Einfacher Beweis der Schendelschen Formel für den Integrallogarithmus:

$$\operatorname{li} e^{-x} = C + \log x - e^{-x} \sum_{1}^{\infty} \frac{x^s}{s!}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s}\right)$$

(C die Eulersche Konstante). Hieraus werden dann noch zwei Lommelsche Formeln für den Integralkosinus und Integralsinus abgeleitet. G. K.

M. LERCH. Einiges über den Integrallogarithmus. Monatsh. f. Math. **16**, 125-134.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird ein direkter und elementarer Beweis der folgenden Formel gegeben:

$$\int_0^{\infty} e^{-u\left(x+\frac{1}{x}\right)} \log x \frac{dx}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{\pi}{u}}\, e^{2u} \operatorname{li}(e^{-4u}).$$

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Reihe

$$F(x, u) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(u)}{\Gamma(u+\nu)} x^{\nu}.$$

Das Produkt von $F(x, u)$ und $F(-x, v)$ erweist sich gleich

$$(1) \qquad (v-1) \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(u)\, x^n}{(u+v+n-2)\,\Gamma(u+n)} + (u-1) \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(v)\,(-x)^n}{(u+v+n-2)\,\Gamma(v+n)}.$$

Setzt man hier $v = 1$, so ergibt sich wegen

$$F(-x, 1) = e^{-x}$$

die Formel

$$(2) \qquad e^{-x} F(x, u) = (u-1) \sum_{0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!\,(u+n-1)},$$

die im Grunde genommen mit der Eulerschen Formel

$$\int_0^{\omega} e^{-x} x^{a-1}\, dx = e^{-\omega}\left\{\frac{\omega^a}{a} + \frac{\omega^{a+1}}{a(a+1)} + \cdots\right\}$$

identisch ist.

Im dritten Teil wird statt $F(x, u)$

$$f(x, u) = \frac{1}{u} F(x, u+1) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(u)\, x^{\nu}}{\Gamma(u+\nu+1)}$$

betrachtet. Nach (2) ist dann

$$f(x, u) = e^x \sum_{0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!\,(u+n)}.$$

Für unendlich kleine u wird folglich

$$e^{-x} f(x, u) = \frac{1}{u} + \mathfrak{L}(-x) + (u),$$

wobei (u) eine unendlich kleine Größe bedeutet und

$$\mathfrak{L}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!\,n}$$

ist. Mit Hülfe der Formel (1) ergeben sich weitere Resultate, unter anderem die Relation

$$\{C + \mathfrak{L}(x)\}\{C + \mathfrak{L}(-x)\} = C^2 - 2\sum_s \left\{\psi(s+1) + \frac{1}{s}\right\}\frac{x^s}{s!\,s}$$
$$(s = 2, 4, 6, \ldots).$$

Dabei ist C die Eulersche Konstante und $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$. Dem Verfasser scheint die Transzendente

$$C + \mathfrak{L}(x)$$

„als das einfachste Element der Theorie des Integrallogarithmus zu betrachten zu sein", mit der sie wegen der bekannten Formel

$$\mathrm{li}(e^x) = \log x + C + \mathfrak{L}(x)$$

zusammenhängt. G. K.

M. Lerch. Über einige Entwicklungen auf dem Gebiete der unvollständigen Eulerschen Integrale zweiter Art. J. für Math. **128**, 211-221.

Durch die Potenzreihe

$$(1) \qquad \frac{1}{1 - v\log(1+z)} = C_0(v) + z\,C_1(v) + z^2 C_2(v) + \cdots$$

wird eine Folge von Polynomen $C_n(v)$ definiert. Wenn v positiv und kleiner als $1/\log 2$ ist, so bleibt $C_n(v)$ bei wachsendem n endlich, und man hat für jeden Wert von n

$$|C_n| < \frac{1}{1 - v\log 2}.$$

Mit Hülfe dieser $C_n(v)$ kann man für die Funktion

$$Q(s, \omega) = \int_\omega^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

die folgende Reihenentwicklung erhalten:

$$e^{\frac{u}{v}} Q\left(1 - a, \frac{u}{v}\right) = v^a \sum_0^\infty C_\nu(v)\,\Delta^\nu u^{-a},$$

wobei $0 < v < \frac{1}{\log 2}$ und $\Re(a), \Re(u) > 0$ ist; Δ^ν ist die ν-malige Anwendung der Operation $\Delta f(u) = f(u+1) - f(u)$. Von der beschrän-

kenden Voraussetzung $\Re(a) > 0$ läßt sich die Formel nachträglich ganz befreien. Durch Differentiation von

$$v^{\xi} e^{\frac{u}{v}} \dot{Q}\left(1+\xi, \frac{u}{v}\right) = \sum_0^{\infty} C_\nu(v) \Delta^\nu u^{\xi}$$

nach ξ (an der Stelle $\xi = 0$) ergibt sich

$$e^{\frac{u}{v}} \int_{u/v}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} = \sum_1^{\infty} C_\nu(v) \Delta^\nu \log u.$$

Die Betrachtungen lassen sich verallgemeinern, indem man, anstatt von (1), von der Entwicklung

$$\frac{1}{\{1 - v\log(1+z)\}^c} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_\nu(c, v) z^\nu$$

ausgeht. G. K.

W. Kapteyn. Over eene bepaalde integraal van Kummer. Amst. Versl. **14**, 315-322.

Kummer hat sich (J. für Math. **17**) mit dem Integral

$$U_p = \int_0^{\infty} e^{-x-\frac{b^2}{x}} x^p \, dx$$

beschäftigt unter der Voraussetzung, daß p keine ganze Zahl ist.

Verf. betrachtet den Fall eines positiven ganzzahligen p und untersucht insbesondere die Beziehung, die zwischen U_p und

$$V_p = \int_b^{\infty} e^{-x-\frac{b^2}{x}} x^p \, dx$$

besteht. G. K.

J. G. Rutgers. Over de bepaalde integraal $\int_0^1 e^{-qz} z^{p-1} dz$. Nieuw Archief (2) **6**, 368-373.

Beweis der Formel

$$\int_0^1 e^{-qz} z^{p-1} dz$$
$$= \frac{\Gamma(p)}{q^p} \left\{ J_p(2q) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_{p+n}(2q) + J_{p-n}(2q) - \frac{q^{p-n} \cdot e^{-q}}{\Gamma(p-n+1)} \right] \right\}.$$

Dabei muß der reelle Teil von p positiv sein. G. K.

A. L. Dixon. On the evaluation of certain definite integrals by means of gamma functions. Lond. M. S. Proc. (2) 3, 189-205.

Im ersten Teil wird eine Formel für das $(n-1)$-fache Integral

$$\int\limits_{(n-1)} \frac{\xi_1^{\beta_1-1}\xi_2^{\beta_2-1}\ldots\xi_n^{\beta_n-1}}{\prod\limits_{t=1}^{m}\left(\sum\limits_{\beta=1}^{n} A_{st}\xi_s\right)^{\gamma_t}}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1},$$

$\xi_n = 1-\xi_1-\xi_2-\ldots-\xi_{n-1}$, entwickelt. Dabei sind die reellen Teile von $\beta_s, \gamma_t, A_{st}$ positiv; $\sum\beta - \sum\gamma$ ist entweder Null oder hat einen positiven reellen Teil. Das Integrationsgebiet ist wie bei dem Dirichletschen Integral

$$\int\limits_{(n-1)} \xi_1^{\beta_1-1}\xi_2^{\beta_2-1}\ldots\xi_n^{\beta_n-1}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}$$

durch die Forderung $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \geqq 0$ bestimmt.

Im zweiten Teil wird die den β_s, γ_t auferlegte Beschränkung fallen gelassen. Hier knüpft der Verf. an Pochhammers Arbeit über Eulersche Integrale an (Math. Ann. **35**, 495-526; F. d. M. **22**, 439, 1890).

G. K.

F. Gomes Teixeira. Sur quelques intégrales définies. Arch. der Math. u. Phys. (3) 9, 30-33.

Neuer Beweis der Hermiteschen Integralformel

$$\int_0^{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(x-a-ib)\, dx = 2\pi i \operatorname{sgn} b \qquad (b \gtrless 0)$$

und Auswertung des Integrals

$$\int_0^{\pi} \cot \tfrac{1}{2}(x-a-ib)\, dx.$$

G. K.

G. Huber. Auswertung einiger bestimmter Integrale mit Anwendung des freien Integrationsweges. Monatsh. f. Math. 16, 141-160.

Bestimmung des Integrals

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log\sin\varphi}{a-b\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log\cos\varphi}{a-b\cos^2\varphi}\, d\varphi,$$

woraus sich dann durch Differentiation nach a oder b noch eine ganze Reihe anderer Integralformeln ergibt.

G. K.

O. Stolz. Beweis eines Satzes über das Vorhandensein des komplexen Integrals. Münch. Ber. **1905**, 21-28.

Die Existenz des komplexen Integrals wird hier unter etwas allgemeineren Voraussetzungen bewiesen als in des Verf. „Grundzügen". Mittels desselben Verfahrens wird am Schluß der Nachweis für die Rektifizierbarkeit der „regulären Kurven" geführt. Ein stetiger Kurvenbogen $x = g(\tau)$, $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$, heißt regulär, wenn $g'(\tau)$ in (α, β) abteilungsweise stetig ist. G. K.

M. d'Ocagne. Sur l'évaluation graphique des longueurs d'arc. Nouv. Ann. (4) **5**, 43-45.

Die graphische Ermittelung des Kurvenbogens wird nach bekannter Methode auf die Auswertung eines Flächenstücks zurückgeführt, das von der Kurve, einer Hülfskurve und zwei Ordinaten begrenzt ist. Es wird gezeigt, wie man in den Punkten der Hülfskurve die Tangenten zieht. Lwt.

F. Sibirani. Sulla definizione di area di una superficie curva. Periodico di Mat. (3) **3**, 32-43.

Der Aufsatz stellt die verschiedenen Definitionen zusammen, welche für das Areal einer krummen Oberfläche gegeben sind, nebst den Kritiken, denen diese Definitionen unterworfen worden sind. Wir führen die folgenden Namen von Mathematikern an, deren Begriffsbestimmungen nacheinander besprochen werden: Archimedes, Cousin, Lagrange, Lacroix, Serret, Schwarz, Peano, Duhamel, Sturm, Harnack, Maggi, Hermite, Jordan, Borchardt, Minkowski. Lp.

A. W. Groenman. Een inhoudsformule voor een groep van lichamen met twee evenwijdige grensvlakken. Nieuw Archief (2) **6**, 365-367.

Ist $f(x)$ eine quadratische Funktion von x, welche den Flächeninhalt eines zu den Grenzflächen parallelen Querschnitts im Abstande x von einer derselben ausdrückt, so ist das Volumen

$$V = \frac{h}{6}\left\{\frac{3x-h}{x} f(0) + \frac{2h-3x}{h-x} f(h) + \frac{h^2}{x(h-x)} f(x)\right\}.$$

Vergl. des Ref. Aufsatz: „Elementare Ableitung einiger Formeln der mechanischen Quadratur" (F. d. M. **34**, 347, 1903). Lp.

F. de Boer. Berekening van den inhoud van het lichaam, dat an drie niet geheel buiten elkaar liggende bollen gemeen is. Nieuw Archief (2) **7**, 11-19.

Eine Kugel wird durch zwei ebene Schnitte, von denen der eine durch den Mittelpunkt geht, in vier Stücke geteilt. Für den Rauminhalt

eines solchen Stückes wird durch Integration ein ziemlich komplizierter Ausdruck gefunden, der außer dem Kugelradius den Neigungswinkel der beiden Ebenen und den Abstand ihrer Schnittlinie vom Mittelpunkte enthält. Der gemeinschaftliche Teil von drei einander in zwei Punkten schneidenden Kugeln besteht nun aus sechs derartigen Stücken. Durch Addition der sechs Ausdrücke für den Inhalt dieser Stücke ergibt sich für das gesuchte Volumen des den drei Kugeln gemeinschaftlichen Teils ein Ausdruck, in welchem außer den Radien und den Abständen der Mittelpunkte der Kugeln der Rauminhalt und die sechs Kantenwinkel desjenigen Vierflachs vorkommen, welches durch die Mittelpunkte und den einen Schnittpunkt der drei Kugeln bestimmt wird. (Vgl. das Referat über die Lösung derselben Aufgabe von J. C. Kluyver, Nieuw Archief (2) **7**, 7-10 im Abschnitt VIII, Kap. 3.) Zch.

J. Pierpont. On multiple integrals. American M. S. Trans. **6**, 416-434.

Die hier vorgetragene Theorie der vielfachen Integrale hat, worauf der Verf. aber erst nachträglich aufmerksam geworden ist, große Verwandtschaft mit Entwicklungen von O. Stolz (Wiener Ber. **106**, 453; F. d. M. **28**, 253, 1897). Die zugrunde gelegte Definition des vielfachen Integrals ist folgende: $\mathfrak{A}$ sei eine im Endlichen liegende Punktmenge des n-dimensionalen Raumes R_n und $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine für $\mathfrak{A}$ definierte beschränkte Funktion. Durch Parallelebenen zu den Koordinatenebenen $x_i = 0$ werde der R_n in Zellen zerlegt, deren Kanten kleiner als d sind. Diese Zerlegung heiße D. Sind $d_1, d_2, \ldots$ die Zellen von D, welche wenigstens einen Punkt von $\mathfrak{A}$ enthalten, und m_i, M_i die untere und die obere Grenze von f in d_i, so lassen sich D die beiden folgenden Summen zuordnen

$$\underline{S}_D = \sum m_i\,\delta_i,\ \bar{S}_D = \sum M_i\,\delta_i,$$

wobei δ_i das Volumen der Zelle d_i ist. Es zeigt sich, daß bei unendlichen Verkleinerung von d die Grenzwerte

$$\lim \underline{S}_D = \underline{\int} f d\,\mathfrak{A},\ \lim \bar{S}_D = \bar{\int} f d\,\mathfrak{A}$$

existieren, die als das untere und obere Integral von f in $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden. Sind sie gleich, so heißt f in $\mathfrak{A}$ integrierbar.

Besondere Sorgfalt widmet der Verf. der Reduktion des vielfachen Integrals auf einfache Integrale, sowie der Einführung neuer Veränderlichen in ein vielfaches Integral. G. K.

A. Buhl. Sur de nouvelles séries de polynomes. C. R. **141**, 307-309.

Das Doppelintegral

$$(1)\qquad \int_{-a}^{a}\int_{-l}^{l} f(z)\, e^{iq(x-z)} \left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right)^{k-\frac{1}{2}} \frac{dq\,dz}{2\pi}$$

läßt sich, wenn man

$$(2) \qquad F(x) = \int_{-a}^{a}\int_{-l}^{l} f(z)\, e^{iq(x-z)} \frac{dq\,dz}{2\pi}$$

setzt, so schreiben:

$$F(x) + \frac{2k-1}{2}\frac{F''(x)}{a^2} + \frac{(2k-1)(2k-3)}{2\cdot 4}\frac{F^{IV}(x)}{a^4} + \cdots$$

Wird a unendlich, so reduziert sich dies auf $f(x)$, weil alsdann (2) in die gewöhnliche Fouriersche Formel übergeht. Das Integral (1) hat also für $a = \infty$ den Grenzwert $f(x)$, womit eine Verallgemeinerung des Fourierschen Theorems gewonnen ist. Hinreichend für die Richtigkeit dieses Resultates ist, daß $f(x)$ in $(-l, l)$ die Dirichletschen Bedingungen erfüllt.

Setzt man

$$P_\nu(x) = \int_{-l}^{l} f(z)\,(x-z)^\nu\, dz,$$

so gilt für (1) die zweite Entwicklung:

$$S(a, k) = \frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty (-1)^n\, B\left(n+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)\frac{a^{2n+1}}{(2n)!} P_{2n}(x),$$

die also, was auch k sein mag, für $a = \infty$ dem Grenzwert $f(x)$ zustreben muß.
G. K.

M. Krause. Zur Theorie der Funktionen zweier veränderlichen Größen. Leipz. Ber. 57, 107-152.

Die Taylorsche Formel, die Mac-Laurinsche Summenformel, die Lagrangesche Interpolationsformel und ähnliche Formeln im Gebiete zweier Veränderlichen werden hier von einer neuen Seite betrachtet. Bei diesen Doppelsummen hat man bisher fast gar nicht die verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten der Glieder berücksichtigt. Z. B. liegt der Taylorschen Formel in der üblichen Form

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)} + R_n$$

eine Dreiecksanordnung der Glieder $\frac{\partial^m f}{\partial x^r \partial y^s}\frac{h^r k^s}{r!\, s!}$ zugrunde, und man bedenkt nicht, daß es unendlich viele andere Anordnungen gibt, daß z. B. die Rechtecksanordnung besonders naheliegend und auch deshalb von Wichtigkeit ist, weil bei ihr der Rest eine sehr einfache Darstellung gestattet. Ähnliches gilt für die Mac-Laurinsche Summenformel und die Lagrangesche Interpolationsformel. Im Falle der Taylorschen

Formel ermöglicht es gerade die Rechtecksanordnung, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer Funktion zweier Veränderlichen in eine unendliche Taylorsche Reihe anzugeben. Im Anschluß an die Lagrangesche Interpolationsformel wird auf die angenäherte Kubatur eingegangen, wobei das Integrationsgebiet ein Rechteck oder ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist. Die aufgestellten Näherungsformeln ermöglichen eine bequeme Fehlerabschätzung.

G. K.

F. Rimondini. Sul calcolo approssimato degli integrali doppi a limiti costanti. Torino Atti **40**, 168-177.

Betrachtet man das Doppelintegral

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x\, y)\, dx$$

als das Ergebnis zweier aufeinander folgenden einfachen Integrationen, und nutzt man die Formel

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\left\{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)+4\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right\} - \frac{(\beta-\alpha)^5}{4!\,5!}\varphi^{IV}(\xi) \qquad (\alpha \leqq \xi \leqq \beta)$$

aus, so findet man für das Doppelintegral den Ausdruck

$$(b-a)(d-c)\Big\{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d) + 4\left[f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right] + 16\, f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\Big\} + R;$$

R ist dabei gleich

$$-\frac{(b-a)^5(d-c)}{4!\,5!}f_x^{IV}(\xi',\eta') - \frac{(b-a)(d-c)^5}{4!\,5!}f_y^{IV}(\xi'',\eta'') + \frac{(b-a)^5(d-c)^5}{4!\,4!\,5!\,5!}D_x^4 D_y^4 f(\xi,\eta).$$

Um nun das Doppelintegral angenähert zu berechnen, kann man nach Analogie der Simpsonschen Regel so verfahren, daß man das rechteckige Integrationsgebiet in n^2 gleiche Teilrechtecke teilt und auf jedes Teilrechteck die obige Formel anwendet.

Verf. entwickelt noch eine andere Methode, das Doppelintegral zu approximieren, die auf folgendem Satze beruht: Wenn f eine ganze rationale Funktion dritten Grades ist, so hat man

$$\int_a^b dx \int_c^d f(xy)\,dy = \frac{(b-a)(d-c)}{12}(z_{00}+z_{01}+z_{10}+z_{11}+8z_m);$$

dabei ist

$$z_{00}=f(a,c),\ z_{01}=f(b,c),\ z_{10}=f(a,d),\ z_{11}=f(b,d),$$
$$z_m=f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right).$$

Nimmt man wieder die Zerlegung in n^2 Teilrechtecke vor und betrachtet den Integranden in jedem Teilrechteck angenähert als ganze rationale Funktion dritten Grades, so findet man einen Näherungsausdruck für das Doppelintegral. In einer späteren Arbeit will Verf. den Fehler R, den diese Approximation bietet, näher untersuchen. G. K.

K. M. Dubiago. **Die Integratoren des mechanischen Laboratoriums des Petersburger Polytechnischen Instituts.** St. Petersb. Polyt. Inst. **3**, Heft 3-4, 297-313. (Russisch.)

Aufstellung der für die Flächen- und Momentenbestimmung mit Hülfe der Integratoren von Amsler und Coradi notwendigen Formeln und Erklärung der Anwendung der Apparate zur wirklichen Ausrechnung der auftretenden Integrale. Der Verf. gibt dem Coradischen Apparat den Vorzug. Si.

Weitere Literatur.

P. Mansion. Sur le calcul approché de quelques intégrales. Brux S. sc. **29** A, 62.

L. S. de la Campa. Determinación especial del área del elipsoide de revolución alargado. Revista trim. de Mat. **5**, 17-22.

C. Severini. Sul concetto d'integrale definito assolutamente convergente. Palermo: Tipografia matematica. 43 S. 8°.

H. Frey. Über das Vorzeichen gewisser bestimmter Integrale. Diss. Heidelberg. 47 S. 8°.

Kapitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen und Differenzenrechnung.

A. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

P. Painlevé. **Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles.** Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 86-99.

Über den Inhalt dieser Abhandlung ist bereits in F. d. M. **35**, 325, 1904, berichtet worden. Wbg.

J. Horn. Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Leipzig: G. J. Göschen. X u. 391 S. 8°. (Sammlung Schubert L.)

Der vorliegende Band der Sammlung Schubert dient ebenso wie der von Schlesinger verfaßte XIII. Band zur Einführung in die analytische Theorie der Differentialgleichungen. Die beiden Bände, die sich gegenseitig ergänzen sollen, aber unabhängig voneinander verständlich sind, unterscheiden sich durch die Auswahl des Stoffes. Während Band XIII sich auf algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung und lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschränkt, beschäftigt sich Band L von vornherein mit Differentialgleichungen beliebiger Ordnung oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unabhängigen und beliebig vielen abhängigen Veränderlichen; ein näheres Eingehen auf Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung ist natürlich nicht ausgeschlossen. Die von Schlesinger außer Betracht gelassenen Gebiete sowie Gegenstände, welche Anwendungen auf Mechanik, Physik, Astronomie usw. zulassen, werden bevorzugt. Andere Kapitel, wie die Differentialgleichung der Gaußschen hypergeometrischen Reihe und die algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung mit festen Verzweigungspunkten, werden unter Hinweis auf ihre eingehende Behandlung in Band XIII nur kurz berührt; jedoch wird die erneute Behandlung von Theorien, die bereits in Band XIII dargestellt sind, nicht grundsätzlich vermieden, weil Band L für sich ein Ganzes bilden soll. — Es möge nun das Inhaltsverzeichnis der einzelnen Abschnitte folgen, wobei in Klammern nur besonders interessante Unterabteilungen angegeben werden sollen. 1. Existenz der Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung beliebiger Ordnung und eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung. 2. Allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen. 3. Lineare Substitutionen. 4. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (kleine Schwingungen mechanischer Systeme mit einem und mehreren Freiheitsgraden). 5. Die Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Stellen. 6. Die Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer singulären Stelle der Bestimmtheit. Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse. 7. Asymptotische Darstellung der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Nähe einer Unbestimmtheitsstelle (Normalreihen). 8. Entwicklung der Integrale einer linearen Differentialgleichung in einem Kreisring und in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle (unendliche Determinanten). 9. Lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten (Laméscho Differentialgleichung). 10. Elementare Integrationsmethoden. Multiplikatoren von Differentialgleichungen. (Differentialgleichungen der Dynamik.) 11. Differentialgleichungen mit Parametern. (Satz von Poincaré.) Periodische Lösungen. 12. Singularitäten der Differentialgleichungen. (Divergente Reihen. Singuläre Punkte der reellen Integralkurven einer Diffgl. erster Ordnung.) 13. Singuläre Lösungen (Hamburgers Untersuchungen). 14. Differentialgleichung zweiter Ordnung mit eindeutigem allgemeinen Integral. (Die Painlevésche Diffgl. $y'' = 6y^2 + x$). — Nach dem

Gefühl des Ref. ist der Theorie der linearen Differentialgleichungen, welche bereits anderweit (z. B. in Schlesingers Handbuch) so ausführlich behandelt worden ist, ein unverhältnismäßig großer Platz eingeräumt worden, während die elementaren Integrationsmethoden sowie die nicht linearen Differentialgleichungen höherer als erster (insbesondere zweiter) Ordnung etwas zu kurz gekommen sind. Für eine etwaige neue Auflage wäre ein Sach- und Namenregister sowie ein zusammenhängendes ausführlicheres Literaturverzeichnis wünschenswert. Wbg.

C. Runge. Über die numerische Auflösung totaler Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1905, 252-257.

Um die Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen numerisch aufzulösen, sind von Euler, Runge (Math. Ann. **46**, 167, 1895), Heun (Zs. f. Math. u. Phys. **45**, 23; F. d. M. **31**, 333-334, 1900) und Kutta (Zs. f. Math. u. Phys. **46**, 435; F. d. M. **32**, 316-317, 1901) Näherungsmethoden entwickelt worden analog denen, die bei der Berechnung bestimmter Integrale Verwendung finden. Es fehlt indessen noch der Beweis, daß diese Näherungsmethoden konvergent sind oder, was praktisch wichtiger ist, es fehlt ein Kriterium, um zu ermitteln, wie klein die Schritte gemacht werden müssen, um eine vorgeschriebene Genauigkeit zu erreichen. — Für das Eulersche Verfahren ist jener Beweis und das Kriterium der Genauigkeit von Cauchy gegeben worden. Das Eulersche Verfahren besteht darin, daß man in der Differentialgleichung den Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten ersetzt und damit von einem Wertsystem zu einem benachbarten übergeht. Aber dieses Näherungsverfahren ist nicht brauchbar, weil seine Genauigkeit im allgemeinen zu wünschen übrig läßt. Wenn man die Zahl der Schritte für ein gegebenes Intervall der unabhängigen Veränderlichen n-mal so groß macht, so wird der Näherungsfehler nur etwa auf den n-ten Teil reduziert. Um einige Genauigkeit zu erzielen, wird daher im allgemeinen die Zahl der Schritte so groß, daß die Rechenarbeit ein annehmbares Maß überschreitet.

In der vorliegenden Arbeit wird Cauchys Beweis auf die neueren Näherungsmethoden ausgedehnt. Es zeigt sich, daß die Verhältnisse, auch was Genauigkeit betrifft, gerade so liegen wie bei der Berechnung eines bestimmten Integrals durch die Simpsonsche Regel. — Verf. benutzt das von ihm für das beste gehaltene Verfahren, das von Kutta.

Wbg.

É. Cotton. Sur l'intégration approchée des équations différentielles. C. R. **140**, 494-496.

Bei der von Picard entwickelten und von Lindelöf vervollkommneten Methode der sukzessiven Approximationen nimmt man als erste angenäherte Werte die Anfangswerte der Integrale. Verf. setzt an

ihre Stelle Funktionen, welche denselben Anfangsbedingungen genügen wie die gesuchten Lösungen, und gelangt so zu einfachen Resultaten, die er in der vorliegenden Note mitteilt. Wbg.

É. Cotton. Sur l'évaluation des erreurs dans l'intégration approchée des équations différentielles. C. R. **141**, 177-179.

Es sei ein System S von Differentialgleichungen und ein System von Anfangswerten gegeben, welche einem Werte der unabhängigen Veränderlichen entsprechen und ein System von Lösungen bestimmen; ferner sei ein System von angenäherten Lösungen vorhanden, welche dem System S und den gegebenen Anfangswerten beinahe genügen. Der Zweck der vorliegenden Note ist es nun, ein System Σ von linearen Differentialgleichungen mit konstanten, positiven Koeffizienten zu definieren, welches gleichzeitig für die Abschätzung der Fehler der angenäherten Lösungen (vgl. vorstehendes Referat und die Arbeiten von Severini Lomb. Ist. Rend. 1898, 1899, 1900) und für die Auswertung eines Konvergenzbereiches der Picardschen Methode der sukzessiven Approximationen geeignet ist. Wbg.

P. Saurel. On integrating factors. Annals of Math. (2) **6**, 185-189.

Lie hat gezeigt, daß, wenn eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in zwei Veränderlichen bei einer gegebenen infinitesimalen Transformation invariant bleibt, sofort ein integrierender Faktor derselben hingeschrieben werden kann; dann hat Guldberg darauf hingewiesen, daß dieses Theorem auf eine integrable totale Differentialgleichung mit beliebig vielen Veränderlichen ausgedehnt werden kann. Verf. gibt einen einfachen Beweis des Lieschen Theorems und seiner Verallgemeinerung. Wbg.

K. Wünschmann. Über Berührungsbedingungen bei Integralkurven von Differentialgleichungen. Diss. Greifswald. Leipzig: B. G. Teubner, 35 S.

„Die spezielle Differentialgleichung n-ter Ordnung $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ besitzt eine allgemeine Lösung von der Form

$$(1) \qquad y = \sum_0^{n-1}{}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu,$$

die eine Schar von ∞^n ebenen Kurven definiert. Jedem Wertsysteme $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ entspricht eine ganz bestimmte Kurve der Schar. Denken wir uns die Parameter irgendwie fest gewählt, so sind alle unendlich benachbarten Kurven der Schar enthalten in der Gleichung

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = \sum_0^{n-1}{}^{\nu}\, (a_\nu + da_\nu)\, x^\nu = y + \delta y.$$

Die zu dem Punkte x, y gehörigen Elemente der verschiedenen Ordnungen werden für die Kurve (1) definiert durch (1) und

$$(2) \qquad y_\varkappa = \sum_\varkappa^{n-1} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\varkappa+1)\, a_\nu\, x^{\nu-\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, l).$$

Diese Formel gilt für $1 \leqq l \leqq n-1$. Analog bestimmen die Gleichungen (I) und

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{y}_\varkappa = \sum_\varkappa^{n-1} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\varkappa+1)(a_\nu + da_\nu)\, x^{\nu-\varkappa}$$
$$= y_\varkappa + \delta y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, l)$$

das zum Punkt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ gehörige Element l-ter Ordnung für die benachbarte Kurve (I). Sollen nun (1) und (I) einander in l-ter Ordnung berühren, so muß $\mathfrak{y} = y$ und $\mathfrak{y}_\varkappa = y_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, l)$ sein. Daraus folgt: es gilt außer (1) und (2) noch

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \delta y &= \sum_0^{n-1} da_\nu\, x^\nu = 0, \\ \delta y_\varkappa &= \sum_\varkappa^{n-1} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\varkappa+1)\, da_\nu\, x^{\nu-\varkappa} = 0 \; (\varkappa = 1, \ldots, l). \end{aligned} \right.$$

Die Berührungsbedingung selbst kann nicht von $x, y, y_\varkappa$ abhängen. Wir haben also nur noch x aus (3) zu eliminieren, oder auszudrücken, daß es eine gemeinsame Wurzel des Systems ist. Zunächst enthält unser System $l+1$ algebraische Gleichungen, so angeordnet, daß jede um einen Grad niedriger ist als die vorhergehende; man kann es infolgedessen ersetzen durch ein vollkommen äquivalentes System mit $l+1$ Gleichungen von dem Grade, der vorher der niedrigste war, also hier alle vom $(n-l-1)$-ten. Dann ist die Bedingung zu suchen, unter der alle Gleichungen des äquivalenten Systems eine gemeinsame Wurzel besitzen. Dazu ist sicher notwendig, daß je zwei eine Wurzel gemein haben. Resultantenbildung würde uns so $\frac{1}{2}\, l(l+1)$ notwendige Bedingungen liefern, alle vom Grade $2(n-l-1)$. Erst für $l = n-2$ werden es Mongesche Gleichungen zweiten Grades; ist $l = 1$, so erhalten wir eine Gleichung vom Grade $2(n-2)$. Das sind aber offenbar die beiden besonderen Fälle, in denen die notwendigen zugleich die hinreichenden Bedingungen sind. Enthält nämlich das System (3) überhaupt nur zwei Gleichungen, oder läßt es sich ersetzen durch ein äquivalentes System linearer Gleichungen, so drückt in beiden Fällen Resultantenbildung zwischen je zweien aus, daß alle Gleichungen eine Wurzel gemein haben. Die Betrachtung berechtigt uns, nach allen Scharen von ∞^n Kurven zu fragen, bei denen die Bedingungen für die Berührung $(n-2)$-ter Ordnung zweier unendlich benachbarten Kurven lauter Mongesche Gleichungen zweiten Grades sind. Wann dies eintritt, können wir auch ohne Kenntnis der endlichen Gleichungen der Kurvenschar entscheiden, nach einer Methode, die F. Engel in seinen Vorlesungen (Leipzig, Winter 1903/4) entwickelt und neuerdings (1905) in den Leipz. Ber. veröffent-

licht hat. Wir setzen also nur voraus, daß die Kurvenschar durch eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \omega\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

definiert ist, und behandeln der Reihe nach die Fälle $n = 3$, $n = 4$ und $n = 5$."

Wbg.

U. DINI. Studii sulle equazioni differenziali lineari. Annali di Mat. (3) **11**, 285-335; (Loro integrali normali) **12**, 179-262.

Die beiden vorliegenden Abhandlungen sind Fortsetzungen und Vervollständigungen zweier früheren Arbeiten des Verf. (Annali di Mat. (3) **2**, 297-324; **3**, 125-183), über die in F. d. M. **30**, 282-283, 1899, ausführlich berichtet worden ist. Sie basieren auf einer allgemeinen Formel für das Integral der in Rede stehenden Differentialgleichungen, welche vom Verf. in der ersten der früheren Abhandlungen aufgestellt worden war und in den beiden ersten Paragraphen der gegenwärtigen ersten Abhandlung in vereinfachter und für die anzustellenden Untersuchungen bequemerer Form rekapituliert wird. — Den hauptsächlichen Gegenstand der ersten Arbeit bildet die Untersuchung der Fälle, in denen eine lineare Differentialgleichung reguläre Integrale auch in der Umgebung solcher Punkte besitzt, in denen der Koeffizient des ersten Gliedes verschwindet, während die übrigen Koeffizienten in diesen Punkten bestimmt und endlich bleiben. Die vom Verf. erlangten allgemeinen Resultate werden insbesondere auf die Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung angewendet. — In der zweiten Arbeit wird der Fall betrachtet, wo in der vorgelegten Differentialgleichung

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = X$$

einige oder alle Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sowie X außer der gewöhnlichen unabhängigen Variable x, die im allgemeinen als reell angenommen wird, einen Parameter z enthalten, der auch komplexe Werte annehmen kann, und es werden ihre Integrale mittels der oben genannten allgemeinen Formel untersucht. Es ergeben sich unter anderem Verallgemeinerungen der von Sturm (Journ. de Math. **1** (1846)), von Stekloff (Toulouse Ann.) und Kneser (Math. Ann. **58**, 113 ff; F. d. M. **35**, 428, 1904) für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung angestellten Untersuchungen. Den Schluß bildet die Anwendung der erlangten Resultate auf die linearen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung.

Wbg.

L. SCHLESINGER. Über das Riemannsche Fragment zur Theorie der linearen Differentialgleichungen und daran anschließende neuere Arbeiten. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 219-228.

Verf. bespricht das Riemannsche Fragment „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten"

(Werke 1876, 357-369), dessen Hauptinhalt der Klassenbegriff gleichverzweigter Funktionssysteme und das Existenzproblem derselben bilden, sowie die daran sich anschließenden Arbeiten von Fuchs, Poincaré, Heun, Hirsch und insbesondere von dem Verf. selbst, dem es in neuester Zeit durch Nutzbarmachung der einschlägigen Arbeiten Volterras gelungen ist, das Existenzproblem in seiner vollen Allgemeinheit ganz in Riemannschem Sinne zu lösen. Über die diesbezüglichen Arbeiten ist in den F. d. M. an geeigneter Stelle berichtet worden. Wbg.

L. Schlesinger. Beiträge zur Theorie der Systeme linearer homogener Differentialgleichungen. J. für Math. 128, 263-297.

Die Untersuchungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, die Verf. im Anschluß an das Riemannsche Fragment (Werke 1892, 379-390) seit 1895 verfolgt, haben ihn zu der Einsicht geführt, daß die Mehrzahl der in dieser Theorie auftretenden substitutionen- und gruppentheoretischen Fragen in viel eleganterer und tiefergehender Weise behandelt werden kann, wenn man dieselben statt an eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung an ein System von n homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung anknüpft. Es ist jedoch nicht dieser Gesichtspunkt allein, der den Verf. veranlaßt, auf die in den letzten Jahrzehnten so vielfach (von Sauvage, Koenigsberger, Grünfeld, Horn u. a.) behandelte Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen zurückzukommen; einen anderen Anlaß hierfür bietet die Frage nach der Existenz der Lösungen solcher Systeme. — Man hat seit dem Erscheinen der klassischen Arbeiten von Fuchs die Existenz der Lösungen linearer Differentialgleichungen für den Fall einer komplexen unabhängigen Variable fast ausschließlich dadurch bewiesen, daß man in der Umgebung regulärer oder solcher singulären Stellen, wo die Integrale nicht unbestimmt werden, Reihenentwicklungen aufstellte, deren Konvergenz dann mit Hülfe des calcul des limites oder anderer mehr direkter Methoden zu erhärten war. Dieses dem Gedankenkreise der Cauchy-Weierstraßschen Funktionentheorie angehörige Verfahren erscheint in der weiteren Entwicklung der Theorie, die ja — wie schon Fuchs in seiner ersten Arbeit betont — wesentlich im Sinne der von Riemann in seiner Dissertation aufgestellten Prinzipien erfolgt, als fremdartiges Element, und zwar namentlich darum, weil dieses Verfahren nicht die Art und Weise erkennen läßt, wie sich die den linearen Differentialgleichungen genügenden monogenen Integralfunktionen aus ihren reellen und imaginären Teilen zusammensetzen. Verf. entwickelt daher eine Methode für jene Existenzbeweise, die sich auf die Anwendung des Cauchy-Lipschitzschen Verfahrens für den Fall einer reellen unabhängigen Veränderlichen stützt, um dann, schrittweise dem von Riemann für die Definition des Integrals einer monogenen Funktion einer komplexen Variable angegebenen Wege folgend, zu dem Falle einer komplexen unabhängigen Variable aufzusteigen. Soweit es sich um den Fall reeller Variabeln handelt, deckt sich diese Methode mit derjenigen, die Volterra

in der ersten seiner beiden Abhandlungen (Mem. d. Soc. Ital. d. Scienze **6**, 1887; **12**, 1899. Vgl. Rom. Acc. L. Rend. (4) **3**, 393, 1887 und Palermo Rend. **2**, 69, 1888) für das von ihm sogenannte „integrale destro di una sostituzione“ auseinandergesetzt hat. — Eine besondere Betrachtung erfährt der Fall, wo die Elemente der Integralmatrix in den singulären Punkten nicht unbestimmt werden. Den Schluß der Abhandlung bilden einige Bemerkungen formaler Natur über die einem Differentialsysteme assoziierten Systeme. Wbg.

L. Schlesinger. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das Riemannsche Problem. (III.) J. für Math. **130**, 26-46.

Die vorliegende Abhandlung unterscheidet sich von den beiden früher unter demselben Titel veröffentlichten Arbeiten (A. 1. J. für Math. **123**, 138 ff; A. 2. **124**, 292 ff) namentlich dadurch, daß die Theorie der Systeme homogener linearer Differentialgleichungen als ein naturgemäßes und wichtiges Hülfsmittel herangezogen wird. Der von Riemann (Fragment, Werke 1892, 379 ff) eingeführte Begriff der Funktionssysteme einer Klasse weist mit Notwendigkeit auf dieses Hülfsmittel hin, und dasselbe bewährt sich, indem es einerseits gelingt, die Invarianten einer solchen Klasse durch die Koeffizienten eines linearen Differentialsystems in sehr einfacher Weise darzustellen, und andrerseits dieser letztere Umstand es ermöglicht, den Existenzbeweis für die durch das Riemannsche Problem (A. 1., 160) postulierten Funktionssysteme ganz allgemein zu erbringen, also ohne daß es nötig wäre, den vorgeschriebenen Fundamentalsubstitutionen die als Konvergenzbedingungen bezeichneten (A. 1., 147) Beschränkungen aufzuerlegen. — Verf. liefert diesen Existenzbeweis hier zunächst mit Hülfe der méthode de continuité, welche Poincaré (Acta Math. **4**, 233 ff.) für die Lösung des Fundamentalproblems der Theorie der Fuchsschen Funktionen ausgebildet hat, bemerkt aber, daß die Prinzipien, die er (J. für Math. **128**, 263 ff., siehe das vorangehende Referat) für die Untersuchung der reellen und imaginären Bestandteile eines Fundamentalsystems von Lösungen eines linearen Differentialsystems entwickelt hat, die Möglichkeit eröffnen, auch andere Methoden für den in Rede stehenden Existenzbeweis dienstbar zu machen, wie Verf. in einer vierten Abhandlung für die von Riemann selbst in dem Fragmente aufgestellte allgemeinere Fassung des Problems näher auszuführen gedenkt. — Durch die Resultate der vorliegenden Arbeit ist auch die zwischen Brodén und dem Verf. (J. für Math. **125**, 28 ff.) erörterte Frage der Verallgemeinerung des Riemannschen Problems als allgemein erledigt zu betrachten. Wbg.

E. Cunningham. Note on a proposition stated by Schlesinger. Messenger (2) **34**, 144-145.

Der betreffende Satz steht im § 95 des ersten Bandes von Schlesingers „Theorie der linearen Differentialgleichungen.“ Zunächst

wird die Unrichtigkeit des betreffenden Satzes an dem Beispiele einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung dargetan; dann wird die Quelle des Fehlschlusses aufgesucht. Lp.

E. Cunningham. An extension of Borel's exponential method of summation of divergent series applied to linear differential equations. Lond. M. S. Proc. (2) 3, 157-169.

Die vorliegende Untersuchung bezweckt, den Zusammenhang zwischen der Laplaceschen Lösung linearer Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten vom Range 1 in der Umgebung von $z=\infty$ durch ein bestimmtes Integral und der Entwicklung dieser Lösung in eine im allgemeinen divergente Potenzreihe mit einem Exponentialfaktor mehr zu präzisieren, als dies bisher geschehen (Poincarés „asymptotische Darstellungen", Acta Math. 8, 296), und zwar auf Grund der Borelschen Theorie der summierbaren divergenten Reihen (Leçons sur les séries divergentes, 97 ff.). Verf. gelangt zu dem Resultat, daß eine absolut summierbare Normalreihe, welche einer Differentialgleichung formal genügt, ein einziges Integral dieser Gleichung definiert, und daß diese Reihen in einem gewissen Bereich addiert, multipliziert und differenziert werden können, als wenn sie absolut konvergent wären; diese Reihen sind gleichzeitig asymptotische Darstellungen der bestimmten Integrale. — Zwei Sätze mögen noch hervorgehoben werden: 1. Wenn zwei Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten vom Range 1 formal durch eine und dieselbe Normalreihe befriedigt werden, so haben sie eine gemeinsame Lösung, auch wenn diese Reihe divergent ist. 2. Zwei Laplacesche Gleichungen, d. h. solche mit linearen Koeffizienten, können nicht durch eine gemeinsame Normalreihe befriedigt werden. Wbg.

T. Brodén. Über eine Verallgemeinerung des Riemannschen Problems in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Acta Math. 29, 273-294.

Bekanntlich rührt von Riemann folgende Aufgabe her: Es seien in der Ebene einer Variable x σ von $x=\infty$ verschiedene Stellen $e_1, e_2, \dots, e_\sigma$ gegeben und andrerseits σ lineare homogene Substitutionen in n Veränderlichen: $A_1, A_2, \dots, A_\sigma$; dann sollen n monogene Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_n$ von x bestimmt werden, welche beim Überschreiten, in positiver Richtung, von σ die x-Ebene zerschneidenden Schnitten $(e_1\infty), (e_2\infty), \dots, (e_\sigma\infty)$ bzw. die Substitutionen $A_1, A_2, \dots, A_\sigma$ erleiden, sonst aber im Endlichen durchgehends holomorph sind, während überdies die Stellen $e_1, \dots, e_\sigma$ sowie auch $e_{\sigma+1}=\infty$ den „Charakter der Bestimmtheit" aufweisen. Diese Aufgabe ist im wesentlichen mit der folgenden gleichbedeutend: es soll eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung der Fuchsschen Klasse bestimmt werden, für welche einerseits

die im Endlichen liegenden Verzweigungsstellen, andrerseits die Monodromiegruppe vorgeschrieben sind. Hieran knüpft sich zunächst die Frage nach der Existenz von Funktionen (bzw. Differentialgleichungen) der verlangten Art. Diese Existenzfrage war bisher nur unter einer sehr wesentlichen Spezialisierung in strenger Weise entschieden worden, indem Schlesinger (J. für Math. **123**, 138 ff.) zeigte, daß dieselbe zu bejahen ist, wenn die von ihm sogenannten „Konvergenzbedingungen" erfüllt sind; inzwischen ist es Schlesinger gelungen, seinen Existenzbeweis von diesen Beschränkungen zu befreien (C. R. **138**, 955-956 u. J. für Math. **130**, 26 ff.). In der vorliegenden Arbeit wird nicht diese Riemannsche Frage in unveränderter Form behandelt, sondern eine etwas allgemeinere, in welcher weniger verlangt wird: der Charakter der Bestimmtheit an den Stellen e_i wird nicht länger gefordert. Die zugehörige zu bestimmende lineare Differentialgleichung hat dann eindeutige, im allgemeinen aber nicht rationale Koeffizienten. Die Frage nach der Lösbarkeit der hiermit angegebenen Aufgabe wird vom Verf. auf den Fall $n=2$ zurückgeführt. Oder eigentlich noch mehr: es wird gezeigt, daß die Existenzfrage in ihrer vollen Allgemeinheit zu bejahen ist, falls für $n=2$ gewisse, im wesentlichen nur durch Ungleichheiten charakterisierte Voraussetzungen überhaupt mit der Existenz von zwei Funktionen der verlangten Art verträglich sind. Und der Beweis hierfür wird so geführt, daß für die n Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gewisse analytische Ausdrücke hervorgehen, welche die postulierten, auf den Fall $n=2$ sich beziehenden Funktionen enthalten. Diese Ausdrücke sind Quotienten, deren Zähler als Modifikationen der Poincaréschen ζ-Reihen bezeichnet werden können. — Der Existenzbeweis für den Fall $n=2$ steht noch aus. Wbg.

F. Schottky. Über die Konvergenz einer Reihe, die zur Integration linearer Differentialgleichungen dient. Berl. Ber. 1905, 808-815.

Ist $D(y) \equiv \frac{d^n y}{du^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{du^{n-1}} + \cdots + P_n y = 0$ die vorgelegte Differentialgleichung, in welcher die Koeffizienten P_ν im Kreise $|x| < R$ reguläre Funktionen von $x = e^u$ sind, so wird

$$D(x^\varrho) = x^\varrho f(x, \varrho).$$

$f(\varrho)$ sei der Wert von $f(x, \varrho)$ für $x=0$; $f(x, \varrho)$ und $f(\varrho)$ sind ganze Funktionen n-ten Grades von ϱ, ihre Differenz höchstens vom $(n-1)$-ten Grade. — Es wird nun eine Funktion

$$G(x, \varrho) = g_0 x^\varrho + g_1 x^{\varrho+1} + g_2 x^{\varrho+2} + \cdots \qquad \left(g_0 = \frac{1}{f(\varrho)}\right)$$

aufgestellt, welche der Gleichung $D(y) = x^\varrho$ genügt, und gezeigt, daß $G(x, \varrho)$, abgesehen von singulären Werten von ϱ, für $|x| < R$ konvergiert und sich auch nach Potenzen von $\tau = \varrho - \alpha$ entwickeln läßt. Das konstante Glied dieser Entwicklung genügt der Gleichung $D(y) = x^\alpha$ und die Koeffizienten der negativen Potenzen, die für singuläre Werte α

auftreten, der Gleichung $D(y) = 0$. Man erhält so unendlich viele Integrale von $D(y) = 0$, da unendlich viele singuläre Punkte existieren. Von diesen werden aber nur diejenigen beibehalten, die zu Wurzeln der Gleichung $f(\varrho) = 0$ gehören. Ist α eine einfache Wurzel, so wird ihr der Koeffizient von τ^{-1} in der Entwicklung von $G(x, \alpha + \tau)$ als entsprechendes Integral zugeordnet; ist α eine k-fache Wurzel, so werden ihr die Koeffizienten von $\tau^{-1}, \tau^{-2}, \ldots, \tau^{-k}$ zugeordnet. Jede dieser k Funktionen und jedes lineare Aggregat derselben läßt sich darstellen als Wert eines Ausdruckes $x^a \Phi(x, u)$ für $x = e^u$, wo $\Phi(x, u)$ eine ganze Funktion von u und zugleich eine im Kreise $|x| < R$ reguläre, durch x nicht teilbare Funktion von x ist. Den sämtlichen Wurzeln der Gleichung $f(\varrho) = 0$ entsprechen auf diese Weise n Integrale, von denen bewiesen wird, daß sie linear unabhängig sind. Die auseinandergesetzte Methode läßt sich schon auf Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten anwenden. Wbg.

A. Gutzmer. Kurze Bemerkung über gewisse lineare Differentialgleichungen. Deutsche Math. Ver. **14**, 450-453.

A. Gutzmer. Zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen. Verh. Naturf. Ges. Breslau. $\mathbf{2}_1$, 8.

Verf. entwickelt zur Beantwortung der Frage, welche Bedingungen die Koeffizienten einer linearen homogenen Differentialgleichung erfüllen müssen, damit sie zwei zueinander reziproke Integrale y_1 und y_2 $(y_2 = 1/y_1)$ besitze, eine Methode, welche auf ein Eliminationsproblem führt, und wendet dieselbe auf reziproke Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung an. — Für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist das Resultat bekannt (vgl. Fuchs, J. für Math. **81**, 117-118; Wallenberg, J. für Math. **111**, 95). Wbg.

M. Bôcher. Linear differential equations with discontinuous coefficients. Annals of Math. (2) **6**, 49-63.

Bei der Untersuchung der einfachen harmonischen Schwingungen eines gespannten Drahtes, dessen Querschnitt sich in einigen Punkten plötzlich ändert, oder bei dem analogen Problem des Wärmeflusses in einem Stabe von ähnlichem Charakter wird man auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung geführt, deren Koeffizienten diskontinuierliche Funktionen der reellen Veränderlichen x sind. Solche „endliche Unstetigkeiten" oder selbst kompliziertere, wie z. B. $x = 0$ für $\sin(1/x)$, die in den Koeffizienten der Differentialgleichung auftreten, können nicht in eigentlichem Sinne als singuläre Punkte der Differentialgleichung angesehen werden, da die einzige Besonderheit, welche sie in den Lösungen derselben hervorrufen, eine Diskontinuität in der zweiten Ableitung ist. Dasselbe trifft zu, wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung Diskontinuitäten besitzen, in denen sie aufhören, endlich zu bleiben, falls nur die Integrale der absoluten Werte der Koeffizienten, über solche

Diskontinuitätspunkte erstreckt, konvergieren. Die Beweise der Fundamentaltheoreme über lineare Differentialgleichungen können in solcher Form gegeben werden, daß sie alle diese Fälle umfassen; und, was wichtig ist, die größere Allgemeinheit involviert nicht ein Anwachsen der materiellen Schwierigkeiten des Beweises. In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. eine solche Behandlung, indem er sich der Einfachheit der Darstellung wegen auf die Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschränkt; doch gestattet die angewandte Methode eine unmittelbare Ausdehnung auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. — Inhalt: 1. Vorbereitungen und Definitionen. 2. Das Existenztheorem (American M. S. Bull. (2) **5**, 1899; American J. **24**, 1902). 3. Differentialgleichungen, deren Koeffizienten einen Parameter λ enthalten. 4. Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Polynome in λ sind. 5. Ein allgemeiner Satz über die Wurzeln von Funktionen, welche Parameter enthalten, und seine Anwendung auf homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wbg.

I. Schur. Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **4**, 2-8.

Anknüpfend an eine Arbeit des Ref. (Arch. der Math. u. Phys. (3) **4**, 252 ff., 1903), beweist Verf. durch Verallgemeinerung des Begriffes des linearen homogenen Differentialausdrucks, nämlich durch Einführung eines symbolischen Differentialausdrucks der Ordnung n (mit unendlich vielen Koeffizienten), folgende zwei Sätze:

I. Ist $P(y) = p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y$ nicht von der Form cy, wo c eine Konstante bedeutet, so sind je zwei mit $P(y)$ vertauschbare lineare homogene Differentialausdrücke auch unter einander vertauschbar. (Für irreduzible $P(y)$ war dieser Satz bereits vom Ref. l. c. 259 bewiesen worden.)

II. Sind

$$P(y) = p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y \; (n > 0),$$

$$Q(y) = q_0 \frac{d^m y}{dx^m} + q_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m y$$

zwei vertauschbare lineare homogene Differentialausdrücke, so ist q_λ eine ganze rationale Differentialfunktion von $p_0^{\frac{1}{n}}, p_0^{-1}, p_1, \ldots, p_n$. Wbg.

Thora Groth. Om Dekompositionen af lineäre homogene Differentsudtryk. Nyt Tidss. for Math. **16** B, 1-6.

Übertragung eines Beweises von E. Landau aus J. für Math. **124**, 115-120 (F. d. M. **32**, 312, 1901: Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreduzible Faktoren) auf Differenzenausdrücke. V.

A. Chessin. On a class of differential equations. American J. **27**, 103-112.

Bezeichnet $D^{(n)}$ die Operation

$$A_0 \frac{d^n}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{d}{dx} + A_n,$$

worin die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ Funktionen von x sind, so kann die Integration der linearen Differentialgleichung mn-ter Ordnung

$$y_m + a_1 y_{m-1} + a_2 y_{m-2} + \cdots + a_m y_0 = f(x),$$

worin die a_i Konstanten sind und

$$y_k = D^{(n)} y_{k-1}, y_0 = y \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

ist, auf die Integration einer Gleichung von der Form $D^{(n)} y = f(x)$ zurückgeführt werden. Ein wichtiges Beispiel hierzu kommt in einigen Problemen der Elastizität vor, nämlich $n = 2$ und

$$D^{(2)} \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{p^2}{x^2}.$$

Das Problem läßt sich in diesem Falle auf die Integration der nichthomogenen Besselschen Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(\frac{p^2}{x^2} - \lambda\right) y = f(x)$$

reduzieren (vgl. C. R. **135**, 678-679 und **137**, 511-512; F. d. M. **33**, 344, 1902 und **34**, 370, 1903). Wbg.

Ch. J. de la Vallée Poussin. Sur la réduction des équations différentielles linéaires à une inconnue. Brux. S. sc. **29** A, 63-67.

Wenn man p verschiedene Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung kennt, kommt die Integration dieser Gleichung auf die einer homogenen Gleichung $(n-p)$-ter Ordnung zurück und auf $p(n-p)$ Quadraturen. Zur Integration einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung sind noch weitere n Quadraturen erforderlich. Diese Fassung ist genauer als die der Lehrbücher der Analysis, in denen jene Zurückführung auseinandergesetzt wird. Mn. (Lp.)

A. Dynnik. Erniedrigung der Ordnung der linearen Differenzen- und Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Kiew Polyt. **5**, Heft 2, 1-21. (Russisch.)

Das bekannte Thema wird durch Beispiele erläutert. Si.

G. A. Bliss. The solutions of differential equations of the first order as functions of their initial values. Annals of Math. (2) **6**, 49-68.

In den meisten älteren Lehrbüchern über Differentialgleichungen wird lediglich der Existenzbeweis für die Lösungen der Differentialgleichung $dx/dt = f(t, x)$ gegeben. In vielen Anwendungen ist jedoch das bloße Existenztheorem nur von geringem Wert, wenn es nicht mit einem Beweise der Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Lösung, als Funktion der Anfangswerte betrachtet, verbunden ist. — Verf. sammelt in der vorliegenden Arbeit die etwas zerstreute Literatur über diesen Gegenstand und vereinfacht so viel als möglich die Beweise. Die Lösungen werden innerhalb desjenigen geschlossenen Bereiches definiert, in welchem die Eigenschaften der Funktion f angenommen werden, und die Beweismethode von Peano (Torino Atti **33**, 9 ff.) für die Existenz und Stetigkeit der ersten partiellen Ableitungen in bezug auf die Anfangswerte wird durch einen einfachen Kunstgriff auf die höheren Ableitungen ausgedehnt. Inhalt: 1. Die Existenz der Lösungen. 2. Unität der Lösung. 3. Stetigkeit der Lösungen in bezug auf die Anfangswerte. 4. Partielle Ableitungen in bezug auf die Integrationskonstanten. 5. Komplexe Zahlen (Definitionen!), als Mittel zur Ausdehnung der bisherigen Resultate auf 6. Systeme von Differentialgleichungen. 7. Unität und Stetigkeit der Lösungen für ein Gleichungssystem. 8. Lineare Gleichungssysteme. 9. Partielle Ableitungen eines Systems von Lösungen.

Wbg.

W. A. Anissimov. Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit die Null- und Unendlichkeitsstellen des Eulerschen Multiplikators der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades mit Koeffizienten von algebraischem Charakter partikulare Lösungen der Gleichung seien. Moskau Math. Samml. **25**, 509-534. (Russisch.)

Der schon von L. Euler (Inst. calc. int. III.) bemerkte Zusammenhang zwischen den Null- und Unendlichkeitsstellen des integrierenden Faktors und den partikularen Lösungen der Gleichung (1) $Mdx + Ndy = 0$ wird hier genauer geprüft; es wird vorausgesetzt, daß M, N und der integrierende Faktor μ von algebraischem Charakter seien, und es ergibt sich: 1. Damit die Nullwerte $y = \varphi(x)$, oder $x = \psi(y)$ des Eulerschen Multiplikators μ der reduzierten Gleichung (1) ihre partikularen Lösungen seien, ist es notwendig und hinreichend, daß beide Koeffizienten M, N für diese Werte weder Null, noch unendlich werden. 2. Damit dasselbe für die Unendlichkeitswerte $y = \varphi(x)$ oder $x = \psi(y)$ von μ gelte, ist auch im allgemeinen notwendig und hinreichend, daß M, N für $y = \varphi(x)$ $(x = \psi(y))$ weder Null, noch unendlich seien. Gehört aber $u = \sqrt[n]{y - \varphi(x)}$ zum Exponenten $\lambda = -1, -2, \ldots, -n-1$ (d. h. $\mu = u^\lambda \cdot \mu_1(x, u)$), so sind noch weitere Bedingungen erforderlich von der

Form $P^{(-\lambda)}+\varphi' Q^{(-\lambda)}=0\,(y=\varphi(x))$ oder $Q^{(-\lambda)}+\psi' P^{(-\lambda)}=0\,(x=\psi(y))$. 3. Für die Null- oder Unendlichkeitsstellen der Form $y=b$ wird die betreffende Bedingung, daß $u=\sqrt[n]{y-b}$ für M eine Nullstelle von der Ordnung r, für N eine Unendlichkeitsstelle von der Ordnung s und $r+s\geqq n$ ist; für $x=a$ umgekehrt, daß $u=\sqrt[n]{x-a}$ für M eine Unendlichkeitsstelle der Ordnung r, für N eine Nullstelle der Ordnung s ist und $r+s\geqq n$. Si.

A. N. Korkin. Über die Abhandlung von W. P. Ermakov: Differentialgleichungen erster Ordnung, welche einen gegebenen Multiplikator von faktorieller Form besitzen. Charkow Ges. (2) **9**, Nr. 2, 51-59. (Russisch.)

Berichtigung der Ausführungen von W. P. Ermakov (vgl. F. d. M. **35**, 335, 1904). Si.

H. Dulac. Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage de conditions initiales singulières quelconques. Ann. de l'Univ. de Grenoble **17**, 1-51.

Fortsetzung der Untersuchungen, über welche in F. d. M. **35**, 331-334, 1904, berichtet ist. Die meisten Resultate, die dort für den Fall eines Schnittpunktes einfachster Art erhalten wurden, erfahren jetzt eine Ausdehnung auf den Fall eines Schnittpunktes von beliebiger Ordnung. Lp.

M. Chini. Sopra una particolare equazione differenziale del 1° ordine. Torino Atti **40**, 4-17.

In einer früheren Note (Lomb. Ist. Rend. (2) **36**, 1035-1046; F. d. M. **34**, 365, 1903) hatte Verf. eine große Klasse von Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx}=a_0+a_1 y+a_2 y^2+a_3 y^3$$

behandelt, welche durch die Existenz einer linearen Relation zwischen drei Partikularintegralen charakterisiert waren, und hatte den Ausdruck des allgemeinen Integrales derselben angegeben. — In der vorliegenden Arbeit untersucht er diejenigen Differentialgleichungen der obigen Form, welche als integrierenden Faktor einen Ausdruck von der Form $(y-x_1)^{m_1}(y-x_2)^{m_2}(y-x_3)^{m_3}$ zulassen, worin m_1, m_2, m_3 Konstanten und x_1, x_2, x_3 Funktionen von x sind (vgl. Darboux, Théorie des surfaces **4**, 447). Diese Untersuchung bietet keine theoretischen Schwierigkeit, aber von Wert ist die vom Verf. bewiesene Tatsache, daß man die Koeffizienten der fraglichen Differentialgleichungen durch Quadraturen allein bestimmen kann. In dem besonderen Falle, wo der integrierende

Faktor von der Form $(y - x_1)^{m_1}(y - x_2)^{m_2}$ ist, gehören die Differentialgleichungen zur Kategorie der oben angegebenen, und der Ausdruck ihres allgemeinen Integrales läßt sich sofort angeben ohne Benutzung eines integrierenden Faktors. Wbg.

A. Koppisch. **Zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung.** Diss. Greifswald. Leipzig: B. G. Teubner. 34 S.

„Jeder gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(1) \qquad y'' = \omega(x, y, y'), \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

können wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(2) \qquad b'' = \varphi(a, b, b'), \quad b' = \frac{db}{da}, \quad b'' = \frac{d^2b}{da^2}$$

zuordnen, indem wir in der vollständigen Integralgleichung

$$(3) \qquad y = f(x, a, b)$$

der Differentialgleichung (1) x, y als konstante Größen, dagegen a, b als Parameter auffassen. Die Gleichung (3) bleibt Integralgleichung von (1), wenn wir die Größen a, b einer beliebigen Punkttransformation unterwerfen. Infolgedessen müssen wir der Gleichung (1) außer der Gleichung (2) in gleicher Weise jede Differentialgleichung zuordnen, die aus (2) durch Ausführung jeder beliebigen Punkttransformation hervorgeht. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich damit, die Bedingungen zu ermitteln, denen $\omega(x, y, y')$ genügen muß, damit die der Differentialgleichung (1) entsprechenden Differentialgleichungen (2) einer bestimmten, bei der Gruppe aller Punkttransformationen invarianten Kategorie von Differentialgleichungen angehören. Eine solche Kategorie bilden alle Differentialgleichungen von einer bestimmten Form, in denen b'' in solcher Weise von b' abhängt, daß der Zusammenhang zwischen beiden bei der Gruppe aller Punkttransformationen invariant bleibt. Es ist dabei jedoch keineswegs notwendig, daß sich jede einzelne Gleichung der Kategorie durch eine Punkttransformation in jede andere Gleichung der Kategorie überführen läßt.“ — Kap. I. Invariante Kategorien von Differentialgleichungen. Kap. II. Der einfachste Fall: b'' ist eine ganze rationale Funktion von b'. Kap. III. Zweiter Spezialfall: b'' ist eine rationale Funktion von b'. Wbg.

C. Severini. **Sopra gl'integrali delle equazioni differenziali ordinarie d'ordine superiore al primo, con valori prestabiliti in punti dati.** Torino Atti **40**, 853-869.

C. Severini. **Sopra gl'integrali delle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine con valori prestabiliti in due punti dati.** Torino Atti **40**, 1035-1040.

In der ersten Arbeit gibt Verf. unter anderem eine Methode an (§ 3), ein ganzes rationales Polynom herzustellen, welches geeignet ist, mit beliebiger Annäherung das Integral einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right)$$

darzustellen, welches in zwei gegebenen Punkten bestimmte Werte annimmt. Er bedient sich zu diesem Zwecke der Methode der sukzessiven Approximationen (Picard, Traite d'Analyse **3**, 94); während aber diese Methode nur verlangt, daß die Funktion $f(x, y, y')$ der reellen Veränderlichen x, y, y' reell, eindeutig, endlich, durchaus stetig sei und die bekannte Bedingung von Lipschitz erfülle, setzt Verf. außerdem die Existenz endlicher und durchaus stetiger partieller Ableitungen $\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y}$ $\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}$ voraus. — In der zweiten Arbeit wird dasselbe Problem unter den genauen Bedingungen Picards gelöst. Wbg.

A. Hamburger. Über die Restabschätzung bei asymptotischen Darstellungen der Integrale linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diss. Berlin. 59 S.

Poincaré (American J. **7**, 1885; Acta Math. **8**, 1886) hat für Fälle größerer Allgemeinheit divergente Reihen zur Darstellung von Funktionen benutzt und dabei die Definition der asymptotischen Darstellung gegeben, welche die früher bekannten Fälle dieser Art wie die Maclaurinsche Summenformel, die semikonvergenten Reihen in der Theorie der Besselschen Funktionen und die Stirlingsche Reihe mitumfaßt. Auch die irregulären Integrale einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten lassen sich nach Poincaré in der Umgebung eines singulären Punktes, für welchen $x=\infty$ angenommen werden kann, asymptotisch darstellen. Zur Herleitung und zum Beweise der asymptotischen Darstellung benutzt er die Darstellung einer partikularen Lösung y_i der vorgelegten Differentialgleichung durch ein bestimmtes Integral $\int v(z)\, e^{zx}\, dz$ nach der Laplaceschen Methode; hierbei ist der Integrationsweg und die Funktion v vollkommen bestimmt. Durch formelle Reihenentwicklung unter dem Integralzeichen und darauf folgende Integration wird die asymptotische Darstellung von $\frac{y_i}{e^{\alpha_i x}\, x^{\beta_i}}=\varphi_i(x)$ gefunden. Diese Reihenentwicklung war bereits in älteren Arbeiten für den Fall der Besselschen Differentialgleichung behandelt worden (Hankel, Math. Ann. **1**). Dabei war auch die Frage beantwortet worden, welchen Fehler man begeht, wenn man für ein endliches reelles oder komplexes x

an Stelle der Funktion $\varphi_i(x)\,(i=1,2)$ die ersten $n+1$ Terme ihrer asymptotischen Darstellung setzt. Diese Frage wurde in neuerer Zeit von W. Jacobsthal (Diss. 1899, Math. Ann. **56**) in bezug auf die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha+\beta+x)\frac{dy}{dx}+\alpha y=0$$

beantwortet. — Poincaré hat gezeigt, wie die Laplacesche Transformation ausgedehnt werden kann auf alle Fälle, wo die Koeffizienten einer linearen Differentialgleichung rationale Funktionen von x sind. Eine Ausdehnung der Laplaceschen Transformation auf den Fall, wo die Koeffizienten nur durch Potenzreihen gegeben sind, ist dagegen nicht bekannt. Um für die Integrale der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(A)\quad \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots\right)+u\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\cdots\right)=0,$$

deren Koeffizienten Potenzreihen sind, die in der Umgebung von $x=\infty$ konvergieren, die asymptotische Darstellung herzuleiten, waren daher andere Methoden erforderlich. Zuerst wurde eine solche Herleitung von Kneser durchgeführt unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten der Potenzreihen reell sind, und daß die Variable x reell bleibt. Auf anderem Wege gelangte später Horn zur asymptotischen Darstellung im allgemeinen Falle.

Die in der vorliegenden Dissertation durchgeführten Untersuchungen knüpfen an die Arbeiten von Kneser an; sie bezwecken eine Ergänzung zu einigen der Resultate, die dieser in vier Abhandlungen (J. für Math. **116**, 178-212; **117**, 72-103; **120**, 267-275; Math. Ann. **49**, 383-399) niedergelegt hat. Durch die Substitution $y=ue^{\frac{1}{2}\int\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots\right)dx}$ wird die Differentialgleichung (A) auf die Form

$$(B)\qquad y''=y\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right)$$

gebracht. Verf. stellt zunächst allgemein eine Reihenentwicklung auf, die formal der Differentialgleichung (B) genügt, und betrachtet die Formen, die man ihr geben kann, wenn bestimmte Voraussetzungen über die Realität der Koeffizienten getroffen werden; sodann setzt er diese Reihen mit gewissen Integralen von (B) in Beziehung (§ 1). Diese Integrale werden durch die Reihen asymptotisch dargestellt. Verf. schätzt den Rest der asymptotischen Darstellung ab in den Fällen, die Kneser behandelt hat (§§ 2, 3). Den Schluß bildet die Abschätzung des Restes im allgemeinen Falle (§ 4). Wbg.

P. Burgatti. Sugli integrali singolari delle equazioni a derivate ordinarie del second' ordine. Palermo Rend. **20**, 256-264.

Verf. untersucht für Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Ordnung der Berührung zwischen den singulären Integralen erster und

zweiter Art und den gewöhnlichen Integralen, sowie die Art, die einen aus den anderen zu erhalten, und illustriert seine Methode an einigen Beispielen. Wbg.

M. Böcher. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre à solution périodique. C. R. **140**, 928-931.

Picard hat sich der Methode der sukzessiven Approximationen bedient, um einige der Sturmschen Theoreme über die reellen Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu beweisen. Neuerdings hat Mason (Diss. Göttingen; F. d. M. **34**, 354, 1903) die Prinzipien der Variationsrechnung angewandt, um dieselben und andere analoge Sätze zu beweisen. Der Vorzug dieser beiden Methoden besteht in ihrer Ausdehnungsfähigkeit auf partielle Differentialgleichungen. Dagegen ist gerade für totale lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung die einfache Sturmsche Methode (Journ. de Math. **1**, 182) viel allgemeiner und auf alle von Picard und Mason behandelten Fälle anwendbar. Nur im Falle der periodischen Lösungen schien die Masonsche Methode den Vorrang zu behaupten. Verf. zeigt nun in der vorliegenden Note, wie auch in diesem Falle die Sturmsche Methode mit Vorteil anzuwenden ist, indem er ihn als einfaches Korollar der einfachsten Fälle behandelt. Wbg.

H. A. Webb. On the convergence of infinite series of analytic functions. Lond. Phil. Trans. (A) **204**, 481-497. Abstract: Lond. R. S. Proc. **74**, 315-317.

Ungeachtet des sehr allgemeinen Titels geht die Abhandlung von einem ziemlich speziellen Ausgang aus, nämlich von den durch die Differentialgleichung $d^2y/dz^2 + k^2\,Qy = 0$ definierten Funktionen, bei denen k sehr groß ist und Q in erster Näherung eine von k unabhängige Funktion von z bedeutet, genauer aber $= Q_0 + Q_1/k + Q_2/k^2 + \cdots$ zu setzen ist, wo die Q Funktionen von z mit den üblichen Vorsichtsbedingungen für Konvergenz usw. sind. Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung läßt sich leicht in Form einer unendlichen Reihe von Funktionen von z aufstellen, und es wird die Möglichkeit der Konvergenz solcher Reihen erörtert und die Anwendung der ermittelten Resultate auf spezielle Funktionen, wie Kugelfunktionen, Lamésche Funktionen und Besselsche Funktionen, untersucht. Ein weiterer Teil, der etwas mehr ins Spezielle geht, ist der Anwendung auf Darstellung nach hypergeometrischen Reihen gewidmet. Hier gedeiht die Darstellung bis zur Untersuchung einer Konvergenzellipse, die als konkreter Ausdruck für die Konvergenzmöglichkeit ermittelt wird. Br.

G. WALLENBERG. **Zur Theorie der Riccatischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.** J. für Math. **130**, 77-88.

Unter der Riccatischen Differentialgleichung zweiter Ordnung versteht Verf. die bereits von Vessiot (Toulouse Ann. **9**) und ihm selbst (J. für Math. **121**, 210-217) behandelte Differentialgleichung, deren allgemeines Integral die Form hat

$$(A) \qquad y = \frac{c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \eta_3}{c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + \zeta_3},$$

worin c_1 und c_2 die willkürlichen Konstanten sind. Diese Gleichung hat die Form

$$(B)\,(a_0 + y)\,y'' - 2y'^2 + (b_0 + b_1\, y)\,y' + d_0 + d_1\, y + d_2\, y^2 + d_3\, y^3 = 0,$$

worin d_0 und d_1 sich rational durch die übrigen Koeffizienten, welche Funktionen der unabhängigen Veränderlichen z sind, und durch die Ableitungen a'_0, a''_0, b'_0, b'_1 ausdrücken. Durch die Substitution $u = \frac{1}{a_0 + y}$ kann sie in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in u transformiert werden, deren allgemeines Integral bis auf einen Faktor in z die logarithmische Ableitung des allgemeinen Integrals einer homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung ist (a. a. O. 215).

I. a. Kennt man drei Partikularintegrale y_1, y_2, y_3 der Gleichung (B), so erfordert ihre Integration nur zwei Quadraturen. Das allgemeine Integral derselben läßt sich nämlich folgendermaßen schreiben:

$$y = \frac{c_1\, y_1 + c_2\, \lambda y_2 + c_3\, \mu y_3}{c_1 + c_2\, \lambda + c_3\, \mu},$$

wo

$$\lambda = \frac{a_0 + y_1}{a_0 + y_2}\, e^{\frac{1}{3}\int \frac{(b_0 - b_1 a_0 + 4a'_0)(y_1 - y_2)}{(a_0 + y_1)(a_0 + y_2)}\, dz},$$

$$\mu = \frac{a_0 + y_1}{a_0 + y_3}\, e^{\frac{1}{3}\int \frac{(b_0 - b_1 a_0 + 4a'_0)(y_1 - y_3)}{(a_0 + y_1)(a_0 + y_3)}\, dz}.$$

b. Kennt man vier Integrale y_1, y_2, y_3, y_4 der Gleichung (B), so kann ihre Integration ohne jede Quadratur ausgeführt werden; denn in diesem Falle drücken sich λ und μ mittels der Koeffizienten von (B) rational durch y_1, y_2, y_3, y_4 und ihre ersten Ableitungen aus.

c. Zwischen dem allgemeinen Integral und fünf Partikularintegralen der Gleichung (B) besteht die Relation:

$$\begin{vmatrix} c_1(y - y_1) & c_2(y - y_2) & y - y_3 \\ \gamma_1(y_4 - y_1) & \gamma_2(y_4 - y_2) & y_4 - y_3 \\ y_5 - y_1 & y_5 - y_2 & y_5 - y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

worin c_1 und c_2 willkürliche Konstanten, γ_1 und γ_2 numerische Konstanten sind. Diese Relation kann auf Gleichungen (B) von der Ordnung n

verallgemeinert werden; sie entspricht der Konstanz des anharmonischen Doppelverhältnisses von vier Integralen einer Riccatischen Differentialgleichung.

II. a. Ein erstes Integral der Gleichung (B) hat die Form

$$(C) \qquad c_1 = \alpha_1 \frac{y' + \alpha_{10} + \alpha_{11} y + \alpha_{12} y^2}{y' + \alpha_{30} + \alpha_{31} y + \alpha_{32} y^2} = \alpha_1 \frac{R_1}{R_3},$$

wo c_1 die willkürliche Konstante ist und die α Funktionen der unabhängigen Veränderlichen z sind, welche folgende zwei Bedingungen erfüllen:

1. Die Riccatischen Gleichungen $R_1 = 0$ und $R_3 = 0$ besitzen ein gemeinsames Integral, welches eine Wurzel der Gleichung $\delta_{10} + \delta_{11} y + \delta_{12} y^2 = 0$ $(\delta_{1k} = \alpha_{3k} - \alpha_{1k}\ (k = 0, 1, 2))$ ist.

2. $\alpha_1 = c \cdot e^{\int \sqrt{\Delta_1}\, dz}$, wo $\Delta_1 = \delta_{11}^2 - 4\delta_{10}\,\delta_{12}$ ist und $\sqrt{\Delta_1}$ dasselbe Vorzeichen wie die Wurzel in 1. hat.

Man kann auch sagen: Dafür, daß das allgemeine Integral der Riccatischen Differentialgleichung

$$y'(\alpha_1 - c_1) + (\alpha_1 \alpha_{10} - c_1 \alpha_{30}) + (\alpha_1 \alpha_{11} - c_1 \alpha_{31}) y \\ + (\alpha_1 \alpha_{12} - c_1 \alpha_{32}) y^2 = 0$$

eine linear gebrochene Funktion des Parameters c_1 ist, sind die Bedingungen (1) und (2) notwendig und hinreichend.

b. Zwischen den elf Koeffizienten der beiden ersten Integrale einer Gleichung (B):

$$(D) \qquad c_1 = \alpha_1 \frac{R_1}{R_3},\ c_2 = \alpha_2 \frac{R_2}{R_3}$$

bestehen folgende sechs Relationen. Die drei ersten werden durch die Bedingung geliefert, daß von den Riccatischen Gleichungen $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $R_3 = 0$ je zwei ein gemeinsames Integral besitzen müssen. Ferner ist

$$\alpha_1 = c e^{\int \sqrt{\Delta_1}\, dz},\ \alpha_2 = c' e^{\int \sqrt{\Delta_2}\, dz} \quad (\Delta_2 = \delta_{21}^2 - 4\delta_{20}\,\delta_{22},\ \delta_{2k} = \alpha_{2k} - \alpha_{3k});$$

endlich besteht die rein algebraische Beziehung

$$(\delta_{10}\,\delta_{22} - \delta_{20}\,\delta_{12})^2 - (\delta_{10}\,\delta_{21} - \delta_{20}\,\delta_{11})(\delta_{11}\,\delta_{22} - \delta_{21}\,\delta_{12}) = 0,$$

welche z. B. ausdrückt, daß das Integral (A) eine Folge der Gleichungen (D) ist. Man erhält bemerkenswerte Spezialfälle für $\Delta_1 = 0$ und für $\alpha_{12} = \alpha_{32} = 0$. Ein Auszug der vorliegenden Arbeit erschien in den C. R. **137** (F. d. M. **34**, 368, 1903). Wbg.

M. Mason. Sur l'équation différentielle $y'' + \lambda A(x) y = 0$. C. R. **140**, 1086-1088.

Verf. löst das frühere Spezialfälle umfassende Problem, in der Differentialgleichung $y'' + \lambda A(x) y = 0$ den Parameter λ so zu bestimmen, daß eine Lösung dieser Gleichung existiert, welche folgenden Bedingungen genügt:

$$\begin{cases} a_1\, y(x_1) + a_2\, y(x_2) + a_3\, y'(x_1) + a_4\, y'(x_2) = 0, \\ b_1\, y(x_1) + b_2\, y(x_2) + b_3\, y'(x_1) + b_4\, y'(x_2) = 0; \end{cases}$$

doch beschränkt er sich in der vorliegenden Note auf den Fall $d_{13} = d_{24}$, wo $d_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$ ist. Wbg.

G. Tzitzéica. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre renfermant un paramètre. C. R. **140**, 223-224; 492-493.

Durch Erweiterung einer von Picard angegebenen Methode löst Verf. in der ersten Note das folgende, von Mason (Diss. Göttingen 1903) behandelte Problem:

Wenn in der Differentialgleichung

$$(1) \qquad y'' + \lambda A(x) y = 0$$

die Funktion $A(x)$ im Intervall (a, b) positiv und ebenso wie ihre ersten beiden Ableitungen stetig ist, so sollen diejenigen Werte von λ gefunden werden, für welche die Gleichung (1) ein Integral $y(x)$ besitzt, welches ebenso wie seine erste Ableitung im Intervall (a, b) stetig und so beschaffen ist, daß $y'(a) = 0$ und $y'(b) = 0$ wird. — In der zweiten Note werden zwei andere von Mason (a. a. O.) behandelte Probleme mittels derselben Methode gelöst. Wbg.

R. Fuchs. Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre. C. R. **141**, 555-558.

Im Anschluß an die Arbeiten von L. Fuchs (Berl. Ber. 1888-1898) bestimmt Verf. die Form einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den wesentlich singulären Punkten $0, 1, t, \infty$, für welche die Koeffizienten der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem von Integralen bei Umläufen der unabhängigen Veränderlichen erleidet, beliebig und unabhängig von t sind, ein Problem, dessen Zusammenhang mit dem Riemannschen Problem evident ist. Wbg.

Ch. J. de la Vallée Poussin. Intégration de l'équation de Bessel

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2p}{t}\frac{dy}{dt} \pm y = 0$$

sous forme finie, lorsque p est un nombre entier positif. Brux. S. sc. **29** A, 140-143.

Eine gewisse Funktion befriedigt die allgemeinere Gleichung

$$(D^2 \pm 1)\, y + \frac{2p}{t} Dy = \frac{e^{tu}}{t}(u^2 \pm 1)^p;$$

diese wird zur Besselschen Gleichung, wenn die rechte Seite Null wird.

Mn. (Lp.)

J. HALM. On a group of linear differential equations of the second order, including Professor Chrystal's Seiche-equations. Edinb. Trans. **41**, 651-676.

Die Seiche-Gleichung von Chrystal

$$(1-w^2)\frac{d^2y}{dw^2}+n(n-1)y=0$$

und die Stokessche Gleichung

$$(1+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}+n(n+2)y$$

werden als besondere Fälle der Gleichung betrachtet:

$$(1-w^2)\frac{d^2y}{dw^2}-(2a+1)w\frac{dy}{dw}+n(n+2a)y=0,$$

und diese selbst ist ein besonderer Fall der hypergeometrischen Differentialgleichung. Lp.

K. ZAHRADNÍK. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Prag. Ber. 1905, Nr. 16, 5 S.

Das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung

$$y''+\varphi(x)y'+\psi(x)y=f(x)$$

stellt ein Kurvennetz dar. Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte im Punkte M aller durch diesen Punkt gehenden Integralkurven ist eine rationale Kurve dritter Ordnung. Die Wendetangenten der Kurven des Kurvennetzes in Punkten der Geraden $x =$ konst. bilden einen Strahlenbüschel. Pe.

H. LAURENT. Équation différentielle des courbes du troisième ordre. Nouv. Ann. (4) **5**, 211-213.

Ableitung der Differentialgleichung für die allgemeine Kurve dritter Ordnung durch Elimination der Konstanten nach neunmaliger Differentiation. Lp.

G. DARBOUX. Sur une équation différentielle du quatrième ordre. C. R. **141**, 415-417; 483-484.

In der ersten Note zeigt Verf., daß die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y' & y'' & y''' \\ y'' & y''' & y^{(IV)} \end{vmatrix} = 1$$

sich auf eine andere erster Ordnung zurückführen läßt, welche mittels einer früher von ihm angegebenen Methode (C. R. **86**; F. d. M. **10**, 214, 1878; Darboux Bull. (2) **2**) integriert werden kann. Diese gestattet, das allgemeine Integral mit Hülfe einer gewissen Anzahl von Partikularintegralen

herzustellen. — In der zweiten Note gibt Verf. zwei Mitteilungen von R. Liouville und J. Drach wieder: Durch Differentiation erhält man aus (1):

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y' & y'' & y''' \\ y''' & y^{(IV)} & y^{(V)} \end{vmatrix} = 0,$$

und diese Gleichung ist äquivalent mit der linearen Differentialgleichung $y''' + Ay' + By = 0$, worin A und B willkürliche Konstanten sind. Diese Methode läßt sich auf die Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y' & y'' & \dots & y^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} & \dots & \dots & y^{(2n)} \end{vmatrix} = e^{ax+b}$$

ausdehnen. Wbg.

D. F. Campbell. On homogeneous quadratic relations in the solutions of a linear differential equation of the fourth order. Quart. J. **36**, 296-304.

In einer früheren Arbeit (Quart. J. **31**, 161-192; F. d. M. **30**, 306, 1899) hatte Verf. den im Titel angegebenen Gegenstand mittels eines Eliminationsprozesses behandelt. In der vorliegenden Abhandlung erhält er dieselben Resultate mit Hülfe von Determinanten; die Methode ist zwar direkter, aber etwas schwerfällig. Übrigens scheint Verf. die diesbezüglichen Arbeiten von Goursat, Ludw. Schlesinger (Diss. Berlin 1887), Max Meyer (Diss. Berlin 1893) und dem Ref. (J. für Math. **113**, 1-41) nicht zu kennen. Wbg.

A. Davidoglou. Étude de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\left[\theta(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{dx^2} = k\varphi(x)y.$$

Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 539-565.

Der Differentialgleichung, deren Untersuchung den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet, begegnet man in der Theorie der schwingenden Stäbe (Rayleigh, Theory of sound, p. 240; Encykl. der math. Wiss. II, 4, 449). Im Falle $\theta(x) =$ konst. hat Verf. diese Gleichung in seiner These (Ann. de l'Ec. Norm. 1900; F. d. M. **31**, 769) untersucht; er hat dort die Existenz einer unendlichen Reihe ausgezeichneter Werte des Parameters k nachgewiesen und behandelt nun dasselbe Problem in dem allgemeinen Falle: Ist ein Intervall $a \dots b$ gegeben, so

existiert eine unendliche Reihe positiver k-Werte $k_1, k_2, \ldots$ und eine entsprechende Reihe von Integralen $y_1(x), y_2(x), \ldots$ derart, daß

$$\frac{d^2\left[\theta(x)\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right]}{dx^2} = k_i\,\varphi(x)\,y_i(x)$$

wird, daß ferner die Integralkurve $y_i(x)$ doppelte Tangente an Ox in $x = a$ und $x = b$ ist und $(i-1)$-mal zwischen a und b verschwindet. Die Untersuchungsmethode ist eine ganz andere als die in der These angewandte; insbesondere wird von den Schwarz-Picardschen Konstanten kein Gebrauch gemacht. Die ganze Untersuchung bezieht sich auf den Fall, daß der Stab in a und b eingeklemmt ist. Den Schluß der Arbeit bilden einige Bemerkungen über die periodischen Lösungen.

Wbg.

T. Levi-Civita. Sulla ricerca di soluzioni particolari dei sistemi differenziali. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**₁, 203-209.

In einer früheren Arbeit (Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{10}_1$, 3-9, 35-41 F. d. M. **32**, 721, 1901) hat Verf. eine konstruktive Regel für die partikularen Lösungen der kanonischen Differentialgleichungssysteme auf Grund der Kenntnis von Integralen oder invarianten Relationen derselben angegeben. In der vorliegenden Arbeit zeigt er durch Verallgemeinerung und gleichzeitige Vereinfachung, daß analoge Resultate für Differentialgleichungssysteme von beliebiger Form bestehen. Zu diesem Zweck genügt die analytische Präzisierung der folgenden, von geometrischem Gesichtspunkte aus unmittelbar einleuchtenden Bemerkung: Betrachtet man in dem Darstellungsraume der Integralkurven eines Differentialgleichungssystems irgend eine aus Integralkurven gebildete invariante Mannigfaltigkeit V, so ist die in V enthaltene Mannigfaltigkeit W, welche den Ort der Doppelpunkte von V darstellt, ebenfalls invariant.

Wbg.

Edm. Maillet. Sur les solutions des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients monodromes. C. R. **140**, 357-359.

Verf. stellt über das Differentialgleichungssystem

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dz} &= a_{1_1} x_1 + \cdots + a_{1_n} x_n, \\ &\;\;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dz} &= a_{n_1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n, \end{aligned}\right.$$

dessen Koeffizienten in der Umgebung von $z = \infty$ eindeutig sind und $z = \infty$ als isolierten wesentlich singulären Punkt besitzen, ein allgemeines Theorem auf, welches für die absoluten Beträge der Integrale desselben eine obere Grenze angibt.

Wbg.

P. A. SCHIFF. Die Integralinvarianten und die Integralkoeffizienten. Moskau Math. Samml. 25, 438-465. (Russisch.)

Die Theorie des Jacobischen Multiplikators führt auf natürliche Weise zum Begriff der Integralkoeffizienten. Ist $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n$ das System der $n-1$ unabhängigen Lösungen des Systems (1) $\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$ und θ_1 irgend ein anderes Integral von (1), so wird

$$\varDelta = \frac{\partial(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)}{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)} = 0,$$

und die ersten Minoren $\varDelta_i$ von $\varDelta$: $\varDelta_i = \mu X_i$, wo μ der Jacobische Multiplikator ist. Sind μ und μ' zwei Jacobische Multiplikatoren und θ_1, θ_2 zwei Lösungen von (1), so ist

$$\Theta = \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\sum \lambda_i \frac{\partial \theta_2}{\partial x_i}}{\sum \lambda_i \frac{\partial \theta_1}{\partial x_i}}$$

das Integral von (1). Die λ_i nennt der Verf. die Integralkoeffizienten erster Ordnung. Analog

$$\Theta = \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\sum \lambda_{ik} \frac{\partial(\theta_2, \theta_3)}{\partial(x_i, x_k)}}{\sum \lambda_{ik} \frac{\partial(\theta_1, \theta_2)}{\partial(x_i, x_k)}}$$

und λ_{ik} die Integralkoeffizienten zweiter Ordnung usw. Die Theorie dieser Integralkoeffizienten umfaßt die der Variationssysteme von Poincaré und die der Integralinvarianten. Si.

N. N. SALTYKOW. Anwendung der Theorie der infinitesimalen Transformationen zur Integration der Differentialgleichungen durch Quadraturen. Kiew Univ. Nr. 10 (Bericht d. Phys.-math. Ges. Kiew 1904), 49-62. (Russisch.)

Läßt das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad dx_k = X_k\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

die Gruppe der n infinitesimalen Transformationen in Involution zu, so wird die Integration von (1) mit Hülfe nur einer Quadratur geleistet. Der Satz gilt auch für das System der totalen Differentialgleichungen

$$dx_n = \sum_1^n{}_h X_{kh}\, dt_h \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sowie für das entsprechende Jacobische System

$$X_k(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum \psi_{kh} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0.$$

Wird aber die Gruppe des Systems integrabel, so ist die Anzahl der erforderlichen Quadraturen um 1 größer als die Anzahl der derivierten Gruppen. Si.

H. J. JONAS. Kurven von konstanter Steilheit auf der Kugelfläche. Arch. der Math. u. Phys. (3) **8**, 281-284.

Verf. geht von dem folgenden, ähnlich bereits vor etwa 20 Jahren in den Ed. Times behandelten Problem aus: „Auf den Gipfel eines halbkugelförmigen Berges mit horizontalem Grundkreise soll ein möglichst kurzer Weg geführt werden, dessen Steilheit dz/ds eine vorgegebene Grenze λ nicht überschreitet." Dieses Problem wird für beliebige Flächen durch Kurvenzüge gelöst, die sich aus geodätischen Linien und aus Kurven von konstanter Steilheit zusammensetzen. Für die Kugel integriert Verf. die Differentialgleichung dieser letzteren Kurven und deutet die Lösung folgendermaßen geometrisch: Die Kurven von konstanter Steilheit $\lambda = \sin\alpha$ entstehen durch Abwickelung eines unausdehnbaren Fadens von dem im Polabstande α konstruierten Parallelkreise; sie entsprechen daher auf der Kugelfläche der Kreisevolvente in der Ebene, in die sie durch geeignete Grenzbetrachtung übergeführt werden können. — Den Schluß bildet eine rein geometrische Lösung der Aufgabe. Übrigens vergleiche man: Cesàro, Sur l'emploi des coordonnées intrinsèques, Nouv. Ann. (3) **5**, 127-142, 1886. Wbg.

EDM. MAILLET. Sur les solutions de certains systèmes d'équations différentielles; applications à un système hydraulique de n réservoirs. S. M. F. Bull. **33**, 129-145.

Die Änderungen in dem Ausflusse aus Systemen von n zylindrischen Behältern, die mit nicht eingetauchten Auslässen versehen sind, führen auf eine Familie einfacher Lösungen, die für alle Lösungen asymptotisch sind; letztere gehören zu Systemen nicht linearer Differentialgleichungen, von denen man wenigstens eine partikulare Lösung finden kann, die ebenfalls manchmal zu einer ganzen Kategorie von Lösungen asymptotisch ist.

Lp.

Weitere Literatur.

E. BEKE. Über die Fundamentalgleichung der linearen Differentialgleichungen. Math. és phys. lapok **14**, 82-87. (Ungarisch.)

J. E. BOYD. Differential equations. A short course for engineering students. Columbus: Boyd. 54 S. 12mo.

E. CUNNINGHAM. On the normal series satisfying linear differential equations. Lond. Phil. Trans. (A) **205**, 1-35.

G. PIRONDINI. Osservazioni relative all'integrazione delle equazioni differenziali delle varie specie. Memoria. Parma: Rossi-Ubaldi. 44 S. 8°.

L. Schlesinger. Beiträge zur Theorie der Systeme linearer homogener Differentialgleichungen (Zweite Mitteilung). Math. és termész. értersitö, **23**, 102-120. (Ungarisch.)

L. Schlesinger. Beiträge zur Theorie der Systeme linearer homogener Differentialgleichungen. III. Math. és termész ért. **23**, 139-154. (Ungarisch.)

A. Winter. Über die logarithmischen Grenzfälle der hypergeometrischen Differentialgleichungen mit zwei endlichen singulären Punkten. Diss. Kiel. 73 S. 8°.

B. Differenzenrechnung.

A. Guldberg. Über lineare Differenzengleichungen. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 157-163.

Die Analogien zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen sind schon früh erkannt (Euler, Laplace, Lagrange u. a.) und später (Mansion, Heymann, Pincherle, Seliwanoff u. a.) weiter verfolgt, aber trotzdem noch nicht ganz erschöpft worden. Verf. bringt einige neue, hauptsächlich von ihm selbst gefundene Analogien zur Sprache. 1. Erniedrigung der Ordnung einer linearen homogenen Differenzengleichung bei Kenntnis einer, bzw. mehrerer partikularen Lösungen; Aufstellung eines kanonischen Fundamentalsystems von Lösungen. 2. Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. 3. Erniedrigung der Ordnung der Gleichung, wenn sie Lösungen mit einer anderen gemein hat: Auffindung des größten gemeinsamen (symbolischen) Teilers durch das Kettenbruchverfahren (Pincherle, Mansion, Guldberg). 4. Die der Abelschen Relation für Differentialgleichungen entsprechende Relation von Heymann (J. für Math. **109**, 114; Guldberg C. R. **137**, 560). 5. Rationale Differenzenfunktionen der Lösungen eines Fundamentalsystems: Analoga der Appellschen Invariantentheorie und der Picardschen Resolvente. 6. Assoziierte Differenzengleichungen. 7. Rationelle Integrationstheorie: Analogon der Picard-Vessiotschen Gruppentheorie. 8. Anwendung der in 7. auseinandergesetzten Theorie auf die lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung. Wbg.

A. Guldberg. Sur les équations linéaires aux différences finies. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 309-319, 321-348.

In der ersten Arbeit überträgt Verf. die Appellsche Theorie der invarianten oder symmetrischen Funktionen der Lösungen einer linearen Differentialgleichung (Ann. de l'Éc. Norm. (2) **10**, 391; F. d. M. **13**, 254, 1881) auf lineare Differenzengleichungen: Im ersten Kap. wird ein Satz, der dem Appellschen Fundamentalsatz über die invarianten Funktionen einer linearen Differentialgleichung analog ist, bewiesen und auf einige Beispiele angewandt. Das zweite Kap. enthält die Anwendungen dieses Satzes auf die Theorie der Transformation der linearen Differenzen-

gleichungen nebst einigen Beispielen. — In der zweiten Abhandlung überträgt Verf. die Picard-Vessiotsche Theorie der Integration der linearen Differentialgleichungen auf lineare Differenzengleichungen. Der Fundamentalsatz ist folgender: Jeder linearen Differenzengleichung n-ter Ordnung entspricht eine endliche stetige Gruppe homogener linearer Transformationen in n Veränderlichen, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzt: 1. Jede rationale Funktion der Integrale, welche einen rationalen Ausdruck besitzt, gestattet sämtliche Transformationen der Gruppe. 2. Jede rationale Funktion der Integrale, welche bei allen Transformationen der Gruppe invariant bleibt, besitzt einen rationalen Ausdruck. — Der Beweis dieses Satzes, der Grundlage der ganzen Theorie, bildet den Inhalt des ersten Kapitels. Das zweite Kap. enthält die Integration der gegebenen Gleichung mittels Hülfsgleichungen, die mit der sukzessiven Reduktion der Transformationsgruppe der Gleichung verbunden sind. Die angewandte Methode gibt die notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrabilität einer linearen Differenzengleichung durch Quadraturen; insbesondere folgt die Unmöglichkeit, die allgemeinen linearen Gleichungen höherer als erster Ordnung durch Quadraturen zu integrieren. Das dritte Kap. enthält die Anwendung der entwickelten Methode auf die lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung.

Wbg.

A. Guldberg. Über lineare homogene Differenzengleichungen. Arch. der Math. u. Phys. (3) 8, 278-281.

Verf. betrachtet die einer gegebenen linearen homogenen Differenzengleichung zugeordneten assoziierten Differenzengleichungen. Durch die vollständige Analogie derselben mit den einer linearen homogenen Differentialgleichung zugeordneten assoziierten Differentialgleichungen (vergl. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen Band 2, 1; S. 125) lassen sich die meisten formalen Sätze über assoziierte Differentialgleichungen ohne weiteres auf assoziierte Differenzengleichungen übertragen. Dieselben spielen eine Rolle bei der Untersuchung der Reduktibilität der linearen Differenzengleichungen. Wbg.

A. Guldberg. On linear homogeneous differential equations. Messenger (2) **35**, 70-72.

Im Anschluß an die bezüglichen Untersuchungen von Pincherle leitet der Verf. eine Methode ab, vermöge deren entschieden werden kann, ob eine gegebene homogene lineare Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten irreduzibel ist oder nicht. Hierzu muß nur festgestellt werden, ob eine solche Gleichung ein derartiges Integral y_x besitzt, daß y_{x+1}/y_x rational ist, was in manchen Fällen nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten geschehen kann. Lp.

A. Guldberg. **Über lineare homogene Differenzengleichungen derselben Art.** Prace mat.-fiz. **16**, 35-43.

Hat man zwei Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} &(1) \quad Py_x \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0, \\ &(2) \quad Qy_x \equiv z_{x+m} + q_x^{(1)} z_{x+m-1} + \cdots + q_x^{(m)} z_x = 0, \end{aligned} \quad (m \leqq n)$$

mit rationalen Coeffizienten, so sagt man: die Gleichung (2) gehöre zu derselben Art mit (1), wenn man durch die Beziehung

$$z_x = a_x^{(0)} y_x + a_x^{(1)} y_{x+1} + \cdots + a_x^{(n-1)} y_{x+n-1} \equiv Ay_x,$$

wo die a_x rationale Funktionen sind, von den Integralen der Differenzengleichung (1) zu denen der Differenzengleichung (2) übergehen kann. Es werden die aus dieser Definition unmittelbar sich ergebenden Sätze aufgestellt und mit Benutzung der von Pincherle für die linearen Differentialgleichungen eingeführten Begriffe der Reduzibilität und der Rationalitätsgruppe die Beziehungen zwischen den Artbegriffen und der Rationalitätsgruppe der Differenzengleichungen besprochen. Es wird der allgemeine Satz bewiesen: „Gehört die lineare homogene Differenzengleichung (2) von der Ordnung $m = n - \nu$ mit der linearen homogenen Differenzengleichung (1) von der Ordnung n zu derselben Art, so kann man die Rationalitätsgruppe G von (1) in die Form

$$\begin{array}{c|c} G_{11} & 0 \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}$$

bringen; hier ist G_{11} die Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differenzengleichung $Ry_x = 0$ von der Ordnung ν, deren sämtliche Integrale der Gleichung (1) genügen; G_{22} ist die Rationalitätsgruppe der Differenzengleichung (2)“. Dn.

A. Guldberg. **Über lineare homogene Differenzengleichungen, die gemeinsame Lösungen besitzen.** Arch. for Math. og Naturvid. **26**, Nr. 1, 1-12.

Der Verf. gibt ein Verfahren an zur Ermittlung derjenigen Lösungen, welche zwei linearen homogenen Differenzengleichungen gemeinsam sind. Die Methode wird auf den Fall angewandt, wo eine lineare homogene Differenzengleichung mehrfache Lösungen besitzt. Gbg.

A. Guldberg. **Über die Zerlegung homogener linearer Differenzenausdrücke in irreduzible Faktoren.** Arch. for Math. og Naturvid. **26**, Nr. 14, 1-8.

Der folgende Satz wird bewiesen: Auf welche Art und Weise auch immer ein linearer homogener Differenzenausdruck in irreduzible Faktoren zerlegt wird, so kann man die Faktoren einer jeden anderen Zerlegung

eineindeutig zuordnen, so daß immer die zwei durch Nullsetzen der zugeordneten Faktoren entstehenden irreduziblen linearen homogenen Differenzengleichungen gegenseitig von derselben Art sind. Gbg.

A. Guldberg. Sur les communs multiples des expressions linéaires aux différences finies. Palermo Rend. **19**, 291-296.

Übertragung der Resultate der Heffterschen Arbeit „Über gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse“ (J. für Math. **116**, 157-166; F. d. M. **27**, 244, 1896) auf Differenzengleichungen. Wbg.

A. Guldberg. Über reduzible lineare homogene Differenzengleichungen. Monatsh. für Math. **16**, 204-210.

Übertragung der Resultate der entsprechenden Loewyschen Arbeit über Differentialgleichungen (Math. Ann. **56**, 570; F. d. M. **34**, 357, 1903) auf Differenzengleichungen. Die beiden Hauptsätze lauten:

I. Gibt es für eine reduzible lineare homogene Differenzengleichung eine einzige oder eine endliche Anzahl irreduzibler linearer homogener Differenzengleichungen, durch deren Integrale die vorgelegte reduzible Differenzengleichung befriedigt wird, so ist die Summe der Ordnungen dieser irreduziblen Differenzengleichungen stets kleiner oder höchstens gleich der Ordnung der reduziblen Differenzengleichung.

II. Notwendig und hinreichend, damit eine lineare homogene Differenzengleichung mit unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differenzengleichungen Integrale gemeinsam hat, ist, daß es wenigstens zwei irreduzible lineare homogene Differenzengleichungen gibt, deren Integrale der vorgelegten Differenzengleichung genügen und die gegenseitig von derselben Art sind. Wbg.

A. Guldberg. Sobre las ecuaciones lineales de diferencias finitas. Revista trim. de Mat. **5**, 23-24.

E. W. Barnes. The linear difference equation of the first order. Lond. M. S. Proc. (2) **2**, 438-469.

In der vorliegenden Arbeit beabsichtigt Verf., die Natur der Funktionen zu untersuchen, welche durch lineare Differenzengleichungen erster Ordnung definiert werden. Hauptsächlich werden folgende drei Fragen behandelt: 1. die Existenz einer Lösung, 2. ihr analytischer Ausdruck, 3. ihre Stellung unter den transzendenten Funktionen (vergl. des Verf. Arb. Lond. M. S. Proc. (2) **2**, 280-292; F. d. M. **35**, 347, 1904). 1. Einleitung. Historische Übersicht (Arbeiten von Boole, Guichard, Appell, Mellin, Prym, Hurwitz und dem Verf.). — 2. Reduktion der allgemeinen

Differenzengleichung erster Ordnung auf zwei Hauptgleichungen. — 3. Definitionen. — 4-7. Lösung von $f(z+\omega)=\varphi(z)f(z)$, wo die Funktion $\varphi(z)$ holomorph, von endlicher Ordnung, ohne fremden Exponentialfaktor ist, deren Nullstellen sämtlich in derjenigen „negativen" Halbebene liegen, die durch das auf $O\omega$ im Anfangspunkte O errichtete Lot begrenzt wird, und in welcher ω nicht liegt. — 8. Lösung derselben Gleichung für den Fall, daß die Nullstellen in der anderen „positiven" Halbebene liegen. — 9, 10. Lösung von $f(z+\omega)=\mu(z)f(z)$, wo $\mu(z)$ meromorph und möglicherweise von unendlicher Ordnung ist. — 11, 12. Die Riemannsche ζ-Funktion und ihre Modifikation. Lösung von $f(z+\omega)-f(z)=G(z)$, wo $G(z)$ eine ganze Funktion ist.—13. Vervollständigung von 10. — 14, 15. Andere Formen der Lösung von $f(z+\omega)=\mu(z)f(z)$. — 16. Ausdehnung auf Fälle, wo $\mu(z)$ „wiederholte" Nullstellen oder Pole besitzt oder Nullstellen der Form $a+m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r$. — 17-22. Lösung von $f(z+\omega)-f(z)=\mu(z)$ in drei verschiedenen Formen. — 23. Natur der Lösung von $\varphi(z)f(z+\omega)-\chi(z)f(z)=\psi(z)$. — 24. Beispiele. Wbg.

E. Stephansen. Eine Bemerkung zur Theorie der linearen Differenzengleichungssysteme mit konstanten Coefficienten. Prace mat.-fiz. **16**, 31-33.

Guldberg hat gezeigt (Prace mat. fiz. **15**, 23-28, 1904), daß die allgemeine Lösung eines linearen Differenzengleichungssystems

$$y_{x+1}^{(i)}=\sum_n A_{ik}\,y_x^{(k)}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

durch n Gleichungen $y_x^{(i)}=\sum_{k=1}^{n} c_k\,e_{1k}\,a_k^x$ geliefert wird, wo die Größen $a_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_{11}-a_1, & A_{12}, & \ldots A_{in} \\ A_{21}, & A_{22}-a_2, & \ldots A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & A_{nn}-a_n \end{vmatrix}=0$$

sind. Diese Form der Lösung setzt aber voraus, daß die Wurzeln der letzten Gleichung verschieden sind. Die Verfasserin untersucht die Form der Lösung in dem Falle, wenn diese Gleichung mehrfache Wurzeln besitzt. Dn.

Kapitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

Fr. Winkler. Die infinitesimalen Transformationen, welche einen Pfaffschen Ausdruck absolut oder modulo eines vollständigen Differentials invariant lassen. Diss. Leipzig. Druck von Metzger & Wittig, Leipzig. 38 S. 8°.

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der Abhandlung des Referenten: „Die infinitesimalen Transformationen einer Pfaffschen Gleichung" (Leipz.

Ber. **51**. 296-315; F. d. M. **30**, 316, 1899). Ist $A = \sum a_\nu(x_1, \ldots, x_n)\, dx_\nu$ ein beliebiger Pfaffscher Ausdruck, so handelt es sich um die Bestimmung aller infinitesimalen Transformationen $Xf = \sum \xi_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$, für die $XA = aA + du$ wird, unter a eine Konstante und unter u eine Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ verstanden. Die Aufgabe ist sehr leicht lösbar, wenn man sich A auf seine Normalform gebracht denkt. Auf die Benutzung dieser Normalform wird jedoch hier grundsätzlich verzichtet. Führt man den Ausdruck: $U = -\sum a_\nu \xi_\nu$ ein, die „charakteristische Funktion" der infinitesimalen Transformation Xf, so kommt alles darauf hinaus, in allgemeinster Weise ein gewisses Gleichungensystem zu befriedigen, in dem außer den ξ_ν selbst noch die Funktion U mit ihren Ableitungen, die Ableitungen von u und die Konstante a vorkommen. Die Erledigung dieses Problems wird dadurch erreicht, daß der Reihe nach die besonderen Fälle $u = 0, a = 0 : a = 0 : u = 0$ behandelt und daß immer zuerst die infinitesimalen Transformationen bestimmt werden, die verschwindende oder doch konstante charakteristische Funktionen haben. Außerdem ist von großem Nutzen eine Beziehung, die sich ergibt, wenn man eine zweite infinitesimale Transformation Yf mit der charakteristischen Funktion V hinzunimmt, für die eine Relation $YA = bA + dv$ besteht, und wenn man die zu (XY) gehörige charakteristische Funktion berechnet. Die betreffende Relation lautet:

$$X(V) + Y(U) = b\,U + a\,V + X(v) + Y(u).$$

Mit ihrer Hülfe und durch die vorhin angedeutete Zerlegung des Problems gelingt es in jedem einzelnen Falle, ohne weitere Rechnung die Integrabilität der auftretenden Systeme von Differentialgleichungen nachzuweisen und alle infinitesimalen Transformationen von der verlangten Beschaffenheit vollständig anzugeben. El.

N. N. Saltykow. **Étude sur les transformations infinitésimales.** Journ. de Math. (6) **1**, 53-76.

Der Verf. gibt eine der Form nach neue Ableitung gewisser Liescher Sätze über die Verwertung bekannter infinitesimaler Transformationen für die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen und unbeschränkt integrabler Systeme von Pfaffschen Gleichungen. Bei dieser Ableitung bleibt jedoch der begriffliche Inhalt der Lieschen Sätze ganz verborgen, und die Sätze erscheinen durchweg als das Ergebnis analytischer Kunstgriffe. Der Verf. würde das vermieden haben, wenn er die Liouvilleschen kanonischen Systeme, mit denen er fortwährend operiert, so aufgefaßt hätte, wie es vom Lieschen Standpunkte aus natürlich ist, nämlich als infinitesimale homogene Berührungstransformationen; denn dann erscheinen jene Lieschen Sätze als besondere Anwendungen der Lieschen allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, was sich klar zu machen in der Tat nicht ohne Interesse ist, was aber natürlich keine neuen Integrationsvereinfachungen ergibt. Daß man, wie

der Verf. auf S. 66 ff. tut, n voneinander unabhängige Quadraturen durch Multiplikation mit Konstanten und Addition auf eine einzige Quadratur zurückführen kann, ist doch nur scheinbar eine Vereinfachung. Den Schluß der Arbeit (S. 72 ff.) bildet eine etwas veränderte Darstellung der Entwicklungen Lies in Math. Ann. **11**, 521-526. Auch hier glaubt der Verf. (S. 76) eine Vereinfachung erzielt zu haben, indem er $n - q - \varrho$ unabhängige Quadraturen formell durch eine einzige ersetzt.

El.

N. N. Saltykow. Untersuchungen über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung einer unbekannten Funktion. Charkow Ges. (2) **9**, 60-240. (Russisch.)

Die Arbeit wurde 1905 nicht abgeschlossen; es sind nur die folgenden Kapitel veröffentlicht: 1. Bildung der derivierten Gleichungen von S. Lie und das Problem der Integration dieser Gleichungen. 2. Eigenschaften der vollständigen Integralmannigfaltigkeiten von S. Lie. 3. Über die Integration einiger partiellen Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen. 4. Aufstellung der derivierten Gleichungen von S. Lie, welche die Lieschen vollständigen Integrale der gegebenen Klasse zulassen. 5. Die Berührungstransformationen. 6. Die Theorie der Charakteristiken. 7. Die Integrale der Differentialgleichungen der Charakteristiken und der kanonischen Gleichungen. Die von S. Lie verbesserte Methode von Jacobi-Mayer der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die ersten 4 Kapitel bilden an sich ein abgeschlossenes Ganzes. Doch ist es bequemer, ausführlich über die Arbeit nach ihrem Abschluß im folgenden Bande des Jahrbuchs zu berichten.

Si.

M. Fréchet. Généralisation du problème de Pfaff. Nouv. Ann. (4) **5**, 110-114.

Sind $x_1, \ldots, x_r$ Funktionen von r Parametern $\omega_1, \ldots, \omega_r$, und wird nach dem Vorgange von Méray

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \frac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(\omega_1, \ldots, \omega_r)}\, d\omega_1\, d\omega_2 \ldots d\omega_r$$

gesetzt, worin $\frac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(\omega_1, \ldots, \omega_r)}$ die Funktionaldeterminante von $x_1, \ldots, x_r$ in bezug auf $\omega_1, \ldots, \omega_r$ bedeutet, so lautet das in Frage stehende Problem: „Es sollen die Relationen zwischen den Größen $p_{i_1, \ldots, i_r}$ (worin $i_1, \ldots, i_r$ irgend eine Kombination von r der Zahlen $1, \ldots, n$ ist) und $x_1, \ldots, x_n$ gefunden werden, welche die Relation

$$\sum_{i_1, \ldots, i_r} p_{i_1, \ldots, i_r}\, d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) = 0 \qquad (n \geqq r)$$

nach sich ziehen.“ Für $r = 1$ erhält man das Pfaffsche Problem.

Wbg.

K. M. Peterson. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. Toulouse Ann. (2) **7**, 109-263.

Es sind hier drei Abhandlungen des Verfassers, die in russischer Sprache in den Jahren 1876, 1878, 1879 erschienen sind (**8**, 291-361; **9**, 137-192; **10**, 169-223 der Moskauer Math. Samml.), und die sich mit formalen Methoden der Behandlung von partiellen Differentialgleichungen beschäftigen, durch Ed. Davoux ins Französische übersetzt (vgl. F. d. M. **9**, 258, 1877; **10**, 251, 1878). Fs.

G. Fubini. Nuove applicazioni dei metodi di Riemann e Picard alla teoria di alcune equazioni alle derivate parziali. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 438-443.

Den Klassen von partiellen Differentialgleichungen, auf die die Riemannsche Methode der Integration von partiellen Differentialgleichungen und die sie ergänzende Picardsche Methode der sukzessiven Annäherungen Anwendung gefunden hat, fügt Verf. eine neue hinzu.

Es handelt sich um Differentialgleichungen von folgendem Typus:

$$\sum_{\nu_1=0}^{\tau_1} \sum_{\nu_2=0}^{\tau_2} \dots \sum_{\nu_m=0}^{\tau_m} b_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m} X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} X_m^{\nu_m}(u) = 0.$$

Dabei bedeuten $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ ganze positive, von Null verschiedene Zahlen; die b reale Funktionen von n unabhängigen Veränderlichen, die nebst ihren Ableitungen endlich und stetig in dem betrachteten Gebiete sind; und durch $X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} \dots X_m^{\nu_m}(u)$ sind die Ableitungen der unbekannten Funktion als symbolisches Produkt mehrerer realen infinitesimalen Transformationen $X_1, X_2, \dots, X_m$ dargestellt. Weiter ist $b_{\tau_1\dots\tau_2\tau_m} = 1$. Die hier entwickelten Methoden finden ihre Anwendung, wenn die b gewisse Relationen erfüllen, und wenn die X (nötigenfalls mit passenden Faktoren multipliziert) zu zwei und zwei vertauschbar und zu n und n linear unabhängig sind.

Zunächst wird der Fall behandelt, daß $n = 3$, und daß

$$X_i = a_{i1}\frac{\partial}{\partial x_1} + a_{i2}\frac{\partial}{\partial x_2} + a_{i3}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

wo die a_{ik} Konstanten bedeuten mit den Bedingungen

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1,\ a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0,$$

und wo die X_i zu zwei und zwei vertauschbar und zu drei und drei linear unabhängig sind. Fs.

J. Clairin. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. S. M. F. Bull. **33**, 14-16.

Im Anschluß an die frühere Mitteilung (S. M. F. Bull. **32**, 149-152; F. d. M. **35**, 355, 1904) gibt der Verfasser hier einen Beweis seines

dort aufgestellten Theorems, der sich auf die allgemeinen Eigenschaften der Charakteristiken stützt und fast ganz frei von Rechnung ist.

Gleichzeitig wird das Theorem verallgemeinert und folgendermaßen ausgesprochen: Ist eine partielle Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variabeln gegeben:

$$p_{n0} + f(x, y, z, p_{1,0}, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{n-1,1}, \ldots, p_{0,n}) = 0,$$

so entspricht einer einfachen Wurzel λ der Gleichung

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n - \frac{\partial f}{\partial p_{n-1,1}} \lambda^{n-1} + \frac{\partial f}{\partial p_{n-2,2}} \lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n \frac{\partial f}{\partial p_{0,n}} = 0$$

ein System von Charakteristiken (C). Das System (C) besitzt höchstens eine Invariante der Ordnung $n+h$, wo h eine positive, von Null verschiedene Zahl bezeichnet. Besteht (C) aus Charakteristiken der Ordnung $n-1$, so gilt der Satz für die Invarianten der Ordnung $n\,(h=0)$.

Fs.

J. Clairin. Sur certaines transformations des équations linéaires aux différentielles partielles du second degré. S. M. F. Bull **33**, 90-97.

Verf. bestimmt alle Transformationen, durch die sich eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung unter Beibehaltung der unabhängigen Variabeln in eine lineare Gleichung überführen läßt, so daß jedem Integral der gegebenen Differentialgleichung unendlich viele Integrale der linearen Gleichung entsprechen. Es ist dazu folgende Aufgabe zu lösen: Wann genügt z' als Funktion von x und y einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn $z' = f(x, y, z, p)$ und z ein Integral der Gleichung $s = ap + bz$ ist, wo a und b Funktionen von x und y sind und s, p die übliche Bedeutung haben? Als Resultat ergeben sich allein die von Moutard und L. Lévy angegebenen Transformationen. Fs.

J. Clairin. Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x,y,z)$. Darb. Bull. (2) **29**, 177-183.

Es wird untersucht, unter welchen Umständen sich auf die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z)$$

die Darbouxsche Integrationsmethode anwenden läßt. Zuerst wird der Fall $f(x, y, z) = g(x, z)$, bei dem f also y nicht enthält, abgehandelt, worauf sich dann in analoger Weise der allgemeine Fall aufbaut. Es ergeben sich für f zwei Möglichkeiten:

$$f(x, y, z) = u(x, y)\, z + w(x, y),$$
$$f(x, y, z) = \frac{u(x, y)}{v(x, y)}\, e^{v(x,y)z} + w(x, y).$$

Der erste Fall führt zu einer linearen Gleichung mit gleichen Invarianten, der zweite läßt sich leicht aus der Gleichung von Liouville herleiten.

Fs.

J. Clairin. Sur une transformation de certaines équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. C. R. **141**, 1217-1229.

Die Gleichungen

$$z^2 p_1 + 2zpz_1 = \alpha(x, y)\, p^2 + 2\lambda(x, y)\, zp + M(x, y)\, z^2,$$
$$z^2 q_1 + 2zqz_1 = \beta(x, y)\, q^2 + 2\mu(x, y)\, zq + N(x, y)\, z^2,$$

wo die vorkommenden Buchstaben die übliche Bedeutung haben, geben eine Bäcklundsche Transformation dritter Art an, mit der jedem Integral der Gleichung

$$2[\alpha p - \beta q + (\lambda - \mu) z]\, s + \frac{\partial \alpha}{\partial y} p^2 + 2(\lambda - \mu)\, pq - \frac{\partial \beta}{\partial x} q^2$$
$$+ 2\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} - N\right) zp - 2\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\right) zq + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) z^2 = 0$$

eine unendliche Anzahl von Integralen einer anderen Gleichung

$$s_1 + F(x, y, z_1, p_1, q_1) = 0,$$

und umgekehrt, entspricht.

Bei geeigneter Wahl von $\alpha, \beta, \lambda, \mu, M, N$ kann es erreicht werden, daß die erste der beiden Differentialgleichungen linear wird und die Form erhält

$$s + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial y} p + w(x, y)\, z = 0,$$

wo $\theta(x, y)$ und $w(x, y)$ eine gewisse Bedingung zu erfüllen haben. Einige spezielle Klassen von Funktionen werden angegeben, die diese Bedingung erfüllen.

Fs.

J. Hadamard. Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 101-141.

In einer früheren ersten Arbeit (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **21**, 535-566; F. d. M. **35**, 352. 1904) hat der Verfasser die sogenannte „Fundamentallösung" für jede lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(A)} \quad F(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} + \sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + lu = 0$$

gegeben und auf die Lösung des Cauchyschen Problems für 3 unabhängige Variabeln in dem Falle hingewiesen, daß die Differentialgleichung

vom elliptischen Typus ist. In der vorliegenden Arbeit wird das Cauchysche Problem für 3 unabhängige Variabeln im Falle des hyperbolischen Typus behandelt und zwar unmittelbar mit Hülfe der Fundamentallösung. Es wird zuerst die Fundamentallösung $v(x, a)$ der zu (A) adjungierten Differentialgleichung gebildet. Sodann wird das Cauchysche Problem mit Hülfe eines Ausdruckes V gelöst:

$$V = \int_L m\, v(x, a)\, dt,$$

wo m eine beliebige Funktion allein von t ist, und wo der Integrationsweg sich über eine beliebige Linie L erstreckt.

Da im Resultat wegen der Willkür in der Wahl von m und L aber der Ausdruck V nur scheinbar enthalten sein kann, so stellt sich der Verfasser die Aufgabe, aus dem Resultat diesen Ausdruck wieder herauszuschaffen. Die Lösung dieser Aufgabe gelingt, und im Resultat bleibt allein die Fundamentallösung. Am Schluß gibt der Verfasser Aufklärung über die Frage nach dem Huygensschen Prinzip für Gleichungen mit 3 Variabeln. Fs.

J. Hadamard. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. C. R. **140**, 425-427.

In früheren Arbeiten (F. d. M. **34**, 388, 1903 und vorstehendes Referat) hat der Verfasser die „Fundamentallösung“ einer linearen partiellen Differentialgleichung mit n unabhängigen Variabeln gegeben und hat diese Fundamentallösung auf die Lösung des Cauchyschen Problems im Falle $n = 3$ angewandt. Hier wird die Lösung desselben Cauchyschen Problems für Gleichungen mit mehr als 3 unabhängigen Variabeln skizziert. Während in dem Falle, daß n ungerade ist, die Verallgemeinerung keine Schwierigkeiten macht, versagt die Methode in dem Falle, daß n gerade ist, so daß also zwischen diesen beiden Fällen ein tiefliegender Unterschied existiert. Ein Kunstgriff gestattet es, von dem einen zum anderen Falle überzugehen. Er besteht darin, daß eine Ergänzungsvariable z eingeführt und es dann so eingerichtet wird, daß die Lösung von z unabhängig wird. Ist

$$v = V\Gamma^{-\frac{n-2}{2}} + V_1 \log \Gamma$$

die Fundamentallösung einer Differentialgleichung, so zeigt sich, daß das Prinzip von Huygens nur für solche Gleichungen gilt, für die das logarithmische Glied $V_1 \log \Gamma$ fehlt. Fs.

J. Hadamard. Sur les solutions fondamentales des équations linéaires aux dérivées partielles. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 265-271.

Die Theorie der Laplaceschen Differentialgleichung beruht auf der Existenz der fundamentalen Lösung:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}},$$

die im Reellen nur eine einzige Singularität besitzt, aber im imaginären Gebiet auf einem Kegel zweiter Ordnung singulär ist. Bei den allgemeinen partiellen linearen Differentialgleichungen gibt es analoge Lösungen, die auf einem Konoid singulär werden. Aber diese erweisen sich als unbrauchbar, weil sie auf Integrale ohne Sinn führen. Daher haben Volterra und andere partikulare Lösungen eingeführt, die aber außer auf dem Konoid noch auf einer durch seine Spitze gehenden Linie singulär werden. Der Verf. zeigt, wie man auf diese partikularen Lösungen von der fundamentalen aus gelangt, und gibt dann einen Weg an, wie man ohne sie mit Hülfe der fundamentalen Lösung das Randwertproblem erledigen kann durch Einführung des Begriffes des endlichen Teils eines unendlichen Integrals. Doch sind diese Betrachtungen nur anwendbar, wenn die Anzahl der Variabeln ungerade ist. Zum Schluß geht der Verf. noch kurz auf die Verallgemeinerung einer Integralformel für Besselsche Funktionen und gewisse hypergeometrische Reihen ein.

P.

H. Weber. Bemerkungen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 446-450.

Die erste Bemerkung knüpft an einen paradox erscheinenden Umstand aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen an, den Hadamard in einem Vortrage berührt hatte. Weber wiederholt zur Erläuterung eine bezügliche Stelle aus Band II seines Werkes: „Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik“ (Braunschweig, 1901), S. 224 ff. Die zweite Bemerkung bezieht sich auf einen irreversiblen Vorgang von einer Art, die Bryan im Anschluß an einen Vortrag von Volterra erwähnt hatte. „Lord Rayleigh hat in seinem Werke „Theory of sound“ gegen Riemanns Theorie der Luftschwingungen mit endlicher Amplitude einen Einwand erhoben, der sich darauf gründet, daß Riemanns Formeln in gewissen Fällen einen Verlust oder einen Gewinn an Energie zu geben scheinen. Ich habe in dem schon erwähnten Buche (Bd. II, §§ 179 und 180, S. 492-498) diesem Einwand durch eine Betrachtung zu begegnen versucht, deren wesentlichen Inhalt ich an einem einfachen Beispiel in folgendem wiedergeben will.“

Lp.

M. Mason. The doubly periodic solutions of Poisson's equation in two independent variables. American M. S. Trans. 6, 159-164.

Die einzige doppelt periodische Lösung der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist $u =$ konst. In der vorliegenden Arbeit werden mit Hülfe analoger

Methoden wie in der Potentialtheorie die doppeltperiodischen Lösungen der Poissonschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

wo $f(x, y)$ stetig und in x und y periodisch mit den Perioden a und b ist, aufgesucht. Es wird zuerst eine „doppeltperiodische Greensche Funktion" definiert und ihre Darstellung mit Hülfe der Weierstraßschen Sigmafunktion gegeben. Sodann wird gezeigt, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer doppeltperiodischen Lösung (mit den Perioden a und b) der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

wo f eine stetige doppeltperiodische Funktion mit den Perioden a und b, die ist, daß f der Gleichung

$$\int_0^b \int_0^a f(x, y)\, dx\, dy = 0$$

genügt. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die gesuchte doppeltperiodische Lösung von (1) mit den Perioden a und b, die für $x = \alpha, y = \beta$ den Wert C annimmt, eindeutig bestimmt und hat die Darstellung

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^b \int_0^a G(x, y, \xi, \eta, \alpha, \beta)\, f(x, y)\, dx\, dy + C,$$

wo G die oben angegebene Greensche Funktion ist. Fs.

S. Kępiński. Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 j}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial j}{\partial t} = 0.$$

Krakau Anz. 1905, 198-205.

Die Differentialgleichung vom parabolischen Typus

$$L(j) \equiv \frac{\partial^2 j}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial j}{\partial t} = 0$$

soll mit den Grenzbedingungen a) $j = f(\xi)$ für $t = 0$, b) $j = \varphi(t)$ für $\xi = 0$ integriert werden, und zwar mit der Riemannschen Methode. Dieser Methode entsprechend, wird zuerst eine Hauptlösung der adjungierten Differentialgleichung entwickelt, die mit Hülfe der Besselschen Zylinderfunktionen oder auch asymptotisch für große Werte von x dargestellt wird. Durch Integration über ein Parallelogramm $DBOCD$, dessen eine Seite durch den Punkt $A\,(\xi > 0, t > 0)$ geht und das dann bis ins Unendliche erstreckt wird, ergibt sich schließlich die die Grenzbedingungen erfüllende Lösung:

$$j(\xi, t) = \xi \int_0^t \frac{e^{-\frac{\xi}{t-\lambda}}}{(t-\lambda)^2} \varphi(\lambda)\, d\lambda + \int_0^t \frac{e^{-\frac{\xi+\lambda}{t}}}{\lambda} w_1\left(\frac{\lambda\xi}{t^2}\right) f(\lambda)\, d\lambda.$$

Fs.

S. Kępiński. Über die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Math. Ann. **61**, 397-405.

Nachdem der Verfasser (Krakau Anz. 1905, 198-205; Referat vorstehend) das analoge Problem im Falle $m = -1$ erledigt hat, gibt er hier die Lösung seiner Randwertaufgabe für beliebiges m. Entsprechend der Green-Riemannschen Methode, bestimmt er zuerst ein Integral der adjungierten Differentialgleichung von der Form

$$v = \frac{x^{m+1}}{(t_0 - t)^m} e^{-n\frac{x_0+x}{t_0-t}} w\left[\frac{xx_0}{(t_0-t)^2}\right],$$

wo w als Funktion von $\xi = xx_0/(t_0 - t)^2$ der Differentialgleichung

$$\xi \frac{d^2 w}{d\xi^2} + (m+1)\frac{dw}{d\xi} - n^2 w = 0,$$

die durch Besselsche Funktionen integriert wird, genügt. Er hat dann zu unterscheiden zwischen:

a) $m \geqq 0$. Er findet ein Integral seiner Differentialgleichung, das für $t = 0$ den Wert $z = f(x)$ annimmt.

b) $m < 0$. Er findet ein Integral, das für $x = 0$ in $z = \varphi(t)$, für $t = 0$ in $z = f(x)$ stetig übergeht. Fs.

K. Goldziher. Beitrag zur Theorie der ersten Randwertaufgabe bei der allgemeinen linearen partiellen elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Math. Ann. **60**, 532-542.

Die vorliegende Arbeit schließt sich an den Beweis Hilberts für das Dirichletsche Prinzip an und stützt sich auf Hilberts Untersuchungen über die zweite Variation von Integralen, die er in seinen „Mathematischen Problemen" (Arch. der Math. und Phys. (3) **1**, 232-237) veröffentlicht hat. Die Hilbertschen Methoden werden verallgemeinert zur Durchführung des Dirichletschen Eindeutigkeitsbeweises für die ebenen linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + d = 0.$$

Im Anschluß daran wird dann für die Klasse der sich selbst adjungierten elliptischen Differentialgleichungen $\Delta u + cu + d = 0$ die Lösung der ersten Randwertaufgabe skizziert. Fs.

E. Holmgren. Om Cauchys Problem vid de lineära partiella differentialekvationerna of 2:dra ordningen. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. **2**, Nr. 24, 1-13.

Der Verf. betrachtet zwei einfache Formen der Gleichung

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right).$$

Es wird ein Integral z der Gleichung (1) gesucht, das sich für $x=0$ auf eine im voraus gegebene Funktion $\Phi(y)$ reduziert, und dessen Ableitung $\partial z/\partial x$ für $x=0$ mit einer anderen vorgeschriebenen Funktion $\Psi(y)$ übereinstimmt.

Dieses Cauchysche Problem wird zunächst bei der linearen Gleichung vom elliptischen Typus gelöst. Die Gleichung sei

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

wo a, b, c reguläre analytische Funktionen sind. Das Resultat des Verf. ist, daß man nicht die Funktion $\Psi(y)$ willkürlich annehmen kann. Vielmehr ist diese Funktion von der Wahl von $\Phi(y)$ abhängig. Die Wahl von $\Phi(y)$ kann man aber beliebig treffen; nur sind die Funktion und ihre Ableitung vom Verf. als stetig angenommen. In diesem Falle wird die Funktion $\Psi(y)$ durch die Lösung einer gewissen Integralgleichung erhalten.

Die andere vom Verf. behandelte Differentialgleichung ist die Gleichung der Wärmeleitung

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Das Gebiet der Argumente wird hier durch die Annahme $x \geqq 0$ beschränkt. Die Funktionen $\Phi(y)$ und $\Psi(y)$ werden im Intervalle $0 \leqq y \leqq b$ stetig angenommen. Die Möglichkeitsbedingungen des betrachteten Problems sind vom Verf. in einer früheren Abhandlung bereits mitgeteilt (Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **1**, 324; F. d. M. **35**, 358, 1904). Im vorliegenden Aufsatze wird aber die Gleichung (3) näher besprochen. Wie bei der Gleichung (2) ist für die Möglichkeit des aufgestellten Problems erforderlich, daß man die Funktion $\Psi(y)$ von der Wahl von $\Phi(y)$ abhängig macht. Der Verf. findet, daß $\Psi(y)$ die Summe zweier Funktionen sein muß, von denen die eine durch $\Phi(y)$ bestimmt ist und die andere eine beliebige stetige Funktion mit stetigen Ableitungen aller Ordnungen ist. Die Ableitungen der letzten Funktion müssen jedoch einer gewissen Ungleichheit genügen. Msn.

S. Bernstein. Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique. C. R. **140**, 1440-1442.

Ein Satz von Schwarz, der sich auf die harmonischen Funktionen bezieht, wird hier verallgemeinert durch das folgende Theorem:

Es sei z eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

wo f eine analytische Funktion seiner Argumente ist. Auf einer geschlossenen analytischen Kurve C soll sich z auf eine analytische Funktion des Bogens reduzieren, und außerdem soll z ebenso wie seine beiden ersten Ableitungen im Innern von C und auf C endlich sein. Dann kann z analytisch über C hinaus fortgesetzt werden. — Besonderes Interesse beansprucht der spezielle Fall, bei dem f ein Polynom zweiten Grades in bezug auf $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$ ist, $\partial f/\partial z > 0$ ist, und man a priori weiß, daß die Differentialgleichung ein reguläres Integral besitzt für jeden endlichen Wert von x und y. — Der Satz gilt auch noch, wenn die Gleichung lautet:

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = D \; (AC - B^2 > 0),$$

wo A, B, C, D analytische Funktionen von $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ sind.

Fs.

E. Picard. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 471-474.

Im Anschluß an seine Untersuchungen über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen und die von ihm eingeführte Methode der sukzessiven Annäherungen (Journ. de Math. (4) **6**, 145-210; F. d. M. **22**, 357, 1890) macht Picard hier einige Bemerkungen zu der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz$$

vom hyperbolischen Typus, auf die er bei Gelegenheit seines Cours gekommen ist. Sie betreffen die Notwendigkeit der Annahme, daß der betrachtete Bogen, längs dessen z und $\partial z/\partial x$ gegeben sind, nur einmal von einer Parallele zu einer der Koordinatenachsen getroffen wird, und weisen auf die Notwendigkeit hin, bei Anwendung der Riemannschen Methode der Behandlung der vorliegenden Differentialgleichung auch umgekehrt zu zeigen, daß die erlangte Lösung den Anfangsbedingungen wirklich entspricht.

Fs.

G. Fubini. Alcuni nuovi problemi, che si presentano nella teoria delle equazioni alle derivate parziali. Torino Atti **40**, 616-631.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right),$$

wo f eine Funktion ist, die in bezug auf $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, u der Bedingung von Lipschitz genügt; ferner mit partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung (Gleichungen von Bianchi-Niccoletti):

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, u, x, y, z\right),$$

wo wieder f der Bedingung von Lipschitz unterworfen ist. Der Verf. erörtert Randwertaufgaben und weist auf einen nahen Zusammenhang zwischen diesen Aufgaben und dem sogenannten Problem der Umkehrung eines bestimmten Integrals hin, der schon von Le Roux (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **12**, 227-316; F. d. M. **26**, 389, 1895) und Goursat (Toulouse Ann. (2) **6**, 117-141; F. d. M. **35**, 353, 1904) bemerkt worden ist, indem er zugleich die Resultate dieser Autoren verallgemeinert.

Fs.

R. d'Adhémar. Sur une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique. Étude de l'intégrale près d'une frontière caractéristique. Palermo Rend. **20**, 142-159.

Verf. hat in seiner Thèse (Journ. de Math. (5) **10**, 131-207; F. d. M. **35**, 360, 1904) eine Vereinfachung der Methoden Volterras zur Integration der Differentialgleichung

$$A(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

zu geben gesucht. Insbesondere hat er dort gezeigt, daß, wenn die Fläche, die der Träger der gegebenen Werte von u ist, ein charakteristischer Kegel $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ist, es genügt, die Werte von u auf diesem Kegel zu geben, wenn man den Wert $u(x_0, y_0, z_0)$ des Integrals für einen Punkt A_0 im Innern des gegebenen Kegels finden will. Besondere Schwierigkeit verursacht dabei die sogenannte „convergence à la frontière", d. h. der Nachweis, daß, wenn A_0 aus dem Innern des Kegels sich einem Punkte A_1 auf der Fläche des Kegels annähert, sich auch u_0 unendlich dem in A_1 gegebenen Werte u_1 annähert. Dieses Konvergenzproblem nimmt der Verf. in der vorliegenden Arbeit wieder auf für den Fall, daß der auf dem charakteristischen Kegel gegebene Wert der Funktion $u = \lambda^p$ ist; dabei bedeutet p eine ganze Zahl, während λ, θ die Polarkoordinaten in der durch A_0 gehenden Horizontalebene bedeuten, wenn der Anfangspunkt auf der Achse des Kegels liegt. — Am Schlusse wird dann gezeigt, daß man ohne Schwierigkeit an Stelle von λ^p den viel allgemeineren Ausdruck

$$u = \sum_0^\infty {}_p \Phi_p(\theta)\,\lambda^p$$

setzen kann.

Fs.

S. Bernstein. Sur les équations du type parabolique. C. R. **140**, 137-139.

Gegenstand der Note ist die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a\frac{\partial z}{\partial y} + b\frac{\partial z}{\partial x} + c + d.$$

Verf. hat bereits in einer früheren Arbeit (Math. Ann. **59**, 20-76; F. d. M. **35**, 354, 1904) im Falle $a = 0$ eine Methode der sukzessiven Annäherungen zur Lösung dieser Differentialgleichungen mit den Cauchyschen nicht analytischen Anfangsbedingungen gegeben. Hier gibt er eine andere Methode für dieselbe Aufgabe im Falle $a \neq 0$. Das Fundamentalproblem $(a > 0)$, ein Integral der Differentialgleichung zu suchen im Innern eines Rechtecks, dessen Seiten den Achsen parallel sind, wenn die Werte auf der unteren Seite und auf den beiden zur y-Achse parallelen Seiten gegeben sind, läßt immer eine und nur eine Lösung zu, die analytisch in x, aber nicht notwendig analytisch in y ist. — Daraus folgt dann sogleich die Lösung des allgemeinen Dirichletschen Problems $(a \neq 0)$: im Innern einer geschlossenen Figur C, die von einer Parallele zur x-Achse nur in zwei verschiedenen Punkten getroffen wird, ein Integral zu suchen, das auf dieser Figur eine stetige Folge von Werten annimmt. Fs.

L. Pisati. Sulla estensione del metodo di Laplace alle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque con due variabili indipendenti. Palermo Rend. **20**, 344-374.

Laplace hat gezeigt, daß die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

durch die Substitutionen

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az, \quad z_{-1} = \frac{\partial z}{\partial x} + bz$$

in eine Differentialgleichung derselben Ordnung und Form übergeführt wird, und daß in speziellen Fällen dadurch die Integration auf die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird nun eine ähnliche Transformation untersucht und gezeigt, daß die Laplacesche Methode einer Verallgemeinerung fähig ist. Es handelt sich um die Transformation

$$z_1 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} z\right\},$$

die in verschiedenen Typen von partiellen Differentialgleichungen ausgeführt wird. Von besonderem Interesse ist es dabei, daß durch diese Transformation die Differentialgleichung der Form

$$D(z) = \sum_{r=0}^{r=1}\sum_{s=0}^{s=n-r} a_{rs}\frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r\, \partial y^s} = 0$$

wieder in eine Differentialgleichung derselben Ordnung und von demselben Typus übergeführt wird, wenn λ einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung genügt. Für diesen Typus werden, entsprechend der Laplaceschen Methode, im zweiten Teile Fälle hervorgehoben, in denen sich die Integration auf die Integration einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung zurückführen läßt. Der dritte Teil der Arbeit gibt dann eine Anwendung der erlangten Resultate auf die Differentialgleichung dritter Ordnung. Fs.

E. Goursat. Sur le problème de Monge. S. M. F. Bull. **33**, 201-210.

Nach einigen einleitenden Betrachtungen über die Geometrie des n-dimensionalen Raumes wird ein Mongesches System von k Gleichungen $(k \leqq n-1)$

(1) $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, k),$

wo die f_i homogene Funktionen in bezug auf $dx_1, \ldots, dx_n$ sind, und das vom Verf. sogenannte zugehörige „assoziierte System" von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung betrachtet:

(2) $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, k).$

Zunächst wird der Fall $k = n-1$ behandelt. Die Methode von Monge ist dann anwendbar, wenn das System (2) ein Involutionssystem ist; wenn dann $V(x_1, \ldots, x_{n+1}, a, b) = 0$ das vollständige Integral des Systems (2) für $k = n-1$ ist und $b = \varphi(a)$ gesetzt wird, so stellt

$$V = 0, \frac{dV}{da} = 0, \frac{d^2V}{da^2} = 0, \ldots, \frac{d^nV}{da^n} = 0,$$

wie im Falle $n = 2$ von Monge, so hier für beliebiges n das allgemeine Integral des Systems von Monge dar.

Die Methode kann auch angewendet werden, wenn $k < n-1$ ist; denn wenn es gelingt, $n-1-k$ Gleichungen von derselben Art so hinzuzufügen, daß das System (2) ein Involutionssystem ist, wie an Beispielen gezeigt wird. Fs.

J. Kürschák. Zur Theorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen. Math. Ann. **61**, 109-116.

Ist für die Monge-Ampèresche Differentialgleichung

(1) $F = Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$

der Ausdruck

(2) $G = K^2 - HL + MN$

von Null verschieden, so geht die Gleichung (1) bei jeder Berührungstransformation wieder in eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung $F_1 = 0$ über, für die der entsprechende Ausdruck G_1 nicht gleich Null ist.

Einer Anregung, die in der nachgelassenen Arbeit Lies (drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen, Math. Ann. **59**, Fußnote 281; F. d. M. **35**, 672, 1904)

enthalten ist, folgend, weist der Verf. im ersten Teil seiner Arbeit die Invarianz von $G \neq 0$ direkt nach. Er gelangt dabei zu einem Zusammenhang zwischen G und G_1, der es ihm ermöglicht, im zweiten Teile gewisse Schlüsse auf die Differentialgleichungen der Variationsrechnung zu ziehen. Fs.

W. KAPTEYN. **Sur l'équation différentielle de Monge.** Arch. de Math. u. Phys. (3) **9**, 313-329.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der partiellen Differentialgleichung von Monge

$$(1) \qquad Hr + 2Ks + Lt = 0,$$

wo H, K, L unabhängig von x, y und z sind, also nur die Ableitungen erster Ordnung p und q enthalten. Es werden die Bedingungen dafür entwickelt, daß (1) zwei Zwischenintegrale besitzt. Als solche ergeben sich als notwendig und hinreichend

$$(1) \qquad \frac{H}{\theta_{11}} = \frac{K}{\theta_{12}} = \frac{L}{\theta_{22}}$$

und

$$(3) \qquad 2D\left(\theta_{22}\frac{\partial^2 D}{\partial p^2} - 2\theta_{12}\frac{\partial^2 D}{\partial p\,\partial q} + \theta_{11}\frac{\partial^2 D}{\partial q^2}\right) = 3\left(\theta_{22}\left(\frac{\partial D}{\partial p}\right)^2 - 2\theta_{12}\frac{\partial D}{\partial p}\cdot\frac{\partial D}{\partial q} + \theta_{11}\left(\frac{\partial D}{\partial q}\right)^2\right),$$

wenn

$$D = \sqrt{\theta_{12}^2 - \theta_{11}\,\theta_{22}}$$

gesetzt wird, und wenn durch $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{22}$ die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des allgemeinen Integrals der Gleichung (3) bezeichnet werden.

Die Integration von (3) wird allgemein durchgeführt, woraus sich dann die beiden Zwischenintegrale in der Form

$$z - y\varphi''(u) - xg''(u) = \mathfrak{F}(u),\ z - y\psi''(v) - xh''(v) = \mathfrak{F}(v)$$

ergeben, wobei $\mathfrak{F}$ eine willkürliche Funktion bedeutet, während u und v bestimmte Funktionen von p und q, $g(u), h(v), \varphi(u), \psi(v)$ willkürliche Funktionen bzw. nur von u oder v sind, die bei der Integration von (3) auftreten. Zum Schluß wird das Resultat an dem Beispiel:

$$H = pq\beta^2 - (1+q^2)\alpha\beta,\ 2K = (1+q^2)\alpha^2 - (1+p^2)\beta^2,$$
$$L = (1+p^2)\alpha\beta - pq\alpha^2, \text{ wo } \alpha = a + cp,\ \beta = b + cp,$$

erläutert. Fs.

P. ZERVOS. **Sur le problème de Monge.** C. R. **140**, 1013-1016.

Gegeben ist eine Differentialgleichung der Form

$$f\left(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, \frac{dy_2}{dy_1}, \frac{dy_3}{dy_1}, \ldots, \frac{dy_{n+1}}{dy_1}\right) = 0.$$

Es handelt sich um die Aufgabe, $y_1, \ldots, y_{n+1}$ als Funktionen eines

Parameters t, gewisser willkürlicher Funktionen dieses Parameters und ihrer Ableitungen auszudrücken. Im Falle $n = 2$ hat Monge die allgemeinste Lösung des Problems gegeben. Sie besteht darin, daß man die Gleichungen

$$V = 0, \frac{\Delta V}{\Delta a} = 0, \frac{\Delta^2 V}{\Delta a^2} = 0$$

nimmt, wo $V = 0$ das vollständige Integral der adjungierten Gleichung $F'(x, y, z, p, q) = 0$ gibt. In der vorliegenden Note wird gezeigt, daß schon im Falle von vier Variabeln ($n = 3$) die entsprechenden Gleichungen

$$V = 0, \frac{\Delta V}{\Delta a} = 0, \frac{\Delta^2 V}{\Delta a^2} = 0, \frac{\Delta^3 V}{\Delta a^3} = 0$$

nicht die Grundlage zur allgemeinsten Lösung bilden. Es werden vielmehr für den allgemeinen Fall (n beliebig) $n + 1$ gewisse andere Gleichungen als notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt, denen $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ zu genügen haben. Fs.

P. Zervos. Sur le problème de Monge. C. R. **141**, 501-503.

Im Anschluß an die vorstehend angezeigte Note und die nachstehend besprochene von Bottasso bemerkt Verf., daß die Formen der Gleichungen der Integralkurven, mittels deren man zu denjenigen Gleichungssystemen gelangt, die die Grundlage zur Lösung des Mongeschen Problems liefern, auf Eigenschaften hinweisen, die sie mit jeder Integralkurve gemeinsam haben. Diese Eigenschaften werden hervorgehoben und es werden noch einige Bemerkungen daran angeschlossen. Fs.

M. Bottasso. Sur une solution du problème de Monge relatif à l'équation $f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = 0$ à coefficients variables. C. R. **140**, 1579-1582.

Es handelt sich um die Auffindung der Funktionen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ eines Parameters, die der Differentialgleichung

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}, q_2, \ldots, q_{n+1}) = 0, \; q_i = \frac{dx_i}{dx_1} \; (i = 2, 3, \ldots, n+1)$$

genügen, ohne Anwendung einer Quadratur. Verf. ist zu seiner Note durch die Note von Zervos (C. R. **140**, 1013; Referat vorstehend) angeregt worden.

Es wird gezeigt, daß das vorliegende Problem äquivalent ist der Aufgabe ohne eine Quadratur die Enveloppen der Charakteristiken gewisser Flächen eines mehrdimensionalen Raumes zu finden. Zu dem Zwecke werden einige Theoreme zur Theorie der Enveloppen in einem mehrdimensionalen Raume aufgestellt. Fs.

P. BURGATTI. Sopra certi sistemi completi di equazioni a derivate parziali di 2° e 1° ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 725-731.

Im Anschluß an die Untersuchungen von E. Pascal (Lomb. Ist. Rend. (2) **34**, 563-579; F. d. M. **32**, 372, 1901), der die Methoden von Clebsch und Mayer zur Theorie der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung auf gewisse Formen von Systemen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgedehnt hat, beschäftigt sich der Verf. mit einer analogen, weniger nahe liegenden Verallgemeinerung. Der Einfachheit wegen führt er seine Untersuchung aus an einer gewissen Differentialgleichung zweiter Ordnung und einer erster Ordnung, obwohl dieselben auch noch möglich sind, wenn mehrere Differentialgleichungen erster Ordnung vorgelegt sind, und wenn an Stelle der Differentialgleichung zweiter eine solche höherer Ordnung tritt. An die Spitze seiner Arbeit stellt der Verf. einige allgemeine Bemerkungen über die Definition eines vollständigen Systems linearer partieller Differentialgleichungen. Fs.

CH. RIQUIER. Sur l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles auquel conduit l'étude des déformations finies d'un milieu continu. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 475-538.

Verf. beschäftigt sich im ersten Kapitel mit Differentialsystemen, die schon den Gegenstand früherer Arbeiten gebildet haben (Sur une question fondamentale du calcul intégral. Acta Math. **23**, 203-331; F. d. M. **31**, 302, 1900), und denen er dort die Namen systèmes orthoïques und systèmes orthonomes gegeben hat. Die früher angegebenen Bedingungen dafür, daß diese Systeme passiv sind, werden vereinfacht und ebenso der zugehörige Rechenapparat. Nachdem dann im zweiten Kapitel ein gewisses System von algebraischen Gleichungen untersucht worden ist, folgt im dritten und vierten Kapitel die Anwendung auf den eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Arbeit, d. i. das System von partiellen Differentialgleichungen

$$\Sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \lambda_1(x,y,z),\quad \Sigma\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \lambda_2(x,y,z),$$
$$\Sigma\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \lambda_3(x,y,z),\quad \Sigma\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} = \mu_1(x,y,z),$$
$$\Sigma\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} = \mu_2(x,y,z),\quad \Sigma\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \mu_3(x,y,z),$$

wo sich die Summen jedesmal auf drei Funktionen u, v, w beziehen. Wenn auch, wie der Verf. hervorhebt, die Resultate seiner Untersuchungen nicht neu sind (er verweist auf Darboux: Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes), so scheinen sie ihm doch darum Interesse zu beanspruchen, weil bei der vorliegenden Aufgabe Einfachheit und Genauigkeit vor allem angestrebt werden müssen. Es wird insbesondere untersucht, über wieviele der sechs Funktionen λ und μ will-

kürlich verfügt werden kann, damit das System von Differentialgleichungen integrabel wird. Es ergibt sich, daß diese sechs Funktionen sechs Bedingungen zu erfüllen haben, und weiter, daß drei von ihnen, passend ausgewählt (etwa μ_1, μ_2, μ_3), ganz willkürlich bleiben. Fs.

A. W. CONWAY. The partial differential equations of Mathematical Physics. Dublin Trans. (2) 8, 187-200.

Folgende drei Formen werden betrachtet:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}-\cdots-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_m^2}=0.$$

Singuläre Lösungen werden aufgesucht, und eine Methode, nicht-symmetrische Lösungen zu erhalten, wird angegeben. Eine Art einer Lösung erhält den Namen „kinetische Funktion". Lp.

C. W. OSÉEN. Über einige elektrostatische Probleme. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 2, Nr. 5, 8 S.

Durchführung und Ausdehnung der Resultate eines früher publizierten Aufsatzes: Zur Theorie der verzweigten Potentialfunktionen (Arkiv for Mat., Astr. och Fys. **1**, 703-718; F. d. M. **35**, 358, 1904). Msn.

C. W. OSÉEN. Om några potentialfunktioner. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 2, Nr. 6, 10 S.

C. W. OSÉEN. Om några speciella Appellska funktioner. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 2, Nr. 23, 6 S.

Es handelt sich um einige weitere Untersuchungen über Potentialfunktionen P dreier reellen Variabeln, welche der Verf. in einem früheren Aufsatze (Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. **1**, 595-607; F. d. M. **35**, 358, 1904) definiert hat, und welche er Appellsche Funktionen nennt.

Msn.

C. W. OSÉEN. Über eine Klasse von verallgemeinerten Funktionentheorien. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 2, Nr. 22, 17 S.

In dem vorliegenden Aufsatze betrachtet der Verf. eine Klasse von verallgemeinerten Funktionentheorien, welche dasselbe System von Differentialgleichungen umfaßt, das er in einem früheren Aufsatze (Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **1**, 651-664; F. d. M. **35**, 358, 1904) behandelt hat.

Msn.

Kapitel 7.

Variationsrechnung.

W. Ermakoff. Calcul des variations d'après Weierstraß. Journ. de Math. (6) **10**, 97-137.

Französische Übersetzung einer russischen Abhandlung, über die in F. d. M. **34**, 396, 1903 berichtet ist. Wie schon dieser Bericht erkennen läßt, ist die Darstellung nicht immer einwandsfrei. H.

D. Hilbert. Zur Variationsrechnung. Gött. Nachr. 1905, 159-180.

In dem ersten Teile dieser Abhandlung gibt der Verf. einen strengen und zugleich übersichtlichen Weg an, der zum Nachweise für die Notwendigkeit des Lagrangeschen Kriteriums führt. Beschränkt man sich auf den Fall, daß drei Funktionen $y_\nu(x) (\nu = 1, 2, 3)$ gesucht sind, zwischen denen und deren ersten Ableitungen die Bedingungen

$$(1)\quad f(y_1', y_2', y_3', y_1, y_2, y_3; x) = 0 \text{ und } g(y_1', y_2', y_3', y_1, y_2, y_3; x) = 0$$

bestehen, so kommt es auf den Beweis des folgenden Satzes an: Es sei für alle zwischen a_1 und a_2 liegenden Werte von x die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(f, g)}{\partial(y_1', y_2')} \neq 0$; wählt man dann irgend drei andere, den Bedingungen (1) genügende Funktionen $Y_\nu(x)$, für die $Y_\nu(a_1) = y_\nu(a_1)$ für $\nu = 1, 2, 3$ und $Y_\nu(a_2) = y_\nu(a_2)$ für $\nu = 2, 3$ gilt, so sei — vorausgesetzt, daß die $Y_\nu(x)$ und $Y_\nu'(x)$ bez. von jenen besonderen Funktionen $y_\nu(x)$ und ihren Ableitungen $y_\nu'(x)$ hinreichend wenig verschieden sind — stets

$$Y_1(a_2) \geqq y_1(a_2);$$

ist diese Minimalforderung erfüllt, so gibt es notwendig zwei Funktionen $\lambda(x), \mu(x)$, die nicht beide identisch für alle x verschwinden und die zusammen mit den Funktionen $y_\nu(x)$ die aus dem Nullwerden der ersten Variation des Integrals

$$\int_{a_1}^{a_2} \{\lambda f + \mu g\} dx$$

entspringenden Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y_\nu'} - \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

erfüllen.

Der zweite Teil der vorliegenden Abhandlung gibt eine Verallgemeinerung des von dem Verf. in seinen „Mathematischen Problemen“ (vgl. F. d. M., **31**, 68, 1900) für das einfachste Problem der Variationsrechnung aufgestellten Unabhängigkeitssatzes, welcher dann von A. Mayer (vgl. F. d. M. **34**, 398, 1903) für den Fall mehrerer Funktionen erweitert

und durch Rechnung bewiesen war. Der Verf. zeigt nun, daß der Unabhängigkeitssatz in einer noch allgemeineren Fassung ausgesprochen und ohne Aufwand von Rechnung durch Zurückführung auf den in seinen mathematischen Problemen erledigten Spezialfall sehr einfach bewiesen werden kann. Soll das Integral

$$J = \int_a^b F(y', z', y, z; x) \qquad \left[y' = \frac{dy}{dx}, z' = \frac{dz}{dx}\right]$$

einen Minimalwert erhalten im Vergleich zu den Werten, die es annimmt, wenn man für $y(x)$, $z(x)$ andre Funktionen von x mit denselben gegebenen Anfangs- und Endwerten einsetzt, so betrachtet man das Integral

$$J^* = \int_a^b \{F + (y' - p) F_p + (y' - q) F_q\} dx$$

$$\left[F = F(p, q, y, z; x),\ F_p = \frac{\partial F(p, q, y, z; x)}{\partial p},\ F_q = \frac{\partial F(p, q, y, z; x)}{\partial q}\right]$$

und fragt, wie darin p, q als Funktionen von x, y, z zu wählen sind, damit der Wert von J^* vom Integrationswege im xyz-Raume, d. h. von der Wahl der Funktionen $y(x)$, $z(x)$ unabhängig wird.

Zur Beantwortung dieser Frage wählt man im xyz-Raume eine beliebige Fläche $T = 0$ und denkt sich auf ihr p und q derart bestimmt, daß J^*, erstreckt zwischen zwei Punkten der Fläche längs einer beliebigen auf ihr liegenden Kurve, einen von der Wahl dieser Kurve unabhängigen Wert erhält. Dann konstruiert man durch jeden Punkt P der Fläche $T = 0$ diejenige im xyz-Raume gelegene Integralkurve der Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{d\frac{\partial F}{\partial z'}}{dx} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad [F = F(y' z', y, z; x)],$$

für welche in P

$$y' = p, z' = q$$

wird, so daß auf diese Weise eine zweiparametrige, ein räumliches Feld erfüllende Schar von Integralkurven entsteht. Denkt man sich nun für jeden Punkt x, y, z dieses Feldes die hindurchgehende Integralkurve der Schar bestimmt, so sind die Werte der Ableitungen y', z' in diesem Punkte Funktionen $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ von der verlangten Beschaffenheit. Aus diesem Unabhängigkeitssatze ergeben sich dann ganz unmittelbar die wesentlichen Sätze der Jacobi-Hamiltonschen Theorie.

Handelt es sich nur um die Bedingungen des Minimums eines Integrales, so ist die angegebene Konstruktion eines räumlichen pq-Feldes nicht nötig; es genügt vielmehr, irgend eine einparametrige Schar von Integralkurven zu konstruieren, indem man einen Punkt der Fläche $T = 0$ mit einem beliebigen Punkte des räumlichen Feldes durch irgend einen Weg w verbindet und durch alle Punkte von w die Integralkurven der zweiparametrigen Schar legt, wobei die durch sie erzeugte Fläche die

variierte Kurve w enthalten muß. Dann führt die Anwendung des Unabhängigkeitssatzes für eine Veränderliche zum Ziele. Will man die Methode des unabhängigen Integrals zur Auffindung des Minimums eines Doppelintegrals, das mehrere unbekannte Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen enthält, benutzen, so erweist sich die vorstehende Bemerkung nützlich, wie der Verf. an einem Beispiele des näheren zeigt.

Weiter behandelt der Verf. die Aufgabe, z als Funktion von x und y so zu bestimmen, daß

$$J = \int\limits_{(\Omega)} F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z; x, y\right) d\omega + \int\limits_{(S_1)} f\left(\frac{dz}{ds}, z; s\right) ds,$$

wo Ω ein gegebenes Gebiet der xy-Ebene und S_1 einen Teil der Begrenzung von Ω bezeichnet, einen Minimalwert erhält, während z auf dem übrigen Teile S_2 der Begrenzung vorgeschriebene Werte haben soll. F, f sind gegebene Funktionen ihrer Argumente, und s ist die von einem festen Punkte gerechnete Bogenlänge von S.

Am Schlusse der inhaltreichen Abhandlung ist eine Regel für die Behandlung von solchen Variationsproblemen aufgestellt, bei denen überall auf dem Rande die Werte der zu bestimmenden Funktion vorgeschrieben sind. H.

A. Mayer. Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale. II. Mitteilung. Leipz. Ber. **57**, 49-67.

A. Mayer. Nachträgliche Bemerkung zu meiner II. Mitteilung über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz. Leipz. Ber. **57**, 313-314.

In der ersten Mitteilung über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz (F. d. M. **34**, 398, 1903) hatte der Verf. nur den Zweck im Auge, für das vorgelegte Problem der Variationsrechnung diejenige bestimmte Form dieses Satzes zu gewinnen, welche die Weierstraßsche E-Funktion auf das besondere Extremalenfeld bezieht, das unmittelbar zu dem Jacobischen Kriterium der konjugierten Punkte führt. Diese besondere, allerdings aber auch besonders wichtige Form des Satzes läuft im wesentlichen darauf hinaus, die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung des Problems durch die Jacobi-Hamiltonsche Methode vollständig zu integrieren. Die allgemeine Lösung derjenigen Hilbertschen Aufgabe, auf deren Erledigung sich der Unabhängigkeitssatz gründet, muß man also erhalten können, sobald man nur die allgemeine Cauchysche Methode an Stelle jener speziellen Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichungen des Problems benutzt. In der Tat zeigt die Durchführung dieses Gedankens, daß die so erhaltene Lösung alle möglichen Lösungen jener Aufgabe umfaßt. Diese Resultate werden, unabhängig von den früheren Untersuchungen und ohne die Cauchysche Methode als bekannt vorauszusetzen, in der vorliegenden Abhandlung entwickelt.

Das Problem, um das es sich handelt, ist: Unter allen Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ von x, die $r < n$ gegebenen, in bezug auf die Differentialquotienten $y_1', \ldots, y_n'$ voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen

$$f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

genügen, an beiden Grenzen x_0 und $x_1 > x_0$ feste Werte besitzen und zwischen diesen Grenzen mit ihren ersten Differentialquotienten stetig bleiben, diejenigen zu finden, welche das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx$$

zu einem Extremum machen.

Zunächst wird untersucht, in welchem Zusammenhange dieses Problem zu der folgenden Hilbertschen Aufgabe steht: Die Variabeln $p_1, \ldots, p_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ als Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$ so zu bestimmen, daß der Ausdruck

$$|\Omega| + \sum_{i=1}^{n} (y_i' - p_i) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i},$$

in welchem

$$|\Omega| \equiv f(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n) + \sum_{\varrho=1}^{r} \mu_\varrho f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)$$

ist und $y_1, \ldots, y_n$ als unbestimmte Funktionen von x zu betrachten sind, ein vollständiger Differentialquotient und zugleich den r Bedingungen

$$f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

identisch genügt werde.

Der Verf. gelangt schließlich zu einem Satze (V), der nach vollständiger Lösung der Differentialgleichungen seines Variationsproblems

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \; f = 0,$$

wo

$$\Omega \equiv f + \sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_\varrho f_\varrho$$

ist, jedes System von Lösungen dieser Differentialgleichungen zu erhalten gestattet, welches mit irgend einem Systeme von Lösungen des Hilbertschen Problems in den Beziehungen

$$y_i' = p_i, \; \lambda_\varrho = \mu_\varrho$$

steht. In der nachträglichen Bemerkung zu seiner zweiten Mitteilung gibt der Verf. dann noch die Regel an, nach der sich solche zusammengehörigen Lösungen der Differentialgleichungen seines und des Hilbertschen Problems erhalten lassen.

In dem letzten Paragraphen seiner zweiten Mitteilung, die sich mit dem zweiten Teile der vorstehend besprochenen Hilbertschen Abhandlung eng berührt, werden noch die Grenzen der Anwendbarkeit des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes untersucht. H.

C. Carathéodory. Über das allgemeine Problem der Variationsrechnung. Gött. Nachr. 1905, 83-90.

In einem Anhange zu seiner Dissertation (vgl. F. d. M. **35**, 370, 1904) hatte der Verf. eine Verallgemeinerung des von Joh. Bernoulli zur Lösung des Brachistochronen-Problems benutzten Verfahrens auf beliebige Probleme ohne Nebenbedingungen gegeben. Die sich hieraus ergebende Methode, welche auf eine mit der Jacobi-Hamiltonschen übereinstimmende Differentialgleichung führt, besitzt, ebenso wie die Bernoullische Lösung, die Vorzüge der geometrischen Anschaulichkeit und der ausschließlichen Verwendung direkter Schlußweisen; sie führt das Variationsproblem auf ein solches gewöhnlicher Extrema zurück.

In der vorliegenden Mitteilung zeigt Verf., wie man auf dem gleichen Wege für das allgemeine Variationsproblem mit Differentialgleichungen als Nebenbedingungen die Lagrangeschen Differentialgleichungen ableiten kann, und erhält zugleich auch ein System von hinreichenden Bedingungen für das Eintreten eines Extremums. Dabei beschränkt er sich auf den Fall, daß das zu einem Minimum zu machende Integral

$$J = \int f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) dx$$

längs einer Kurve genommen wird, die zwei gegebene Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) verbindet und die Differentialgleichung

$$g\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

erfüllt. Jedoch ist die Übertragung auf den allgemeinen Fall leicht auszuführen. H.

J. Hadamard. Sur quelques questions de calcul des variations. S. M. F. Bull. **33**, 73-80.

In einer früheren Mitteilung (vgl. F. d. M. **33**, 387, 1902) hatte der Verf. eine notwendige (den Bedingungen von Legendre oder Weierstraß entsprechende) Bedingung für das Minimum eines n-fachen Integrals mit m unbekannten Funktionen gegeben und hinzugefügt, daß die Methode von Clebsch für $m = n = 2$ eine ihr gleichwertige Bedingung liefere, während für höhere Zahlenwerte von m und n die Gleichwertigkeit beider Bedingungen noch zweifelhaft blieb, und daß die gefundene Bedingung imstande sei, die Rolle der Legendre-Weierstraßschen Bedingung als hinreichende Bedingung zu spielen.

Wie der Verf. in der vorliegenden Mitteilung zeigt, sind die letzteren Behauptungen nicht aufrecht zu erhalten; selbst in dem einfachsten Falle für $m = n = 2$ bedürfen diese Fragen noch der Klarstellung.

Zum Schlusse seiner Mitteilung weist der Verf. kurz auf Ergänzungen verschiedener Resultate der Variationsrechnung hin, deren ausführliche Darstellung er aber einer weiteren Veröffentlichung vorbehält. H.

M. Mason. Beweis eines Lemmas der Variationsrechnung. Math. Ann. **61**, 450-452.

Ist $P(x, y)$ eine im Rechtecke R

$$x = a \dots x = \alpha, \quad y = b \dots y = \beta$$

einschließlich der Seiten stetige Funktion, und ist für alle den üblichen Bedingungen genügenden Funktionen ζ die Gleichung

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta P(x, y) \frac{\partial^{2m} \zeta}{\partial x^m \, \partial y^m} \, dx \, dy = 0$$

erfüllt, so hat $P(x, y)$ die Gestalt

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} (x^k \, Y_k(y) + y^k \, X_k(x)),$$

wo X_k, Y_k stetige Funktionen sind.

Der Satz ist für den Fall $m = 3$ von Hilbert in seiner Abhandlung über das Dirichletsche Prinzip (1901) bewiesen. Der hier für beliebiges m gegebene Beweis schließt sich eng der Methode an, mittels deren Du Bois-Reymond den entsprechenden Satz für eine Dimension bewiesen hat. H.

J. Kürschák. Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Math. Ann. **60**, 157-165.

Durch Fortsetzung der Untersuchungen von Hirsch (Math. Ann. **49**, 49-72; F. d. M. **28**, 322, 1897) und W. Hertz (Diss. Kiel, F. d. M. **34**, 401, 1903) gelangt Verf. zu dem folgenden Resultat: „Wenn der Differentialausdruck zweiter Ordnung F die Eigenschaft hat, daß sein δF sich selbst adjungiert ist, so ist F eine solche lineare Funktion der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} y_{11} \, y_{12} \cdots y_{1n} \\ y_{21} \, y_{22} \cdots y_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n_1} \, y_{n_2} \cdots y_{nn} \end{vmatrix}$$

und ihrer Subdeterminanten, deren Koeffizienten Differentialausdrücke erster Ordnung sind. Außerdem kann F auf die Form $V(f)$ gebracht werden, wo f wieder eine solche lineare Funktion der Determinante D und ihrer Subdeterminanten ist, deren Koeffizienten Differentialausdrücke erster Ordnung sind.“ Wbg.

M. Fréchet. Sur une extension de la méthode de Jacobi-Hamilton. Annali di Mat. (3) **11**, 187-199.

In einer im Jahre 1890 veröffentlichten Abhandlung (F. d. M. **22**, 382, 1890) hatte Volterra die Untersuchungen von Jacobi und

Hamilton über die Differentialgleichungen, die ausdrücken, daß die erste Variation eines einfachen Integrals verschwindet, auf das Doppelintegral

$$\iint U\,dx_4\,dx_5$$

verallgemeinert, wo U eine Funktion von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 und der Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x_4, x_5)},\ \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(x_4, x_5)},\ \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(x_4, x_5)}$$

ist. Diese Untersuchung dehnt der Verf. auf den allgemeinsten Fall aus, nämlich auf das Integral

$$J = \iiint\ldots\int f\left(x_{r+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_r, \frac{\partial x_{r+1}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial x_r}\right) dx_1 \ldots dx_r,$$

wo $x_{r+1}, \ldots, x_n$ Funktionen von $x_1, \ldots, x_r$ sind; für $r = 1$ erhält man den Jacobischen als speziellen Fall. Hierbei bedient sich der Verf. der Definitionen und Lehrsätze, die Volterra in einer anderen Abhandlung (F. d. M. **21**, 400, 1889) für den Raum von n Dimensionen aufgestellt hatte. H.

F. Bernstein. Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene. Math. Ann. **60**, 117-136.

Daß der Kreis unter allen ebenen Kurven von gegebenem Umfange den größten Inhalt habe, ist eine Behauptung, die für unsere Vorstellung unmittelbare Gewißheit besitzt. Die bisher für diesen Satz gegebenen Beweise stehen aber zu den Quellen, aus denen unserer Vorstellung seine Richtigkeit unmittelbar sich erschließt, in keiner Beziehung. Deshalb unternimmt es der Verf., auf der anschaulichen Grundlage einen strengen Beweis des Satzes zu führen.

Für diesen Beweis dient die folgende Vorstellung als Ausgangspunkt der Betrachtungen. Auf einer Kugeloberfläche möge sich eine Flüssigkeitsschicht, die von einem elastischen Bande umschlungen und zusammengehalten ist, von einem Punkte aus ausbreiten. Unter der Wirkung der mechanischen Kräfte wird hierbei die Begrenzung der Flüssigkeit stets ein Kreis sein. Im Verlaufe der Ausbreitung wird die Flüssigkeitsschicht einmal die ganze Halbkugel überdecken, deren Pol der Ausgangspunkt ist, und ihre Grenzlinie wird der zu diesem Punkte als Pol gehörige größte Kreis, d. h. eine geodätische Linie sein, womit sich ein Zusammenhang des vorliegenden Problems mit dem der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten zu erkennen gibt. Der gesuchte Nachweis, daß auf der Kugeloberfläche unter allen einfach geschlossenen konvexen Kurven von gegebenem Inhalte der Kreis den kürzesten Umfang hat, besteht dann in einer genaueren Ausarbeitung des analogen Verhältnisses bei der Ausdehnung nicht kreisförmiger Schichten (Teil I).

Nachdem so der Satz für Kurven auf der Kugeloberfläche bewiesen ist, muß ein Grenzübergang ausgeführt werden, um den Satz auch für ebene Kurven als richtig nachzuweisen (Teil II), wozu gezeigt werden muß, daß von dem Prinzipe der Stetigkeit Gebrauch gemacht werden darf. Dementsprechend weist der Verf. nach, daß eine kleine Abänderung der Bedingungen der erörterten Erscheinung nur eine kleine Abänderung dieser selbst zur Folge hat, und sichert so die Berechtigung des Grenzüberganges. Der Nachweis geschieht in Form einer Ungleichung für die sphärischen Kurven, die sich auch auf die ebenen Kurven übertragen läßt. H.

T. J. I'A. Bromwich. Remarks concerning the variation of the length of a curve. Amer. M. S. Bull. (2) 11, 547-548.

Auszug aus einem Briefe an O. Bolza mit Vorschlägen zur Vereinfachung des Verfahrens bei der Ermittelung der (schwachen) Variation der Länge einer Kurve auf einer Oberfläche. Lp.

G. Senftner. Ein mechanisches Problem aus der Variationsrechnung. Rostock. 32 S. 8°.

Siebenter Abschnitt.

Funktionentheorie.

Kapitel 1.

Allgemeines.

O. STOLZ und J. A. GMEINER. Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. In zwei Abteilungen. II. Abteilung. Mit 11 Figuren im Text. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. S. 243-598 gr. 8° (Teubners Samml. Bd. XIV, 2).

Die erste Abteilung dieses Werkes ist im Vorjahre angezeigt worden (F. d. M. **35**, 378, 1904). Schon in der „Theoretischen Arithmetik" (F. d. M. **33**, 177, 1902) ist die eindeutige Funktion einer reellen Veränderlichen eingeführt und verwendet; auf die Erklärung der Stetigkeit einer solchen Funktion wurde dort nicht eingegangen. Die „Einleitung in die Funktionentheorie" muß diesen Begriff in den Vordergrund stellen. Von den fünf Abschnitten der ersten Abteilung beschäftigten sich die drei ersten mit dem allgemeinen Begriff der Funktionen und mit ihren Grenzwerten. Vom Abschnitte IV an wurde der Unterschied zwischen reellen und komplexen Werten der Veränderlichen und der Konstanten fallen gelassen. Der IV. Abschnitt handelte von den ganzen rationalen Funktionen, der V. von den ganzen Potenzreihen.

Eine bedeutende Umgestaltung weisen jetzt die von Gmeiner bearbeiteten Abschnitte VI, IX—XI auf. Der VI. Abschnitt gibt unter anderem die Kriterien der Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen mit positiven Gliedern nach Pringsheim. Im IX. Abschnitte wird die Lehre von den unendlichen Produkten entwickelt, ohne daß von der aus den Logarithmen ihrer Faktoren gebildeten Reihe Gebrauch gemacht wird. Ebenda werden Sätze über die unendlichen Produkte, deren Faktoren von einer Veränder-

lichen abhängen, im Anschlusse an eine Arbeit von Arzelà hergeleitet. Ganz neu bearbeitet sind die Abschnitte X und XI über die endlichen und unendlichen Kettenbrüche.

Der Inhalt des Buches ist zum größten Teile den Funktionentheorien von Weierstraß und von Riemann gemeinsam. Mehrdeutige monogene Funktionen kommen, abgesehen von gelegentlicher Erwähnung, nur im VII. und VIII. Abschnitte vor. Der erstere bringt auch ihre Erklärung nach Weierstraß, der hierzu ein anderes Gebilde als die Ebene der komplexen Zahlen nicht benutzt. Der letztere handelt von den Kreisfunktionen, unter denen sich eben auch vieldeutige Funktionen: der Logarithmus, die Potenz mit nicht ganzem Exponenten, der Arcus tangens, der Arcus sinus befinden. Alle Abschnitte sind mit zugehörigen Übungen versehen. Die Verf. bemerken, daß sich an dieses Werk unmittelbar der zweite Band der „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung" von Stolz anschließen wird.

Wir können es uns nicht versagen, aus der Anzeige der beiden Abteilungen dieses Werks von J. Tannery in Darboux Bull. (2) **29**, 153-154 und 336-337 die kurze, aber treffende Charakteristik zu wiederholen: Die Verf. verstehen es, mit wenigen Worten das Notwendige zu sagen, und weil sie es verstehen, kurz zu reden, können sie in ihre Bücher viel hineinlegen. Der Name der Verf. genügt allein. Überall herrscht die äußerste Sorgfalt im Streben nach Strenge, nach treffsicherer Bestimmtheit und Reinheit der Rede, an die sie ihre Leser gewöhnt haben. Lp.

É. Borel. Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes. Paris: Gauthier-Villars. VIII u. 158 S. 8°.

Der vorliegende Band ist bereits der sechste in der Reihe der „Monographien zur Funktionentheorie", die wir É. Borel verdanken. Er wird, wie die vorhergehenden, von allen Mathematikern, die an der Entwicklung der Funktionentheorie Anteil nehmen, mit Freude begrüßt werden. Werden doch in diesen Monographien einzelne, in sich abgeschlossene Teile jenes Gebietes in der Weise dargestellt, daß möglichst wenig Vorkenntnisse vorausgesetzt werden. Dazu kommt, daß Borel in hervorragendem Maße die Fähigkeit besitzt, für die Ergebnisse, die andere mit großer Anstrengung gefunden und oft recht umständlich hergeleitet haben, einfache und durchsichtige Beweise zu finden, und endlich sind nicht die zahlreichen neuen Ergebnisse zu vergessen, die Borel selbst hinzugefügt hat.

Der Inhalt des Bändchens bildet einen Teil der Vorlesungen über Reihen von Polynomen, die Borel im Winter 1903/04 an der École Normale gehalten hat, nämlich den Teil, der sich auf reelle Veränderliche bezieht; die Vorlesungen, die sich auf komplexe Veränderliche bezogen, sollen später veröffentlicht werden. Freilich läßt

sich die Abgrenzung zwischen Reellem und Komplexem nicht immer scharf durchführen; denn, wie die dem Bändchen beigefügte Note von Painlevé zeigt, kann man z. B., von einer Methode des komplexen Gebietes, nämlich der konformen Abbildung ausgehend, zu wichtigen Ergebnissen auf dem reellen Gebiet gelangen, hieraus weitere Sätze für das komplexe Gebiet gewinnen und schließlich damit zu dem reellen Gebiet zurückkehren.

In dem ersten Kapitel kommt Borel auf die Mengenlehre zurück, deren Einführung in Frankreich durch seine „Leçons sur la théorie des fonctions" vom Jahre 1898 so sehr gefördert worden ist, und macht uns mit einigen der Fortschritte bekannt, die seitdem in der Mengenlehre erzielt worden sind, also etwa mit den Begriffen des Kondensationspunktes (Lindelöf), des verallgemeinerten Maßes bei linearen Punktmengen (Lebesgue), des intervalle contigu bei perfekten linearen Punktmengen (Baire).

Das zweite Kapitel bezieht sich auf die Stetigkeit und Unstetigkeit der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Hier ist zu nennen die Verallgemeinerung des Satzes von der gleichmäßigen Stetigkeit einer in einem Intervall stetigen Funktion durch Baire und die Verallgemeinerung des Riemannschen Integralbegriffs durch Lebesgue.

Nach diesen Vorbereitungen wendet sich Borel im dritten Kapitel zur Betrachtung von unendlichen Reihen der Form:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,$$

wo die Reihenglieder $u_n(x)$ reelle Funktionen der reellen Veränderlichen x sind, die erstens beschränkte Funktionen und zweitens so beschaffen sein sollen, daß die Reihe für die betrachteten Werte von x konvergiert. Sind die Reihenglieder in einem Intervall $x = (a \ldots b)$ stetig, so entsteht die Frage, wann auch die Summe $S(x)$ der Reihe in diesem Intervall stetig ist. Die von Stokes und Seidel eingeführte gleichförmige Konvergenz ist dafür eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung; notwendig und hinreichend ist vielmehr eine Art der Konvergenz, die zuerst Arzelà betrachtet hat, und die Borel als quasigleichförmig bezeichnet. Es verdient hervorgehoben zu werden, mit welcher Eleganz Borel das Theorem von Arzelà herleitet, dessen Abhandlungen recht mühsam zu lesen sind. Arzelà hat auch zuerst in voller Allgemeinheit die Frage beantwortet, wann eine Summe $S(x)$ integrabler Funktionen $u_n(x)$ selbst integrabel ist. Bei der Integrabilität im Riemannschen Sinne ist dafür notwendig und hinreichend, daß die Reihe in dem Intervall $(a \ldots b)$ im allgemeinen quasiuniform konvergiert. Es ist bemerkenswert, daß bei der Integrabilität im Sinne von Lebesgue die Bedingung noch einfacher wird, indem dazu genügt, daß die Summe $S(x)$ wieder eine beschränkte Funktion wird. Während so die Frage nach dem Integral und nach der Integration einer unendlichen Reihe stetiger Funktionen zu einem befriedigenden Abschluß gebracht worden ist, sind wir über die Frage nach der Ableitung und nach der Differentiation einer solchen Reihe noch gänzlich im unklaren.

In dem vierten Kapitel wird die Darstellung stetiger Funktionen als Summen von Polynomen behandelt, und es werden zuerst in sehr lehrreicher Weise die verschiedenen Herleitungen vorgeführt, die einerseits Weierstraß, Picard, Lerch, Volterra mit transzendenten, andererseits Runge, Lebesgue, Mittag-Leffler mit elementaren Hülfsmitteln für den Satz gegeben haben, daß eine jede in dem Intervall $(a \dots b)$ stetige Funktion $S(x)$ sich als eine Summe von Polynomen darstellen läßt, die für jeden Bereich innerhalb des Intervalles gleichförmig konvergiert. Daß es unter den Darstellungen einer stetigen differenzierbaren Funktion $f(x)$ in Form einer Summe von Polynomen

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

stets auch solche gibt, bei denen die Gleichung gilt:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{du_1(x)}{dx} + \frac{du_2(x)}{dx} + \cdots,$$

hat Painlevé gezeigt. Nach Borel läßt sich eine jede stetige und in dem Intervall $(-1 \dots +1)$ beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ durch eine Reihe der Form:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n x^n + B_n \cos nx + C_n \sin nx)$$

in der Weise darstellen, daß alle Ableitungen von $f(x)$ gleich sind den Summen der entsprechenden Ableitungen der Reihenglieder, und daß die so erhaltene Entwicklung für jedes Gebiet innerhalb des Intervalles $(-1 \dots +1)$ gleichförmig konvergiert.

Es folgen Betrachtungen über die Lagrangesche Interpolationsformel, bei denen Borel sich mit Runge (F. d. M. **32**, 272, 1901) begegnet. Würde nämlich diese Formel gültig bleiben, wenn man zur Grenze für unendlich viele Ordinaten übergeht, so hätte man damit ein einfaches Mittel, eine stetige Funktion für das betrachtete Intervall in eine Summe von Polynomen zu entwickeln. Dies ist jedoch, wie ein einfaches Beispiel von Runge und ein verwickelteres, aber recht instruktives Beispiel von Borel zeigt, nicht der Fall.

Den Schluß des Kapitels bilden Bemerkungen über das Problem von Tschebyschoff betreffend die ganze Funktion gegebenen Grades, die sich in einem gegebenen Intervalle von einer gegebenen Funktion am wenigsten unterscheidet; dabei werden die Untersuchungen von P. Kirchberger (F. d. M. **33**, 397, 1902) herangezogen.

Das fünfte, kurze Kapitel hat die Darstellung unstetiger Funktionen durch Polynome zum Gegenstande. Borel begnügt sich hier damit, die Grundbegriffe zu entwickeln und den fundamentalen Satz von Baire auszusprechen; im übrigen verweist er auf die Leçons sur les fonctions discontinues dieses Forschers; einen einfachen Beweis für den Satz von Baire findet man in der Note, die Lebesgue zu dem Bändchen beigesteuert hat. St.

R. Baire. Leçons sur les fonctions discontinues. Paris: Gauthier-Villars. VIII u. 127 S. 8°.

Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, ohne besondere Vorkenntnisse vorauszusetzen, nach und nach diejenigen Begriffe und Theoreme zu entwickeln, die ihn selbst zu der Beantwortung der Frage geführt haben, welche reellen unstetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen sich als unendliche Summen stetiger Funktionen darstellen lassen (vgl. F. d. M. **30**, 359, 1899). Dem entsprechend wird zunächst gezeigt, wie sich schon bei den einfachsten Aufgaben der höheren Analysis unstetige Funktionen einstellen, und wie man in einfachen Fällen Funktionen mit gegebenen Unstetigkeiten als Summen stetiger Funktionen darstellen kann (Kapitel I). Die Grundlage für die genauere Erforschung der Klasse von unstetigen Funktionen, die eine solche Darstellung gestatten, bildet eine Reihe von Sätzen aus der Mengenlehre und im besonderen aus der Lehre von den linearen Punktmengen (Kapitel II und III). Mit ihrer Hülfe gelingt es, zunächst notwendige, dann auch hinreichende Bedingungen für die Darstellbarkeit zu finden (Kapitel IV). Die so gewonnenen Ergebnisse lassen sich auch in gewissem Umfange auf Funktionen von mehreren Veränderlichen übertragen (Kapitel V). St.

D. Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. (Dritte Mitteilung.) Gött. Nachr. 1905, 307-338.

D. Hilbert. Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 233-240.

O. Kellogg. Unstetigkeiten bei den linearen Integralgleichungen mit Anwendung auf ein Problem von Riemann. Math. Ann. **60**, 424-433.

Bei der großen Wichtigkeit, die Hilberts dritte Mitteilung für die Funktionentheorie hat, soll darüber etwas ausführlicher berichtet werden.

Riemann hat sich die Aufgabe gestellt, Funktionen einer komplexen Veränderlichen innerhalb eines Gebietes zu bestimmen, das von einer gegebenen Randkurve begrenzt ist, wenn zwischen dem reellen und dem imaginären Teil der Funktion auf der Randkurve Relationen gelten sollen, deren Koeffizienten gegebene, auf der Randkurve stetige Funktionen sind. Die Theorie der linearen Integralgleichungen bietet nun, wie Hilbert schon in seinem Heidelberger Vortrage an einem Beispiele gezeigt hatte, die Mittel, diese Riemannsche Frage für den Fall zu lösen, daß die auf der Randkurve gegebenen Relationen linear sind.

Die erste und einfachste Aufgabe dieser Art besteht darin, eine außerhalb der geschlossenen analytischen Kurve C der Länge l reguläre analytische Funktion $f_a(z)$ und eine innerhalb C ebenfalls reguläre Funktion $f_i(z)$ zu finden, so daß die Randwerte beider Funktionen auf C in einem gegebenen komplexen Verhältnis stehen, daß also auf C:

(1) $$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

ist, wo in dem komplexen Ausdrucke

(2) $$c(s) = a(s) + ib(s)$$

der reelle und der imaginäre Teil zweimal stetige differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s von C ohne gemeinsame Nullstelle sind. Die Zurückführung dieser Aufgabe auf die Lösung einer linearen Integralgleichung zweiter Art gelingt durch folgende Überlegungen.

I. Es sei $G_j(x, y; x', y')$ eine Greensche Funktion, die in bezug auf x, y innerhalb C überall der Gleichung $\triangle G_j = 0$ genügt und an der innerhalb C gelegenen Stelle x', y' logarithmisch unendlich wird, und von der Art, daß die in der Richtung der inneren Normale genommenen Ableitungen von $G_j(x, y; x', y')$ auf C den von s unabhängigen Wert $2\pi/l$ haben. Läßt man die Punkte x, y und x', y' auf die Randkurve C wandern, so möge der betreffende Wert von G_j mit $G_j(s, s')$ bezeichnet werden.

Wenn jetzt $W(s)$ irgend einen komplexen Ausdruck auf C bedeutet, so möge zur Abkürzung

(3) $$\frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_j(s, s')}{\partial s'} W(s')\, ds' = M_j W$$

gesetzt werden. Sind f_j die Randwerte einer analytischen Funktion, so wird durch das Integral $M_j f_j$ wieder die Funktion $f_j(s)$ dargestellt, nur um eine komplexe Konstante derart vermehrt, daß das über die Kurve C erstreckte Integral verschwindet. Diese Reproduktion ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß der komplexe Ausdruck

(4) $$f_j(s) = u_j(s) + iv_j(s)$$

den Randwerten einer innerhalb C regulären Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ gleich ist. Durch den Ausdruck $W + M_j W$ werden stets die Randwerte einer innerhalb C regulären Funktion der komplexen Veränderlichen z dargestellt.

II. Setzt man statt der Worte „innerhalb C" überall die Worte „außerhalb C", so gelangt man zu einer Greenschen Funktion $G_a(x, y; x', y')$ und zu der Operation

(5) $$M_a W = \frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_a(s, s')}{\partial s'} W(s')\, ds',$$

und es wird, falls f_a die Randwerte einer außerhalb C regulären analytischen Funktion bedeutet, durch den Ausdruck $-M_a f_a$ wiederum die Funktion $f_a(s)$ dargestellt, vermehrt um eine solche komplexe Konstante, daß das über die Kurve C erstreckte Integral verschwindet. Diese Reproduktion ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß der komplexe Ausdruck

(6) $$f_a(s) = u_a(s) + iv_a(s)$$

den Randwerten einer außerhalb C regulären Funktion der komplexen Veränderlichen z gleich ist. Durch den Ausdruck $W - M_a W$ werden stets die Randwerte einer außerhalb C regulären Funktion der komplexen Veränderlichen z dargestellt.

III. Die Verbindung zwischen den Operationen M_j und M_a wird durch die Identität vermittelt:

$$(7) \qquad M_a W = M_j W + \int_0^l D(s', s) W(s') \, ds',$$

in der $D(s', s)$ eine bestimmte, zu C gehörige reguläre analytische Funktion von s' und s bedeutet.

IV. Unter Fortlassung des Argumentes s setze man:

$$(8) \quad F_a = f_a + M_a f_a, \qquad (9) \quad F_j = -f_j + M_j f_j + \gamma,$$

wo γ eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet, und

$$(10) \qquad c(s') = c(s) + c(s', s) \sin \frac{\pi}{l} (s - s').$$

Dann ergibt sich aus (1) durch die Operation M_a:

$$(11) \qquad M_a f_a = c(s) M_j f_j + \int_0^l E(s', s) f_j(s') \, ds',$$

wo $E(s', s)$ eine stetige differenzierbare Funktion von s' und s wird, und jetzt folgt aus (1), (8), (9) und (11):

$$(12) \quad F_a - cF_j = 2c(s) \left\{ f_j + \int_0^l \frac{E(s', s)}{2c(s)} f_j(s') \, ds' - \tfrac{1}{2}\gamma \right\},$$

wo nach den Voraussetzungen

$$(13) \qquad K(s', s) = - \frac{E(s', s)}{2c(s)}$$

eine stetige differenzierbare Funktion von s' und s ist. Auf diese Weise ist man zu der linearen Integralgleichung zweiter Art mit dem komplexen Kern $K(s', s)$ gelangt:

$$(14) \qquad \tfrac{1}{2}\gamma = f_j - \int_0^l K(s', s) f_j(s') \, ds'.$$

Man weiß, daß die Integralgleichung (14) gewiß eine von Null verschiedene Lösung

$$f_j(s) = u_j(s) + i v_j(s)$$

besitzt, und zwar entweder, indem man die Konstante γ als von Null verschieden annimmt, oder, falls der Wert Eins ein Eigenwert für den Kern $K(s', s)$ ist, indem man $\gamma = 0$ setzt. Hat man aber $f_j(s)$, so ist $f_a(s) = c(s) f_j(s)$. Bildet man alsdann aus (8) und (9) die Ausdrücke F_a und F_j, so erhält man entweder identisch Null oder nicht. In dem ersten Fall ist mit Hülfe der Greenschen Funktionen G_a und G_j die Aufgabe sofort gelöst. In dem zweiten betrachte man die zu f_a und f_j konjugiert komplexen Ausdrücke $\bar{f}_a$ und $\bar{f}_j$. Sie führen zu der Lösung der Aufgabe, ein Funktionenpaar $g_a(z)$ und $g_j(z)$ zu finden, das auf C der Relation

$$(1') \qquad g_a(s) = \bar{c}(s) \, g_j(s)$$

genügt, wo $\bar{c}(s)$ zu $c(s)$ konjugiert ist. Der erste Fall tritt ein, wenn die Änderung von $\log c(s)$ beim Umlauf um C in positivem Sinn negativ

ist, der zweite, wenn diese Änderung positiv ausfällt. Wenn sie jedoch verschwindet, so lassen sich gleichzeitig die Forderungen (1) und (1') erfüllen.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt auch, daß es stets bei beliebig gegebenem $c(s)$ ein Paar von Funktionen f_a und f_i gibt, von denen die erste außerhalb C, die zweite innerhalb C den Charakter einer rationalen Funktion hat, während auf C notwendig die Relation (1) erfüllt ist.

Die zweite Aufgabe, die Hilbert löst, besteht darin, zwei außerhalb der geschlossenen analytischen Kurve C reguläre, bzw. sich wie rationale Funktionen verhaltende Funktionen $f_a(z)$ und $f'_a(z)$ und zwei innerhalb C reguläre, bzw. sich wie rationale Funktionen verhaltende Funktionen $f_i(z)$ und $f'_i(z)$ zu finden, so daß die Randwerte dieser beiden Funktionenpaare auf der Kurve C eine gegebene lineare Transformation mit gegebenen komplexen Koeffizienten erfahren, daß also

$$(15)\qquad \begin{cases} f_a(s) = c_1(s)\, f_i(s) + c_2(s)\, f'_i(s), \\ f'_a(s) = c'_1(s)\, f_i(s) + c'_2(s)\, f'_i(s) \end{cases}$$

wird, wo die $c_1(s)$, $c'_1(s)$, $c_2(s)$, $c'_2(s)$ gegebene komplexe, zweimal stetige differenzierbare Ausdrücke in s sind, deren Determinante für alle s von Null verschieden bleibt. Zur Lösung der Aufgabe setze man unter Weglassung des Argumentes:

$$(16)\quad F_a = f_a + M_a f_a, \qquad (17)\quad F'_a = f'_a + M_a f'_a,$$

$$(18)\quad F_i = -f_i + M_i f_i + \gamma, \qquad (19)\quad F'_i = -f'_i + M_i f'_i,$$

wo γ eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet, und ferner:

$$(20)\quad c_k^{(h)}(s') = c_k^{(h)}(s) + c_k^{(h)}(s', s) \sin \frac{\pi}{l}(s - s')\; (h = 0, 1;\ k = 1, 2),$$

und wende wieder auf die Gleichungen (15) die Operation M an. In ähnlicher Weise wie bei der ersten Aufgabe erhält man hierdurch die Gleichungen:

$$(21)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\gamma = f_i - \int\limits_0^{l} \left\{ K_1(s', s)\, f_i(s') + K_2(s', s)\, f'_i(s') \right\} ds', \\[2ex] 0 = f'_i - \int\limits_0^{l} \left\{ K'_1(s', s)\, f_i(s') + K'_2(s', s)\, f'_i(s') \right\} ds', \end{cases}$$

die sich in eine einzige lineare Integralgleichung zweiter Art:

$$(22)\qquad \gamma(s) = \varphi(s) - \int\limits_0^{2l} K(s', s)\, \varphi(s')\, ds'$$

zusammenfassen lassen, indem man die Funktionen $\gamma(s)$, $\varphi(s)$, $K(s', s)$ geeignet definiert. Die weiteren Schlüsse gestalten sich ganz ähnlich, wie bei der ersten Aufgabe, und man gelangt so zu dem Satze, daß es entweder zwei Funktionenpaare $f_i(z)$, $f'_i(z)$ und $f_a(z)$, $f'_a(z)$ gibt, die der Aufgabe (im Falle regulären Verhaltens) genügen, oder daß sich die Aufgabe lösen läßt, wenn die $c_k^{(h)}(s)$ durch die konjugierten Ausdrücke ersetzt werden. Es gibt entweder gar kein System oder nur eine endliche

Anzahl linear unabhängiger Systeme von analytischen Funktionen $f_j(z)$, $f'_j(z)$, $f_a(z)$, $f'_a(z)$, die außerhalb, bzw. innerhalb C regulär sind und auf C den Relationen (15) genügende Randwerte besitzen. Läßt man dagegen statt des regulären Verhaltens ein Verhalten nach Art rationaler Funktionen zu, so besitzen die Relationen (15) gewiß mindestens ein Lösungssystem.

Von diesem Satze macht Hilbert eine bemerkenswerte Anwendung auf den Beweis für die Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe, also auf die Lösung des besonderen, der Theorie der linearen Differentialgleichungen entsprungenen Riemannschen Problems. Den Gedanken zu dieser Lösung hatte er bereits in seiner Vorlesung über Integralgleichungen im Wintersemester 1901/02 entwickelt, und einer seiner Zuhörer, O. Kellogg, hatte ihn in der oben angegebenen Note auszuführen versucht; auf anderem Wege ist L. Schlesinger vorgegangen, der die Kontinuitätsmethode herangezogen hat.

Handelt es sich also etwa um eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, so verbinde man die gegebenen singulären Punkte $z', z'', \ldots, z^{(m)}$ zyklisch mittels einer geschlossenen analytischen Kurve C. Dann hat man ein Paar von Funktionen $f(z), f'(z)$ zu konstruieren, die sich überall in der Ebene wie rationale Funktionen verhalten und nur auf den zwischen z' und z'', z'' und z''', $\ldots$, $z^{(m-1)}$ und $z^{(m)}$ verlaufenden Kurvenstücken ein singuläres Verhalten zeigen, insofern ihre Werte auf der äußeren Seite dieser Kurvenstücke aus den Werten auf der inneren Seite durch lineare homogene Verbindungen mit gegebenen komplexen Koeffizienten abzuleiten sind. Die Lösung dieser Aufgabe läßt sich darauf zurückführen, Funktionen $g_j(z)$, $g'_j(z)$, $g_a(z)$, $g'_a(z)$ außerhalb, bzw. innerhalb der Kurve C vom Charakter rationaler Funktionen derart zu bestimmen, daß ihre Randwerte die Relationen (15) erfüllen, wodurch man zu Hilberts zweiter Aufgabe geführt wird.

„Die Methode der Integralgleichungen," so schließt Hilbert, „ist auch auf weit allgemeinere Probleme anwendbar; sie führt insbesondere nicht nur zum Ziele, wenn für die Werte der gesuchten Funktionen selbst auf der Randkurve lineare homogene oder inhomogene Relationen vorgeschrieben sind, sondern auch, wenn noch die Ableitungen erster oder höherer Ordnung der gesuchten Funktionen mit den Funktionswerten auf der Randkurve in linearer Weise verknüpft sind. Durch die Behandlung solcher Aufgaben wird, wie mir scheint, der Theorie der Funktionen einer komplexen Variable ein neues dankbares Kapitel hinzugefügt."

St.

D. Hilbert. Über das Dirichletsche Prinzip. J. für Math. **129**, 63-67.

Wiederabdruck des Münchener Vortrages vom Jahre 1899, über den F. d. M. **31**, 418, 1900 berichtet worden ist. Hinzugefügt sind einige Literaturangaben, die der Ref. durch den Hinweis auf J. Hadamard, Bull. Soc. math. de France **34**, 135, 1906 ergänzen möchte. St.

M. B. PORTER. Concerning Green's theorem and the Cauchy Riemann differential equations. Annals of Math. (2) 7, 1-2.

Verwandlung eines Flächenintegrals in ein Linienintegral unter Annahmen, von denen die merkwürdigste die Voraussetzung der Existenz der beteiligten Funktionen auf einer Schar das Integrationsgebiet durchsetzender und überall dicht liegender Parallelen ist. Lwt.

J. LÜROTH. Eine historische Bemerkung zur Funktionentheorie. Math. Ann. 60, 398-401.

Während Schröder 1876 und Weierstraß erst 1880 Reihen angaben, die in verschiedenen Gebieten verschiedene Funktionen darstellen, hat, wie in der vorliegenden Bemerkung mitgeteilt wird, Kronecker bereits im Winter 1865/66 dem Verf. eine Reihe mitgeteilt, die im Innern des Einheitskreises den Wert 1, im Äußern den Wert -1 als Summe besitzt. Man erhält diese Reihe, wenn man $-\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$ in eine Reihe der Form $\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty}\frac{c(\lambda)}{x^{\lambda}-x^{-\lambda}}$ entwickelt und dann nach x differenziert. Man erhält so die Reihe $\left(x-\frac{1}{x}\right)\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty}\lambda c(\lambda)\frac{x^{\lambda}+x^{-\lambda}}{(x^{\lambda}-x^{-\lambda})^{2}}$, die die angegebene Eigenschaft besitzt und in unendlich vielen Punkten der Kreislinie unendlich wird. Es schließt sich an diese Mitteilung noch eine nähere Bestimmung der Koeffizienten $c(\lambda)$. Gz.

PH. E. B. JOURDAIN. On the general theory of functions. J. für Math. 128, 169-210.

Der erste Teil der Arbeit behandelt die allgemeine Funktionentheorie vom Standpunkt der Cantorschen Kardinalzahlen (d. h. er stellt die Mächtigkeit allgemeiner Funktionsklassen fest), die beiden anschließenden Teile vom Standpunkte der Cantorschen Ordnungstypen; von diesem aus werden die fundamentalen Begriffe als Limes, Stetigkeit, Satz von der Existenz des Minimums beleuchtet. Hervorgehoben sei als konkretes Ergebnis aus dem ersten Teil, daß die Mächtigkeit aller (im gewöhnlichen, Riemannschen, nicht im Lebesgueschen Sinne) integrablen Funktionen c^c ist, also größer als die des Kontinuums, woraus folgt, daß es integrable Funktionen gibt, die nicht nur in keine gleichmäßig, sondern auch in keine ungleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen entwickelbar sind; aus dem dritten Teil, die Konstruktion einer ganzen transzendenten Funktion, die in vorgegebenen, sich nur nach ∞ häufenden Stellen willkürlich vorgegebene Werte annimmt, wobei nach dem Muster der Weierstraßschen Produktbildung und des Mittag-Lefflerschen Theorems verfahren wird. T.

EDM. MAILLET. Sur les nombres transcendants. C. R. **141**, 418-420.

Die erste von vier Noten, deren Ergebnisse der Verf. indessen zusammenhängend in einem Buche: „Théorie des nombres transcendants", Paris 1906, dargestellt hat. Er bildet — um hier nur die Richtung seiner Resultate zu kennzeichnen — den Begriff der Liouvilleschen Transzendenten und versteht darunter zunächst diejenigen Zahlen, deren Transzendenz sich aus dem bekannten Kriterium von Liouville erkennen läßt, und dann allgemeiner alle die, deren Transzendenz sich aus einem etwas allgemeineren Kriterium ableitet, bei welchem die Kettenbruchkoeffizienten nicht dem Körper der rationalen Zahlen entstammen, sondern einem willkürlichen algebraischen Zahlkörper. Die Zahl e gehört nicht zu diesen Transzendenten. Der Verf. gibt seine ersten Resultate ohne Beweise an. T.

EDM. MAILLET. Sur les nombres e et π et les équations transcendantes. Acta Math. **29**, 295-331.

Diese Arbeit zeigt die Fruchtbarkeit der Methoden, die Hilbert und Hurwitz zum Beweise der Transzendenz von e und π benutzt haben. Unter den Resultaten des Verf. heben wir folgendes hervor:

$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$ sei eine gegebene Folge von positiven ganzen Zahlen, und man bilde die Gleichung

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty c_n\, x^{\omega_n} = 0$$

mit rationalen Koeffizienten. Wenn dann $1/c_n$ mit n genügend rasch zunimmt, so kann e keine Wurzel der Gleichung sein. Dasselbe gilt für π.

Zuletzt entwickelt der Verf. algebraische Eigenschaften der Gleichung $\Phi = 0$, wobei die c_n als reelle Größen (nicht notwendig rational) vorausgesetzt werden. Die Untersuchung bezieht sich auf die Anzahl der reellen und imaginären Wurzeln und ihre angenäherte Berechnung. Wieder kommt es dabei auf ein genügend rasches Zunehmen von c_n mit n an.

G. K.

G. REMOUNDOS. Sur quelques points de la théorie des nombres et la théorie des fonctions. C. R. **140**, 1231-1233.

Vorläufige Mitteilung von Untersuchungen, die der Verf. in einer ausführlichen Abhandlung entwickeln will. Gz.

T. BRODÉN. Über die elementare Konstruktion sogenannter Kurven ohne Tangente. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys., **2**, Nr. 2, 12 S.

H. v. Koch hat eine Methode angegeben, um stetige Kurven ohne Tangente zu konstruieren (Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **1**, 681-702; F. d. M. **35**, 387, 1904). Der Verf. zeigt, daß diese Konstruktion eine

Folgerung aus seinen früher publizierten Untersuchungen ist (J. für Math. **118**, 1-60; F. d. M. **28**, 353, 1897). Im vorliegenden Artikel werden diese Untersuchungen mit Rücksicht auf die genannte Konstruktionsaufgabe vervollständigt. Msn.

H. von Koch. Remarque sur une communication de M. Brodén. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys., **2**, Nr. 27, 2 S.

Eine Bemerkung, die sich auf den in dem vorhergehenden Referate behandelten Aufsatz bezieht. Msn.

E. Cesàro. Remarques sur la courbe de von Koch. Napoli Atti (2) **12**, Nr. 15, 12 S.

Der Verf. entwickelt einige sehr sinnreiche und interessante Betrachtungen über eine von H. von Koch (Sur une courbe continue, sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire, Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **1**, 681-702; F. d. Math. **35**, 387, 1904) erfundene stetige Linie; er gibt die analytische Darstellung dieser Linie, zeigt, daß die Fläche des von derselben bedeckten Ebenenteiles kleiner ist als jede angebbare Zahl, und definiert eine analoge Kurve, welche die entgegengesetzte Eigenschaft besitzt, welche nämlich, ebenso wie die wohlbekannte Peanosche Linie, einen endlichen Ebenenteil ausfüllt. Vi.

E. Cesàro. Remarques sur la courbe de von Koch. Napoli Atti (2) **12**, Nr. 15, 12 S. Napoli Rend. (3) **11**, 90.

Eine gerade Strecke $s_0 = AB$ werde in drei gleiche Teile geteilt und über der mittleren Strecke DE links von AB ein gleichseitiges Dreieck DEC errichtet. Man erhält so einen Streckenzug $s_1 = ADCEB$. Wendet man auf die vier Strecken dieses Zuges dasselbe Verfahren an wie auf s_0, so gelangt man zu einem 16teiligen Zuge s_2, von diesem in gleicher Weise zu s_3 usf. $\lim_{n=\infty} s_n$ wird eine Kurve ohne Tangenten, die v. Kochsche Kurve. Die aus ihrer Entstehung sofort sich ergebende Eigenschaft dieser Kurve, nämlich die Ähnlichkeit der ganzen Kurve mit ihren Teilen, läßt, wie Cesàro bemerkt, weitere wichtige Eigenschaften mit Leichtigkeit ableiten; so erkennt man fast unmittelbar, daß die Länge unendlich ist. Weiter führt die erwähnte Grundeigenschaft der Kurve zu ihrer analytischen Darstellung. Diese ergibt sich am bequemsten, wenn man die Ebene als Trägerin einer komplexen Variable z und z als Funktion einer reellen von 0 bis 1 verlaufenden Variable t betrachtet; die Variable z durchläuft dann die Kurve. Um z als Funktion von t wirklich darzustellen, wird t als dyadische Zahl geschrieben vorausgesetzt. Es ist dies dasselbe Darstellungsprinzip, dessen ich mich in der Arbeit

„Stetigkeit und Differentialquotient“ zur Bildung stetiger, nicht differenzierbarer Funktionen bedient habe, wie denn auch die v. Kochsche Kurve im Prinzip von den daselbst durch das „periodische Teilungsverfahren“ gewonnenen Kurven nicht wesentlich verschieden ist. Eine ähnliche Darstellung wie für die v. Kochsche Kurve gibt Cesàro für eine andere, die nach Art der Peanoschen ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck vollständig ausfüllt. Im Gegensatz zu dieser Kurve besitzt die v. Kochsche keine mehrfachen Punkte und kann in Flächenstücke von beliebig kleinem Inhalt eingeschlossen werden. Beide Kurven werden miteinander verglichen, jedoch sind die auf einen Übergang von der einen zur anderen Kurvenart zielenden Betrachtungen nicht recht klar. Jedenfalls würden Aussprüche wie: On dirait que la courbe de von Koch, par le fait d'avoir une longueur infinie entre deux quelconques de ses points, montre déjà sa tendance à occuper une aire, die nur zu leicht irrige Vorstellungen veranlassen können, besser vermieden. Stz.

G. Vitali. Una proprietà delle funzioni misurabili. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 599-603.

Jede in einem endlichen Intervalle meßbare Funktion zerfällt in die Summe einer Funktion, deren Bairesche Klasse $\leqq 2$ ist, und einer Funktion, welche nur in den Punkten einer Menge von nulltem Inhalt von Null verschieden ist. Vi.

E. Bortolotti. Sulle funzioni sempre crescenti. Atti della Soc. dei naturalisti e matematici di Modena (4) **7**, 33-35.

Auf Anfrage von E. Cesàro zeigt E. Bortolotti, daß sich der folgende Satz aus einer in seinem Contributo alla teoria degli infiniti (Annali di Mat. (3) **11**, 29-66; F. d. M. **35**, 299, 1904) angegebenen Formel herleiten läßt: Nehmen x und y von Null an derart zu, daß gleichen Veränderungen von x zunehmende Veränderungen von y entsprechen, so nimmt y/x beständig zu. Vi.

N. J. Lennes. Remarks on a proof that a continuous function is uniformly continuous. Annals of Math. (2) **6**, 86-88.

An Beispielen wird gezeigt, daß der Lürothsche Beweis bei einer andern Definition der Stetigkeit versagt. Lwt.

G. Hamel. Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Math. Ann. **60**, 459-462.

Gestützt auf den Satz, daß das Kontinuum einer wohlgeordneten Menge äquivalent ist, gelingt die Aufstellung einer Basis $a, b, c, \ldots$ aller Zahlen, so daß jede Zahl x eindeutig in der Form

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots$$

dargestellt werden kann; von den rationalen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ ist immer nur eine endliche Anzahl von 0 verschieden. Die Definition

$$f(\alpha a + \beta b + \cdots) = \alpha f(a) + \beta f(b) + \cdots$$

führt für jede Wahl von $f(a), f(b), \ldots$ zu einer unstetigen Lösung der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, wenn nur die Verhältnisse $f(a):a, f(b):b, \ldots$ nicht sämtlich derselben Zahl gleich sind. Man erhält so alle unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung. Lwt.

H. Tietze. Über Funktionalgleichungen, deren Lösungen keiner algebraischen Differentialgleichung genügen können. Monatsh. für Math. **16**, 329-364.

Analytische Funktionen $\varphi(x)$, die einer Funktionalgleichung

$$\varphi(x+1) = \frac{A(x)\,\varphi(x) + B(x)}{C(x)\,\varphi(x) + D(x)}$$

mit rationalen A, B, C, D genügen, sind transzendental-transzendent. Das ist kurz der Inhalt der Arbeit. Von einer Präzisierung der Voraussetzungen darf hier abgesehen werden. Der triviale Fall, daß $\varphi(x$ rational ist, wird ausgeschlossen.

Durch Transformation der Funktion $\varphi(x)$ gelingt es, die Funktionalgleichung auf die Normalform $\psi(x+1) = 1 + r(x)/\psi(x)$ zu bringen, in der $r(x)$ eine rationale Funktion mit der Nullstelle $x = \infty$ bedeutet. $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind hinsichtlich der Eigenschaft, einer algebraischen Differentialgleichung zu genügen oder nicht, im wesentlichen gleichwertig.

Der Beweis stützt sich auf mehrere Hülfssätze, die besagen, daß gewisse Ausdrücke für rationale Funktionen zweier Variabeln nicht identisch verschwinden können. Als Folgerung ergibt sich aus ihnen, daß die Funktionen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^\nu}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(x+\nu)} \quad \text{und} \quad 1 + \frac{a}{1\cdot x} + \frac{a^2}{1\cdot 2\cdot x(x+1)} + \cdots$$

transzendental-transzendent sind, und daß die Besselsche Funktion $J_n(z)$ als Funktion des Index keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. Lwt.

K. Stephanos. Sur une catégorie d'équations fonctionnelles. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 200-201.

Zusammenfassung des Inhalts der gleichbetitelten Arbeit in Palermo Rend. **18**; vgl. F. d. M. **35**, 301, 1904. Sk.

J. L. W. V. Jensen. Om konvexe Funktioner og Uligheder mellem Middelvaerdier. Nyt. Tidss. for Math. **16** B, 49-68.

Eine konvexe Funktion ist nach der Definition des Verf. eine endliche eindeutige und reelle Funktion $\varphi(x)$ einer reellen Variable x, welche

in einem gewissen Bezirk die Ungleichheit

$$\varphi(x) + \varphi(y) \geqq 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

befriedigt. Im entgegengesetzten Fall wird die Funktion konkav genannt.

Von dieser Definition aus wird folgender Satz bewiesen:

Wenn $\varphi(x)$ eine in einem gewissen Intervall konvexe Funktion ist und $x_1, x_2, \ldots$ alle in diesem Intervall liegen, und wenn $a_1, a_2, \ldots$ alle positiv, übrigens aber willkürlich sind, dann hat man

$$\varphi\left(\frac{\sum a_\nu x_\nu}{\sum a_\nu}\right) \leqq \frac{\sum a_\nu \varphi(x_\nu)}{\sum a_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n).$$

Diese Formel ist, wie der Verf. sagt, nicht ganz neu, sondern früher von O. Hölder bewiesen „Über einen Mittelwertsatz", Gött. Nachr. 1889; doch wird der Beweis dort unter ganz anderen und spezielleren Voraussetzungen geführt, hat also nicht die Allgemeinheit wie der hier gegebene.

Nun wird von verschiedenen Funktionen bewiesen, daß sie entweder konvex oder konkav sind. So ist x^p für positive x und $p > 1$ eine konvexe Funktion; dagegen ist sie konkav, wenn $0 < p < 1$ und x positiv sind.

Danach wird eine Reihe von Anwendungen des zitierten Satzes gegeben, der nach Ansicht des Verf. beinahe alle bekannten Ungleichheiten zwischen Mittelwerten umfaßt.

Als ein Hauptresultat ergibt sich: Eine konvexe Funktion $\varphi(x)$, welche in einem gewissen Intervall eine endliche höhere Grenze hat, ist in diesem Intervall stetig. Unter denselben Bedingungen hat $\varphi(x)$ immer eine abgeleitete Funktion, sowohl rechts, wie links. Die erste ist niemals kleiner als die letzte. V.

S. Pincherle. Sulle equazioni funzionali lineari. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_2$, 366-374.

Fredholm hat eine allgemeine Lösung der von Hilbert sogenannten linearen Integralgleichung zweiter Art

$$(1) \qquad \varphi(x) - k\int_a^b \varphi(t)\, \alpha(x, t)\, dt = f(x)$$

gegeben. Verf. macht auf den Zusammenhang derselben mit der allgemeinen Theorie der Operationen aufmerksam. Sind A und B zwei distributive Operationen, so stellt $B - kA$ einen Büschel derselben dar; eine dieser Operationen, z. B. B, kann auf die Operation 1 reduziert werden. Die inverse Operation dieses Büschels (2) $(1 - kA)^{-1}$ gibt alsdann die Lösung der Gleichung (1), falls

$$A(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\, \alpha(x, t)\, dt$$

ist. Verf. gibt in der vorliegenden Note analytische Ausdrücke an, die geeignet sind, die Operation (2) darzustellen, und weist den Zusammenhang dieser Ausdrücke mit der von Fredholm angegebenen Lösung der Gleichung (1) oder vielmehr mit der Lösung der ein wenig spezielleren, von Volterra (Torino Atti 1896; Annali di Mat. 1897) und beiläufig von Le Roux (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **12**, 1895) untersuchten Gleichung nach. — Die ohne Beweis angegebenen Resultate sollen in einer demnächst erscheinenden Abhandlung ausführlicher entwickelt werden.

Wbg.

L. Böttcher. Über die Iterationen der linearen Funktion. Wiad. mat. **8**, 291-307 (1904); **9**, 77-86. (Polnisch.)

Es sei $f(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$ die gegebene Funktion. Es werden zwei Fälle unterschieden: 1° wenn die Wurzeln der Gleichung $r = \frac{Ar+B}{Cr+B}$ voneinander verschieden, 2° wenn sie gleich sind. In beiden Fällen wird die Iterationsfunktion angegeben. In die Hauptformeln werden dann die Exponentialfunktion, die hyperbolischen und die gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen eingeführt. Endlich wird die Rechnungsmethode mittels rekurrenter Formeln, symmetrischer Funktionen von Kettenbrüchen gezeigt (vgl. F. d. M. **35**, 398, 1904). Dn.

M. Fréchet. Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles. C. R. **140**, 27-29.

Kurze Angaben über Untersuchungen, zu denen der Verfasser durch die Mengentheorie angeregt worden ist. Insbesondere handelt es sich um den Begriff des Limes, der so eingeführt werden muß, daß er unabhängig ist von der Natur der Elemente, auf die er sich bezieht. Gz.

M. Fréchet. La notion d'écart dans le calcul fonctionnel. C. R. **140**, 772-774.

Kurze Mitteilung über Untersuchungen, die sich auf die mengentheoretische Behandlung von Funktionen beziehen. Gz.

M. Fréchet. Sur les opérations linéaires (deuxième note). American M. S. Trans. **6**, 134-140.

In dieser Note setzt der Verfasser seine früheren Bemerkungen (American M. S. Trans. **5**, 493-499; F. d. M. **35**, 389-390) über

die linearen Operationen fort. Zunächst gibt er zwei neue Darstellungen einer linearen Operation. Darauf untersucht er die Zerlegung einer linearen Operation, die einer Zerlegung des Intervalls in Teilintervalle entspricht. Zum Schluß macht er darauf aufmerksam, daß das Gebiet der Funktionen, für das man eine lineare Operation definiert, von Wichtigkeit ist, und daß z. B. die Hadamardsche Integraldarstellung der linearen Operation voraussetzt, daß die Funktion f integrierbar sei. Das führt dann zu gewissen Verallgemeinerungen. Gz.

H. Hahn. Über punktweise unstetige Funktionen. Monatsh. für Math. **16**, 312-320.

Die Arbeit enthält die Berichtigungen dreier Versehen in Schoenflies' Bericht über die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Die Bemerkungen beziehen sich auf die möglichst stetigen Funktionen, auf ein Theorem von Bettazzi und auf die Integrale punktweise unstetiger Funktionen. Die Irrtümer werden an Beispielen dargelegt und die Fassungen der Sätze überall richtig gestellt. Lwt.

L. Schlesinger. Über isoliertwertige Funktionen. Math. Ann. **60**, 543-547.

Die Arbeit enthält die Erledigung einer Frage, die von Weierstraß bei Gelegenheit des Wiederabdrucks seiner Abhandlung vom Jahre 1876 aufgeworfen worden ist. Es wird $u = f(x)$ eine isoliertwertige Funktion genannt, wenn die Gesamtheit der Werte, die $f(x)$ für einen nichtsingulären Wert x annimmt, eine isolierte Menge bildet, so daß also eindeutige und endlichvieldeutige Funktionen unter den isoliertwertigen einbegriffen sind. Von diesen isoliertwertigen Funktionen werden folgende drei Sätze bewiesen: I. Eine Funktion $u = f(x)$, die eindeutigen Gleichungen genügt, ist stets isoliertwertig. II. Jede isoliertwertige Funktion genügt eindeutigen Gleichungen. III. Die inverse Funktion einer isoliertwertigen Funktion ist selbst isoliertwertig. Mit diesen Sätzen ist die von Weierstraß aufgeworfene Frage dahin beantwortet: Der von Weierstraß für eindeutige oder endlichvieldeutige Funktionen bewiesene Satz gilt für alle Funktionen, die eindeutigen Gleichungen genügen, und nur für solche. Gz.

A. Denjoy. Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles. S. M. F. Bull. **33**, 98-114.

Die Funktion f sei für alle Punkte einer abgeschlossenen Menge erklärt; A sei das Maximum der Funktion „in einem bestimmten Punkte", A' das ebenso zu verstehende Minimum der Funktion A, A'' das Maximum von A' u. s. f. $J, J', J'', \ldots$ sei die entsprechende, mit dem Minimum J von f beginnende Reihe. Es wird gezeigt, daß

$$A' = A''' = A^{(5)} = \cdots,$$
$$A'' = A^{(4)} = A^{(6)} = \cdots$$

ist; und analog für die $J, J', J'', \ldots$

Schließlich wird die für die Menge erklärte Reihe von Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, für die $\lim_{n=\infty} f_n = f$ ist, daraufhin untersucht, ob die auf f_n bezüglichen Größen A', A'', J', J'' für $\lim n = \infty$ gegen die entsprechenden Maxima und Minima der Funktion f konvergieren.

Lwt.

L. Zoretti. Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers. Journ. de Math. (6) **1**, 1-51; auch sep. Thèse. Paris: Gauthier-Villars. 57 S. 4°.

L. Zoretti. Sur un théorème de la théorie des fonctions analytiques. Darb. Bull. (2) **29**, 276-277.

Wenn man fragt, wie sich eine eindeutige analytische Funktion $f(z)$ in der Nähe eines wesentlich singulären Punktes z_0 verhält, so sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Beschreibt man nämlich um z_0 einen Kreis vom Halbmesser r, so ist die Menge der im Innern dieses Kreises gelegenen singulären Punkte entweder, wenn r klein genug ist, abzählbar oder, wie klein auch r genommen wird, niemals abzählbar. Bei der zweiten Möglichkeit hat man wieder zu unterscheiden, ob die Menge der singulären Punkte in dem Kreise, wenn r klein genug ist, überall diskontinuierlich ist, oder ob sie, wie klein man auch r wählt, einen kontinuierlichen Bestandteil enthält; in diesem dritten Fall braucht übrigens keineswegs eine singuläre Linie durch z_0 selbst hindurchzugehen, vielmehr kann z_0 auch Grenzpunkt singulärer Linien sein, wie z. B. der Punkt $z = 0$ für die Funktion

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(nz)}{n^2},$$

wo

$$\varphi(u) = \sum_{p,q} \frac{e^{-p-q}}{p(u-1) - qi}$$

ist, p und q ganze Zahlen, q kleiner als p.

In dem ersten Fall gibt ein Theorem von Picard Aufschluß über das Verhalten der Funktion in der Nähe von z_0; die Funktion kommt jedem beliebigen Werte beliebig nahe, wenn man sich dem Punkte z_0 auf einem geeigneten Wege nähert, höchstens zwei Werte ausgenommen. Bei dem dritten Fall dagegen können alle denkbaren Möglichkeiten auch wirklich eintreten, und sogar, wenn die singulären Linien selbst vorgeschrieben sind. Bei dem zweiten Fall hat Painlevé drei Unterfälle unterschieden. Wenn die Menge der singulären Punkte im Innern des Kreises vom Halbmesser r perfekt, aber diskontinuierlich ist, so umgebe man einen jeden der Punkte mit einem Kreise, der keinen anderen singulären Punkt in sich enthält, und lasse die Halbmesser dieser Kreise

gegen Null konvergieren. Falls dies in passender Weise geschieht, kann man erreichen, daß die Summe der Umfänge entweder gegen Null konvergiert oder gegen einen endlichen Wert oder über alle Grenzen wächst, und je nachdem dies geschieht, sagt Painlevé, daß der Punkt z_0 einer punktförmigen Menge, einer semilinearen Menge oder einer semisuperfiziellen Menge angehöre. In dem ersten Unterfall verhält sich z_0 wie ein isolierter singulärer Punkt, in dem zweiten kann $f(z)$ in keinem noch so kleinen Gebiete, das z_0 umgibt, stetig sein; aber der dritte Unterfall war bis jetzt unerledigt geblieben. Die Schwierigkeiten, die er bietet, ergeben sich daraus, daß die Methoden, die auf dem Cauchyschen Integralsatz beruhen und die bei den beiden anderen Unterfällen zum Ziel geführt hatten, hier versagen. Man ist daher ausschließlich auf die Methoden der Mengenlehre angewiesen, und zwar kommt es darauf an, die Natur der unendlich vieldeutigen Funktion $z = \psi(w)$ zu untersuchen, die durch Umkehrung der Gleichung $w = f(z)$ entsteht.

Dementsprechend entwickelt der Verfasser in dem ersten Kapitel seiner Abhandlung eine Reihe von Sätzen über perfekte, überall diskontinuierliche Punktmengen in der Ebene. In dem zweiten Kapitel gibt er einen recht umständlichen Beweis des Theorems: Eine eindeutige analytische Funktion, die in einem Gebiete D einen singulären Punkt z_0 besitzt, der einer perfekten, überall diskontinuierlichen Menge singulärer Punkte angehört, ist in D sicher diskontinuierlich. Der Punkt z_0 ist also in dem Sinne von Painlevé ein wesentlich transzendenter Punkt oder eine Grenzstelle solcher Punkte, bei denen das Gebiet der Unbestimmtheit sich nicht auf einen Punkt reduziert.

Die Note in dem „Bulletin" enthält Bemerkungen über eine Vereinfachung dieses Beweises.

Im Anschluß hieran gelangt Zoretti zu dem weiteren Theorem: Die Funktion $\psi(w)$ hat keinen Punkt der Unbestimmtheit, das heißt, sie besitzt außer den Verzweigungspunkten nur, in der Bezeichnung von Painlevé, ordinäre transzendente Punkte, also wesentlich singuläre Punkte, bei denen das Gebiet der Unbestimmtheit sich auf einen einzigen Punkt beschränkt.

Das dritte Kapitel enthält Anwendungen auf die Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung; der Verfasser konnte hierbei eine Reihe von Sätzen benutzen, die ihm Painlevé mitgeteilt hatte, und die noch nicht veröffentlicht waren. Im besonderen beweist Zoretti hier das folgende bemerkenswerte Theorem: Ist das allgemeine Integral einer algebraischen Differentialgleichung zwischen x, y, y' eine höchstens n-deutige Funktion, so besitzt es um die beweglichen kritischen Punkte eine Anzahl $m \leqq n$ von Zweigen, die von dem Werte der Integrationskonstanten unabhängig ist, abgesehen von einer endlichen Anzahl von Werten; das allgemeine Integral ist eine algebraische Funktion der Integrationskonstanten.

Zum Schluß sei dem Referenten noch eine historisch-kritische Bemerkung gestattet. In der Einleitung sagt Zoretti: „Die unsterblichen Arbeiten von Weierstraß über die Funktionentheorie haben den Weg zu

den so fruchtbaren und so wichtigen Untersuchungen von G. Cantor in der Mengenlehre eröffnet." Das ist nicht richtig. Cantor ist zu seinen Untersuchungen über die Mengenlehre von den trigonometrischen Reihen aus geführt worden, und als Weierstraß 1880 den Aufsatz „Zur Funktionenlehre" veröffentlichte, hatte Cantor schon eine Reihe von Abhandlungen über Mengenlehre verfaßt. Allerdings sind diese Abhandlungen später in französischer Übersetzung in den Acta Mathematica erschienen, nachdem sich herausgestellt hatte, daß sie die unentbehrliche Grundlage für eine naturgemäße Einteilung der Singularitäten der analytischen Funktionen bilden, und seitdem ist die Bedeutung der Mengenlehre für die Funktionentheorie, wie auch Zorettis Abhandlung zeigt, immer größer geworden. St.

R. Baire. Sur la représentation des fonctions discontinues. Acta Math. **30**, 1-48.

H. Lebesgue. Sur les fonctions représentables analytiquement. Journ. de Math. (6) **1**, 139-216.

In einer früheren Abhandlung hatte Baire die Klasse der reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen abgegrenzt, die sich als unendliche Summen von stetigen Funktionen darstellen lassen. Jetzt schreitet er fort zu der allgemeineren Aufgabe, die unstetigen Funktionen zu kennzeichnen, die sich als einfache, zweifache, dreifache, . . ., n-fache Summen stetiger Funktionen darstellen lassen, und die er Funktionen erster, zweiter, dritter, . . ., n-ter Klasse nennt; dabei wird vorausgesetzt, daß eine Funktion n-ter Klasse sich nicht als einfache, zweifache, . . ., $(n-1)$-fache Summe stetiger Funktionen darstellen läßt. Diese Klassifikation hat eine wirkliche Bedeutung; denn Lebesgue ist es gelungen, nachzuweisen, daß es wirklich Funktionen jeder der Baireschen Klassen gibt. St.

A. Barbieri. Alcuni teoremi sulle funzioni semicontinue, e sulle funzioni di una variabile, limiti di funzioni di due variabili reali. Palermo Rend. **20**, 335-343.

Die Arbeit hängt mit den neueren Untersuchungen von Baire (Leçons sur les fonctions discontinues, Referat oben S. 435. — Sur les séries à termes continus et tous de même signe, S. M. F. Bull. **32**, 125-128; F. d. M. **35**, 271-272) zusammen. Insbesondere werden vier Sätze hergeleitet, von denen hier der Satz III Platz finden möge: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine in einem Intervall $(a\, b)$ definierte Funktion $f(x)$ angesehen werden kann als Grenzwert (für $y=0$) einer Funktion $F(x, y)$, die in bezug auf x in $(a\, b)$ nach oben (nach unten) halbstetig ist und in bezug auf y in $(0\, 1)$ nicht wächst (nicht abnimmt), wenn y der Null zustrebt, besteht darin, daß $f(x)$ in demselben Intervall nach oben (nach unten) halbstetig ist. Gz.

G. Vitali. Sulle funzioni ad integrale nullo. Palermo Rend. **20**, 136-141.

Es wird der Satz bewiesen: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion $f(x)$ das Integral Null besitzt (im Sinne von Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives; F. d. M. **35**, 377-378, 1904), besteht darin, daß die Punkte, in denen die Funktion von Null verschieden ist, eine Gruppe von der Ausdehnung Null bilden. Gz.

G. Vitali. Un contributo all'analisi delle funzioni. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 365-368.

Es handelt sich um die Untersuchung der Bedingungen, die eine Funktion erfüllen muß, damit sie zur Familie der von Baire in seiner Thèse, 1899, studierten Funktionen gehört. [Baire, Sur les fonctions de variables réelles; Annali di Mat. (3) **3**, 1-123; F. d. M. **30**, 359 bis 360. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, Referat oben S. 435.] Gz.

D. Pompéiu. Sur l'extension du théorème des accroissements finis aux fonctions analytiques d'une variable complexe. Palermo Rend. **19**, 309-313.

Ist $F(z)$ eine analytische Funktion von der Beschaffenheit, daß $F'(z) = f(z)$ ist für ein Gebiet g, sind ferner a und b zwei innerhalb g gelegene Punkte von der Art, daß die Strecke ab ganz im Innern des Gebietes liegt, dann existiert in g stets ein Punkt c, so daß

$$f(c) = \frac{F(a) - F(b)}{a - b}$$

ist. Gz.

D. Pompéiu. Sur la continuité des fonctions de variables complexes. Toul. Ann. (2) **7**, 264-315; auch sep. Thèse. Paris: Gauthier-Villars. 59 S. 4°.

Die Arbeit bildet eine ausführliche Darstellung von Untersuchungen, über die der Verfasser bereits in zwei Noten (C. R. **134**, 1195-1197; F. d. M. **33**, 396, 1902; C. R. **139**, 914-915; F. d. M. **35**, 394, 1904) kurze Mitteilungen gemacht hatte. Die Abhandlung besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teile beschäftigt sich Pompéiu mit dem Briot-Bouquetschen Problem: Es sei $f(u)$ eine Funktion der komplexen Variable u, die in einem gewissen Gebiete R der komplexen Ebene definiert ist. Die Punkte von R zerfallen 1) in solche Punkte $u = z$, für die $f(u)$ eine Ableitung besitzt, und 2) in solche Punkte ζ, von denen man nur weiß, daß $f(u)$ dort stetig ist. Frage: Welches ist die allgemeinste Verteilung der Punkte ζ im Innern von R, so daß die Funktion $f(u)$ in jedem Punkte ζ eine Ableitung besitzt? Die Untersuchung

dieses ersten Teiles wird in fünf Kapiteln durchgeführt. Im ersten Kapitel werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür entwickelt, daß eine Funktion einer komplexen Variable holomorph ist. Im zweiten Kapitel wird gezeigt, daß eine abzählbare Punktmenge eine Lösung des Briot-Bouquetschen Problems liefert. Im dritten Kapitel wird nach Einführung eines neuen Begriffes der Mengenlehre angegeben, welches die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß irgend eine abgeschlossene Punktmenge eine Lösung des Briot-Bouquetschen Problems bildet. Das vierte Kapitel behandelt Erweiterungen der gefundenen Resultate, und im fünften werden einige Sätze über Mengen des Inhalts Null geboten.

Der zweite Teil der Arbeit handelt von den Singularitäten der eindeutigen analytischen Funktionen. Verfasser zeigt, daß die „Ausdehnung" der Menge der singulären Punkte eine wesentliche Rolle bei der Art des Verhaltens der Funktion in der Umgebung der singulären Stellen spielt. Auch deutet er an, daß diese „Ausdehnung" der Menge aller singulären Stellen als Kriterium für eine Klassifikation der eindeutigen analytischen Funktionen dienen kann.

Damit ist die vorliegende Arbeit in ihren allgemeinen Zielen und Resultaten gekennzeichnet. Auf die zum Teil neuen Einzelresultate einzugehen, ist im Rahmen dieses Referats kaum möglich; es sei der Leser auf die Abhandlung selbst verwiesen. Gz.

P. Boutroux. Fonctions multiformes à une infinité de branches. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 441-469.

Unendlich vieldeutige Funktionen treten in der Analysis sehr häufig auf; man braucht nur daran zu denken, daß eine Differentialgleichung $y' = R(x, y)$ in dem einfachen Falle, daß $R(x, y)$ eine rationale Funktion von x und y ist, einzig und allein, wenn sie den Riccatischen Typus hat, eindeutige Integrale liefert und endlich vieldeutige Integrale auch nur bei einer geringen Anzahl von Typen, die Painlevé bestimmt hat. Dennoch gibt es bis jetzt noch keine Theorie der unendlich vieldeutigen Funktionen in dem Sinne, in dem man von einer Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen spricht. Der Grund dafür liegt wohl darin, daß einerseits die Mannigfaltigkeit und Verschiedenheit der Möglichkeiten, die sich hier darbieten, unübersehbar groß ist, und daß sich andererseits der Untersuchung sofort so erhebliche Schwierigkeiten entgegenstellen, daß man darauf verzichten muß, zu so einfachen Ergebnissen zu gelangen, wie sie die Theorie der eindeutigen Funktionen aufweist.

Bei dem Versuche, in das Gebiet der unendlich vieldeutigen Funktionen einzudringen, hat dem Verfasser ein Gedanke als Führer gedient, der sich schon bei den eindeutigen Funktionen bewährt hatte, nämlich die Mengenlehre heranzuziehen, und zwar handelt es sich erstens um die Menge der Verzweigungsstellen der betrachteten Funktion y von x,

Verzweigungsmenge, und zweitens um die Menge der Werte von y, die zu einem Werte von x gehören, Wertemenge. Man wird in gewissem Sinne solche unendlich vieldeutigen Funktionen, bei denen diese Mengen nur einen einzigen Grenzpunkt besitzen, als besonders einfach bezeichnen dürfen. Zwischen den Grenzpunkten der Verzweigungs- und der Wertemenge besteht aber, wie Boutroux beweist, ein merkwürdiger Zusammenhang; es gilt nämlich der Satz: Besitzt die Verzweigungsmenge einer Funktion y von x den einzigen Grenzpunkt Unendlich, so gibt es stets eindeutige analytische Funktionen z von x und y, bei denen für beliebiges x die Wertemenge den einzigen Grenzpunkt Unendlich besitzt. Unter diesen Funktionen z verdienen diejenigen eine besondere Beachtung, bei denen der Umkehrung $x(z)$ wieder die Eigenschaft zukommt, daß die Verzweigungspunkte den einzigen Grenzpunkt Unendlich besitzen, und für diese Funktionen gelingt es in der Tat, unter gewissen Voraussetzungen die Frage nach der analytischen Darstellung zu beantworten.

Betrachtet man unter der Voraussetzung, daß $y(x)$ in endlicher Entfernung keinen Punkt der Unbestimmtheit hat, die Summe

$$\sum_k' \frac{1}{|y_k(x)|^r},$$

erstreckt über alle Zweige y_k der Funktion y, die nach Poincaré stets eine abzählbare Menge bilden, so heißt y von endlichem Typus, wenn es eine positive Zahl r gibt, bei der diese Summe für jeden Wert von x, der von den Nullstellen der Funktion y verschieden ist, unbedingt und gleichmäßig konvergiert; die kleinste Zahl r, die dieser Bedingung genügt, heißt der zugehörige Konvergenzexponent s. Wenn y als Funktion von x und x als Funktion von y endlichen Typus besitzen, so wird y als Funktion von x für alle endlichen Wertepaare x, y durch eine Gleichung der Form

$$P(x, y) \equiv \sum_n f_n(x, y)(y-b)^n = 0$$

definiert; hierin bedeutet b eine geeignet zu wählende Konstante und die $f_n(x)$ sind ganze transzendente Funktionen von x. Hieraus schließt Boutroux, daß y in endlicher Entfernung als singuläre Punkte nur Pole, also keine wesentlich singulären Stellen aufweisen kann. Wie jedoch Hartogs (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **16**, 230, 1907) gezeigt hat, bedürfen die Betrachtungen von Boutroux einer Ergänzung. Wenn man nämlich nur weiß, daß der Ausdruck $P(x, y)$ für alle endlichen Wertepaare x, y konvergiert, so folgt daraus noch nicht, daß er, wie Boutroux annimmt, eine ganze Funktion von x und y darstellt; dazu müßte vielmehr gezeigt werden, daß $P(x, y)$ in jedem endlichen Gebiete gleichmäßig konvergiert. Es möge auch noch darauf hingewiesen werden, daß die Aufgabe, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen anzugeben, damit eine unendlich vieldeutige Funktion y mittels einer Gleichung $P(x, y) = 0$ definiert werden kann, inzwischen in voller Allgemeinheit von H. Hahn gelöst worden ist (Monatshefte **16**, 29, 1905, vergl. diesen Band weiter unten S. 482).

Boutroux wendet sich nunmehr, gewissermaßen den Gedankengang umkehrend, zu der Untersuchung der Funktionen, die sich durch eine Gleichung $P(x, y) = 0$ definieren lassen, wo $P(x, y)$ für jedes endliche Wertepaar x, y konvergiert. Die hauptsächliche Schwierigkeit besteht hierbei in der Beantwortung der Frage nach der Verteilung der Verzweigungsstellen, und um zu bestimmten Ergebnissen zu gelangen, sieht sich Boutroux genötigt, die besondere Annahme zu machen, daß die Gleichung $P(x, y) = 0$ sich auf die Form bringen lasse:

$$\sum_n g_n(x) y^n = 0,$$

wo die $g_n(x)$ rationale Funktionen von x bedeuten sollen, deren Null- und Unendlichkeitsstellen mit n ins Unendliche rücken; aber auch jetzt gelangt er nur in speziellen Fällen zum Ziel. Als recht zugänglich erweisen sich dabei die Funktionen y, bei denen die $g_n(x)$ Polynome des Grades $n \cdot m$ sind, wo m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. „Allein“, so äußert sich der Verfasser am Schluß seiner Abhandlung mit einer gewissen Resignation, „wäre es nicht zweckmäßiger, statt willkürliche Annahmen zu machen, sich zuerst an die Theorie der Differentialgleichungen zu wenden und von ihr Anregungen zu fordern?“ St.

G. Faber. Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Singularitäten. Math. Ann. 60, 379-397.

Wie Mittag-Leffler (1877) und Weierstraß (1880) bewiesen haben, gibt es stets eindeutige analytische Funktionen $F(z)$ mit der einen wesentlich singulären Stelle $z = \infty$, die eine beliebige isolierte Menge von Punkten $a_1, a_2, \ldots$ mit dem einen Häufungspunkte $z = \infty$ zu singulären Punkten haben und sich dort wie gegebene rationale Funktionen verhalten, welche nur an der betreffenden Stelle unendlich groß werden und im Unendlichen verschwinden. Faber verallgemeinert diesen Satz, indem er als Singularitäten a_n auch wesentlich singuläre Stellen und Verzweigungspunkte zuläßt, und indem er von der Menge der Punkte a_n nur verlangt, daß sie isoliert sei. St.

P. Koebe. Über diejenigen analytischen Funktionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen. Diss. Berlin. 32 S.

„In seinen an der Universität Berlin gehaltenen Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen ging Weierstraß von der Aufgabe aus: Alle analytischen Funktionen eines Argumentes zu bestimmen, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen. Die vollständige Lösung dieser Aufgabe hat Weierstraß in seinen Vorlesungen durchgeführt. Zur Bestimmung der mehrdeutigen Funktionen mit algebraischem Additionstheorem hat er sich zu verschiedenen Zeiten verschiedener

Methoden bedient. Es kommt hierbei wesentlich darauf an, zu zeigen, daß die Anzahl der Zweige einer solchen Funktion endlich ist."

„Die vorliegende Dissertation enthält u. a. die Mitteilung eines, wie ich glaube, einfachen und naturgemäßen Verfahrens, durch welches gezeigt werden kann, daß jede mehrdeutige Funktion mit algebraischem Additionstheorem algebraische Funktion einer eindeutigen Funktion ist. Es ist zweifellos, daß Weierstraß diesem Beweisverfahren außerordentlich nahe gekommen sein muß; denn die Hülfsmittel, welche bei diesem Beweisverfahren zur Anwendung gelangen, schließen sich eng an die von ihm selbst für den erwähnten Zweck ausgearbeiteten Methoden an, deren Kenntnis ich einer Vorlesung des Herrn H. A. Schwarz verdanke."

„Im siebenten Bande der Acta Mathematica veröffentlichte Herr Phragmén eine von ihm gefundene Methode zur Lösung der erwähnten Weierstraßschen Aufgabe. Obgleich das von mir gefundene Beweisverfahren eine unverkennbare Verwandtschaft mit dem Verfahren des Herrn Phragmén hat, bestehen doch zwischen beiden Methoden, wie mir scheint, bemerkenswerte Verschiedenheiten." St.

L. Zoretti. Sur le développement d'une fonction analytique uniforme en produit infini. C. R. **141**, 753-754.

Man kann immer ein Produkt von unendlich vielen Faktoren bilden, das absolut konvergent ist und $f(z)$ für jeden Punkt z darstellt, der keine singuläre Stelle ist, und das gleichmäßig konvergent ist in jedem Gebiete, das weder in seinem Innern, noch auf dem Rande eine Singularität enthält. Dieser Satz bildet das Analogon zu dem von Runge und Painlevé über die Entwicklung einer eindeutigen analytischen Funktion in eine Reihe von Polynomen. Die Ableitung des Satzes wird nur angedeutet. Bemerkenswert ist noch die Form der Faktoren, die eine Verallgemeinerung der Weierstraßschen Primfunktion darstellt.

Gz.

G. H. Hardy. On the function $P_\varrho(x)$. Quart. J **37**, 146-172.

Für die Funktion $P_\varrho = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x}{n^\varrho}\right)$ $(\varrho > 1)$ haben bereits Barnes, Lindelöf und Wiman asymptotische Darstellungen gegeben, die aber sämtlich ein Gebiet ausschließen, welches die reelle Achse enthält. Diese Lücke auszufüllen, ist der nächste Zweck der vorliegenden Arbeit. Hardy beschränkt deshalb die Variable x auf ein Gebiet, welches von zwei Radiivectores begrenzt wird, die vom Nullpunkt ausgehen und mit der negativen reellen Achse kleine Winkel bilden, und beweist die Richtigkeit der von ihm schon in einer früheren Arbeit (F. d. M. **35**, 118, 1904) für diesen Fall mitgeteilten asymptotischen Darstellung. Weiter untersucht er die Funktion $P_\varrho(x)$ auch für den Fall, daß ϱ einen komplexen Wert $\mu + i\nu$ hat $(\mu > 1,\ \nu > 0)$. Er

findet, daß sie sich alsdann ähnlich verhält wie für reelle Werte von ϱ; nur nimmt dieselbe Rolle, welche bei reellen ϱ die negative reelle Achse spielt, bei komplexen ϱ eine gewisse Spirale $\left(r = e^{\frac{\mu \vartheta}{\nu}}\right)$ ein, auf welcher nunmehr die Nullstellen der Funktion liegen. Der nächste Abschnitt ist der approximativen Berechnung der Wurzeln der Gleichung $P_\varrho(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ gewidmet, und der letzte beschäftigt sich mit der Aufsuchung einer asymptotischen Darstellung für die Funktion

$$C(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{q^n}\right) \quad (q > 1).$$

F.

A. KNESER. Beiträge zur Theorie der Sturm-Liouvilleschen Darstellung willkürlicher Funktionen. Math. Ann. **60**, 402-423.

Die Abhandlung enthält einige Ergänzungen zu Knesers Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, über die F. d. M. **34**, 428-430, 1903, berichtet worden ist. Im besonderen wird die gleichmäßige Konvergenz der nach Normalfunktionen fortschreitenden Reihen behandelt und ein Satz über angenäherte Darstellung beliebiger stetiger Funktionen durch endliche Summen von Normalfunktionen hergeleitet. St.

M. B. PORTER. Concerning series of analytic functions. Annals of Math. (2) **6**, 190-192.

Verf. beweist folgendes Theorem: „Wenn eine Reihe von Funktionen $f_1(z), f_2(z), \ldots$, die in einem Bereiche γ analytisch sind, derart ist, daß

(I) $|S_n(z)| \equiv |f_1(z) + \cdots + f_n(z)| < G \; (n = 1, 2, \ldots)$

und (II) $\lim\limits_{n=\infty} S_n(z)$ für eine unendliche Punktmenge $[Z_i]$ existiert, von deren Grenzpunkten mindestens einer innerhalb γ liegt, so konvergiert $S_n(z)$ gleichmäßig in einem Bereiche γ', welcher innerhalb γ liegt, und stellt dort eine analytische Funktion dar." Zum Schluß werden einige Fragen behandelt, die sich erheben, wenn man die Bedingung (II) fallen läßt. Wbg.

C. W. OSÉEN. Sur un théorème de M. Le Roy. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. **2**, Nr. 21, 6 S.

Eine Funktion des Argumentes $t = re^{i\theta}$ sei durch die Reihe

$$F(t) = \varphi(0) + \varphi(1)\,t + \varphi(2)\,t^2 + \cdots$$

gegeben, wo $\varphi(z)$ eine analytische Funktion von $z = x + iy$ ist, die für $x \geqq \alpha$ holomorph ist, und deren absoluter Betrag von der Beschaffenheit ist, daß es eine Zahl $\vartheta < \pi$ gibt, die für $-\frac{1}{2}\pi \overline{\overline{<}} \psi \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$

und für ein beliebig kleines ε

$$|\varphi(a + \varrho e^{i\psi})| < e^{(\vartheta+\varepsilon)\varrho}$$

macht, sobald ϱ genügend groß ist. Der Satz von Le Roy sagt dann, daß die Funktion $F(t)$ im Bereiche $\vartheta < \theta < 2\pi - \vartheta$ holomorph ist.

Der Verf. beweist zunächst, daß auch eine Umkehrung dieses Satzes wahr ist. Eine Reihe mit endlichem Konvergenzkreise

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

sei gegeben. Es wird die Existenz einer ganzen, für alle negativen ganzzahligen Werte des Argumentes verschwindenden Funktion nachgewiesen, welche für $z = 0, 1, 2, \ldots$ die Werte $a_0, a_1, a_2, \ldots$ annimmt, und deren absoluter Betrag der Ungleichheit

$$|\varphi(\varrho e^{i\psi})| < e^{(\pi \sin\psi + \varepsilon)\varrho}$$

für ausreichend große ϱ genügt, wie klein auch ε sein mag.

In der Fortsetzung des Aufsatzes beweist der Verf. einen Satz, welcher als eine Verallgemeinerung des Le Royschen Satzes betrachtet werden kann. Auch zu diesem Satze wird eine Umkehrung mitgeteilt.

Msn.

C. V. L. Charlier. Über die Darstellung willkürlicher Funktionen. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 2, Nr. 20, 35 S.

Im ersten Abschnitte des vorliegenden Aufsatzes wird vom Verf. eine Reihe untersucht, die mit den Fourierschen Reihen gewisse Analogien darbietet. Es gilt, eine reelle Funktion $F(x)$, welche für $x = \pm\infty$ gleich Null ist, in eine Reihe von der Form

$$F(x) = A_0 f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \cdots \tag{1}$$

zu entwickeln. Die erzeugende Funktion $f(x)$ hat die folgenden Eigenschaften: 1. $f(x)$ und ihre abgeleiteten Funktionen sind für alle reellen x kontinuierlich. 2. $f(x)$ und ihre sämtlichen Ableitungen verschwinden für $x = \pm\infty$. Die formale Bestimmung der Koeffizienten A_r führt zu der Formel

$$A_r = \int_{-\infty}^{\infty} S_r(x) \cdot F(x)\, dx, \tag{2}$$

wo $S_r(x)$ eine ganze rationale, von $F(x)$ unabhängige Funktion r-ten Grades ist, für welche der Verf. einen Determinantenausdruck herleitet.

Die Konvergenzverhältnisse der Reihe (1) werden vom Verf. in Vergleich mit der Fourierschen Reihe besprochen. Die Frage wird jedoch nicht vollständig gelöst, und der Verf. hofft, „daß die Wichtigkeit der Aufgabe einen Mathematiker veranlassen wird, sich mit der Sache zu beschäftigen."

Zwei spezielle Reihen werden vom Verf. näher untersucht. Als erzeugende Funktionen werden zwei Funktionen angewandt, die in der Theorie der Wahrscheinlichkeiten eine wichtige Rolle spielen. Die fraglichen Funktionen sind:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}}, \quad \chi(x) = \frac{1}{\pi\sigma_1} \cdot \frac{2}{e^{\frac{x}{\sigma_1}} + e^{-\frac{x}{\sigma_1}}}.$$

Der zweite Abschnitt behandelt eine Entwicklung der Funktion $F(x)$ in eine Reihe von der Form

$$(3) \quad F(x) = B_0\, g(x) + B_1\, \Delta g(x) + B_2\, \Delta^2 g(x) + \cdots,$$

wo $g(x)$ eine Funktion von x ist, die für $\pm\infty$ verschwindet, und wo $\Delta g(x)$, $\Delta^2 g(x)$ usw. die Differenzen von $g(x)$ der ersten, der zweiten Ordnung usw. sind. Auch dieses Problem wird hauptsächlich vom formalen Gesichtspunkte behandelt. Die speziellen Beispiele, mit deren Behandlung der Aufsatz endet, sind auch hier wegen ihrer Bedeutung für die Theorie der Wahrscheinlichkeiten gewählt. Msn.

A. C. Dixon. On a class of expansions in oscillating functions. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 83-103.

Im Anschluß an die Untersuchungen von Sturm und Liouville (Journ. de Math. **1**, **2**) über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach oszillierenden Funktionen (s. Burkhardt, Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen, Deutsche Math.-Ver. **10**, 759) verbessert Verf. den heute nicht mehr als streng angesehenen Beweis für die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion nach Funktionen, die gewissen Differentialgleichungen genügen. Ein eingehender Bericht über die wichtige Untersuchung muß wegen des Umfangs und wegen des Formelreichtums unterbleiben. Gz.

P. Fatou. Sur quelques théorèmes de Riemann. C. R. **140**, 569-570.

Aus dem Kriterium, das Riemann für die Konvergenz einer trigonometrischen Reihe gegeben hat, bei der die Grenzwerte der Koeffizienten der Sinus- und Cosinusglieder verschwinden, läßt sich folgern, daß eine Taylorsche Reihe, deren wahrer Konvergenzkreis den Halbmesser Eins hat, und deren Koeffizienten Null zur Grenze haben, in jedem nichtsingulären Punkte des Konvergenzkreises konvergiert. St.

Erhard Schmidt. Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Diss. Göttingen. 33 S. 8°.

Der Verf. knüpft an die bekannten Arbeiten von Fredholm und Hilbert über die sogenannten linearen Integralgleichungen an, über deren Entstehungsgeschichte man das Referat über Hilberts beide Noten in den Gött. Nachr. (F. d. M. **35**, 378, 1904) vergleiche. Abgesehen von den unten zu erwähnenden Entwicklungstheoremen des vierten Kapitels,

die in ihrer Allgemeinheit neu sind, liegt der Schwerpunkt der Arbeit in der Methode, in der besonders einfachen und elementaren Art, wie die wichtigsten Theoreme von Fredholm und Hilbert, die letzteren teilweise unter Beseitigung einschränkender Voraussetzungen, so bewiesen werden, daß eigentlich nichts als die Begriffe der Stetigkeit, des Integrals, der gleichmäßigen und absoluten Konvergenz dabei vorausgesetzt sind. Während Hilbert in seiner ersten Note von algebraischen Sätzen über lineare Gleichungssysteme ausging und von da aus durch einen gewissen Grenzübergang die analogen Sätze über lineare Integralgleichungen gewann, indem er die Anzahl der Gleichungen wie der Unbekannten unbegrenzt wachsen ließ, benutzt Schmidt eine direkte Methode, die in gleicher Weise auf endliche lineare Gleichungssysteme, auf lineare Gleichungssysteme mit abzählbar-unendlichvielen Unbekannten, auf lineare Integralgleichungen u. a. m. angewandt werden kann.

Der „linearen homogenen Integralgleichung"

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

für die unbekannte Funktion $\varphi(s)$ steht — um die eben erwähnte Analogie genauer zu präzisieren — das homogene lineare Gleichungssystem

$$0 = \sum_{q=1}^{n} (\delta_{pq} - \lambda k_{pq})\, x_q \qquad (p = 1, \ldots, n;\ \delta_{pp} = 1,\ \delta_{pq} = 0)$$

gegenüber; wie dieses nicht für jeden Wert von λ ein nicht aus lauter Nullen bestehendes Lösungssystem $x_1, \ldots, x_n$ besitzt, sondern nur für die Nullstellen der Gleichung n-ten Grades

$$\delta(\lambda) = |\,\delta_{pq} - \lambda k_{pq}\,| = 0,$$

so ist auch jene Integralgleichung nur für besondere Werte von λ durch eine stetige Funktion $\varphi(s)$ lösbar, die „Eigenwerte" (Hilbert) des (als stetig angenommenen) Kernes $K(s, t)$; die lösenden Funktionen heißen „Eigenfunktionen".

Insonderheit beschäftigt sich Schmidt mit denjenigen Integralgleichungen, deren Kern $K(s, t)$ eine stetige reelle symmetrische Funktion ihrer beiden Argumente ist, und die also dem Falle entsprechen, daß die k_{pq} reelle Größen sind, welche der Symmetriebedingung $k_{pq} = k_{qp}$ genügen, d. h. der Theorie der orthogonalen Transformation einer reellen quadratischen Form $\sum k_{pq}\, x_p\, x_q$ auf eine Summe reeller Quadrate. Hilbert hatte diese symmetrischen Integralgleichungen in ihrer besonderen Bedeutung (auch für die Randwertaufgaben der Physik) in den Vordergrund gestellt. Nachdem der Verf. im ersten Kapitel einige Konvergenzhülfssätze vorangeschickt hat, die man zumeist als elementargeometrische Sätze aus der Geometrie im Raume aller stetigen Funktionen ansprechen könnte, zeigt er in § 4, daß sämtliche Eigenwerte reell sind, daß zu jedem Eigenwert höchstens eine endliche Anzahl linear unabhängiger reeller Eigenfunktionen gehören, die man stets so wählen kann, daß sie orthogonal sind. Ein Funktionssystem $f_1(s), f_2(s), \ldots$ heißt orthogonal, wenn

$$\int f_p(s) f_q(s)\, ds = \delta_{pq}$$

ist. Er zeigt dann, daß die Eigenwerte sich nicht im Endlichen häufen können, also der absoluten Größe nach geordnet werden können, und gewinnt so den Begriff des zu dem Kern $K(s, t)$ gehörigen vollständigen, normierten Orthogonalsystems von Eigenfunktionen, indem er die normierten Eigenfunktionen der sukzessiven Eigenwerte sämtlich hintereinanderreiht. Nach diesen Vorbereitungen mehr formaler Art beweist er den dem Fundamentalsatz der Algebra oder genauer dem Satz von der Existenz einer Hauptachse einer reellen Kurve oder Fläche 2. O. analogen Satz, daß (für einen reellen, symmetrischen Kern) stets ein reeller Eigenwert existiert, nach einer der Bernoullischen oder Graeffeschen Auflösungsmethode (für algebraische Gleichungen) analogen, einem berühmten Beweise von H. A. Schwarz nachgebildeten Methode; sodann das Analogon zur Darstellung einer reellen quadratischen Form als Summe von Quadraten reeller Linearformen, ohne die von Hilbert hierfür noch angenommene „Allgemeinheit" des Kerns vorauszusetzen. Damit hat er zugleich das Entwicklungstheorem, daß jede stetige Funktion, die mit Hülfe einer stetigen Funktion $p(t)$ in der Form

$$\int_a^b K(s, t)\, p(t)\, dt$$

dargestellt werden kann, nach Fourierscher Art in eine nach den Eigenfunktionen des Kernes K fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Die Fredholmschen Formeln werden nicht benutzt; vielmehr liefert die unbeschränkte Gültigkeit der Entwicklungssätze für den Fall des symmetrischen Kernes eine neue Auflösungsmethode der inhomogenen linearen Integralgleichung.

Das dritte Kapitel statuiert die Analoga der Sätze über die Darstellung einer Bilinearform $\sum k_{pq} x_p y_q$ als einer Produktsumme $\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(y)$, wo die φ_ν wie die ψ_ν für sich je ein Orthogonalsystem bilden.

Das vierte Kapitel, das von der übrigen Arbeit nur die Hülfssätze (Kapitel 1) benutzt, giebt Entwicklungstheoreme, die die bekannten Entwicklungen in Polynomen-, Fourier- usw.-Reihen unter allgemeine Sätze subsumiert. Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ eine unendliche Reihe für $a \leqq x \leqq b$ definierter reeller, zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, deren zweite Ableitungen ein abgeschlossenes System bilden, d. h. ein solches, daß es keine von 0 verschiedene stetige Funktion $f(x)$ gibt, welche für jedes ν der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\, \varphi_\nu''(x)\, dx = 0$$

genügt; dann läßt sich jede für $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige Funktion in eine Reihe endlicher linearer homogener Aggregate der Funktionen

$1, x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ gleichmäßig konvergent entwickeln; und jede einmal stetig differenzierbare Funktion absolut und gleichmäßig nach $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ allein. T.

M. Krause. Sur l'interpolation des fonctions continues par des polynomes. C. R. **140**, 1442-1444.

Diese Note bezieht sich auf die von Borel definierten Polynome $P_{\nu q}(x)$; es kann auf die ausführliche Abhandlung des Verf. „Über die Darstellung der stetigen Funktionen durch Reihen von ganzen rationalen Funktionen" (Leipz. Ber. **58**, 2-18, 1906) verwiesen werden. Gz.

Edm. Maillet. Sur les fonctions monodromes d'ordre non transfini et les équations différentielles (quatrième Note). J. de l'Éc. Pol. (2) **10**, 1-78.

Es handelt sich um die Fortsetzung und genauere Durchführung von Untersuchungen, über die von anderer Seite (F. d. M. **33**, 328 und 417-419, 1902) sowie von dem Referenten (F. d. M. **34**, 451, 1903), berichtet worden ist. Setzt man in dem Ausdrucke

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_n^{x^\varrho}}}}}}}$$

alle Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gleich e, so entsteht eine Funktion von x, die der Verfasser mit

$$e_{k+1}(x)$$

bezeichnet, und von der er sagt, daß sie für $x=\infty$ von der endlichen Ordnung (k, ϱ) unendlich werde; ist $k=0$, so nennt er ϱ selbst die Ordnung. Wenn ferner eine ganze transzendente Funktion $g(x)$ für $x=\infty$ schneller als $e_{k+1}(x^{\varrho-\varepsilon})$ wächst, aber langsamer als $e_{k+1}(x^{\varrho+\varepsilon})$, wo ε eine beliebig kleine positive Größe bezeichnet, so heißt $g(x)$ von der endlichen Ordnung (k, ϱ). Wächst $g(x)$ aber schneller als $e_{k+1}(x^\varrho)$, wie groß auch k sei, so hat die Funktion eine transfinite Ordnung; Funktionen dieser Art werden im folgenden ausgeschlossen.

Während Boutroux (F. d. M. **35**, 411, 1904) eine Einteilung der ganzen Funktionen endlicher Ordnung gegeben hatte, die auf der Betrachtung ihrer Nullstellen beruht, geht Maillet von der Darstellung durch eine Potenzreihe aus und faßt die Abnahme der Koeffizienten ins Auge. Für die Einzelheiten muß auf die Abhandlung selbst verwiesen werden.

Den Schluß bilden Anwendungen auf die Theorie der Differentialgleichungen. Als Probe seien folgende Sätze angeführt.

1. Die Differentialgleichung:

$$\frac{d^k y}{dx^k} + A_1 \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} + \cdots + A_{k+1} = 0,$$

in der die $A_1, \ldots, A_{k+1}$ Polynome in x bedeuten, deren Grade höchstens gleich q sind, hat zum allgemeinen Integral eine ganze Funktion, deren Ordnung endlich und höchstens gleich $q+k$ ist, oder ein Polynom.

2. Wenn in dem Systeme der Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_k}{dt} = a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

die $a_{k1}, \ldots, a_{kn}$ ganze transzendente Funktionen von t sind, deren Ordnung höchstens (k, ϱ) ist, so haben die Integrale für $t=\infty$ höchstens die Ordnung von $e_{k+2}(t^{\varrho+\varepsilon})$, wo ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet. Sind im besonderen die $a_{k1}, \ldots, a_{kn}$ Polynome in t, deren Grad nicht größer als q ist, oder gleich der Summe eines solchen Polynoms und einer Funktion von t, die für $t=\infty$ eindeutig und endlich ist, so gibt es eine Zahl l von der Beschaffenheit, daß die absoluten Beträge der x_k für $t=\infty$ Ordnungen besitzen, die höchstens gleich der Ordnung von $e^{lt^{q+1}}$ sind. St.

M. Fréchet. Formule d'interpolation des fonctions périodiques continues. C. R. **141**, 818-819.

Wenn $f(\theta)$ die Periode 2π hat, so ist

$$f(\theta) = \lim_{q=\infty} \sum_{p=1}^{p=q} f\left(\frac{2p\pi}{q}\right) S_{p,q}(\theta).$$

Die für alle f gleichen Polynome $S_{p,q}$ gestatten eine einfache explizite Darstellung. Lwt.

G. Remoundos. Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes. S. M. F. Bull. **33**, 191-201.

Die Arbeit enthält eine weitere Ausführung der Untersuchung, über die der Verfasser unter gleichem Titel bereits früher Mitteilungen gemacht hatte (C. R. **138**, 1574-1575; F. d. M. **35**, 416, 1904). Gz.

G. Sadun. Un teorema sul „modulo principale" di una funzione. Periodico di Mat. (3) **3**, 18-22.

Eine Funktion $\psi(z)$ der komplexen Variable $z = re^{i\varphi}$ sei endlich, stetig und monodrom für alle Werte von z, die der Beschränkung (1) $k < r < k_1$ unterliegen. Ist unter dieser Beschränkung R der Modul von $\psi(z)$, so ist R eine endliche und stetige Funktion von φ und durchläuft, während φ von 0 bis 2π wandert, gewisse Maxima, von denen jedes eine Funktion von r ist. Man bezeichne diese Maxima mit (2) $M_1(r)$, $M_2(r)$, $M_3(r)$, ... Hauptmaximum heißt der größte der Werte (2), d. h. diejenige Zahl $M(r)$, welche für jeden Wert von r den Relationen genügt $M(r) \geqq M_1(r)$, $M(r) \geqq M_2(r)$, ... Im allgemeinen ist $M_n(r) = R(r, \varphi_n)$, wo φ_n eine Wurzel der Gleichung

(3) $\partial R/\partial\varphi = 0$ ist. Wenn die Gleichung $\psi'(z) = 0$ eine Wurzel ζ hat, für welche $\mu = |\psi(z)|$ ein Minimum von $M(r)$ ist, so heißt μ ein „kritischer Hauptmodul". Der im Titel angekündigte Satz lautet: Es seien (11) $M_1(r)$, $M_2(r)$, $M_3(r)$, ... die Zahlen der Folge (2), welche für $r = \varrho$ den Wert des Hauptmoduls μ haben, und $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, $\varphi_3(r)$, ... die Wurzeln der Gleichung (3), denen sie entsprechen. Wenn φ_1, φ_2, φ_3, ... die Werte dieser Wurzeln für $r = \varrho$ sind, und wenn $\partial^2 R/\partial\varphi^2$ für $r = \varrho$, $\varphi = \varphi_i$ nicht Null ist, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Hauptmodul der Funktion $\psi(z)$ kritisch ist, darin, daß unter den Zahlen (11) mindestens eine sich befindet, deren Ableitung nach r für $r = \varrho$ verschwindet.

Lp.

P. Boutroux. Sur les propriétés d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs zéro et un. C. R. **141**, 305-307.

Im Anschluß an die von Landau gegebene Verallgemeinerung des Picardschen Satzes (Berl. Ber. 1904, 1118-1133; F. d. M. **35**, 401-404) beweist Boutroux folgenden Satz: Wenn in einem Kreise C vom Radius R die holomorphe Funktion $F(x)$ weder den Wert 0, noch den Wert 1 annimmt, so liegt der Maximalmodul dieser Funktion für $|x| \leqq \frac{3}{4} R$ unterhalb einer bestimmten Zahl A, welche ausschließlich vom Koeffizienten a_0 abhängt, wo $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ ist. Mit Hülfe dieses Satzes kann man den Landauschen Satz unmittelbar ableiten.

Gz.

C. Carathéodory. Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard. C. R. **141**, 1213-1215.

Der Satz von Landau (F. d. M. **35**, 401, 1904) läßt sich folgendermaßen verallgemeinern. Es sei

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

eine Potenzreihe, durch die in der Nähe des Punktes $x = 0$ eine analytische Funktion dargestellt wird, welche im Innern des Kreises $|x| = 1$ an Singularitäten nur Pole besitzt. Bedeuten ferner A, B, C drei komplexe Zahlen, die von a_0 verschieden sind, und m, n, p drei positive ganze Zahlen, für die die Ungleichheit

$$1/m + 1/n + 1/p < 1$$

erfüllt ist, so sollen sich die Funktionen:

$$(y - A)^{\frac{1}{m}}, \quad (y - B)^{\frac{1}{n}}, \quad (y - C)^{\frac{1}{p}}$$

für jeden Wert von x, dessen absoluter Wert kleiner als Eins ist und zu dem ein endlicher Wert von y gehört, regulär verhalten. Unter diesen Voraussetzungen, die die Voraussetzungen des Landauschen Satzes als

besonderen Fall in sich enthalten, ist der absolute Betrag von a_1 höchstens gleich einer Größe, die allein von a_0, A, B, C, m, n, p abhängt; es ist nämlich

$$|a_1| \leq \left| \frac{1}{w'(a_0)} \right|,$$

und dabei ist $w(y)$ der Quotient zweier hypergeometrischen Reihen, der den Teil T der y-Ebene, der a_0 enthält und von dem Kreise durch die Punkte A, B, C begrenzt wird, konform auf ein Kreisbogendreieck abbildet, das aus dem Kreisbogendreieck mit den Winkeln π/m, π/n, π/p durch eine Transformation mittels reziproker Radienvektoren und eine Umlegung hervorgeht. Gleichzeitig ergibt sich, daß diese Grenze für den absoluten Betrag von a_1 wirklich die obere Schranke der zulässigen Werte bildet.

Hierdurch ist nicht nur eine sehr befriedigende Aufklärung darüber gewonnen worden, warum bei dem Beweise, den Picard für sein berühmtes Theorem gegeben hat, die elliptische Modulfunktion auftrat, sondern es eröffnet sich auch sofort der Weg zu weiteren Verallgemeinerungen, die der Verfasser am Schlusse seiner Note andeutet. St.

E. Landau. Sur quelques théorèmes de M. Pétrovitch relatifs aux zéros des fonctions analytiques. S. M. F. Bull. **33**, 251-261.

Pétrovitch hat zwei Zahlen angegeben, unter die der kleinste Modul der Nullstellen der Reihe

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \qquad (a_0 \neq 0)$$

nicht herabsinken kann. Die eine Grenzbestimmung erweist sich als sehr naheliegend; aus der andern ergibt sich eine neue Grenzbestimmung, von der dann ebenso wie von dem Ausgangspunkt, dem Satz von Pétrovitch, gezeigt wird, daß sie in einem Theorem von Jensen enthalten sind. Der Satz von Pétrovitch wird in einfacher Weise verifiziert. Eine Verallgemeinerung bezieht sich auf das Produkt der ν ersten Nullstellen der Reihe, die im Konvergenzkreise liegen: Verf. findet eine Zahl, die den absoluten Betrag des Produktes höchstens erreicht. Lwt.

C. A. Dell'Agnola. Analogie fra alcune serie di polinomi e le serie di potenze. Nota I e II. Ven. Ist. Atti [(8) 7] **64**, 423-429, 1143-1154.

In der Ebene der komplexen Variable x mit dem Koordinatenanfangspunkt O ist ein Gebiet Σ folgendermaßen erklärt. Zieht man durch O den Strahl vom Neigungswinkel ϑ, so ist P ein Punkt der Begrenzung von Σ, wenn OP die kürzeste Entfernung von O auf dem Strahle ist von der Eigenschaft, daß alle Werte $|f_n(x)|$ der Folge $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ für zunehmende Werte des Arguments beständig

wachsen. Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ in dem Bereich Σ absolut konvergiert, so existiert ein zusammenhängender Bereich A (der gelegentlich mit Σ zusammenfällt) derart, daß $\Sigma |f_n(x)|$ konvergiert oder divergiert, je nachdem x dem Bereich A angehört oder nicht.

Auf zwei Beispiele wird der Satz angewandt. Zwar wird nicht das Gebiet Σ bestimmt, wohl aber ein Gebiet, in dem Σ enthalten ist und in dem die Reihe die erforderliche Eigenschaft besitzt.

Beispiel 1:

$$f_n(x) = a_n (x - a_{n1})^{q_1} (x - a_{n2})^{q_2} \ldots (x - a_{np_n})^{q_{p_n}}$$

vom Grade m_n.

Beispiel 2 ist ein spezieller Fall von 1. Lwt.

E. LINDELÖF. Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. Paris: Gauthier-Villars. VI u. 141 S. 8°.

Die Fortschritte, die man während der letzten Jahre in der Funktionentheorie gemacht hat, haben immer mehr zu der Erkenntnis geführt, wie fruchtbar und wirksam die Methoden sind, die wir dem Genie Cauchys verdanken; man erinnere sich etwa an die Verwendung, die das Cauchysche Integral bei den Untersuchungen Mittag-Lefflers gefunden hat. Es war daher ein glücklicher Gedanke des Verf., in systematischer Weise die Bedeutung der Residuenrechnung für die Funktionentheorie darzulegen. Daß ihm die Durchführung seines Planes so gut gelungen ist, beruht wohl auf zwei Umständen. Erstens hat Lindelöf an der Weiterentwicklung der Funktionentheorie durch bemerkenswerte selbständige Forschungen Anteil genommen, und zweitens kennt er, wie wenige, die überaus zahlreichen Noten und Nötchen, in denen Cauchy seine Konzeptionen zur Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen niedergelegt hat; als trefflicher Kenner Cauchys hat er eine Reihe wichtiger historischer Tatsachen feststellen können und dadurch auch in einigen Punkten die Arbeiten des Referenten zur Geschichte der Funktionentheorie ergänzt und berichtigt (vgl. besonders S. 7, 9-10, 12, 17, 21, 27, 43, 68-69, 73, 90).

Das erste Kapitel enthält in gedrängter Darstellung die allgemeine Theorie der Residuenrechnung; dabei werden auch einige bis jetzt fast unbekannte Abhandlungen Mittag-Lefflers berücksichtigt, die in schwedischer Sprache erschienen waren. In dem zweiten Kapitel werden verschiedene Anwendungen vorgeführt, die fast alle von Cauchy selbst herrühren. Das dritte Kapitel ist dem Studium von Summationsformeln gewidmet; hier zeigt sich, daß man mittels der Residuenrechnung eine große Anzahl scheinbar ganz disparater Formeln auf ein einfaches und naturgemäßes Prinzip zurückführen kann. Als Anwendung dieser Formeln werden in dem vierten Kapitel verschiedene Relationen aus der Lehre von der Gammafunktion und der Riemannschen Zetafunktion hergeleitet;

auch finden sich darin einige neue Ergebnisse in bezug auf die Stirlingsche Reihe. Das fünfte und letzte Kapitel bezieht sich auf die modernen Untersuchungen über analytische Fortsetzung und asymptotische Darstellung von Funktionen, die durch eine Taylorsche Reihe definiert sind.

St.

G. Mittag-Leffler. Sur une classe de fonctions entières. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 258-264.

Durch $E_a(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{1}{a}\frac{e^{z^{\frac{1}{a}}}}{z-x}dx$, wo S zusammengesetzt ist aus zwei Radienvektoren, die zu den Winkeln $-\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ und $+\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ gehören, und einem beide verbindenden Kreisbogen vom Radius ϱ^a, wo ϱ beliebig groß ist und ε eine positive Größe bedeutet, die kleiner als 2 ist, wird eine ganze Funktion von x definiert. Diese Funktion hat sich dem Verf. in der allgemeinen Theorie der ganzen Funktionen von endlichem Range (genre) als sehr wichtig erwiesen. Über diese und ähnlich gebaute ganze Funktionen teilt Mittag-Leffler in seinem Vortrage sechs bemerkenswerte Theoreme mit. Gz.

G. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (cinquième Note). Acta Math. **29**, 101-182.

In der fünften Note gibt Mittag-Leffler eine zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen über die Verallgemeinerung des Laplace-Abelschen Integrals, Untersuchungen, die er schon in seiner vierten Note begonnen hatte, und über die F. d. M. **33**, 403, 408, 1902; **34**, 434-435, 1903; **35**, 406, 448, 1904 berichtet worden ist.

Wenn die Konstanten $k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots$ die Bedingung erfüllen, daß die obere Grenze der Grenzstellen der Zahlen $\sqrt[n]{k_n}$ endlich ist, so wird durch die Potenzreihe

$$(1) \qquad k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_n x^n + \cdots,$$

die den Kreis C vom Halbmesser r um den Punkt $x=0$ zum wahren Konvergenzkreis habe, eine analytische Funktion $F(x)$ definiert. Bildet man aus (1) die Reihe:

$$(2) \qquad k_0 + k\frac{x}{1!} + k_2\frac{x^2}{2!} + \cdots + k^n\frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

so wird dadurch eine ganze transzendente Funktion $F(x)$ dargestellt, und das Integral von Abel-Laplace:

$$(3) \qquad \int_0^{\infty} e^{-\omega} F(\omega x)\, d\omega,$$

erstreckt über alle positiven Werte von ω, hat nach Borel und Phragmén einen gewissen Stern $B^{(1)}$ zum wahren Konvergenzstern, der dem zu den Konstanten k_n gehörigen Hauptsterne A eingeschrieben und dem Kreise C umgeschrieben ist. Für jeden Punkt im Innern von $B^{(1)}$ gilt die Gleichung:

$$(4) \qquad FB^{(1)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} F(\omega x)\, d\omega.$$

Um das Integral von Laplace-Abel zu verallgemeinern, hat Mittag-Leffler als erzeugende Funktion statt $F(x)$ die Funktion:

$$(5) \qquad F_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k_n \frac{x^n}{\Gamma(an+1)}$$

eingeführt; a bedeutet eine positive Konstante. Er ist so zu dem Integral:

$$(6) \qquad f(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} F_a(\omega^a x)\, d\omega$$

gelangt, das einen wahren Konvergenzstern $B^{(a)}$ besitzt, der dem Hauptsterne A eingeschrieben ist und, wenn a gegen Null konvergiert, sich ihm unbeschränkt nähert. Im Innern von $B^{(a)}$ gilt überall die Gleichung:

$$(7) \qquad FB^{(a)}(x) = f(x).$$

Der Beweis gliedert sich in drei Teile. Es wird erstens gezeigt, daß das Integral $f(x)$, wenn das Integral $f(x_0)$ konvergiert, in dem Bereiche $\theta x_0 (\theta_0 \leqq \theta \leqq 1)$, wo θ_0 eine positive Größe bedeutet, gleichmäßig konvergiert. Zweitens ergibt sich, daß unter derselben Voraussetzung durch das Integral $f(x)$ auf dem Vektor vom Punkte 0 nach dem Punkte x_0 die Funktion $F(x)$ und ihre Fortsetzung dargestellt wird, und es wird ein Stern $B^{(a)}$ gewonnen, indem man x_0 alle Punkte im Innern des Sternes A durchlaufen läßt, für die die Bedingungen gelten:

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{a}}\right] > 1, \begin{cases} -a\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}\dfrac{x_0}{x} < +a\dfrac{\pi}{2}, & \text{wenn } 0 < a < 2, \\[2ex] -\pi < \operatorname{Arg}\dfrac{x_0}{x} < +\pi, & \text{wenn } a \geqq 2 \text{ ist;} \end{cases}$$

dabei bedeutet $R(z)$ den reellen Teil von z, $\operatorname{Arg} z$ das Argument φ von $z = \varrho e^{i\varphi}$. Drittens stellt sich heraus, daß $f(x)$ für jeden in dem Innern von $B^{(a)}$ enthaltenen Bereich gleichmäßig konvergiert.

Bei dem dritten Teil des Beweises benutzt Mittag-Leffler die von ihm eingeführte neue Transzendente

$$(8) \qquad E_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(an+1)},$$

über die auch S. 471-472 dieses Bandes berichtet wird.

Das Integral von Laplace-Abel läßt sich auch in den Ausdruck von Borel umformen:

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \cdots + k_n x^n) \frac{\omega^{n+1}}{(n+1)!},$$

der denselben Konvergenzstern $B^{(a)}$ hat, wie das Integral. Einen entsprechenden Ausdruck gibt es auch für beliebiges α, nämlich:

$$\lim_{\omega=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \cdots + k_n x^n)$$

$$\times \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left\{ \frac{\omega^n}{\Gamma(\alpha n+1)} - \frac{\omega^{n+1}}{\Gamma(\alpha n+2)} \right\} d\omega^{\frac{1}{\alpha}};$$

er hat den Stern $B^{(\alpha)}$ zum wahren Konvergenzbereich. Mittag-Leffler erhält auch zwei andere Ausdrücke derselben Beschaffenheit, und zum Schluß werden noch andere Darstellungen von $f(x)$ hergeleitet, bei denen die Bedingung fallen gelassen ist, daß dieser Stern wahrer Konvergenzstern sein soll. St.

A. Wiman. Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Funktionen $E_a(x)$. Acta Math. **29**, 191-201.

Als Fundamentalsatz in der Theorie der Mittag-Lefflerschen Funktion $E_a(x)$ (F. d. M. **34**, 435, 1903) bezeichnet Wiman den Satz, daß diese Funktion gegen Null konvergiert, wenn $x = re^{i\varphi}$ bei konstantem φ und positivem, wachsendem r auf einem Vektor läuft, der die Bedingung:

$$\alpha \frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi - \alpha \frac{\pi}{2}$$

erfüllt, für die anderen Vektoren aber über alle Grenzen wächst.

Bei seinem Beweise betrachtet Wiman zuerst den Fall, daß $\alpha = 1/k$ ist, wo k eine positive ganze Zahl bedeutet. Alsdann genügt nämlich, wie bereits Mittag-Leffler angegeben hatte (fünfte Note, Formel 82), die Funktion $E_a(x)$ der linearen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} = kx^{k-1} y + k \sum_{n=1}^{k-1} \frac{x^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)}.$$

Hieraus findet man durch Integration mit der Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 1$ die Darstellung:

$$E_{1/k}(x) = e^{x^k} + e^{x^k} \cdot \int_0^x k e^{-z^k} \cdot \sum_{n=1}^{k-1} \frac{z^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)} \cdot dz,$$

und es lassen sich für die k Summanden auf der rechten Seite leicht asymptotische Ausdrücke aufstellen, aus denen das gewünschte Resultat erschlossen wird.

Nun gilt aber für alle positiven ganzen Zahlen h die Identität:

$$E_{h/k}(x) = \frac{1}{h}\left\{E_{1/k}(x^{\frac{1}{h}}) + E_{1/k}(\omega x^{\frac{1}{h}}) + \cdots + E_{1/k}(\omega^{h-1} x^{\frac{1}{h}})\right\},$$

wo ω eine primitive h-te Wurzel der Einheit bezeichnet, und hieraus folgt die Richtigkeit des Fundamentalsatzes für rationales α. Durch eine Grenzbetrachtung läßt sich endlich die Gültigkeit auf beliebiges α erweitern.

St.

A. Wiman. Über die Nullstellen der Funktionen $E_\alpha(x)$. Acta Math. **29**, 217-234.

Zu den merkwürdigen Eigenschaften der Mittag-Lefflerschen Transzendenten $E_\alpha(x)$ (F. d. M. **34**, 435, 1903) gehört auch, daß sich die Frage nach der Lage und nach der Dichtigkeit der Nullstellen in sehr einfacher Weise beantworten läßt, und zwar beruht dieser von Wiman bemerkte Umstand auf der von Mittag-Leffler in seiner fünften Note gegebenen Darstellung:

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_k e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{\alpha}}} + \frac{1}{2\pi i\alpha}\int \frac{e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\, d\omega}{\omega - x} \qquad (x = re^{i\varphi});$$

die Summation bezieht sich auf alle positiven und negativen Zahlen mit Einschluß der Null, für die die Ungleichheit besteht:

$$-\alpha\pi < \varphi + 2k\pi < +\alpha\pi,$$

und die Integration wird über die beiden Halbstrahlen $\varphi = \mp\alpha\pi$ in ihrer ganzen Länge ausgeführt. Indem Wiman $1/(\omega - x)$ nach fallenden Potenzen von x bis zur Potenz x^{-n} entwickelt, erhält er die halbkonvergente Darstellung:

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_k e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{\alpha}}} - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{x^{-\nu}}{\Gamma(-\alpha\nu+1)} + \frac{1}{2\pi i\alpha x^n}\int \frac{\omega^n e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\, d\omega}{\omega - x},$$

bei der, wenn n hinreichend groß ist, das Restglied höchstens von der Größenordnung

$$e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}}$$

wird.

Hierbei wird angenommen, daß α eine positive reelle Zahl sei. Wenn aber, wie das Mittag-Leffler neuerdings getan hat (F. d. M. **35**, 448, 1904), $\alpha = \beta + i\gamma$ mit positivem β gesetzt wird, so treten an die Stelle der Halbstrahlen logarithmische Spiralen; im übrigen gilt aber für $E_\alpha(x)$ eine ganz ähnliche Darstellung.

Für die Angaben über die Nullstellen selbst muß auf die Abhandlung verwiesen werden. St.

P. Dienes. La série de Taylor sur le cercle de convergence. C. R. **140**, 489-491.

Bildet man bei einer Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, deren Konvergenzbereich der Kreis $|x| = 1$ ist, die Ausdrücke:

$s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots$, $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, und setzt $s_n = |s_n| \cdot e^{i\varphi_n}$, wo φ_n zwischen 0 und 2π liegt, so gilt nach Pringsheim (F. d. M. **31**, 253. 1900) der Satz: Wenn die Unterschiede der φ_n absolut genommen kleiner sind als $\frac{1}{2}\pi$, und wenn die Menge der $|s_n|$ zu Grenzpunkten weder den Punkt 0, noch den Punkt ∞ hat, so wird $f(x)$ für $x = 1$ unendlich. Der Verf. beweist einen ergänzenden Satz, der sich für den Fall, daß die Koeffizienten a_n reell sind, so aussprechen läßt: Ist für die positiven s_n:

$$\limsup_{n=\infty} s_n : \sqrt{n} = \infty,$$

für die negativen s_n aber:

$$\limsup_{n=\infty} |s_n| = A,$$

wo A eine endliche Zahl bedeutet, so wird $f(x)$ für $x = 1$ unendlich.

St.

G. H. Hardy. On the zeroes of certain classes of integral Taylor series. Part. I. On the integral function $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\Phi(n)}}{\{\Phi(n)\}!}$. Lond. M. S. Proc. (2) **2**, 332-339.

G. H. Hardy. On the zeroes of certain classes of integral Taylor series. Part. II. On the integral function $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+a)^s\, n!}$ and other similar functions. Lond. M. S. Proc. (2) **2**, 401-431.

1. Wenn $\Phi(n)$ mindestens ebenso rasch mit n wächst wie n^2, so hat die Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\Phi(n)}}{\{\Phi(n)\}!}$$

bei hinreichend großen Werten von n in dem Kreise $|x| = \Phi(n)$ genau $\Phi(n)$ Nullstellen.

2. Sind a und s reell, so liegen bei hinreichend großen Werten der Zahl k die Nullstellen der Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+a)^s\, n!}$$

in Kreisen um die Punkte $x_k = \xi_k + \eta_k$:

$$\xi_k = (s-a)\log(2k\pi) + (s-1)\log\log k + \log \Gamma(a) : \Gamma(s),$$
$$\eta_k = (2k+1)\pi + \tfrac{1}{2}(s+a)\pi,$$

deren Halbmesser mit wachsendem k gegen Null abnehmen. St.

G. H. Hardy. A method for determining the behaviour of certain classes of power series near a singular point of the circle of convergence. Lond. M. S. Proc. (2) 3, 381-389.

Wird von der Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, die innerhalb des Einheitskreises konvergent sei, vorausgesetzt, daß die Koeffizienten a_ν analytische Funktionen gewisser Parameter α, β, γ sind, und daß sie ferner, falls $\Re(\alpha + \beta - 1)$ und $\Re(\gamma)$ positiv sind, in der Form dargestellt werden können:

$$a_\nu = \int_0^1 \left\{ \lg\left(\frac{1}{u}\right)\right\}^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} u^{\gamma-1+\nu} \varphi(u)\, du,$$

wo $\varphi(u)$ eine willkürliche Funktion von u ist, die in allen Punkten der Strecke $(0,1)$ und in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft als regulär vorausgesetzt wird, so ist

$$f(x) = -\frac{\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi}\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} x^{1-\beta-\gamma} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) + A + \varepsilon_x,$$

$$\text{wo } A = \frac{i}{2\sin(\alpha+\beta)\pi}\int_{(C_1)} (\lg u)^{\alpha-1}(u-1)^{\beta-2} u^{\gamma-1} \varphi(u)\, du.$$

C_1 ist eine durch den Anfangspunkt gehende geschlossene Kurve, die die Stellen 1 und $1/x$ einschließt, und ε_x ist eine Größe, die sich der Null nähert, sobald x längs irgend eines Weges, der mit der Geraden $(1, \infty)$ keinen Punkt gemeinsam hat, sich der Stelle 1 nähert.

Von diesem Satze werden Anwendungen auf spezielle Fälle gemacht; auch wird angedeutet, daß er sich auf Potenzreihen mehrerer Variabeln übertragen läßt. Gz.

G. H. Hardy. On a class of analytic functions. Lond. M. S. Proc. (2) 3, 441-460.

Den Untersuchungen Borels über reguläres und irreguläres Wachstum ganzer transzendenter Funktionen folgend, betrachtet Hardy die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! \sin \pi n\lambda},$$

bei der λ, damit die Reihe einen Sinn hat, nicht gleichzeitig reell und rational sein darf; diese Reihe ergibt sich übrigens, wenn man das Verhalten der Funktion von x untersucht, die durch das Integral

$$\int \frac{e^{-u^\lambda}\, du}{u+x}$$

dargestellt wird. Je nach der Wahl der Konstante λ ist die Reihe entweder beständig konvergent und stellt eine ganze transzendente Funktion regulären oder irregulären Wachstums dar, oder beschränkt konvergent, und zwar so, daß die Grenze des Konvergenzkreises zugleich Grenze des Existenzbereiches der Funktion ist, oder endlich divergent für alle Werte von x außer $x = 0$. St.

E. J. Townsend. Arzelà's condition for the continuity of a function defined by a series of continuous functions. Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 7-20.

Darstellung der Ergebnisse der Untersuchungen, die Arzelà auf diesem Gebiete angestellt hat (vgl. F. d. M. **31**, 394-395, 1900; **33**, 394, 1902). Lp.

P. Fatou. Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques. C. R. **140**, 359-360.

Verf. untersucht mittels Poissonscher Integrale das Verhalten einer durch eine Taylorsche Reihe definierten analytischen Funktion auf dem Konvergenzkreise. Wbg.

S. Pincherle. Sur les fonctions déterminantes. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 9-68.

Ist $\varphi(t) = \sum a(n)t^n$, so wird $\varphi(t)$ nach Laplace als die „erzeugende Funktion" von $a(n)$ bezeichnet und $a(n)$, als Funktion des Index n betrachtet, als „determinierende Funktion" von $\varphi(t)$. Da die Eigenschaften einer analytischen Funktion wesentlich bestimmt sind durch die Reihe der Koeffizienten eines ihrer Funktionselemente, so ist neuerdings mehrfach das Problem behandelt worden, aus den Eigenschaften der Koeffizientenfolge heraus insbesondere die Natur der Singularitäten der Funktion zu erkennen. — Gegenwärtig stellt Pincherle in gewissem Sinne die umgekehrte Frage, nämlich: angenommen, es gehöre die erzeugende Funktion zu einer bestimmten Klasse, was kann daraus für die determinierende Funktion geschlossen werden? Es erweist sich bei dem Versuch, dieser Frage beizukommen, als wesentlich, die determinierende Funktion oder eine mit ihr eng verknüpfte ganze Funktion, die Pincherle als Koeffizientenfunktion bezeichnet, als analytische Funktion einer komplexen Veränderlichen anzusehen.

Das Ergebnis der Untersuchung, auf deren Einzelheiten in engem Rahmen nicht eingegangen werden kann, besteht weniger in einer Fülle neuer Resultate als vielmehr in der systematischen Verknüpfung von Untersuchungen, die unter den mannigfachsten Gesichtspunkten ausgeführt oder versucht worden sind, und deren gemeinsames Band nicht immer leicht zu erkennen ist. Bemerkt sei noch, daß das Studium der Arbeit dadurch erleichtert wird, daß Pincherle nicht die Begriffe und Sätze der Theorie der distributiven Operationen verwendet hat. Gz.

G. W. Hill. Deduction of the power series representing a function from special values of the latter. American J. **27**, 203-216.

Allgemeinere Darstellung der Untersuchung, die Verf. bereits im Astronomical Journal, Nr. 567, veröffentlicht hat. Gz.

C. SEVERINI. Sulle serie di funzioni analitiche. Nota. Ven. Ist. Atti [(8) 7] 64, 1609-1613.

Ein Osgoodscher Satz leitet den analytischen Charakter der Funktion

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$$

aus dem Verhalten der einzelnen Summanden und der beliebig vielgliedrigen Summe

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)\right|$$

in den Punkten einer überall dichten Punktmenge eines in der z-Ebene gelegenen Bereiches ab. Die Arbeit enthält einen unabhängigen Beweis und seine Ausdehnung auch auf mehrfach zusammenhängende Bereiche.

Lwt.

A. WIMAN. Sur une extension d'un théorème de M. Hadamard. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 2, Nr. 14, 5 S.

Der Verf. gibt eine Verallgemeinerung eines bekannten, von Hadamard herrührenden Satzes über den absoluten Betrag einer ganzen Funktion $F(z)$, die ein kanonisches Produkt von der Ordnung ϱ ist. Nach diesem Satze gibt es in der komplexen Ebene unendlich viele Kreise, deren Radius jede gegebene Grenze überschreitet, auf denen durchweg

$$|F(z)| > e^{-|z|^{\varrho+\varepsilon}}$$

wo ε beliebig klein ist. In einem früheren Aufsatze (Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 1, 110; F. d. M. 34, 454, 1903) hatte der Verf. es als wahrscheinlich hervorgehoben, daß diese Ungleichheit für $\varrho < \frac{1}{2}$ sich durch

$$|F(z)| > e^{|z|^{\varrho-\varepsilon}}$$

ersetzen ließe. In dem vorliegenden Aufsatze wird diese Vermutung bestätigt. Der Beweis wird indirekt geführt unter Anwendung eines Satzes von Phragmén, daß eine ganze Funktion, deren absoluter Betrag gewisse Eigenschaften hat, notwendig eine Konstante ist. Msn.

F. DE BRUN. Sur les fonctions entières qui admettent un théorème de multiplication. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 2, Nr. 10, 12 S.

Der Verf. geht von einem von Poincaré (Journ. de Math. (4) 6, 1890) bewiesenen Satze aus, daß es ganze transzendente Funktionen gibt, die ein Multiplikationstheorem von der Form

$$F_i(mu) = R_i(F_1(u), F_2(u), \ldots, F_n(u))_{p_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ |m| > 1)$$

besitzen. Die Funktionen R_i sind Polynome p_i-ten Grades von $F_1(u), \ldots, F_n(u)$. Es wird zunächst bewiesen, daß die fraglichen

Funktionen $F_i(u)$ endlicher Höhe sind. Der Verf. zeigt weiter, daß, wenn es eine ganze Zahl k gibt, die m^k ganzzahlig macht, das Multiplikationstheorem sich so transformieren läßt, daß die darin vorkommenden Polynome homogene Funktionen vom Grade m^k werden. Die Funktionen, die ein solches Multiplikationstheorem besitzen, sind „im allgemeinen" von regulärem Wachstum und von der Ordnung k. In dem letzten Abschnitte des Aufsatzes werden einfache Beispiele des erwähnten Multiplikationstheorems behandelt, die zu zirkularen oder elliptischen Funktionen führen. Msn.

P. Boutroux. Sur les fonctions entières d'ordre entier. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 253-257.

Der Vortrag bildet eine Ergänzung zu einer Arbeit des Vortragenden (Sur quelques propriétés des fonctions entières. Acta Math. **28**, 97-224; F. d. M. **35**, 411-413, 1904) und einer von Wiman (Ark. for Mat., Astr. och Fys. **1**, 327-345; F. d. Math. **35**, 413, 1904). Insbesondere wird an einem Beispiel gezeigt, daß bei besonderer Beschaffenheit ganze Funktionen ganzzahliger Ordnung einen einfachen Zusammenhang zwischen ihren Nullstellen oder der Verteilung der letzteren und dem Wachstum des absoluten Betrages der Funktion aufweisen können. Im allgemeinen hat man bekanntlich diesen Zusammenhang nur bei allen ganzen Funktionen von nichtganzzahliger Ordnung bestimmen können. Gz.

C. A. Dell'Agnola. Sulle funzioni intiere trascendenti. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_2$, 342-351.

Der leitende Gesichtspunkt der vorliegenden Arbeit ist der, die Eigenschaften der ganzen transzendenten Funktionen herzuleiten, indem diese letzteren als Grenzwerte ganzer rationaler Funktionen angesehen werden. Ist also

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots,$$

so betrachtet Verf. gleichzeitig

$$f_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \; (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Bezeichnet nun J_0 die aus allen Wurzeln der algebraischen Gleichungen $f_n(x) = 0$ gebildete Menge, so erweist sich der folgende Satz als grundlegend: Damit eine Stelle a der komplexen Zahlebene eine Nullstelle von $f(x)$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß a der abgeleiteten Menge von J_0 angehöre. Gz.

E. W. Barnes. The asymptotic expansion of integral functions of finite non-zero order. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 273-295.

Verf. erklärt es für wünschenswert, seine früheren Untersuchungen (s. insbesondere F. d. M. **33**, 413-415, 1902) von einem neuen Stand-

punkt wieder aufzunehmen. Die vorliegende Arbeit dürfte am besten durch die folgenden, der Einleitung entnommenen Sätze gekennzeichnet werden: „Die (frühere) Untersuchung war gänzlich auf die Theorie der divergenten Reihen gegründet. Die Theorie der divergenten Reihen ist aber wenig bekannt; Teile der Theorie sind noch dunkel; es ist wünschenswert, eine wichtige Reihe von Entwicklungen auf eine Basis zu stellen, die sich an die an ältere Methoden der Analysis gewöhnten Mathematiker wendet. Überdies hatte ich zu der Zeit, als ich die früheren Abhandlungen schrieb, noch nicht die Theorie der Maclaurinschen Entwicklungen aufgestellt, und es war unmöglich, stets mit Bestimmtheit den Geltungsbereich der Resultate anzugeben. Nach den in den früheren Abhandlungen enthaltenen Untersuchungen kann dies jetzt getan werden." Gz.

E. Cunningham. On the asymptotic expansion of an analytic function. Messenger (2) **34**, 155-157.

„Wenn zwei analytische Funktionen asymptotische Entwicklungen innerhalb eines gemeinschaftlichen Bereiches haben, so wird bekanntlich die Summe oder das Produkt jener Funktionen innerhalb desselben Bereiches durch die formale Summe oder das formale Produkt jener Entwicklungen asymptotisch dargestellt. Ich glaube aber, es ist bisher noch nicht bemerkt worden, daß der Quotient der Funktionen innerhalb desselben Bereiches auch durch die formale Entwicklung des Quotienten der Reihen asymptotisch dargestellt wird, mit Ausnahme des Falles $a_0 = 0$" (in der Funktion $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$). Der obige Satz ist also auf rationale Funktionen von $f, \varphi, \psi, \ldots$ zu erweitern, wo $f, \varphi, \psi, \ldots$ als asymptotische Entwicklungen besitzend vorausgesetzt werden. Lp.

E. Fabry. Sur le genre des fonctions entières. C. R. **140**, 1010-1013.

Sei $f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p-1}}$; seien ferner die Nullstellen a_n reell, und sei von einer endlichen Stelle ab

$$a_n^p = n \lg^\alpha n,\ 1 < \alpha \leqq 2,$$

so daß $f(z)$ vom Range (genre) $p-1$ ist; dann zeigt der Verf., daß $f(z)+c$, wo c eine von Null verschiedene Konstante bedeutet, vom Range p ist. Damit ist nachgewiesen, daß es Funktionen vom Range p und $p-1$ gibt, deren Differenz konstant ist. Gz.

Edm. Maillet. Sur les zéros des fonctions entières d'ordre infini non transfini. C. R. **140**, 300-302.

Diese Note enthält eine kurze Angabe von Resultaten, die an anderer Stelle (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **23**, 263-338, 1906) ausführlich abgeleitet werden. Gz.

E. Lindelöf. Sur les fonctions entières d'ordre entier. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 369-395.

Für die Überwindung der Schwierigkeiten, die der Theorie der ganzen Funktionen von ganzzahliger Ordnung anhaften, hat Wiman in seiner Abhandlung: Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières (Ark. för Mat., Astr. och Fys. **1**, 327-345; F. d. M. **35**, 413, 1904) einen erfolgreichen Anfang gemacht. In der vorliegenden Abhandlung greift Lindelöf diese Theorie mit neuen Methoden auf, die eine einfachere Darstellung und zugleich eine Verallgemeinerung und Präzisierung früherer Ergebnisse gestatten. Die Untersuchung gliedert sich in fünf Abschnitte. Im ersten wird ein neuer Beweis des Satzes von Jensen geliefert, und es wird eine neue Konsequenz aus ihm gezogen. Der zweite Abschnitt enthält Sätze über ganze Funktionen der Ordnung μ vom Minimal-, Mittel- und Maximaltypus. Die in diesem Teile gefundenen Ergebnisse werden im dritten Abschnitt verallgemeinert. Der vierte Abschnitt bezieht sich auf den Satz von Picard und Borel, während der fünfte und letzte Abschnitt Sätze über das reguläre Wachstum enthält. Gz.

R. Mattson. Contributions à la théorie des fonctions entières. Diss. Upsala 1905, 96 S.

Die von Borel u. a. aufgestellten Sätze über ganze Funktionen endlichen Geschlechts haben von Lindelöf und Wiman Ergänzung, Erweiterung und Präzisierung erfahren. Einige Lücken, namentlich soweit sie sich auf Funktionen vom Geschlecht 0 beziehen, werden im ersten Abschnitt ausgefüllt, wo bei gegebener Ordnung des Modulmaximums $M(r)$ der Funktion auf den Kreisen $|x| = r$ die Ordnung der n-ten Nullstelle angegeben wird, und umgekehrt.

Der zweite Abschnitt bringt für die beiden Fälle

$$p = \varrho \text{ und } p < \varrho < p + 1$$

eine, abgesehen von einer singulären Linie, überall gültige Entwicklung und eine asymptotische Darstellung der Funktion

$$F(x) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{\varrho}}}\right) \cdot e^{\sum\limits_{\nu=1}^{p} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \left(\frac{x}{n^{\frac{1}{\varrho}}}\right)^\nu}$$

und den Zusammenhang mit ähnlichen Resultaten von Barnes.

Die gewonnenen Sätze bilden die Grundlage für die Untersuchung der Nullstellen der Funktion $F(x) + C$. In die Verteilung der Nullstellen gewährt die explizite Angabe ihrer im Kreise $|x| = r$ vorhandenen Anzahl N_1 einen Einblick. Hat N dieselbe Bedeutung für $F(x)$ wie N_1 für $F(x) + C$, so ergibt sich nebenher noch das von Wiman gefundene Resultat: $\lim\limits_{r=\infty} \frac{N}{N_1} < 1$, wenn die wirkliche Ordnung der Funktion F kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

Eine Vermutung über ein Analogon zum Picardschen Satz und der Hinweis auf die Unrichtigkeit zweier Formeln in der Arbeit von Barnes schließen den zweiten Abschnitt.

Die zweite Hälfte der Dissertation beschäftigt sich mit den bisher ausgeschlossenen Funktionen nullter Ordnung. Wie für die andern Funktionen endlicher Ordnung wird gezeigt, daß eine Ungleichheit, der das Maximum $M(r)$ genügt, eine Ungleichheit für die Wurzeln r_n nach sich zieht; und umgekehrt. Die Ungleichheiten ermöglichen die Einführung der wohldefinierten Begriffe „Ordnung von $M(r)$" und „Ordnung von r_n". Es schließt sich die Ableitung von Sätzen an, die denen des ersten Abschnitts analog sind.

Den bekannten Sätzen über die kleinsten Werte der Funktion $|F(x)|$ für $|x|=r$ kann Verf. ähnliche Sätze für Funktionen nullter Ordnung anreihen.

Die Anwendung einiger von Le Roy erhaltenen Resultate auf die Reihenentwicklung einer Funktion der Ordnung Null führt zu einer asymptotischen Darstellung und zu Beziehungen zwischen der Ordnung von $M(r)$ und der Ordnung der Koeffizienten der Reihe. Die Taylorsche Reihe ist auch der Ausgangspunkt für den Beitrag des Verf. zu den Untersuchungen Maillets, die sich auf die Ausdehnung der abgeleiteten Eigenschaften auch auf komplexe Argumente beziehen. Lwt.

G. Vitali. Sulle funzioni integrali. Torino Atti **40**, 1021-1034.

Die in dem Bereich $a \leqq x \leqq b$ definierte Funktion $F(x)$ heißt eine Integralfunktion, wenn eine in demselben Bereich definierte endliche Funktion $f(x)$ existiert von der Art, daß in der Lebesgueschen (über die gewöhnliche Bedeutung hinaus erweiterten) Bezeichnungsweise

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ist. Der Inhalt der Arbeit besteht im Nachweis des Satzes: Immer dann und nur dann ist $F(x)$ eine Integralfunktion, wenn $F(x)$ „absolut stetig" ist. Eine Funktion wird aber als absolut stetig bezeichnet, wenn die Summe der Inkremente der Funktion für eine Gruppe von Intervallen von genügend kleiner Ausdehnung beliebig klein ist. Der Beweis wird vereinfacht durch den Satz, daß eine absolut stetige Funktion die Differenz zweier nicht abnehmenden, absolut stetigen Funktionen ist, und dann wesentlich mit Lebesgueschen Methoden durchgeführt. D.

J. Malmqvist. Étude d'une fonction entière. Acta Math. **29**, 203-215.

Nach Mittag-Leffler hat die ganze transzendente Funktion:

$$E_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(1+an)},$$

wo α einen reellen, positiven Parameter bedeutet, die Eigenschaft, daß sie gegen Null konvergiert, wenn $x = re^{i\varphi}$ bei konstantem φ und positivem, wachsendem r auf einem Vektor läuft, für den die Bedingung:

$$+\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < -\alpha\frac{\pi}{2}$$

erfüllt ist. Malmqvist hat eine ganze transzendente Funktion $G(x)$ gefunden, die für alle Werte von φ mit der einzigen Ausnahme $\varphi = 0$ diese Eigenschaft besitzt; es ist die Funktion

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{(\log n)^{\alpha}}\right)}.$$

Der Beweis beruht auf der Betrachtung des Randintegrals

$$\int_R \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \cdot \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{(\log z)^{\alpha}}\right)} dz,$$

das über ein Rechteck mit den Ecken

$$2 - \varepsilon - ih,\ 2 - \varepsilon + ih,\ n + \varepsilon + ih,\ n + \varepsilon - ih$$

erstreckt wird. St.

G. Remoundos. Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches. C. R. **141**, 618-620.

Verfasser hat die wichtigsten Sätze über das Wachstum der ganzen Funktionen auf algebroide Funktionen übertragen, d. h. auf solche Funktionen, die in der ganzen Ebene eine endliche Anzahl von Zweigen besitzen. In der vorliegenden Note teilt er fünf Sätze über diese Funktionen mit. Gz.

G. Landsberg. Über die Analogien zwischen den Theorien der algebraischen Zahlen und der algebraischen Funktionen. Deutsche Math. Ver. **14**, 93-101.

Der Vortrag führte der Breslauer Math.-Versammlung bis in die einzelnen Feinheiten die Analogien vor, die zwischen der Theorie der algebraischen Zahlen und der algebraischen Funktionen bestehen. Handelt es sich hier um die Körper, die aus dem Körper der rationalen Zahlen durch Adjunktion einer algebraischen Größe über diesem Körper entstehen, so ist dort statt des Körpers der rationalen Zahlen der der rationalen Funktionen einer Variable zu Grunde gelegt, d. h. es ist von vornherein noch eine unbestimmte Größe adjungiert. Ideal und Primideal steht im wesentlichen Divisor und Primdivisor gegenüber; der Untersuchung der Einheiten in Zahlkörpern die Analysis situs der Riemannschen Flächen; dem Minkowskischen Satz von der Existenz eines Ideals, für das die Körperdiskriminante $|d| > 1$ ist, die Tatsache, daß eine mehrblättrige, zusammen-

hängende Riemannsche Fläche stets Verzweigungspunkte besitzt. Dem Riemann-Rochschen Satz entspricht die Untersuchung komplementarer Ideale, dem Ideal der Doppelpunkte einer algebraischen Kurve der Führer eines Zahlenringes, u. s. f.

Danach werden ebenso eingehend die Unterschiede beider Theorien hervorgehoben, die zu dem Gesamturteil leiten, daß die Funktionskörper sowohl nach der Mannigfaltigkeit ihrer Zugänge, als auch nach der Fülle ihrer Gesetzlichkeiten gegenüber den Zahlkörpern bevorzugt erscheinen.

T.

T. Levi-Civita. Sulle funzioni di due o più variabili complesse. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_2$, 492-499.

Der Satz, daß es eine und nur eine analytische Funktion w einer komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ gibt, die längs eines gegebenen analytischen Kurvenbogens Werte $p + iq$ annimmt, deren reeller wie imaginärer Teil längs dieses Kurvenbogens willkürlich und voneinander unabhängig als analytische Funktionen der reellen Größen x, y vorgegeben sind, wird auf Funktionen von zwei und mehr Variablen übertragen, und zwar in der Weise, daß, im Falle zweier Variablen z, z', an Stelle des Kurvenbogens eine zweidimensionale Fläche im vierdimensionalen Raume der x, y, x', y' tritt, die nicht charakteristische Fläche ist. Charakteristisch heißt dabei eine Fläche von 2 Dimensionen, die sich ergibt, wenn man eine analytische Gleichung zwischen z und z' in jenem vierdimensionalen Raume deutet. Als Korollar ergibt sich, daß eine analytische Funktion zweier Variablen, die längs eines wenn auch kleinen, aber nicht charakteristischen Flächenstücks verschwindet, identisch verschwindet.

T.

H. Hahn. Über Funktionen zweier complexer Veränderlicher. Monatsh. f. Math. **16**, 29-44.

Der Verf. beweist in erster Reihe einen Satz, den Poincaré (Acta Math. **2**, 113) ausgesprochen hat, und den er mit einer als notwendig erkannten Modifikation folgendermaßen präzisiert: „Damit es eine ganze Funktion $G(x, y)$ von x und y gebe, deren Nullstellen zusammenfallen mit den durch die Gleichung $y = f(x)$ gelieferten Wertepaaren, ist notwendig und hinreichend, daß die Funktion $f(x)$ der Bedingung genüge: Zu jeder beliebigen positiven Zahl A sowie zu jedem Punkte x_0 läßt sich eine Konstante ϱ so definieren, daß alle der Gleichung $y = f(x)$ genügenden Wertepaare (x, y), deren x-Koordinate der Ungleichung $|x - x_0| < \varrho$ genügt, und deren y-Koordinate dem absoluten Betrage nach unter A liegt, durch eine endliche Anzahl von Entwicklungen der Form

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^{\frac{\nu}{r}}$$

geliefert werden." Dieses Poincarésche Theorem erscheint als Korollar eines allgemeineren Satzes, der mit Hülfe eines Lemmas von Cousin

(Acta Math. **19**, 25, 1895) durch ein dachziegelartiges Verfahren abgeleitet wird, und der noch mannigfache andere Anwendungen gestattet. Verf. führt davon noch eine aus, indem er ein Analogon zur Weierstraßschen Produktzerlegung der ganzen Funktionen einer Veränderlichen für ganze Transzendenten zweier Variablen aufstellt; dabei treten als Primfunktionen solche auf, die nur längs einer einzigen analytischen Kurve, und zwar (in einem näher präzisierten Sinne) von der ersten Ordnung verschwinden. Ein von Biermann (Wiener Ber. **89**) im Anschluß an Appell (Acta Math. **2**) bewiesener Satz ist darin als spezieller Fall enthalten. T.

F. Hartogs. Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzreihen und der eindeutigen analytischen Funktionen zweier Veränderlicher. Dissertation, München 1904.

F. Hartogs. Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Habilitationsschrift, München 1905, 88 S., zugleich Sonderabdruck aus Math. Ann. **62**, 1-88, 1906.

G. Faber. Über die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher. Habilitationsschrift, Karlsruhe 1905, zugleich Sonderabdruck aus Math. Ann. **61**, 289-324.

Die allgemeine Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlichen hatte bis jetzt nur langsame Fortschritte gemacht; aber nachdem P. Cousin (F. d. M. **26**, 456-461, 1895) die Bahn gebrochen hatte, scheint sich die Aufmerksamkeit der Mathematiker in höherem Maße diesem ebenso wichtigen wie schwierigen Gegenstande zuzuwenden. Neben O. Blumenthal (F. d. M. **34**, 194, 1903), der die Natur der Nullmannigfaltigkeiten bestimmt hatte, die mehreren Funktionen gemeinsam sein können, und H. Hahn (Referat vorstehend), durch den die Untersuchung dieser Nullmannigfaltigkeiten selbst so sehr gefördert worden ist, sind hier G. Faber und besonders F. Hartogs zu nennen.

Zunächst haben Faber und Hartogs gleichzeitig und unabhängig voneinander ein Problem behandelt, das zuerst in der Theorie der Potenzreihen von zwei Veränderlichen auftritt und recht deutlich zeigt, daß man es bei den Potenzreihen einer einzigen Veränderlichen nur mit einem singulären Fall zu tun hat. Der Bereich der absoluten Konvergenz einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ wird nämlich durch Ungleichheiten der Form

$$|x| < r, \quad |y| < s$$

definiert, bei denen r und s keine Konstanten, sondern zwei voneinander abhängige positive Größen sind, und zwar ändert sich s stetig, wenn r wächst, wobei es im allgemeinen abnimmt, jedenfalls aber niemals zunimmt. Damit ist jedoch die Art der Abhängigkeit zwischen r und s noch nicht genügend gekennzeichnet; es muß vielmehr verlangt werden, daß diejenigen Eigenschaften der Funktion s von r angegeben

werden, die notwendig und hinreichend sind, damit dieser Funktion umgekehrt eine Potenzreihe zugeordnet werden kann, deren Konvergenzfunktion sie ist. Die Antwort auf diese Frage lautet, wenn man nach dem Vorgange von Hartogs an Stelle von r und s lieber deren Logarithmen r' und s' einführt, daß die Beziehung zwischen r' und s' durch eine Kurve dargestellt wird, die, in der Richtung der positiven s'-Achse gesehen, überall konkav ist. Wie sich nachträglich herausgestellt hat, war diese Eigenschaft der Konvergenzfunktion schon von Fabry erkannt worden (F. d. M. **33**. 258, 1902); aber erst Faber und Hartogs haben gezeigt, daß zu einer monotonen, konkaven Kurve stets umgekehrt eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ gehört.

Hier trennen sich die Wege von Faber und Hartogs. Faber hat die entsprechenden Untersuchungen für mehr als zwei Veränderliche durchgeführt, und es hat sich ergeben, daß zwar der Fall von drei Veränderlichen noch einiges Neue bietet, daß er aber schon als Typus des allgemeinen Falles gelten kann. Faber hat endlich auch versucht, aus seinen Sätzen Folgerungen für den Verlauf der Singularitäten der Funktionen mehrerer Veränderlichen zu ziehen, jedoch ohne erhebliche Erfolge zu erzielen. Dagegen hat sich Hartogs einer genauen Untersuchung der analytischen Funktionen von zwei Veränderlichen zugewandt, und zwar betrachtet er erstens die Potenzreihen $\mathfrak{P}(x, y)$ und zweitens die Darstellung jener Funktionen durch Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) y^n,$$

also durch Reihen, die nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten.

Die Untersuchungen über Potenzreihen

$$\mathfrak{P}(x, y) = \sum_{h,k} c_{hk}\, x^h\, y^k$$

sind teils reihentheoretischer, teils funktionentheoretischer Natur. Zu den reihentheoretischen Untersuchungen ist Hartogs durch eine Bemerkung des Referenten (F. d. M. **29**, 332, 1898) angeregt worden, der darauf hingewiesen hatte, daß der Satz: „Konvergiert eine Potenzreihe einer Veränderlichen $\mathfrak{P}(x)$ für einen von Null verschiedenen Wert $x = a$, so ist sie für $|x| < |a|$ unbedingt konvergent", nicht auf Potenzreihen von zwei und mehr Veränderlichen übertragen werden könne, bei denen er nur gilt, wenn für ein Wertesystem der Veränderlichen die unbedingte Konvergenz feststeht. Hartogs beweist hier unter anderen folgende Sätze:

Konvergiert die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ als Doppelreihe in dem Sinne von Pringsheim (F. d. M. **28**, 215, 1897) für den Bereich:

$$|x| \leqq r, \quad |y| \leqq s,$$

so konvergiert sie unbedingt innerhalb dieses Bereiches.

Konvergiert die „Diagonalenreihe":

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{h=0}^{j} c_{h,j-h}\, x^h\, y^{j-h} \right\}$$

für $y = b$ und $|x| \leqq r$, so konvergiert die Potenzreihe unbedingt innerhalb des Gebietes $|x| < r$, $|y| < |b|$.

Konvergiert die „Zeilenreihe“:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{h=0}^{\infty} c_{hk}\, x^h\right\} y^k$$

für $y = b$ gleichmäßig in bezug auf die Kreislinie $|x| = r$, so konvergiert die Potenzreihe unbedingt in dem Gebiete $|x| < s$, $|y| < |b|$.

Die funktionentheoretischen Untersuchungen sind veranlaßt durch die Frage, wie sich der Bereich unbedingter Konvergenz durch die singulären Stellen der Funktion charakterisieren läßt. Hartogs gelangt hierbei zu einer Erweiterung des Satzes, daß es bei Funktionen von mehr als einer Veränderlichen keine isolierten singulären Stellen gibt; es gilt nämlich der Satz:

Es sei C die Randkurve irgend eines Bereichs B der x-Ebene, der den Punkt $x = 0$ enthält. Ist alsdann der Punkt $(0, 0)$ ein singulärer Punkt der eindeutigen analytischen Funktion $f(x, y)$, verhält sich jedoch $f(x, y)$ an jeder Stelle $(x, 0)$ regulär, für die x auf C liegt, so gibt es eine Zahl r derart, daß zu jedem Punkte $y = y_0$ des Kreises $|y| < r$ eine singuläre Stelle (x_0, y_0) existiert, für die x_0 dem Bereiche B angehört.

Die Frage nach der Darstellbarkeit einer analytischen Funktion $f(x, y)$ durch eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, y^n$ steht in engem Zusammenhange mit einer Frage, die Osgood gestellt hatte (F. d. M. **30**, 380, 1899; **31**, 421, 1900). Wenn man nämlich von einer Größe $F(x, y)$, die für das Gebiet B:

$$|x| < r, \quad |y| < s$$

eindeutig definiert ist, weiß, daß sie 1. für jeden zulässigen Wert von y eine in dem Kreise $|x| < r$ reguläre analytische Funktion von x darstellt und umgekehrt für jeden zulässigen Wert von x eine im Kreise $|y| < s$ reguläre analytische Funktion, und 2. in B durchweg stetig ist, so läßt sich leicht zeigen, daß $F(x, y)$ in B eine reguläre analytische Funktion von x und y ist, also in der Umgebung jeder Stelle a, b dieses Gebietes in eine absolut konvergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - a, y - b)$ entwickelt werden kann. Osgood hatte nun gezeigt, daß die zweite Voraussetzung durch die geringere ersetzt werden kann, daß $F(x, y)$ in B unter einem endlichen Betrage bleibt, und es war ihm gelungen, die Frage, ob überhaupt zu der ersten Voraussetzung eine weitere hinzutreten müsse, auf die einfachere Frage zurückzuführen, ob der Satz gelte:

Die Größe $G(x, y)$ möge für jeden zulässigen Wert von y eine im Kreise $|x| < r$ reguläre analytische Funktion von x sein, und umgekehrt, sie möge ferner in dem Bereiche B':

$$|x| < r, \quad |y| < s' < s$$

eine reguläre analytische Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y sein. Alsdann gilt dies auch für den ganzen Bereich B.

Hartogs ist es gelungen, zu zeigen, daß dieser Satz in der Tat richtig ist. Er beweist nämlich das Theorem:

Es sei T ein zusammenhängender Bereich der x-Ebene, der nur aus inneren Punkten besteht. Die Funktionen $f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ mögen in T eindeutig und regulär sein, und die Reihe

$$S(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) y^n$$

konvergiere, solange $|y| < R$ ist, für jedes x in T. Gibt es dann einen von Null verschiedenen Wert y_0, für den die Reihe $S(x, y)$ in in der Umgebung jedes Punktes von T gleichmäßig konvergiert, so gilt dasselbe für jeden beliebigen Wert y, der der Bedingung $|y| < R$ genügt.

Dieses Theorem läßt sich aber auch dazu benutzen, um verschiedene Fragen in Betreff der Entwicklung von Funktionen $f(x, y)$ nach Reihen der Form $S(x, y)$ zu erledigen, und zwar ergibt sich im besonderen, daß $S(x, y)$ in einem beliebigen Gebiet der xy-Mannigfaltigkeit dann und nur dann eine reguläre analytische Funktion von x und y darstellt, wenn 1. die Funktionen $f_n(x)$ für alle zulässigen Werte von x sämtlich regulär sind und 2. die Reihe in der Umgebung jeder Stelle des Gebietes gleichmäßig konvergiert. Hieran knüpfen sich wieder Betrachtungen über die singulären Stellen, die bei einem Ausdruck $S(x, y)$ an der Begrenzung des Bereichs der gleichmäßigen Konvergenz notwendig auftreten, und es wird die allgemeinste Gestalt dieses Bereiches festgestellt. Den Schluß der reichhaltigen Abhandlung bilden Folgerungen, die sich aus den genannten Ergebnissen für Potenzreihen von zwei Veränderlichen ziehen lassen. St.

E. Picard. Sur une inégalité relative à la connexion linéaire et sur le calcul de genre numérique d'une surface algébrique. C. R. **141**, 5-8.

Sei $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer algebraischen Fläche vom Grade m, und sei r die Anzahl der Integrale totaler Differentiale zweiter Art der Fläche. Ferner sei p_g das geometrische und p_n das numerische Geschlecht der letzteren. Alsdann hat Castelnuovo gezeigt, daß $r = 2(p_g - p_n)$ ist. Benutzt man den von Enriques eingeführten Begriff des Defektes, er werde mit ω_h $(h \geqq m - 3)$ bezeichnet, so beweist Picard in der vorliegenden Note, daß $r \leqq 2\omega_{m-3}$ ist. Daraus folgt sofort mit Benutzung der Castelnuovoschen Relation $p_g - p_n \leqq \omega_{m-3}$. Es ist aber nach Enriques $p_g - p_n = \sum_{m-3} \omega_h$; also ergibt sich das äußerst überraschende Resultat, daß $p_g - p_n = \omega_{m-3}$ ist. Gz.

E. Picard. Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce relatives à une surface algébrique. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 69-100.

In zwei früheren Arbeiten (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **20**; F. d. M. **34**, 459, 1903) hat Verf. eine Formel aufgestellt, welche die Anzahl ϱ_0

der zu einer algebraischen Fläche gehörigen Doppelintegrale zweiter Gattung angibt. Bei der Herleitung dieser Formel waren aber gewisse Ausnahmefälle ausgeschlossen. In der vorliegenden Arbeit befreit sich der Verf. von dieser Beschränkung und gibt eine Formel, die auf alle Fälle anwendbar ist. Er stützt sich auf ein Theorem, das an und für sich das höchste Interesse hat und ein merkwürdiges Kriterium dafür enthält, daß eine Fläche einen linearen Zusammenhang größer als 1 besitzt.

Am Schluß der Arbeit werden einige Anwendungen behandelt, z. B. die Bestimmung des Wertes von ϱ_0 für die allgemeinste Fläche vom Grade m ($\geqq 4$). Es ergibt sich $\varrho_0 = (m-1)(m^2 - 3m + 3)$. Ferner wird betrachtet die Kummersche Fläche sowie die allgemeine hyperelliptische Fläche.

Verf. findet bemerkenswerte Zusammenhänge zwischen seiner transzendenten Theorie und den Arbeiten von Zeuthen und Noether.

G. K.

F. Severi. Sur la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique et sur les intégrales de Picard attachées à la surface. C. R. **140**, 361-363.

Wenn zwei auf einer algebraischen Fläche F befindliche algebraische Kurven A, B ganz in einem und demselben irreduziblen algebraischen System enthalten sind, nennt sie der Verf. algebraisch äquivalent und schreibt

$$A \equiv B.$$

Sind $C_1, C_2, \ldots, C_h$ algebraische Kurven auf F, und lassen sich h positive ganze Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t, \mu_{t+1}, \ldots, \mu_h$ (nicht durchweg gleich 0) so bestimmen, daß

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t \equiv \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_h C_h$$

ist, so heißen $C_1, \ldots, C_h$ algebraisch abhängig, andernfalls algebraisch unabhängig. Verf. gibt ein Kriterium für die algebraische Abhängigkeit an. Mit Hülfe der Picardschen Integrale läßt sich die Bedingung für die algebraische Abhängigkeit noch in einer anderen (transzendenten) Form ausdrücken; sie kommt nämlich darauf hinaus, daß auf F ein Picardsches Integral dritter Gattung existieren muß, welches nur $C_1, C_2, \ldots, C_h$ als logarithmische Kurven hat.

Die Picardsche Theorie ermöglicht es, folgendes Theorem aufzustellen:

Auf einer algebraischen Fläche F lassen sich ϱ irreduzible Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_\varrho$ ziehen, die algebraisch unabhängig und zugleich so beschaffen sind, daß sich $C_1, C_2, \ldots, C_\varrho, C$ stets als algebraisch abhängig erweisen, wie man auch die $(\varrho+1)$-te algebraische Kurve C auf F wählen mag. $C_1, C_2, \ldots, C_\varrho$ bilden also, wie man sagt, eine Basis des Inbegriffs aller auf F gezogenen algebraischen Kurven.

Auf Grund seiner Resultate kann Verf. eine von Picard gestellte Frage erledigen, indem er nachstehenden Satz beweist:

Damit sich die Picardschen Integrale, die zu einer algebraischen Fläche gehören, sämtlich auf algebraisch-logarithmische Kombinationen reduzieren, ist es notwendig und hinreichend, daß die Ordnung des linearen Zusammenhangs für die Fläche gleich 1 ist. G. K.

F. SEVERI. Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2^a specie. Math. Ann. **61**, 20-49.

E. PICARD. Sur quelques théorèmes relatifs aux surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité. C. R. **140**, 117-122.

F. ENRIQUES. Sur les surfaces algébriques irrégulières. C. R. **140**, 133-135.

F. SEVERI. Sulla differenza tra i numeri degli integrali di Picard, della 1^a e della 2^a specie, appartenenti ad una superficie algebrica. Torino Atti **40**, 288-296.

G. CASTELNUOVO. Sur les intégrales de différentielles totales appartenant à une surface irrégulière. C. R. **140**, 220-222.

G. CASTELNUOVO. Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 545-556, 593-598, 655-663.

F. SEVERI. Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques. C. R. **140**, 926-928.

E. PICARD. Sur la dépendance entre les intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce d'une surface algébrique. C. R. **140**, 915-917.

Das Jahr 1905 hat einen wichtigen Fortschritt in der Theorie der Integrale totaler Differentiale:

$$(1)\qquad \int \{P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz\}$$

gebracht, die zu einer algebraischen Fläche $f(x, y, z) = 0$ gehören, und die man, dem Mathematiker zu Ehren, der sie mit so großem Erfolge untersucht hat, Picardsche Integrale nennen sollte.

Picard hatte (F. d. M. **35**, 421, 1904) die Bestimmung der Anzahl r der verschiedenen transzendenten Picardschen Integrale zweiter Gattung auf das Problem zurückgeführt, zu ermitteln, durch wie viel verschiedene Polynome eine gewisse lineare Differentialgleichung E erfüllt wird. In der Note (2) gibt er hierfür einen neuen Beweis, aus dem er weitere Folgerungen zieht, im besonderen den Satz: Ist eine algebraische Fläche regulär, das heißt, ist ihr geometrisches Geschlecht p_g dem arithmetischen Geschlecht p_n gleich, so besitzt sie keine transzendenten Integrale zweiter Gattung. Dieser Satz kommt auf den schon früher gefundenen Satz von Severi zurück (F. d. M. **35**, 422-423, 1904, ausführlicher Beweis in

der Note (1)), daß bei einer Fläche, die transzendente Integrale zweiter Gattung besitzt, notwendig p_g größer als p_n ist. Aber für solche irregulären Flächen gewinnt jetzt Picard das weiter gehende Ergebnis, daß zwischen der Anzahl r der Integrale zweiter Gattung und der Anzahl p der Integrale erster Gattung die Relation besteht:

$$(2) \qquad r - p = p_g - p_n.$$

Verbindet man hiermit die leicht zu beweisende Ungleichheit:

$$(3) \qquad p \leqq \tfrac{1}{2} r,$$

so ergibt sich die Ungleichheit

$$(4) \qquad r \leqq 2(p_g - p_n).$$

Nun ist bei allen besonderen Flächen, die man bis jetzt betrachtet hatte, die Anzahl

$$(5) \qquad r = 2(p_g - p_n),$$

und Picard wirft daher am Schlusse der Note (2) die Frage auf, ob nicht vielleicht immer in (4) das Gleichheitszeichen gelte?

Unabhängig von Picard war Severi zu derselben Zeit ebenfalls zu der Relation (2) gelangt, was Enriques in der Note (3) mitteilt; die ausführliche Herleitung hat Severi selbst bald darauf in der Note (4) veröffentlicht. Indem Enriques jenen Satz von Severi mit dem von ihm gefundenen Satze verbindet, daß eine irreguläre Fläche stets Picardsche Integrale erster Gattung besitzt, gelangt er zu dem Theorem: Damit eine algebraische Fläche Picardsche Integrale erster Gattung besitzt, ist es notwendig und hinreichend, daß p_g größer als p_n ist, und einer jeden algebraischen Fläche mit Integralen erster Gattung kommen auch Integrale zweiter Gattung zu.

Aber erst Castelnuovo gibt in den Noten (5) und (6) den Beweis dafür, daß Picards Vermutung richtig war. Nach ihm gelten also die überraschend einfachen Gleichungen:

$$(6) \qquad p = p_g - p_n,$$
$$(7) \qquad r = 2(p_g - p_n).$$

Während Castelnuovo bei seinen Untersuchungen die zu der Fläche gehörigen „Picardschen Mannigfaltigkeiten" heranzieht, die eine transitive Gruppe von ∞^d $(d = p_g - p_n)$ birationalen Transformationen gestatten, beruht der Beweis von Severi in der Note (7) auf dem Theorem: Sind $J_1, J_2, \ldots, J_p$ die p verschiedenen Picardschen Integrale erster Gattung und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Schnittpunkte von zwei algebraischen Kurven auf der Fläche, die einer algebraischen Schar angehören, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Schar einem linearen System angehört, darin, daß die p Summen

$$J_h(x_1) + J_h(x_2) + \cdots + J_h(x_n)$$

konstant bleiben, wie auch die beiden Kurven aus der Schar ausgewählt sein mögen. Hieraus folgt nämlich, daß p nicht kleiner als $p_g - p_n$ sein kann, und alsdann ergeben sich aus (2) und (3) die Gleichungen (6) und (7).

Aus der Note Severis sei noch das folgende Theorem angeführt: Gehören die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einer Involution K auf der Fläche an, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß K regulär ist, darin, daß dieselben p Summen wie vorher konstant bleiben, wenn die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ irgendwie in der Involution gewählt werden.

Die Analogie der beiden Theoreme von Severi mit bekannten Sätzen Abels über algebraische Kurven liegt auf der Hand; ob es aber zweckmäßig ist, sie, wie es Severi tut, als „Abelsche Theoreme über algebraische Flächen" zu bezeichnen, erscheint dem Referenten zweifelhaft.

Einen gewissen Abschluß dieser Untersuchungen bildet die Note (8) von Picard, in der dieser einen Beweis für die Gleichungen (6) und (7) mitteilt, der im Gegensatze zu den geometrischen Methoden der italienischen Mathematiker mit einfachen funktionentheoretischen Hülfsmitteln durchgeführt wird.

Sieht man die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ als Gleichung zwischen x und z an, so daß sie also eine Kurvenschar mit dem Parameter y definiert, so seien $I_1, I_2, \ldots, I_q$ die q verschiedenen Abelschen Integrale erster Gattung. Ihre $2q$ verschiedenen Perioden

$$\omega_{1,h}, \omega_{2,h}, \ldots \omega_{2q,h}$$

sind Funktionen der komplexen Veränderlichen $y = y' + iy''$. Es sei ferner

$$\omega_{kh} = u_{kh} + iv_{kh},$$

wo die u_{kh} und v_{kh} reelle Funktionen der reellen Veränderlichen y' und y'' bedeuten. Jetzt betrachtet Picard die $2q$ Gleichungen ersten Grades in $a_1, a_2, \ldots, a_q$; $b_1, b_2, \ldots, b_q$:

$$a_1 u_{k1} - b_1 v_{k1} + \cdots + a_q u_{kq} - b_q v_{kq} = C_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2q),$$

in denen die reellen Konstanten $C_1, C_2, \ldots, C_{2q}$ den Gleichungen genügen:

$$C_k = m_{k1} C_1 + m_{k2} C_2 + \cdots + m_{k2q} C_{2q},$$

während die ganzen Zahlen m sich auf irgend eine Substitution der Gruppe der schon erwähnten linearen Differentialgleichung E beziehen, deren Wichtigkeit für die Picardschen Integrale zweiter Gattung damit in ein neues Licht tritt; die Anzahl der Konstanten C, die dabei willkürlich bleiben, ist gleich der Anzahl r der verschiedenen transzendenten Integrale zweiter Gattung. Es läßt sich nun zeigen, daß die so bestimmten a_h und b_h eindeutige Funktionen von y' und y'', daß die $a_h + i\,b_h$ analytische Funktionen von y sind, und daß der Ausdruck

$$(a_1 + ib_1)\, dI_1 + \cdots + (a_q + ib_q)\, dI_q$$

als Koeffizient von dx in einem Picardschen Integral erster Gattung aufgefaßt werden kann. Hieraus folgt aber, daß die Integrale erster Gattung von r reellen willkürlichen Konstanten abhängen, während die Integrale zweiter Gattung r komplexe willkürliche Konstanten enthalten. Mithin gilt die Gleichung $r = 2p$, aus der sofort die Gleichungen (6) und (7) folgen.

St.

M. de Franchis. Sugl' integrali di Picard relativi ad una superficie doppia. Palermo Rend. **20**, 331-334.

Der Verf. gibt weitere Ausführungen zu dem Satze von Castelnuovo, wonach eine jede algebraische Fläche, deren Irregularität $d = p_g - p_n$ (p_g geometrisches, p_n arithmetisches Geschlecht der Fläche) die Zahl $\frac{1}{2}(p_g + 3)$ übersteigt, irrationale Büschel besitzt, deren Geschlecht mindestens 2 ist. St.

C. Arzelà. Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata. Bologna Rend. 1904/05. 7 S.

Jede beschränkt veränderliche Funktion von x, y ist die Differenz von zwei beständig positiven und, bei zugleich zunehmenden x und y, zunehmenden Funktionen, und umgekehrt. Vi.

A. Capelli. Sull' inversione delle corrispondenze. Napoli Rend. (3) **2**, 427-434, 470-476.

Der Verf. betrachtet als analytischen Punkt eines analytischen Raumes ein beliebiges Wertsystem der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$. Zwischen diesen Punkten und denen eines anderen n-dimensionalen Raumes ($n \gtreqless m$), oder zwischen zwei partiellen Gebieten Q, Q' dieser Räume existiert eine Korrespondenz, wenn jedem Punkte von Q mindestens ein Punkt in Q' entspricht und umgekehrt; sie kann in einem Sinne oder in beiden eindeutig sein; sie kann ferner stetig in bezug auf Q oder Q' oder auf beide sein; endlich kann sie gleichstetig (equicontinua) in bezug auf Q oder Q' sein; wählt man in diesem Falle beliebig eine positive Zahl η, so entspricht ihr eine andere ε, so daß zweien Punkten von Q, deren Entfernung $\leqq \varepsilon$ ist, zwei andere in Q' entsprechen, deren Entfernung $\leqq \eta$ ist.

Im I. Teil seiner Abhandlung beweist der Verf., daß, wenn Q geschlossen und endlich ist, die Stetigkeit der Korrespondenz in bezug auf Q als notwendige Folge ihre Gleichstetigkeit hat, und wenn sie ferner eindeutig in bezug auf Q' ist, sie auch stetig in bezug auf Q' ist. Setzt man voraus, daß eine Korrespondenz zwischen Q und Q' stetig in bezug auf das geschlossene und endliche Gebiet Q sei, so kann man folgern, daß sie ebenso stetig in bezug auf Q' ist.

Im II. Teil wird der Begriff der „Halbstetigkeit" folgendermaßen eingeführt: Eine Korrespondenz Γ zwischen Q und Q' heißt „halbstetig" in bezug auf Q in einem Punkte P, wenn man zu einer gegebenen positiven Zahl η eine andere ε finden kann, so daß ein beliebiger der Punkte, welche einem Punkte P_1 von Q entsprechen, deren Entfernung von $P \leqq \varepsilon$, eine Entfernung $\leqq \eta$ von jedem der P entsprechenden Punkte hat. Ist Γ halbkonvergent in bezug auf jeden Punkt von Q,

so heißt sie schlechthin „halbkonvergent" in bezug auf Q. Ist Γ eine Korrespondenz zwischen Q und Q', die in bezug auf das geschlossene und endliche Gebiet Q halbstetig ist, so ist sie halbstetig auch in bezug auf Q'.

Durch Anwendung dieser Begriffe und Sätze wird auf eine neue und bemerkenswerte Weise die Stetigkeit der Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung mit komplexen Koeffizienten begründet. La.

M. Fréchet. Sur les fonctions d'une infinité de variables. C. R. **140**, 567-568.

Ausdehnung von Sätzen über lineare Punktmengen auf ein Gebiet von unendlich vielen Dimensionen. Gz.

C. Mazzelli. Sulla continuità di una serie doppia di funzioni. Nota. Ven. Ist. Atti [(8), 7] **64**, 1693-1704.

Die Voraussetzungen über die Funktion $f(x, y, z)$ werden so gewählt, daß es gelingt, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen anzugeben für die Stetigkeit der Funktion $f(x_0, y_0, z)$ sowohl in der Umgebung einer Stelle z, als auch für alle Punkte z eines bestimmten Intervalls. Dabei bedeuten x_0 und y_0 die (einzigen) Grenzwerte der Punktreihen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ und $y_1, y_2, y_3, \ldots$ Ähnlich werden Doppelreihen behandelt. Lwt.

R. Fricke. Neue Entwicklungen über den Existenzbeweis der polymorphen Funktionen. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 246-252.

Der Vortragende berichtet über den derzeitigen Stand der fundamentalen Existenztheoreme aus der Theorie der automorphen Funktionen, der Uniformisierungssätze von Poincaré und Klein, bei deren ins einzelne durchzuführenden Darstellung die Weiterführung des 2. Bandes der „Vorlesungen" von Fricke-Klein auf Hindernisse stoße. Insbesondere erwähnt er ein allgemeines Theorem, durch das ihm ein Fortschritt in der Anwendung der sog. Kontinuitätsmethode gelungen ist, sowie die Erledigung einer Reihe von speziellen Signaturen, worüber seine gleichzeitige, eingehende Arbeit (Math. Ann. **59**, 449—513; F. d. M. **35**, 427 ff., 1904) Genaueres enthält. T.

A. Hurwitz. Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variabeln. Math. Ann. **61**, 325-368.

In der Theorie der automorphen Funktionen einer komplexen Veränderlichen ist der Begriff des Fundamentalbereichs von besonderer Bedeutung; spielt er doch hier dieselbe Rolle, die dem Periodenparallelogramm

in der Lehre von den elliptischen Funktionen zukommt. Derselbe Begriff findet sich in der Theorie der automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen wieder, und Hurwitz stellt sich die Aufgabe, eine allgemeine Methode zur Konstruktion des Fundamentalbereichs einer gegebenen Gruppe aufzustellen. Eines seiner Hauptergebnisse ist, daß in dem Raume der positiven quadratischen oder der positiven Hermiteschen Formen stets Fundamentalbereiche existieren, die durch ein System von linearen homogenen Ungleichheiten charakterisiert sind, welche explizit aus den Substitutionen der Gruppe sofort hingeschrieben werden können. Wenn damit auch eine einfache und sichere Grundlage für diesen wichtigen Teil der Theorie der automorphen Funktionen gewonnen ist, so bleibt doch noch die Frage zu beantworten, wie man aus dem Systeme der Ungleichheiten die wesentlichen, aus denen alle übrigen folgen, auszuscheiden hat, und wann im besonderen, wie zum Beispiel im Fall der Picardschen Gruppen, diese wesentlichen Ungleichheiten in endlicher Zahl vorhanden sind. St.

P. Stäckel. Über eine Gattung n-fach periodischer Funktionen von n reellen Veränderlichen. J. für Math. **128**, 222-242.

Es handelt sich um einen Satz von Weierstraß (Werke **2**, 1-18) über reell-periodische Funktionen und um die Verallgemeinerungen, die sukzessive daran von Staude (Math. Ann. **29**, 469-485; J. für Math. **105**, 298-328), vom Verf. in seiner Habilitationsschrift (Math. Ann. **42**, 537-563), von Kneser (Math. Ann. **45**, 446-470) und Ahrens (Diss., Rostock 1895) angebracht worden sind. In Rücksicht auf Erfordernisse, die sich bei der Anwendung dieser Resultate auf Aufgaben der Dynamik ergaben, erweitert der Verf. dieselben von neuem und beweist das alle erwähnten enthaltende und in Punkt 4 sie übertreffende Theorem:

„Die Funktionen $\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)$ und $\chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)$ $(\varkappa, \lambda = 1, \ldots, n)$ der reellen Argumente $u_\varkappa$ mögen in dem durch die Ungleichheiten $a_\varkappa \leqq u_\varkappa \leqq A_\varkappa$ erklärten Gebiete $\mathfrak{G}_n$ folgenden Bedingungen genügen:

1. Sie sollen darin sämtlich eindeutig, endlich und stetig sein.

2. Die Funktionen $\chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)$ sollen darin beständig positiv sein und niemals verschwinden.

3. Die Funktionen $\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)$ sollen darin ihr Vorzeichen niemals wechseln; sie dürfen nicht für alle Punkte eines noch so kleinen Intervalles verschwinden.

4. Die Determinante $D(u_1, \ldots, u_n) = |\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)|$ soll darin ihr Vorzeichen niemals wechseln und, als Funktion einer der Veränderlichen $u_\varkappa$ angesehen, nicht für alle Punkte eines noch so kleinen Intervalles verschwinden.

Setzt man unter diesen Voraussetzungen

$$x_\lambda = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_\varkappa}^{A_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa,\lambda}(u_\varkappa)\, du_\varkappa}{\sqrt{(u_\varkappa - a_\varkappa)(A_\varkappa - u_\varkappa)\,\chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)}} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n),$$

so sind umgekehrt $u_1, \ldots, u_n$ eindeutige, endliche und stetige Funktionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente $x_1, \ldots, x_n$, die überdies gerade und n-fach periodisch sind mit den Periodensystemen $2\omega_{\varkappa 1}, \ldots, 2\omega_{\varkappa n}$. Dabei ist

$$\omega_{\varkappa\lambda} = \int_{a_\varkappa}^{A_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)\, du_\varkappa}{\sqrt{(u_\varkappa - a_\varkappa)(A_\varkappa - u_\varkappa)\chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)}};$$

der Wurzel ist das positive Vorzeichen zu geben." T.

Weitere Literatur.

M. Bauer. Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Größen. Math. és termész. értesitö **23**, 127-138. (Ungarisch.)

T. Brodén. Zur Theorie der mehrdeutigen automorphen Funktionen. Lunds Univ. Årsskr. **40**, Nr. 3, 54 S. (1904).

P. Dienes. Beiträge zur Theorie der analytischen Funktionen. Math. és phys. lapok **14**, 161-192. (Ungarisch.)

A. Emch. A few examples in the theory of functions. Colorado Studies **2**, 237-253.

G. Fubini. Sopra una formola del Fredholm nel problema dell'inversione degli integrali definiti. Boll. delle Sed. Acc. Gioenia Nr. 83, 3-7.

L. Kollros. Un algorithme pour l'approximation simultanée de deux grandeurs. Diss. Zürich. 48 S. 8°.

G. Pirondini. Nuovo metodo per costruire delle funzioni continue a spazi lacunari. Memoria. Parma: Rossi-Ubaldi. 16 S. 8°.

J. T. Pohl und Br. Rauchegger. Über die Funktionenreihen. Deutsche Bearbeitung der Abhandlung Arzelàs: Sulle serie di funzioni. Monatsh. f. Math. **16**, 54-112, 250-272.

Vgl. F. d. M. **31**, 394-395, 1900.

A. Privorszki. Zur Theorie der Funktionen mehrerer Variabeln. Math. és phys. lapok **14**, 201-211. (Ungarisch.)

W. N. Rosevaere. I. Expansions of trigonometrical functions. II. Expansions of functions in general. Math. Gazette **3**, 202-208.

G. Remoundos. Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes. Thèse. Paris: Gauthier-Villars. 80 S. 4°.

L. Schlesinger. Über isoliertwertige Funktionen. Math. és termész. értesitö **23**, 121-126. (Ungarisch.)

G. Vitali. Sopra l'integrazione di serie di funzioni di una variabile reale. Boll. delle Sed. Acc. Gioenia Nr. 86, 3-9.

Kapitel 2.
Besondere Funktionen.

A. Elementare Funktionen, Gammafunktion und hypergeometrische Reihe.

JOH. MOLLERUP. En aritmetisk Theori for de komplexe Tal. Nyt. Tidss. for Math. **16** B, 25-31.

$\cos z$ und $\sin z$ werden durch ihre Reihenentwicklungen definiert. Danach werden ihre Fundamentaleigenschaften rein arithmetisch hergeleitet. Nennt man jetzt das Zahlenpaar (a, b) eine komplexe Zahl, und wird festgesetzt, daß

$$(a, b) = (c, d) \text{ wenn } a = c, b = d,$$
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

so können natürlich die bekannten Regeln für Rechnungen mit komplexen Zahlen hergeleitet werden. V.

A. SCHMIDT. Beiträge zum mathematischen Unterricht. I. Die Berechnung der Logarithmen in Untersekunda. II. Die Einführung der komplexen Zahlen. Progr. (Nr. 92) Prinz-Heinrich-Gymn. Berlin, 16 S.

Zu I bilden die Grundlage die geschickt, aber mühsam errechneten Tabellen A bis D, aus denen die ersten Ziffern der Potenzen 2^n bis etwa $n = 2 \cdot 10^9$ zu entnehmen sind. Jeder einzelne Logarithmus muß mit dem vorher berechneten log 2 verglichen werden, was einem Geübten mit Hülfe der genannten Tabellen nicht schwer fallen wird.

Die komplexen Zahlen werden als Zahlenpaare eingeführt, deren Eigenschaften an der graphischen Darstellung anschaulich gemacht sind. Lwt.

W. HEYMANN. Bemerkungen zu der Abhandlung: Über den Begriff „Logarithmus einer Zahl“ für eine Basis b. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 235-237.

E. LAMPE. Erwiderung. Ebenda 237-238.

Heymann will die Ausführungen des Ref. in dem vorjährigen Artikel (F. d. M. **35**, 442, 1905) nicht anerkennen, ohne daß er jedoch sagt, wie er den Begriff des Logarithmus scharf fassen will. In der Erwiderung weist Ref. darauf hin, daß die von Heymann gemachten Einwände genau so von d'Alembert an Euler brieflich gesandt und von diesem als haltlos nachgewiesen sind. Mit denselben Schlüssen kann, wie hinzugefügt ist, bewiesen werden, daß $\sqrt{-4}$ reell ist. Lp.

F. G. Teixeira. Sur une formule pour le calcul numérique des logarithmes. Nouv. Ann. (4) **5**, 36-42.

Die Partialbruchzerlegung der Funktion $t^{-n}(t-a)^{-n}$ hat die Form:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{c_\nu}{t^\nu}+\frac{d_\nu}{(t-a)^\nu}\right).$$

Durch Integration findet man die fragliche Formel für $\log\frac{x}{x-a}$. Das vom Integralzeichen nicht freie Glied liefert den leicht abzuschätzenden Rest. Für einfache Fälle wird die Genauigkeit von Näherungswerten angegeben.

Lwt.

J. Tschernuschenko. Über einige Eigenschaften der Logarithmen. Spaczinskis Bote Nr. 397, 14-19; 399, 59-66; 400, 86-89. (Russisch.)

Nach Einführung der Bezeichnung $\log_b a=\frac{a}{b}$ (von Schellbach 1834 vorgeschlagen) treten die Eigenschaften der Operation deutlicher hervor.

$$1^0.\ \frac{a^m}{b^m}=\frac{a}{b};\quad 2^0.\ \frac{b}{a}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)};\quad 3^0.\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{d}\cdot\frac{c}{b}.$$

Eigenschaften der „radikalen“ Proportion $\left(\sqrt[b]{a}=\sqrt[d]{c}\right)$. Radikale Progression. Logarithmische Proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Logarithmische Progression.

Si.

P. Mansion. Démonstration d'une double inégalité logarithmique. Brux. S. sc. **29** A, 133-134.

M. J. M. Hill. On the series for the sine and cosine. Messenger (2) **35**, 58-69.

„Die Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ nach Potenzen von x sind so fundamental, daß jede Vereinfachung in ihrer Herleitung nicht ohne Bedeutung ist. Eine Vergleichung der in den Leitfäden der Trigonometrie gegebenen Beweise, die jetzt als schlüssig angenommen werden, mit denen früheren Datums, welche ehedem für hinreichend erachtet wurden, dürfte die verwickelten Gedankenverbindungen dartun, auf denen die modernen Beweisführungen beruhen, obgleich diese Gedanken jetzt als elementar gelten. Der Zweck dieses Aufsatzes ist die Vorführung einer induktiven Herleitung der Reihen, d. h. eines Verfahrens, vermöge dessen jedes Glied aus der Kenntnis der voraufgehenden Glieder erhalten wird. Es beruht

auf einer von Le Cointe in seiner Théorie des fonctions circulaires gegebenen Gleichung, die in Todhunters Trigonometrie angeführt ist:

$$3 \sin^n \frac{x}{3^n} - x = 4 \left\{ \sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3^2} + \cdots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} \right\}.“$$

Der Beweis für die Sinusreihe umfaßt 10 Druckseiten; das ist etwas viel für ein elementares Lehrbuch! Lp.

C. Gergic. Valore di un'espressione goniometrica e sue applicazioni. Suppl. al Period. 8, 134-135.

Bekannte Überlegungen, angeknüpft an das Produkt

$$P_n = \cos \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos \frac{1}{4} \alpha \cdot \cos \frac{1}{8} \alpha \cdots \cos \frac{\alpha}{2^n}.$$

Lp.

A. V. Kutti Krishna Menon. Question 15703. Ed. Times (2) 8, 51.

$$\cos ax = 1 - ax \sin bx - a(a-2b) \frac{x^2}{2!} \cos 2bx$$
$$+ a(a-3b)^2 \frac{x^3}{3!} \sin 3bx + a(a-4b)^3 \cdot \frac{x^4}{4!} \cos 4bx - \cdots.$$

Lp.

F. Chiomio. Super formula de Snell. Revue de Math. 8, 117-120.

Der Verf. beschäftigt sich mit der Formel $\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} = x$ und der gleichwertigen $\frac{172\, b}{2a + c} = B$ für das rechtwinklige Dreieck. In § 1 wird die Formel dem Snellius zugeschrieben, obschon aus Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 2, 705 zu ersehen ist, daß diese Formel auf Nicolaus Cusanus zurückgeht. Die anderen Abschnitte des Aufsatzes beschäftigen sich mit den Wertänderungen des Bruches für verschiedene Größen von x und mit den Methoden zur Herleitung jener Formel. Lp.

J. Edalji. Hyperbolic functions. Arch. der Math. u. Phys. (3) 9, 266-273.

Verf. geht von folgenden Definitionen aus. Es wird eine gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = k^2$ zugrunde gelegt. Die hyperbolische Länge einer Strecke AB ist dann der Wert $\frac{AB}{r} k$, wobei r die (reelle oder imaginäre) Länge des zu AB parallelen Halbdurchmessers bedeutet (eine

ähnliche Streckenmessung findet bei den Minkowskischen Strahldistanzen statt). Um einen infinitesimalen Winkel zu messen, bringt man durch Parallelverschiebung den Scheitel nach dem Hyperbelzentrum O. Dann dividiert man den auf der Hyperbel entstehenden unendlich kleinen Bogen durch die Länge des zu ihm parallelen Halbdurchmessers. Ein endlicher Winkel wird durch Zerlegung in infinitesimale Bestandteile gemessen. Ist nun BB' eine Sehne der Hyperbel und A der Mittelpunkt von BB', so wird der hyperbolische Sinus (Kosinus) des Winkels AOB gleich $AB\,(OA)$ dividiert durch OB (alle Größen in der obigen Weise gemessen). G. K.

SANJÁNA. Question 15595. Ed. Times (2) 7, 74-75.

Aus

$$\frac{\sinh u}{u} = \cosh \tfrac{1}{2} u \cdot \cosh \tfrac{1}{4} u \cdot \cosh \tfrac{1}{8} u \cdots$$

ergeben sich die Summen der Reihen:

$$(1)\ \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4}\,\frac{x^{\frac{1}{4}}}{1+x^{\frac{1}{4}}} + \cdots = \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{1}{\ln x}$$

$$(2)\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}} + \cdots = \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2-1}.$$

Lp.

F. WICKE. Über ultrabernoullische und ultraeulersche Zahlen und Funktionen und deren Anwendung auf die Summation von unendlichen Reihen. Diss. Jena. B. G. Teubner. 66 S.

Die von M. Krause (Leipz. Ber. **54**, 139-205; F. d. M. **33**, 971, 1902) entwickelte Theorie der ultrabernoullischen Zahlen und Funktionen und der mit diesen verwandten ultraeulerschen Zahlen und Funktionen wird vom Verf. der vorliegenden Arbeit dazu verwandt, um mit ihrer Hülfe schwach konvergierende Reihen zu summieren. Die eben erwähnte Arbeit von Krause ist auf die Diskussion des Verlaufes der Kurven, die den ultrabernoullischen Funktionen entsprechen, nicht eingegangen; eine solche Diskussion ist aber für die bei Anwendungen unerläßliche Restbetrachtung notwendig, und sie wird im ersten Teile der Wickeschen Dissertation sorgsam durchgeführt. Hieran schließt sich die Theorie der ultraeulerschen Zahlen, sowie die der ultraeulerschen Funktionen, die mit den ultrabernoullischen Zahlen und Funktionen verwandt sind, aber doch eine besondere Behandlung verdienen.

Hiernach geht Verf. zu der Hauptaufgabe über, zur Verwertung der gewonnenen Größen für die Reihensummierungen. Es geschieht das in

doppelter Weise. Erstens werden Reihen betrachtet, die nur von einer Größe q abhängen, und zwar wählt Verf. als Beispiele zwei Reihen aus der Theorie der elliptischen Funktionen, nämlich:

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + \frac{4q}{1+q^2} + \frac{4q^2}{1+q^4} + \frac{4q^3}{1+q^6} + \cdots,$$

$$\frac{k'K}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{2q}{1+q^2} + \frac{2q^3}{1+q^6} - \frac{2q^5}{1+q^{10}} + \cdots$$

und die Lambertsche Reihe:

$$L(q) = \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^3}{1-q^3} + \cdots.$$

Das Verfahren und größtenteils auch die Resultate dürften neu sein.

Zweitens betrachtet Verf. Reihen, die von zwei Größen abhängen. Er bedient sich hier der von Krause aufgestellten Summenformel (Arch. der Math. u. Phys. (3) **5**, 179-184; F. d. M. **34**, 486, 1903) und betrachtet insbesondere solche Fourierschen Reihen, die in der Theorie der elliptischen Funktionen eine Rolle spielen.

Bei allen Untersuchungen, die des Umfangs wegen sich hier nicht detaillierter kennzeichnen lassen, wird die nicht grade einfache Restbetrachtung durchgeführt, und es wird des weiteren — was besonders hervorgehoben werden mag — wirklich numerisch gerechnet. Gz.

G. Pfeiffer. Note über die Bernoullischen Funktionen. Kiew Univ. Nr. 11, 115-119. (Bericht der Phys.-math. Ges. 1904.) (Russisch.)

Kurzgefaßte Darstellung der bekannten Eigenschaften. Si.

M. Lerch. Einige Reihenentwicklungen der unvollständigen Gammafunktion. J. für Math. **130**, 47-65.

Wenn man die Funktionen $\Psi_\nu(\omega)$ durch die Potenzentwickelung

$$e^{-\frac{\omega}{1-z}} = \sum_0^\infty \Psi_\nu(\omega) z^\nu \qquad (|z| < 1)$$

definiert, so gilt für

$$Q(-a, \omega) = \int_\omega^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^{a+1}}$$

die Darstellung

$$(1)\ \omega^a Q(-a, \omega) = \sum_0^\infty \Psi_\nu(\omega) \frac{\nu!}{a(a+1)\cdots(a+\nu)}.$$

ω wird als reell und positiv vorausgesetzt, und a hat einen reellen Teil größer als 1. Für Ψ (ω) läßt sich die Formel ableiten:

$$\Psi_\nu(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int e^{-\omega x}\frac{x^{\nu-1}}{(x-1)^{\nu+1}}\,dx$$

(das Integral erstreckt längs eines den Punkt $x = 1$ einmal positiv umlaufenden Weges). Mit Hülfe dieser Formel kann man das Verhalten von Ψ_ν bei sehr großem ν bequem untersuchen. Es gilt für Ψ_ν auch folgende Formel:

$$\Psi_\nu(\omega) = e^{-\omega}\sum_{\alpha=1}^{\nu-1}(-1)^\alpha\binom{\nu-1}{\alpha-1}\frac{\omega^\alpha}{\alpha!}.$$

Aus (1) gewinnt man leicht eine Entwicklung für $Q(1-a,\omega)$, wenn man die bekannte Funktionalgleichung

$$a\,Q(-a) = e^{-\omega}\,\omega^{-a} - Q(1-a)$$

benutzt. Diese Entwicklung lautet:

$$(2)\qquad Q(1-a,\omega) = \frac{e^{-\omega}}{\omega^a}\sum_1^\infty\frac{n!\,G_n(\omega)}{(a+1)\cdots(a+n)};$$

dabei ist

$$G_n(\omega) = \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\binom{n-1}{\nu-1}\frac{\omega^\nu}{\nu!}.$$

Verf. leitet noch eine andere Entwicklung für $Q(1-a,\omega)$ ab, in welcher auch die $G_n(\omega)$ als Koeffizienten auftreten. Sie lautet, wenn man $1-a=s$ setzt,

$$(3)\qquad \frac{e^{\omega}\,Q(s,\omega)}{\Gamma(s)} = 1 - \sum_1^\infty G_n(\omega)\binom{n-s}{n}$$

und gilt sicher unter der Annahme, daß der reelle Teil von s größer als 1 ist.

Schließlich wird noch eine Entwicklung für die Funktion

$$Q(a) = \int_1^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,dx$$

gegeben, die in ihren Gliedern die Größen $\Gamma(a+c+n\,i)$ enthält.

G. K.

N. Nielsen. Über die Stirlingschen Polynome und die Gammafunktion. Monatsh. für Math. **16**, 135-140.

N. Nielsen. Sur les séries de fonctions de Stirling. Annali di Mat. (3) **12**, 101-112.

Als Stirlingsche Polynome definiert der Verf. (auch schon in früheren Arbeiten) diejenigen ganzen rationalen Funktionen

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,$$

welche den Gleichungen

$$(x+2)\,\psi_n(x+1) = (x-n)\,\psi_n(x) + (x+1)\,\psi_{n-1}(x)$$

genügen, wobei noch $\psi_0(x) = \frac{1}{2}$ gefordert wird. Man kommt auf diese Funktionen, wenn man

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1}$$

nach Potenzen von α entwickelt.

Es ist nämlich

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + (x+1)\sum_0^\infty \psi_n(x)\,\alpha^{n+1} \qquad (|\alpha| < 2\pi).$$

In der ersten Arbeit wendet der Verf. seine Polynome auf die Theorie der Gammafunktion an, und es gelingt ihm, durch dieselben in einfachster Weise die Koeffizienten der bekannten Binetschen Fakultätenreihen auszudrücken.

In der zweiten Arbeit werden die Beziehungen untersucht, die zwischen $\psi_n(x)$ und den Bernoullischen Polynomen bestehen. Sodann beschäftigt sich der Verf. mit dem Wert von $\psi_n(x)$ für sehr großes n und wendet die erhaltenen Resultate auf die Frage nach der Konvergenz einer Reihe von der Form

$$\sum_0^\infty a_n\,\psi_n(x)$$

an. Bemerkenswert ist, daß es hier eine Entwicklung der Null gibt. Es gilt nämlich die Formel

$$0 = \sum_0^\infty (-1)^n (2\pi)^{2n}\,\psi_{2n}(x) \qquad (\Re(x) < -1).$$

Neben den Stirlingschen Polynomen betrachtet der Verf. noch andere $\chi_0(x), \chi_1(x), \chi_2(x), \ldots$, die in der Reihenentwicklung

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + (x+1)\sum_0^\infty \chi_n(x)\,\alpha^{2n+2} \qquad (|\alpha| < \pi)$$

auftreten. Auch Reihen von der Form

$$\sum_0^\infty b_n\,\chi_n(x)$$

werden behandelt. G. K.

G. H. Hardy. On Kummer's series for $\log\Gamma(a)$. Quart. J. 37, 49-53.

G. H. Hardy. On double Fourier series, and especially those which represent the double zeta-function with real and incommensurable parameters. Quart. J. 37, 53-79.

Die erste Note enthält einen neuen Beweis der Kummerschen Formel

$$\log\Gamma(a) = (1-a)\log\pi + (\tfrac{1}{2}-a)\gamma - \tfrac{1}{2}\log\sin a\pi + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin 2ma\pi\log 2m}{m} \qquad (0 < a < 1).$$

Es wird die Bedeutung klargelegt, die diese Formel in der allgemeinen Theorie der Zeta- und Gammafunktionen von Barnes hat (F. d. M. **30**, 389, 1899). Die Methode des Verf. läßt sich so verallgemeinern, daß sie auch im Falle der Zeta- und Gammafunktionen höherer Ordnung anwendbar ist. In der zweiten Note wird dies für die zweite Ordnung durchgeführt. Dabei braucht der Verf. Hülfssätze über Fouriersche Doppelreihen, die er mittels eines zweiten Mittelwertsatzes für Doppelintegrale beweist. G. K.

W. WIRTINGER. Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 121-139.

Riemann hat zweimal über die hypergeometrische Reihe Vorlesungen gehalten, im W. S. 1856/57 und im W. S. 1858/59. Während aus der ersten die berühmte Abhandlung über die Gaußsche Reihe hervorging, ist die zweite erst in neuerer Zeit durch ein von W. von Bezold geführtes Kollegheft bekannt geworden. Sie ist von großer Wichtigkeit; denn sie enthält eine Reihe von Gesichtspunkten, die erst viel später durch neuere Untersuchungen wieder aufgefunden sind. Die hypergeometrischen Integrale werden als Funktionen der singulären Stellen des Integranden aufgefaßt, es wird die durch den Integralquotienten vermittelte Abbildung untersucht und die Variable als Funktion davon betrachtet. Wie später Jordan, Pochhammer und Nekrassoff, so hat Riemann den Doppelumlauf auf die Integrale angewandt, was aus einem Blatt seines Nachlasses hervorgeht. Er hat die Schwarzsche Differentialinvariante benutzt; ferner ist die Frage nach den algebraisch integrierbaren Fällen der hypergeometrischen Differentialgleichung im Keime aufgeworfen, und auch die Mittel zu ihrer Lösung sind gegeben. Zum Schluß geht der Verf. auf die Frage ein, in welcher Weise ein weiterer Ausbau der Riemannschen Ideen nach anderer Richtung, als bisher geschehen ist, erfolgen könne, wenn man Integrale von Funktionen auf einem elliptischen und noch allgemeiner auf einem algebraischen Gebilde betrachtet, die beim Umlauf um singuläre Punkte des Integranden und längs der Querschnitte mit konstanten Faktoren multipliziert werden.

P.

W. WIRTINGER. Über die Anzahl der linear unabhängigen hypergeometrischen Integrale n-ter Stufe. Wien. Ber. **114**, 1571-1588.

Verf. beweist hier ausführlich den folgenden Satz:

Sämtliche in der Gestalt

$$\int\limits_{\frac{\lambda'\omega_1+\mu'\omega_2}{n}}^{\frac{\lambda''\omega_1+\mu''\omega_2}{n}} \prod_{\lambda,\mu} \sigma_{\lambda,\mu}^{k_{\lambda,\mu}}(u)\,du$$

enthaltenen verallgemeinerten hypergeometrischen Integrale drücken sich

linear und homogen, mit von ω unabhängigen Koeffizienten, durch n^2 unter ihnen aus.

Ferner zeigt er, daß für $n > 2$ die n^2 Integrale von

$$\frac{\lambda_{\omega_1+\mu\omega_2}}{n} \text{ bis } \frac{(\lambda+1)_{\omega_1+\mu\omega_2}}{n}$$

$$(\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

keine lineare homogene Relation mit von ω freien Koeffizienten erfüllen.

G. K.

F. H. Jackson. Some properties of a generalized hypergeometric function. American J. 27, 1-6.

Es werden Eigenschaften der Reihe

$$1 + \frac{[\alpha][\beta]}{[l][\gamma]} \lambda x^{[l]} + \frac{[\alpha][\alpha+l][\beta][\beta+l]}{[l][2l][\gamma][\gamma+l]} \lambda^2 x^{[2l]} + \cdots$$

entwickelt; dabei ist $[\alpha] = \frac{p^{\alpha-1}}{p-1}$.

G. K.

B. Elliptische Funktionen.

J. Thomae. Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. Leipzig: B. G. Teubner. 44 S. 4°.

In dem Vorwort bemerkt der verdiente Verf., daß eine Sammlung von „Formeln und Lehrsätzen zum Gebrauche der elliptischen Funktionen" schon von H. A. Schwarz herausgegeben worden sei. „Der große theoretische Wert dieses Buches, das noch unvollendet ist, macht es wünschenswert, daß es bald zu Ende geführt werde. Diese Sammlung baut sich im wesentlichen auf die Weierstraßschen Grundfunktionen $\sigma(u)$ und $\wp(u)$ auf. Da diese Grundfunktionen zu wirklichen, ich meine numerischen Rechnungen weniger geeignet erscheinen, wie auch von anderer Seite bemerkt worden ist, . . ., so habe ich mich entschlossen, eine ähnliche Sammlung, die mir schon lange bei meinen Vorlesungen als Skelett gedient hat, und die die Jacobi-Legendreschen Bezeichnungen beibehält, der Allgemeinheit zugänglich zu machen."

Die Gründe, die Thomae für seine Behandlung der elliptischen Funktionen anführt, scheinen dem Referenten nicht stichhaltig zu sein. Der Verf. meint, daß „die Aufgabe, die elliptischen Funktionen zu berechnen, wenn Modul und Argument gegeben sind, in den Weierstraßschen Formen schon erheblich komplizierter ist, als in den Jacobischen. Die Funktion

$$\wp(u) = -\frac{d^2 \lg \sigma(u)}{du^2} = -\frac{\sigma''(u)}{\sigma(u)} + \left(\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\right)^2$$

ist erstens zweigliedrig, und zweitens konvergieren die Zähler erheblich langsamer als die Thetafunktionen". Allein auch die Weierstraßsche

Theorie liefert durch den Quotienten von Produkten von Sigmafunktionen eine eingliedrige Darstellung, die leicht zur Berechnung geeignet gemacht werden kann. Was aber wichtiger ist, so gelangt man zu einer tieferen Einsicht in das Verhältnis zwischen der Jacobischen und Weierstraßschen Theorie nicht durch Überlegungen dieser Art, sondern allein, indem man beide Theorien als Bestandteile einer allgemeineren Lehre von den elliptischen Funktionen verschiedener Stufe auffaßt, wie das F. Klein in seinen Arbeiten durchgeführt hat; leider scheinen diese Untersuchungen dem Verf. entgangen zu sein. Von diesem höheren Standpunkte aus gewinnt auch die Frage nach den Normalformen der elliptischen Integrale einen wirklichen Inhalt, während es bei Thomae als eine Zufälligkeit erscheint, daß gerade die Riemannsche, Legendresche, Jacobische Normalform auftritt, denen wir jetzt auch noch zwei Thomaesche Normalformen hinzufügen sollen.

Wenn demnach auch die theoretische Auffassung der Sammlung als einseitig zu bezeichnen ist, so wird doch der darin entwickelte Apparat von Formeln und Sätzen für Vorlesungszwecke gute Dienste leisten können, und würde das in noch höherem Grade tun, wenn der Verf. sich an die bewährten Jacobi-Gudermannschen Bezeichnungen gehalten hätte. Leider aber hat Thomae die Mannigfaltigkeit der Namen in der Theorie der elliptischen Funktionen noch vermehrt, indem er fünf geeignet normierte Thetaquotienten *sa u*, *ca u*, *da u*, *tga u*, *ja u* nennt, während die übrigen sieben Thetaquotienten namenlos bleiben. Wenn man für alle zwölf Quotienten Namen haben will, so scheinen die Glaisherschen: *sn*, *sd*, *sc*; *ns*, *nd*, *nc*; *cd*, *cn*, *cs*; *dn*, *dc*, *ds* am vorteilhaftesten zu sein.

Sehr inhaltsreich, aber freilich auch sehr knapp gehalten ist der Abschnitt über die Anwendungen. Auf 17 Seiten wird hier behandelt: Das Kreispendel, das Parabelpendel, die Rektifikation der Ellipse, das sphärische Pendel, Länge und Inhalt der sphärischen Ellipse, Jacobis Konstruktion des Additionstheorems und die Poncelet-Steinerschen Sätze über Kreisbüschel, der Lemniskatenbogen, die winkeltreue Abbildung der Ellipse, des Rechtecks, des Quadrates auf den Kreis, des gleichseitigen Dreiecks auf die Halbebene, die Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete auf den Kreisring, die Schwarzsche Minimalfläche, das geschwungene Seil, die geodätische Linie des Rotationsellipsoides, die Kurven dritter Ordnung. Leider vermißt man durchweg numerische Beispiele, während doch bei den Anwendungen der überaus lehrreiche numerische Teil der Rechnung nicht übergangen werden sollte, und ebenso fehlen die zu den wirklichen numerischen Rechnungen erforderlichen Tafeln, wie sie sich zum Beispiel auf verhältnismäßig kleinem Raume und doch in ausreichender Weise in dem Werke von Lucien Lévy, Paris 1898, finden. Auf Grund seiner Erfahrungen ist der Ref. überzeugt, daß die Studierenden erst dann ein volles Verständnis für die elliptischen Funktionen gewinnen, wenn sie veranlaßt werden, einmal eine Aufgabe aus dieser Theorie bis zu den numerischen Endwerten durchzuführen. St.

E. Mathy. Méthode particulière d'intégration de

$$\int_\beta^\gamma \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\, dx$$

quand $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont réelles et que $\alpha > \beta > \gamma > \delta$. Application à la géométrie. Nouv. Ann. (4) **5**, 299-306.

Das oben genannte Integral wird durch die in der Theorie der elliptischen Funktionen üblichen Konstanten ausgedrückt. Durch ein solches Integral wird das Volumen des Körpers dargestellt, der zweien geraden Kreiszylindern mit sich senkrecht kreuzenden Achsen gemeinsam ist. In diesem Nachweis besteht die geometrische Anwendung. Lwt.

J. W. Nicholson. On the application of Legendre's functions to the theory of the Jacobian elliptical integrals. Phil. Mag. (6) **9**, 264-284.

Es wird, ohne daß ein konkreter Zweck ersichtlich ist, eine Methode entwickelt, nach der elliptische Integrale oder Ausdrücke, die aus elliptischen Integralen der Jacobischen Normalform zusammengesetzt sind, in Reihen entwickelt werden, die nach Kugelfunktionen fortschreiten. Die Entwicklungen werden auch noch ausgedehnt auf Integrale, deren Integranden aus elliptischen Funktionen bestehen, wobei die Integration nach der Amplitude erfolgt. Die Entwicklungen gehen überall sehr ins einzelne. Br.

J. Dolbnia. Sur la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. Transformation d'un ordre impair. Darb. Bull. (2) **29**, 203-214.

Behandlung des Transformationsproblems für einen ungeraden Transformationsgrad und speziell des Teilungsproblems für den Grad 9. Kr.

Lelieuvre. Sur quelques questions concernant les fonctions elliptiques. Darb. Bull. (2) **29**, 308-312.

Der Verf. zeigt, daß man bei solchen speziellen elliptischen Funktionen, welche eine Periode von der Form

$$\tau = \frac{2p\,\omega + 2q\,\omega'}{m}$$

haben (wobei p und q immer als relativ prim vorausgesetzt werden können), oft mit Vorteil τ und $\varrho = 2p_1\,\omega + 2q_1\,\omega'$ $(pq_1 - qp_1 = 1)$ als Paar primitiver Perioden einführt. Kr.

A. L. Dixon. Generalisation of Legendre's formula
$$KE' - (K - E)K' = \tfrac{1}{2}\pi.$$
Lond. M. S. Proc. (2) 3, 206-224.

Nach Weierstraß (Werke 1, 118) läßt sich die Legendresche Relation auf die Form bringen:

$$\begin{vmatrix} \int_{a_2}^{a_1} \prod_{s=1}^{3} (x-a_s)^{-\frac{1}{2}}\, dx & \int_{a_3}^{a_1} \prod_{s=1}^{3} (x-a_s)^{-\frac{1}{2}}\, dx \\ \int_{a_3}^{a_1} \prod_{s=1}^{3} (x-a_s)^{-\frac{1}{2}}\, x dx & \int_{a_3}^{a_1} \prod_{s=1}^{3} (x-a_s)^{-\frac{1}{2}}\, x dx \end{vmatrix} = 2\pi i.$$

Im Anschluß an eine Methode, die Elliott zur Verallgemeinerung der Legendreschen Relation benutzt hatte, betrachtet der Verf. die Determinanten der Ordnung $n-1$, deren Elemente die Form

$$\int_{a_{r+1}}^{a_r} \prod_{s=1}^{n} (x-a_s)^{\beta_s - 1} x^p\, dx \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1, p = 0, 1, \ldots, n-2)$$

haben, und zeigt, daß ihr Wert sich durch ein Produkt von Gammafunktionen ausdrücken läßt. Ebenso ist auch der Quotient einer Determinante der Ordnung $n-r-1$ und der entsprechenden Determinante der Ordnung r, deren Elemente beide Male die eben angegebene Form haben, gleich einem Produkte von Gammafunktionen. Hieraus ergeben sich weitere Relationen, welche in Beziehung zu Formeln stehen, die Weierstraß für hyperelliptische Integrale gegeben hat (Werke 1 127). Endlich werden ähnliche Gleichungen für Determinanten hergeleitet, deren Elemente die Form

$$\int_{a_{r+1}}^{a_{r_1}} e^{-x} \prod_{s=1}^{n} (x-a_s)^{\beta_s - 1}\, dx$$

haben. St.

J. W. L. Glaisher. On the expansions of the elliptic and zeta-functions of $\frac{2}{3}K$ in powers of q. Lond. M. S. Proc. (2) 2, 340-351.

Schon früher (F. d. M. 23, 473, 1891) hatte der Verf. Entwicklungen für die zwölf elliptischen und die vier Zetafunktionen des Arguments $\frac{1}{3}K$ nach Potenzen von q hergestellt, deren Koeffizienten sich durch gewisse zahlentheoretische Funktionen ausdrücken ließen. Jetzt nimmt er diese Untersuchungen wieder auf und zeigt, daß man bei dem Argumente $\frac{2}{3}K$ mit zwei zahlentheoretischen Funktionen auskommt; die Werte dieser Funktionen bis zu $n = 1000$ ergeben sich aus Tafeln, die Glaisher in den Lond. M. S. Proc. 15 (1884) und dem Messenger 31 (1901) mitgeteilt hatte. St.

J. W. L. Glaisher. On the elliptic and zeta-functions of $\frac{2}{3}K$. Messenger (2) 35, 25-45.

In dem vorstehend angezeigten Artikel gibt Glaisher die nach Potenzen von q fortschreitenden Entwicklungen für die 16 elliptischen und die vier Zetafunktionen in einer Form, bei der die Koeffizienten bloß mittels zweier arithmetischen Funktionen $E(n)$ und $H(n)$ ausgedrückt sind. Diese Formeln liefern Ausdrücke für $\operatorname{ns}\frac{2}{3}K$, $\operatorname{ds}\frac{2}{3}K$, $\operatorname{cs}\frac{2}{3}K$ als lineare Funktionen von

$$U^{\frac{1}{2}} = \frac{k \operatorname{sn}\frac{2}{3}K \operatorname{cn}\frac{2}{3}K}{\operatorname{dn}\frac{2}{3}K}, \quad V^{\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{sn}\frac{2}{3}K \operatorname{dn}\frac{2}{3}K}{\operatorname{cn}\frac{2}{3}K}, \quad W^{\frac{1}{2}} = \frac{k' \operatorname{sn}\frac{2}{3}K}{\operatorname{cn}\frac{2}{3}K \operatorname{dn}\frac{2}{3}K}$$

und eine andere Wurzelgröße gleicher Art. Die q-Reihen, welche in den Entwicklungen auftreten, können in derselben Weise ausgedrückt werden. Diese Formeln werden in der gegenwärtigen Abhandlung untersucht.

§§ 1—6. Einleitung. — §§ 7—20. Werte der elliptischen und Zetafunktionen von $\frac{2}{3}K$ und von gewissen q-Reihen. — § 21—22. Werte von q-Reihen und Umänderung von q in q^3. — §§ 23—27. Beziehungen zwischen U, V, W, L, M, N. — §§ 28—38. Werte von $k\varrho^3 \operatorname{cn}\frac{2}{3}K$, $\operatorname{dn}\frac{2}{3}K$, etc., und von $k^2 \varrho^2 \operatorname{sn}^4\frac{2}{3}K$, etc., als q-Reihen und in Gliedern mit k. Lp.

G. H. Hardy. On certain conditionally convergent multiple series connected with the elliptic functions. Messenger (2) 34, 146-153.

Die fragliche Reihe ist:

$$\Sigma \frac{e^{(2m\theta+2n\varphi)\pi i}}{a + m\omega_2 + n\omega_1} \qquad \begin{pmatrix} m = -\infty, \ldots, +\infty \\ n = -\infty, \ldots, +\infty \end{pmatrix},$$

wo θ und φ reell, positiv und kleiner als 1 sind, ω_1 und ω_2 zwei komplexe Zahlen, für welche der imaginäre Teil von $\omega_2/\omega_1 = \tau$ positiv ist, a eine solche Größe, daß $a + m\omega_2 + n\omega_1$ für keine Werte von m und n verschwindet. Diese Reihe ist von Kronecker öfters untersucht worden, nach ihm von Lerch. „Sowohl Kronecker, als auch Lerch schrieben über sie vor der Veröffentlichung der Pringsheimschen Abhandlungen über die allgemeine Theorie der bedingt konvergenten Reihen; ihre Erörterungen der Konvergenz sind daher viel weniger einfach als bei einer Beweisführung mit Hülfe der Pringsheimschen Theorie und einer Verallgemeinerung des Abelschen Hülfssatzes in London M. S. Proc. (2) 2 (F. d. M. 35, 254, 1904). Meine Absicht in dem vorliegenden Artikel ist, die Konvergenz der Reihe unter dem letzteren Gesichtspunkte zu betrachten. Ich habe auch die Reihe nach einer Methode summiert, welche praktisch mit der Kroneckerschen identisch, aber so eingerichtet ist, daß die Summe direkt in den Formeln der gewöhnlichen Weierstraßschen Funktionen erhalten wird," nämlich

$$\Sigma \frac{e^{(2m\theta+2n\varphi)\pi i}}{a + m\omega_2 + n\omega_1} = e^{a(\eta_2\varphi - \eta_1\theta)} \frac{\sigma(a + \omega_1\theta - \omega_2\varphi)}{\sigma(a)\,\sigma(\omega_1\theta - \omega_2\varphi)}.$$

Lp.

J. A. MILLER. Concerning certain elliptic modular functions of square rank. American J. **27**, 47-68.

Der Verf. untersucht eingehend und sorgfältig die Eigenschaften der Kleinschen Funktionen $X_{\frac{\alpha}{n}}(u|\omega_1, \omega_2)$ (vgl. Klein-Fricke, Elliptische Modulfunktionen, Band II, Kapitel 5) für den Fall, daß n ein Quadrat, und im besonderen, daß $n = 4$ und $= 9$ ist. St.

R. ROTHE. Über eine mechanische Auswertung der elliptischen Transzendenten. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **4**, 13-16.

Ein Planimetermeßrädchen wird mit dem Berührungspunkt auf einer Leitkurve (ϱ, φ) verschoben, während die Achse des Rädchens durch einen festen Punkt gleitet. In dem mechanisch wohl leicht realisierbaren Fall einer kreisförmigen Leitkurve liefert — nach Ablesung der Werte ϱ und φ an passenden Teilungen — der Drehungswinkel θ des Meßrädchens ein Maß für den Wert des elliptischen Integrals $E(\varphi, k)$. Auch zur Bestimmung des elliptischen Integrals erster Art läßt sich der Apparat verwenden, obschon nicht ohne Umstände. Lwt.

G. H. HARDY. On the expression of the double zeta-function and double gamma-function in terms of elliptic functions. Cambr. Phil. Trans. **20**, 1-35.

F. H. JACKSON. The basic gamma-function and the elliptic functions. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) **76**, 127-144 (vgl. F. d. M. **35**, 487-490, 1904).

C. Hyperelliptische, Abelsche und verwandte Funktionen.

D. MORDUCHAJ-BOLTOWSKOJ. Über die Reduktion der Abelschen Integrale auf niedere Transzendenten. Warschau Polyt. 1905, Nr. 1, 1-96. (Russisch.)

Bericht erfolgt im folgenden Bande des Jahrbuchs nach Abschluß der Arbeit. Si.

L. E. DICKSON. The minimum degree τ of resolvents for the p-section of the periods of hyperelliptic functions of four periods. American M. S. Trans. **6**, 48-57.

Der Verf. zeigt durch eingehende Untersuchung der Untergruppen der quaternären Abelschen Gruppe mod. p, daß oben genannte Zahl τ, sobald $p > 3$ ist, den Wert $(p^4 - 1)/(p - 1)$ besitzt. Kr.

H. Stahl. Die Abelschen Funktionen von drei Variabeln. J. für Math. **130**, 153-196.

Der Verf. gibt der Theorie Schottkys (F. d. M. **12**, 383, 1880), in dem Wunsche ihr Verständnis zu erleichtern, eine neue Darstellung, welche von den algebraischen Resultaten ausgeht und von ihnen auf dem Riemannschen Wege zur Lösung des Umkehrproblems führt.

Den 7 ungeraden Thetacharakteristiken einer Hauptreihe werden 7 Punkte der Ebene zugeordnet. Diese führen zu 21 Geraden $F=0$ durch je zwei und 21 C_2 $G=0$ durch je 5 von ihnen; ferner zu 28 C_3 $H=0$, von denen jede durch alle 7 Grundpunkte hindurchgeht und 2 Doppelpunkte hat; endlich zu einer C_6 $L=0$, die in jedem der 7 Grundpunkte einen Doppelpunkt hat und durch die Doppelpunkte der 28 C_3 hindurchgeht. Diese Gleichung $L=0$ ist vom Geschlecht 3 und bildet hier die algebraische Grundgleichung der Theorie.

Den 28 ungeraden Thetafunktionen werden nun die 28 Wurzelfunktionen erster Ordnung $\sqrt{H}$ zugeordnet; sodann werden mit Hülfe der 7 Doppelpunkte und eines weiteren Punktes ξ von C_6 36 Funktionen X und aus ihnen und den $\sqrt{H}$ Wurzelfunktionen höherer Ordnung gebildet, die sich mittels der Darstellung der geraden Thetacharakteristiken durch die der Hauptreihe den 36 geraden Thetafunktionen zuordnen.

Dies führt zunächst zur Darstellung von Thetaquotienten, deren Argumente einfache Integrale erster Gattung sind, und von hier aus in bekannter Weise zur Lösung des Umkehrproblems. Den Schluß bilden die zur vollständigen Lösung nötigen Konstantenbestimmungen. Kr.

H. Jung. Die allgemeinen Thetafunktionen von vier Veränderlichen. Berl. Ber. 1905, 484-503.

Durch $G(p,q)=0$ werde eine Klasse K algebraischer Funktionen vom Geschlechte 3 mit 6 unabhängigen Moduln a definiert. Durch Adjunktion der Quadratwurzel z aus einer rationalen Funktion $H(p,q)$ von K, welche in 4 willkürlich gewählten Punkten $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ ∞^1 (und sonst nur 0 und ∞ von gerader Ordnung) wird, entsteht eine Klasse K_1 algebraischer Funktionen vom Geschlechte 7. Für diese können 3 linear-unabhängige Integrale erster Gattung von K als Integrale erster Gattung genommen und weitere 4 so normiert werden, daß sie nur 8 primitive Perioden haben. Diese geben dann zu Thetafunktionen von 4 Veränderlichen Anlaß, welche allgemeine sind, da sie von 10 willkürlichen Parametern (den 6 Moduln a und den 4 Punkten ξ) abhängen. Auf diese Weise gelangt der Verf. zu einer algebraischen Darstellung der allgemeinen Thetafunktionen von 4 Veränderlichen. Am Schlusse wird angegeben, unter welchen Bedingungen diese Thetafunktionen zu Riemannschen werden. Kr.

H. Jung. Spezielle Thetafunktionen von vier Veränderlichen. J. für Math. **130**, 1-25.

Anknüpfend an eine frühere Abhandlung (F. d. M. **34**, 507, 1903), behandelt der Verf. hier den speziellen Fall $\tau = 2$, $\sigma = 4$. Die auftretenden Thetafunktionen von vier Veränderlichen hängen von nur 9 wesentlichen Konstanten ab, sind also spezielle, ohne Riemannsche zu sein; die sie charakterisierende Relation zwischen den Thetanullwerten wird am Schlusse angegeben. Kr.

E. Traynard. Sur une surface hyperelliptique. C. R. **140**, 931-932.

Untersuchung der zum Periodenschema

$$\begin{matrix} \frac{2\pi i}{3} & 0 & a & b \\ 0 & 2\pi i & b & c \end{matrix}$$

gehörigen ungeraden Thetafunktionen 6. Ordnung mit der Charakteristik 0. Kr.

A. Capelli. Sull'arbitrarietà delle caratteristiche nelle formole di addizione delle funzioni ϑ di una variabile. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{14}_1$, 477-489.

A. Capelli. Sulle formole generali di addizione delle funzioni ϑ di più argomenti. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{14}_2$, 59-70.

A. Capelli. Über die Additionsformeln der Thetafunktionen. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 272-274.

Die Riemannsche Thetaformel (vgl. mein Lehrb. d. Thetaf. S. 307) pflegt für Thetafunktionen mit halben Charakteristiken aufgestellt zu werden, da sie ausschließlich im Gebiete dieser 2^{2p} Funktionen Verwendung findet. Daß man aber, wenn man will, den in ihr auftretenden Thetafunktionen ganz willkürliche, rationale oder irrationale, reelle oder komplexe Charakteristiken geben kann, folgt aus der Möglichkeit, die Argumente der links stehenden Thetafunktionen, welche völlig unabhängige Veränderliche sind, um Größensysteme mit ganz beliebigen Periodencharakteristiken (vgl. a. a. O. S. 29) zu vermehren. Um die allgemeinste derartige Formel zu erhalten, braucht man übrigens nur bei der Ableitung der Riemannschen Thetaformel aus der allgemeinen Formel (LVIII) S. 91 die dort vorkommenden beliebigen Charakteristiken $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ beizubehalten.

Die in der dritten Abhandlung aufgestellten Formeln (A), (B) sind Jacobische Formeln (mein Lehrb. S. 320), bei denen durch Nullsetzen eines Thetaargumentes die Größe y mit ungerader Charakteristik zum Verschwinden gebracht ist. Kr.

J. SCHRÖDER. **Bemerkung zur Berechnung des Anfangsgliedes der allgemeinen hyperelliptischen σ-Reihe.** Hamb. Mitt. 4, 210-214.

Klein und Burkhardt haben auf verschiedenem Wege den Anfangsterm der zu beliebigen μ gehörigen hyperelliptischen σ-Funktion berechnet. Nimmt man in der σ-Funktion:

$$\sigma(x', \ldots, x^{(\nu)}, y', \ldots, y^{(\nu)})$$

$\nu = \mu$, also gleich dem kleinsten möglichen Wert, so gelingt es dem Verfasser, diesen Anfangsterm (in diesem Spezialfalle) direkt zu berechnen. Fu.

D. Kugelfunktionen und verwandte Funktionen.

E. STRÖMGREN. **Verallgemeinerung eines Satzes aus der Theorie der Kugelfunktionen.** Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 2, Nr. 32, 3 S.

Beweis des Satzes, daß die Koeffizienten der Entwicklung

$$\frac{1}{(\sqrt{r^2 - 2r r_1 \cos\Phi + r_1^2})^p} = \frac{1}{r^p}\left[1 + \left(\frac{r_1}{r}\right) P_1^p(\cos\Phi) + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 P_2^p(\cos\Phi) + \cdots\right]$$

immer numerisch kleiner sind als die entsprechenden Koeffizienten der Entwicklung von $1/(r - r_1)^p$. Msn.

O. A. SMITH. **Sur quelques relations intégrales entre les fonctions sphériques et cylindriques.** Batt. G. [(2) 12] 43, 365-374.

Sowie man die hypergeometrische Reihe und damit auch die gewöhnliche oder verallgemeinerte Kugelfunktion durch bestimmte Integrale, die Zylinderfunktionen enthalten, darstellen kann (vgl. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, Kap. 13), kann man auch umgekehrt die Zylinderfunktion durch Integrale ausdrücken, die verallgemeinerte Kugelfunktionen enthalten. Die einzige bisher für die letztere Darstellung bekannte Formel wird hier auf eigenartige Weise abgeleitet und ihr eine zweite an die Seite gestellt, die statt der Kugelfunktionen erster Art solche zweiter Art enthält.

Sind $P^{\nu,n}(x)$ und $Q^{\nu,n}(x)$ die verallgemeinerten Kugelfunktionen erster und zweiter Art, d. h. die partikularen Lösungen der Gleichung

$$(1 - x^2)\, y'' - (1 + 2\nu)\, x\, y' + n\,(n + 2\nu)\, y = 0,$$

so läßt sich zeigen, daß die Integrale

$$\int_{-1}^{+1} e^{tx} P^{\nu,n}(t)\,(1 - t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dt \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{-1} e^{tx} Q^{\nu,n}(t)\,(1 - t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dt$$

beide einen endlichen Wert haben, falls $R(\nu) > -\frac{1}{2}$, und daß beide

ganze transzendente Funktionen von x darstellen. Als Funktionen von x genügen beide der Differentialgleichung der Zylinderfunktionen, und daraus folgt, daß sie gleich

$$A_n x^{-\nu} J^{\nu+n}(ix), \text{ resp. } = B_n x^{-\nu} J^{\nu+n}(ix)$$

sind. Durch Bestimmung der Koeffizienten A_n, B_n, die für B_n eine längere Rechnung erfordert, erhält man zwei Darstellungen für die Funktion $J^{\nu+n}(ix)$, von denen eine bekannt, die andere neu ist. — Auf einige Folgerungen aus jenen Formeln wird hingewiesen. Wn.

H. Bateman. A generalisation of the Legendre polynomial. Lond. M. S. Proc. (2) 3, 111-123.

Die hier behandelten Erweiterungen der Legendreschen Polynome ergeben sich in derselben Weise aus der Laplaceschen Gleichung für vier Variabeln wie die zugeordneten Kugelfunktionen aus der entsprechenden Gleichung für drei Variabeln. Es sind die ganzen Funktionen n-ter Ordnung von x_1, x_2, x_3, x_4, die der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_4^2} = 0$$

genügen. Setzt man

$$x_1 = r\cos\vartheta\cos\varphi,\ x_2 = r\cos\vartheta\sin\varphi,\ x_3 = r\sin\vartheta\cos\chi,\ x_4 = r\sin\vartheta\sin\chi,$$

so wird der Gleichung (1) genügt durch

$$V = r^n e^{im\varphi + ik\chi}\,\theta_n^{m,k},$$

wo $\theta_n^{m,k}$, falls man noch $\cos(2\vartheta) = \mu$ setzt, der Gleichung (2):

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\theta}{d\mu}\right] + \theta\left[\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) - \frac{m^2}{2(1+\mu)} - \frac{k^2}{2(1-\mu)}\right] = 0$$

genügt. Für $m = k$ geht θ direkt in die zugeordnete Kugelfunktion mit dem Index $\frac{n}{2}$ über, während es sich im allgemeinen leicht als hypergeometrische Reihe, multipliziert mit $(1+\mu)^{\frac{1}{2}m}(1-\mu)^{\frac{1}{2}k}$, darstellen läßt.

Es werden verschiedene Eigenschaften der Funktionen θ abgeleitet, unter anderem ihre Beziehungen zu den zugeordneten Kugelfunktionen, Rekursionsformeln der θ, Integralsätze, die denen der Kugelfunktionen analog sind, etc.

Erwähnt werden mag endlich noch, daß sich das Produkt

$$J_m(r\cos\vartheta)\,J_k(ir\sin\vartheta)$$

in eine Reihe der Form

$$\sum_{s=0}^{\infty} A_n r^n \theta_n^{m,k}(\cos 2\vartheta) \qquad [n = m + k + 2s]$$

entwickeln läßt und

$$J_m(r\cos\vartheta\sin\alpha)\,J_k(r\sin\vartheta\cos\alpha)$$

in eine Reihe der Form

$$\sum_{s=0}^{\infty} B_n \frac{J_{n+1}(r)}{r}\,\theta_n^{m,k}(\cos 2\vartheta)\,\theta_n^{m,k}(\cos 2\alpha),$$

worin wieder $n = m + k + 2s$ ist. Wn.

F. H. Jackson. The application of basic numbers to Bessel's and Legendre's functions. (Second paper.) Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 1-23.

Fortsetzung einer Arbeit, über die im vorigen Jahre berichtet ist (vgl. F. d. M. **35**, 487, 1904). Für die „basischen Funktionen" werden hier weitere Relationen entwickelt, welche bekannten Gleichungen für die gewöhnlichen Besselschen, resp. für die gewöhnlichen und die erweiterten Kugelfunktionen analog sind; z. B. die Analoga zu den Gleichungen:

$$e^{r\cos\vartheta} J_0(r\sin\vartheta) = \sum \frac{r^n}{n!} P_n(\cos\vartheta),$$

$$e^{ir\cos\vartheta} = 2^{\frac{1}{2}q-1}\Gamma(\tfrac{1}{2}q-1)\sum i^n(n+\tfrac{1}{2}q-1)P_n(q,\cos\vartheta)J_{n+\frac{1}{2}q-1}(r)/r^{\frac{1}{2}q-1}$$

u. a. Es wird ferner die Entwicklung willkürlicher Funktionen, die nach den $J_{[n]}$ und $P_{[n]}$ (über die Definition dieser Funktionen vgl. das vorjährige Referat) fortschreiten, abgeleitet, endlich eine Erweiterung der Funktion $J_{[n]}$ untersucht. Hinsichtlich der Resultate muß auf das Original verwiesen werden. Der Nachtrag (S. 21-23) ist betitelt: Expansion of functions in series of basic Bessel coefficients. Wn.

F. H. Jackson. Theorems relating to a generalization of Bessel's function. Edinb. Roy. Soc. Trans. **41**, 399-408 (vgl. F. d. M. **35**, 490, 1904).

F. H. Jackson. The basic gamma-function and the elliptic functions. Lond. R. S. Proc. **76**, 127-144.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung einer verallgemeinerten Gammafunktion mit einem Parameter ω, die definiert ist durch die Funktionalgleichung:

$$\Gamma_p\left(x, \frac{\omega}{n}\right) = \text{const.} \prod_{\nu=0}^{\nu=\infty} \Gamma_p\left(x + \nu\frac{\omega}{n}, \omega\right).$$

Für $p = 1$ geht die Funktion in die gewöhnliche Gammafunktion über. Im Laufe der Untersuchung ergeben sich Übergänge zu den elliptischen und verwandten Funktionen, sowie Spezialisierungen, die zu Kugelfunktionen und verwandten Funktionen überleiten. Den Schluß bildet die Ausdehnung der gefundenen Resultate auf eine weitere Verallgemeinerung, bei der außer ω noch ein zweiter Parameter eingeführt wird. Br.

J. W. NICHOLSON. On the application of Legendre's functions to the theory of the Jacobian elliptic integrals. Phil. Mag. (6) **9**, 264-268 (vgl. S. 505 dieses Bandes).

W. KAPTEYN. Sur la sommation d'une série infinie. Nieuw Archief (2) **7**, 20-25.

Die zu summierende Reihe ist

$$(1) \qquad \sum n\, J_n(a)\, J_n(x),$$

wobei die Summation über alle geraden n zu erstrecken ist. Der Verf. geht von der bekannten Darstellung von $J_n(x)$ als Residuum von

$$\frac{e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t}\, t^n$$

aus, bildet

$$\sum J_n(x) \sin(n\varphi) \qquad (n = 2, 4, \ldots),$$

differenziert dann nach φ und gelangt mittels der Darstellung von $J_n(a)$ als bestimmtes Integral auf einen Wert für die Reihe (1), der nach mehrfachen Reduktionen folgendes Resultat ergibt:

$$\sum n\, J_n(a)\, J_n(x) = \frac{a}{4}\int_0^x dx \int_0^x J_0(x-\gamma)\left[\frac{J_2(a+\gamma)}{a+\gamma} + \frac{J_2(a-\gamma)}{a-\gamma}\right] d\gamma.$$

Wn.

W. KAPTEYN. On an expansion of an arbitrary function in a series of Bessel functions. Messenger (2) **35**, 122-125.

Die von Webb in Messenger (2) **33**, 55-58 (vgl. F. d. M. **34**, 519. 1903) gegebenen Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer Funktion in die Reihe $c_1 J_1 + c_2 J_2 + c_3 J_3 + \cdots$ genügen nicht, wie an der Funktion $\sin\left(\frac{x}{\sin\varphi}\right)$ dargelegt wird. Durch eine Prüfung des Gegenstandes gelangt Kapteyn zu dem Ergebnis: Eine gegebene Funktion kann in eine Reihe von der angegebenen Form entwickelt werden, wenn sie ungerade ist, für $x = 0$ verschwindet, für alle reellen Werte der Variable stetig ist und außerdem der Bedingung genügt:

$$\int_0^\infty \frac{J_1(t)}{t}\left[\varphi(t+\gamma) + \varphi(t-\gamma)\right] dt = 2\,\frac{d\varphi(\gamma)}{d\gamma}.$$

„Es wäre eine interessante Aufgabe, alle möglichen Formen von $\varphi(x)$ zu bestimmen, welche dieser Bedingung genügen.“ Lp.

G. Fubini. Un'osservazione sulla teoria delle funzioni poliarmoniche.
Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 449-453.

Das Hauptresultat der Arbeit, die an einen Aufsatz von Levi-Civita aus dem Jahre 1898 (F. d. M. **29**, 310, 1898) anknüpft, ist folgendes: Kann man die Aufgabe, eine biharmonische Funktion zu konstruieren (d. h. eine Funktion, die der Gleichung $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$ im Innern eines Gebietes genügt, während u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ an der Grenze gegebene Werte annehmen), für eine ebene Fläche σ lösen, so kann man auch die Lösung für eine andere Fläche σ' finden, falls sich σ' konform auf σ abbilden läßt, und zwar konform inkl. des Randes. Ist nämlich (x, y) ein Punkt von σ, (x', y') ein Punkt von σ', und ist die konforme Abbildung durch die Gleichung

$$dx'^2 + dy'^2 = H^2(dx^2 + dy^2)$$

vermittelt, so reduziert sich die für das Gebiet σ' geltende Gleichung $\Delta'_2 \Delta'_2 u = 0$ auf die für σ geltende Gleichung

$$(1)\quad \Delta_2 \Delta_2 u = 2\nabla(\log H^2, \Delta_2 u) - H^2 \cdot \Delta_2\left(\frac{1}{H^2}\right) \cdot \Delta_2 u,$$

wo

$$\nabla(p, q) = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial y},\ \Delta_2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

ist. Bestimmt man die Funktionen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ so, daß

$$\Delta_2 \Delta_2 u_0 = 0,$$

$$\Delta_2 \Delta_2 u_{i+1} = 2\nabla(\log H^2, \Delta_2 u_i) - H^2 \Delta_2\left(\frac{1}{H^2}\right) \Delta_2 (u_i)$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots),$$

und daß u_0 und $\frac{\partial u_0}{\partial u}$ am Rande von σ gegebene Werte annehmen, während u_i und $\frac{\partial u_i}{\partial n}$ für $i > 0$ dort verschwinden, so stellt die Reihe

$$(2)\qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

die Lösung der Aufgabe für das Gebiet σ' dar. Zur Konvergenz der Reihe (2) ist erforderlich, daß

$$\frac{\partial \log H^2}{\partial x},\ \frac{\partial \log H^2}{\partial y},\ H^2 \Delta_2\left(\frac{1}{H^2}\right)$$

unterhalb einer gewissen Grenze bleiben.

Die Lösung läßt sich leicht auf polyharmonische Funktionen (d. h solche, die der Gleichung $\Delta_2^{(\nu)} u = 0$ genügen) ausdehnen. Wn.

J. G. Rutgers. **Over eene reeks met Besselsche functies.** Nieuw Archief (2) 7, 88-104.

Nachträge zu der Abhandlung, über welche auf S. 370 dieses Bandes berichtet ist. Lp.

G. Voronoï. **Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles $\sum f(pm^2+2qmn+rn^2)$, où $pm^2+2qmn+rn^2$ est une forme positive à coefficients entiers.** Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 241-245.

Die über alle ganzzahligen Lösungen der Ungleichung $a < pm^2 + 2qmn + rn^2 \overline{\gtrless} b$ erstreckte Summe $S = \sum f(pm^2+2qmn+rn^2)$ wird, wenn man mit $\tau(\varkappa)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung $pm^2+2qmn+rn^2 = \varkappa$ bezeichnet und

$$\varphi(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa \leqq x} \tau(\varkappa)$$

setzt:

$$S = \int_a^b f(x)\, d\varphi(x).$$

Setzt man nun weiter

$$\varphi(x) = \frac{\pi x}{\sqrt{pr-q^2}} + r(x),$$

so kann $r(x)$ mittels einer Formel, welche bei der Transformation der Thetafunktionen Verwendung findet (vgl. mein Lehrb. S. 96), durch Zylinderfunktionen ausgedrückt werden. Benutzt man dann deren Entwicklungen in semikonvergente Reihen, so erhält man Näherungswerte für die Summe S. Daß bei der Herleitung des ebengenannten Ausdruckes von $r(x)$ durch Zylinderfunktionen die vorgenommene Umstellung der Summationen erlaubt ist, muß, wie auch der Verf. bemerkt, noch besonders bewiesen werden. Kr.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Kapitel 1.

Prinzipien der Geometrie.

J. Royce. The relation of the principles of logic to the foundations of geometry. American M. S. Trans. 6, 353-415.

Wenn eine Menge von Begriffen so beschaffen ist, daß jedes Ding mindestens unter einen von ihnen, kein Ding aber unter alle zugleich fällt, so möge diese Menge eine O-Menge (O-collection) heißen. Verf. baut nun die Algebra der Logik derart auf, daß er die Eigenschaften dieser O-Mengen axiomatisch postuliert. Er denkt sich eine Menge Σ und eine ausgezeichnete Klasse ihrer Untermengen — die O-Mengen — gegeben. Wenn die Vereinigungsmenge einer beliebigen Untermenge α mit einem Element b eine O-Menge ist, so heißt b ein „Komplement" von α. Besteht α nur aus einem Element a, so heißen a und b zueinander „obvers". In der Algebra der Logik gibt es zu jedem Begriff nur einen obversen, das kontradiktorische Gegenteil. Dies setzt Verf. nicht voraus; er betrachtet statt dessen zwei Elemente x, y als „äquivalent", wenn man in jeder x enthaltenden O-Menge x durch y ersetzen kann, ohne die Eigenschaft als O-Menge zu zerstören, und ebenso umgekehrt y in jeder y enthaltenden O-Menge durch x. In einer formal nicht einwandfreien Weise, die implizite äquivalente Elemente als identisch voraussetzt, werden nun die Klassen äquivalenter Elemente behandelt, indem nach dem Zermeloschen Auswahlprinzip aus jeder ein Repräsentant ausgewählt gedacht wird.

Die Axiome des Verf. verlangen nun, 1. daß jede Untermenge von Σ, die eine O-Menge als Teil enthält, selbst eine O-Menge ist, 2. daß eine Menge δ eine O-Menge ist, wenn es eine O-Menge gibt, deren sämtliche Elemente Komplemente von δ sind, 3. und 4. daß Σ wenigstens zwei nicht zueinander äquivalente Elemente enthält, 5. daß zu jedem

Paar x, y nicht äquivalenter Elemente ein drittes z existiert, so daß (x, y, z), nicht aber (x, z) und (x, y) eine O-Menge bilden, 6. daß zu jeder Untermenge von Σ, zu der ein Komplement v existiert, noch ein zweites w existiert, derart, daß v, w mit jedem Element der Untermenge eine O-Menge bilden.

Diese Axiome gelten in der Tat für die Algebra der Logik und ihr bekanntes geometrisches Bild: die Menge aller Flächenstücke, die Teile eines gegebenen Flächenstücks sind. Verf. löst nun die Aufgabe, von einem Axiomensystem zu den bekannten Operationen der logischen Addition und Multiplikation zu gelangen. Wenn die Elemente a, b mit dem obversen $\bar{c}$ von c eine O-Menge bilden, so wird $c <_a b$ gesetzt, wobei also das Ordnungszeichen noch eine Beziehung auf das dritte Element a enthält, das in der algebraischen Logik durch 0 repräsentiert wird. Verf. zeigt sodann, daß es ein letztes Element p unter allen gibt, die den Elementen einer Menge β vorangehen, und ein erstes, s, unter allen, die auf sie folgen; s und p sind in der Logik Summe und Produkt.

Das Axiomensystem des Verf. enthält als Spezialfall neben der Algebra der Logik auch die Geometrie. Hsb.

F. Hausdorff. B. Russell. The principles of mathematics. Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos. u. Sociol. **29**, 119-124.

Eine ausführliche Beurteilung des (F. d. M. **34**, 62, 1903) besprochenen Buches. Bei aller Anerkennung einzelner gelungener, ja vorzüglicher Partien findet der Beurteiler doch, daß in diesem Werke ein scholastischer Scharfsinn, der eingebildete Probleme sieht und die wirklichen übersieht, die Orgien seiner Subtilität feiert. El.

N. I. Lobatschewskij. Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. Nouvelle édition conforme à la première (1835). Paris: A. Hermann. S. 279-340.

Die Pangeometrie, die Lobatschewskij, als er erblindet war, seinen Schülern diktiert hat, und die eine in sich abgeschlossene, wenn auch nicht seine beste Darstellung seines Systems der Geometrie enthält, ist zwar schon durch Liebmanns Übersetzung in Ostwalds Klassikern (Nr. 130, Leipzig 1902) allgemein zugänglich gemacht, doch wird gar manchem auch der vorliegende Faksimiledruck der französischen Originalausgabe willkommen sein. El.

K. Th. Vahlen. Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. Leipzig: B. G. Teubner. XI u. 298 S. 8°.

Verf. gibt einen axiomatischen Aufbau der Geometrie. Die Axiome werden nacheinander eingeführt, und bei jedem einzelnen wird die

Unabhängigkeit von den vorhergehenden geprüft. Der Nachweis der Unabhängigkeit wird, wie bei Hilbert, durch Aufstellung sogenannter „arithmetischer“ Geometrien erbracht, für welche das zuletzt eingeführte Axiom im Gegensatz zu den vorhergehenden nicht besteht. Die beständig notwendige Heranziehung der Arithmetik ließ es vorteilhaft erscheinen, das Buch mit einem Abschnitt über die Grundlagen der Arithmetik einzuleiten. Den Ausgangspunkt bilden hier der allgemeine Mengenbegriff und der Begriff der geordneten Mengen. Dabei werden aber nicht nur wie sonst linear, sondern auch planar und überplanar geordnete Mengen definiert und auch in den späteren Teilen dieses ersten Abschnittes, welche den Mengen mit Kompositionsgesetzen gewidmet sind, weiter studiert. Diese werden stufenweise eingeführt, indem zunächst „Gruppen“, d. h. Systeme mit einem Kompositionsgesetz, der Addition, sodann „Zahlsysteme“ mit zwei Kompositionsgesetzen, Addition und Multiplikation unter Voraussetzung des distributiven Gesetzes, endlich Größensysteme, bei denen noch ein gewisses Anordnungsaxiom hinzukommt, untersucht werden.

Die beiden folgenden Abschnitte behandeln die projektive Geometrie. Die Teilung erfolgt in der Weise, daß im ersten dieser Abschnitte nur Verknüpfungsaxiome eingeführt werden, während die Sätze der Anordnung dem zweiten vorbehalten bleiben. Als eines der Hauptergebnisse des ersten Abschnitts sei der Nachweis erwähnt, daß jeder Schließungssatz auf Grund des Desarguesschen und Pascalschen Satzes bewiesen werden kann. Dabei wird unter „Schließungssatz“ eine Aussage verstanden, daß man durch zwei verschiedene Konstruktionen, von denselben Grundelementen (Punkten, Geraden, Ebenen) ausgehend, zu demselben Element gelangt. Es wird ferner gezeigt, daß auf Grund der eingeführten Verknüpfungsaxiome der Pascalsche Satz oder der mit ihm gleichwertige Fundamentalsatz der projektiven Geometrie nicht bewiesen werden kann. Im folgenden Abschnitt handelt es sich nun darum, zu untersuchen, welche Anordnungsaxiome hinzugenommen werden müssen, um den Pascalschen Satz beweisbar zu machen. Es zeigt sich, daß die Voraussetzung der Meßbarkeit nicht erforderlich ist, sondern, daß ein weniger forderndes Axiom, vom Verf. unter der Bezeichnung „Grundsatz der relativen Dichte“ eingeführt, ausreichend ist.

Der vierte Abschnitt ist als „affine Geometrie“ bezeichnet. Hierunter versteht Verf. die Gesamtheit derjenigen Sätze, welche man unter Zugrundelegung der projektiven Geometrie erhält, wenn man in dieser noch eine Scheidung in eigentliche und uneigentliche Elemente vornimmt, bei welcher gewisse Grundsätze erfüllt sind. Diese besagen, daß durch einen eigentlichen Punkt nur eigentliche Geraden und Ebenen, d. h. solche gehen, welche durch eigentliche Punkte bestimmt werden können, ferner daß auf einer Geraden ein eigentliches und ein uneigentliches Punktepaar einander nicht trennen können. Um die affine Geometrie zu begründen, genügen indessen diese Axiome noch nicht. Man könnte als weiteres Axiom hinzunehmen, daß alle eigentlichen Geraden von derselben Art sind, d. h. daß die Anzahl der auf einer eigentlichen Geraden liegenden uneigentlichen Punkte entweder für jede $= 0$, oder für jede $= 1$, oder

für jede $>$ 1 (und dann ∞) ist. Da es jedoch nicht angängig erscheint, diesen Satz als Axiom einzuführen, so wird ein anderes Axiom, welches empirisch begründet werden kann, und auf Grund dessen jener Satz beweisbar wird, aufgestellt. Dieses Axiom besagt: Hat man drei eigentliche Elemente, einen Punkt P, eine Gerade g, eine Ebene ε in inzidenter Lage, und bezeichnet P', g', ε' ein ebensolches Tripel, so gibt es eine Kollineation (nämlich eine Bewegung), welche eigentliche Elemente nur in eigentliche und speziell das Tripel P, g, ε in das Tripel P', g', ε' überführt. Unter Hinzunahme dieses Grundsatzes läßt sich nun die affine Geometrie tatsächlich vollständig begründen.

Im fünften und letzten Abschnitt ergibt sich unter Zugrundelegung der Kongruenzaxiome die metrische Geometrie und ihre Spaltung in die elliptische, welche uneigentliche Elemente nicht enthält, und die beiden affin-metrischen: die parabolische und hyperbolische. Stz.

H. Liebmann. Nichteuklidische Geometrie. Leipzig: G. J. Göschen. VIII u. 245 S. 8°. (Samml. Schubert XLIX.)

Nach einem kurzen Kapitel, in dem das Parallelenaxiom mit den zu ihm äquivalenten Formen, seine Scheinbeweise sowie die sogenannten Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck besprochen sind, wird im zweiten Kapitel ein Bild der hyperbolischen Ebene sowie des hyperbolischen Raumes durch den Bündel der eine Gerade senkrecht schneidenden Kreise, resp. durch den Bündel der eine Ebene senkrecht schneidenden Kugeln gegeben. Im dritten und vierten Kapitel wird die hyperbolische Geometrie nach dem Vorbild von Bolyai und Lobatschewskij synthetisch begründet, im fünften Kapitel werden speziell noch Flächen- und Rauminhaltsbestimmungen ausgeführt. Im sechsten Kapitel folgt die analytische Geometrie der hyperbolischen Ebene nach Einführung der Weierstraßschen Koordinaten. Es werden auch Linienkoordinaten eingeführt und die Kegelschnitte klassifiziert. Im siebenten Kapitel wird die elliptische Geometrie aus der sphärischen durch Ersetzen eines Punktepaares durch einen Punkt gewonnen und werden insbesondere die interessanten Eigenschaften der Cliffordschen Fläche auseinandergesetzt. Im letzten (achten) Kapitel werden die Elemente der nichteuklidischen Dynamik und Statik gegeben; im speziellen wird in 3 Paragraphen die Bewegung nach dem Newtonschen Gesetze sowohl in der sphärischen, wie in der hyperbolischen Geometrie behandelt. — Auch dieses Buch wird dazu beitragen, die jedes Mysteriums entkleidete nichteuklidische Geometrie zum Gemeingut aller der Mathematik Beflissenen zu machen. D.

H. Liebmann. Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und neue Begründung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie. Math. Ann. 61, 185-199.

Ein direkter Beweis der Existenz eines einem rechtwinkligen Dreieck zugeordneten dreifach rechtwinkligen Vierecks in der hyperbolischen Ebene

ermöglicht den einfachen geometrischen Nachweis der gewöhnlichen Parallelenkonstruktion. Es wird ferner diese Beziehung benutzt, um die Parallelwinkelfunktion $\Pi(p)$ zu berechnen und dann weiter die pseudosphärische Trigonometrie abzuleiten. D.

L. HEFFTER. Über Anordnung und Aufbau der Geometrie. A. Wüllner-Festschrift. Leipzig: B. G. Teubner. 77-90.

Vgl. F. d. M. **34**, 534, 1903. D.

L. SCHLESINGER. Über eine Darstellung des Systems der absoluten Geometrie. Deutsche Math. Ver. **14**, 559-568.

Der Verf. beabsichtigt, eine Darstellung des Systems der absoluten Geometrie zu veröffentlichen, bei der er an die in Riemanns berühmter Habilitationsvorlesung entwickelten Prinzipien anknüpft, und gibt hier eine Übersicht über den Gedankengang, den er befolgen will. Er setzt nur voraus, daß der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit ist und im Unendlichkleinen euklidischen Charakter besitzt, sowie daß die Figuren ohne Dehnung bewegt werden können. Im wesentlichen kommt alles hinaus auf die Untersuchung zweifach ausgedehnter Räume und der zugehörigen Invarianten bei isometrischer und bei homöomorpher (eindeutig stetiger) Abbildung. Eine Anmerkung am Schlusse enthält einen Versuch zu zeigen, was die Riemannsche Behauptung bedeutet, daß die Maßverhältnisse einer M_3 durch das Krümmungsmaß bestimmt sind, überdies einen Beweis der Kronecker-Dyckschen Formel für die Zusammenhangszahl einer Kleinschen Normalfläche mit p Ausbuchtungen. El.

E. CESÀRO. Fondamento intrinseco della pangeometria. Rom. Acc. L. Mem. (5) **5**, 155-183.

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der Studien des Verf. über die Anwendung seiner Methode in der Differentialgeometrie für die nichteuklidische Geometrie (F. d. M. **35**, 499 u. 654, 1904). — Die Bewegung der (zweidimensionalen) Mannigfaltigkeit in sich wird charakterisiert durch solche Transformationen des Koordinatensystems, die fähig sind, eine fest mit demselben verbundene, durch eine lineare Gleichung zwischen den Koordinaten gegebene Kurve in sich überzuführen. Nacheinander ergeben sich durch Rechnung die verschiedenen Eigenschaften dieser Transformation, welche zu ihrer Bestimmung ausreichen. Es wird nachgewiesen, daß das Krümmungsmaß der Mannigfaltigkeit konstant sein muß (man denke an das bekannte Resultat von Beltrami); es wird die Gleichung des absoluten Gebildes gefunden und gezeigt, daß die linearen Gleichungen zwischen den Koordinaten die geodätischen Linien der Mannigfaltigkeit darstellen, womit nach Entscheidung über Vorzeichen, resp. Verschwinden des Krümmungsmaßes die Grundlage für die Pangeometrie geschaffen ist.

Es folgt die Ableitung der Ausdrücke für die wichtigsten geometrischen Größen (Abstand zweier Punkte, Abstand eines Punktes von einer Geraden etc.) und des weiteren das Studium der Theorie der krummen Kurven etc., alles mit den Hülfsmitteln des „metodo intrinseco“. D.

FR. S. WOODS. Forms of non-euclidean space. The Boston Colloquium, Septbr. 3-5, 1903, 31-74.

„Zweck der gegenwärtigen Vorlesungen ist die Darstellung besonders jener nichteuklidischen Raumformen, die von Clifford, Klein und Killing durchforscht und von dem letzten Autor die Clifford-Kleinschen Raumformen genannt sind. (Math. Ann. **39**, 257-278; F. d. M. **23**, 529, 1891). Um der Klarheit willen ist es notwendig, mit der Geometrie eines beschränkten Teiles des Raumes zu beginnen. Hier ist der Verf. der Entwicklung seines eigenen Artikels über „Space of constant curvature“ gefolgt (Annals of Math. (2) **3**, 71-112; F. d. M. **33**, 640, 1902), auf den der Leser wegen der Hinweise auf die Literatur und vollständigeren Behandlung einiger Dinge aus den ersten fünf Paragraphen dieser Vorlesungen verwiesen wird. Der festgehaltene Standpunkt ist der, daß der objektive Raum gewisse Erscheinungen der Form, Lage und Größe darbietet, welche, wie andere physikalische Erscheinungen, der Aufklärung bedürfen. Diese Aufklärung gibt der Geometer durch die Annahme gewisser Hypothesen, zu deren Bildung er volle Freiheit hat, falls sie mit sich selbst verträglich sind. Der Prüfstein der Gültigkeit der Hypothesen liegt in ihren Ergebnissen. Wir machen zunächst Hypothesen, die den Ideen der berühmten Riemannschen Habilitationsschrift folgen.“

„Es wird zugegeben, daß Fragen aufgeworfen werden können, die noch hinter diesen Hypothesen liegen, wie z. B. die Möglichkeit ihrer Zurückführung auf einfachere Axiome; aber die Erörterung solcher Fragen liegt außerhalb unseres gegenwärtigen Bereiches. Die Riemannsche Methode hat für uns den doppelten Vorteil, den unmittelbaren Gebrauch der analytischen Methoden zu gestatten und die Erörterung anfangs auf ein kleines Raumgebiet zu beschränken. Eine so in einem kleinen Raumgebiete entwickelte Geometrie wird auf den ganzen Raum mittels neuer Hypothesen ausgedehnt, die im wesentlichen die von Killing in seinen „Grundlagen der Geometrie“ gebrauchten sind. Bei der weiteren Entwicklung sind die Ideen dieses oben genannten Werkes maßgebend gewesen.“ I. Die beiden ersten Hypothesen. II. Definitionen. III. Die dritte Hypothese. IV. Das Linienelement. V. Geometrie in einem beschränkten Raumgebiete. VI. Die vierte und die fünfte Hypothese. VII. Das erweiterte Koordinatensystem. VIII. Der Hülfsraum Σ. IX. Raumformen, welche freie Bewegung als ein Ganzes gestatten. X. Raumformen, welche nicht freie Bewegung als ein Ganzes gestatten. Lp.

G. L. CALISSE. La teoria delle rette parallele e la geometria non euclidea. Riv. di fis., mat. e sc. nat. 6_2, 31-36, 126-135, 228-234, 318-323, 541-550.

Eine ausführliche Darstellung der Elemente der nichteuklidischen Geometrie. Fortsetzung folgt. Vi.

G. VERONESE. La geometria non Archimedea. Una questione di priorità. Rom. Acc. L. Rend. (5) 14_1, 347-351.

Gelegentlich des Poincaréschen Berichtes über die Hilbertschen Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie weist Veronese darauf hin, daß er bereits in seinen „Fondamenti“ die nichtarchimedische Geometrie einwandfrei und in umfassender Weise begründet habe. Er betont ferner den Gegensatz zwischen „geometrisch möglichen“ Axiomkombinationen und solchen, die nur in der „abstrakten Ausdehnungslehre“ existieren. D.

P. MANSION. La géométrie non archimédienne est-elle une géométrie? Brux. S. sc. 29 A, 200.

Nein, falls man die Abstände als Größen ansieht. Mn. (Lp.)

P. MANSION. Ne peut-on pas dire d'une géométrie qu'elle est plus vraie qu'une autre? Brux. S. sc. 29 A, 196-199.

Der Verf. bejaht diese Frage; Poincaré verneint sie, weil er den Namen „nichteuklidische Geometrie“ einer gewissen Transformation der euklidischen gibt. Mn. (Lp.)

O. VEBLEN. Definition in terms of order alone in the linear continuum and in well-ordered sets. American M. S. Trans. 6, 165-171.

Es wird der Ordnungstypus des Linearkontinuums ähnlich wie bei Cantor definiert. Nur wird das Cantorsche Postulat, daß das Linearkontinuum eine überall dichte abzählbare Teilmenge besitzt, durch ein anderes ersetzt. Die Äquivalenz dieses Postulats mit dem Cantorschen wird mit Hülfe des sogenannten Heine-Borel-Theorems nachgewiesen. D.

G. COMBEBIAC. Théorie géométrique des groupes métriques. Ens. math. 7, 270-291, 381.

Versuch einer plausiblen, Schwierigkeiten vermeidenden Darstellung der Lieschen Begründung der ebenen Geometrie mit Hülfe ihrer Gruppeneigenschaften. D.

G. Combebiac. Les axiomes de la géométrie. Ens. math. 7, 446-450.

Verf. bespricht den Aufbau der Geometrie, wenn man das Axiom, daß der Raum eine Punktmenge mit bestimmten Eigenschaften ist, zu Grunde legt. Er wendet sich gegen die Behauptung, daß Axiome verkappte Definitionen sind. D.

H. de Vries. Centrale projectie in de ruimte van Lobatschefskij. Amst. Ak. Versl. **14**, 264-269.

Der Verf. untersucht die Besonderheiten, die der Lobatschewskijsche Raum darbietet, wenn man seine Punkte von einem festen Punkte O aus auf eine Ebene τ projiziert. Z. B. ist O die Spitze eines Kegels, der τ zur Asymptotenebene hat, und die Punkte innerhalb dieses Kegels sind die einzigen, die in der Projektionsebene durch im Endlichen liegende Punkte abgebildet werden, während ein Punkt außerhalb des Kegels in der Projektion nicht durch einen Punkt repräsentiert wird, sondern durch die Projektionen zweier ihn enthaltenden geraden Linien bestimmt werden muß. Ferner treten auf der Projektion einer Geraden im allgemeinen zwei Fluchtpunkte auf, usw. El.

M. Wolkov. Der Gaußische Beweis des Satzes über die Möglichkeit der Existenz der Ebene. (Spaczinski)-Kagans Bote Nr. 386, 32-36. (Russisch.)

Darstellung des Beweises von Gauß. Die Ebene erscheint als Ort der Perpendikel zu einer Geraden in einem ihrer Punkte. Doch ist in der Darstellung eine Lücke vorhanden, auf welche die Red. hinweist, und welche durch Gauß' Werke VIII, 195, nicht ausgefüllt ist. Si.

D. S. Schor. Geometrie der Figuren. (Spaczinski)-Kagans Bote Nr. 386, 36-39.

Fragment der Arbeit des früh verstorbenen russischen Mathematikers. Es wird ein System von Objekten aufgewiesen, für welches die euklidische Geometrie gilt; es werden nämlich die Kugeln vom gegebenen Diameter Δ als Punkte, die Kreiszylinder von demselben Diameter als Gerade und die ebenen Schichten von der Dicke Δ als Ebenen betrachtet. Dann gilt das Parallelenaxiom. Si.

R. Bonola. I teoremi del padre Girolamo Saccheri sulla somma degli angoli di un triangolo e le ricerche di M. Dehn. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 650-662.

Verf. gibt neue und direkte Beweise für die von Dehn bewiesenen Sätze: 1. Ist in einer archimedischen oder nichtarchimedischen

Geometrie in einem Dreieck die Winkelsumme $\lesseqgtr 2R$, so ist für jedes Dreieck die Winkelsumme respektive $\lesseqgtr 2R$. 2. Schneiden sich je 2 Geraden derselben (archimedischen oder nichtarchimedischen) Ebene, so ist die Winkelsumme stets größer als $2R$. D.

C. Dassen. A propos de mon article sur la théorie des parallèles. Ens. math. 7, 235-238.

Verf. leitet mit Hülfe des archimedischen Axioms in einfacher Weise das gewöhnliche Parallelenaxiom aus dem Axiom ab: Nähert sich eine Gerade in einem Segment einer anderen Geraden, so kann sie sich bei weiterer Fortsetzung des Segments (in derselben Richtung) nicht wieder von ihr entfernen. D.

L. L. Fabre. Théorie de la droite et des parallèles. Ens. math. 7, 483-484.

Verf. empfiehlt die Definition der Geraden als „Linie konstanter Richtung". D.

G. Hay. On a postulate respecting a certain form of deviation from the straight line in a plane. American Acad. Proc. **41**, 353-357.

Verf. untersucht die logischen Unterschiede des gewöhnlichen Parallelenaxioms von einem „Deviationspostulat", das im wesentlichen auf das (des öfteren aufgestellte) Postulat herauskommt: Nähert sich eine Gerade in einem Segment einer anderen, so kann sie sich bei weiterer Fortsetzung in derselben Richtung nicht wieder von ihr entfernen. D.

M. Frolow. Réflexions sur les hypothèses non-euclidiennes. Assoc. Franç. Grenoble **33**, 88-95.

Die „Überlegungen" sollen die vermeintlichen logischen Fehler der nichteuklidischen Geometrien nachweisen, sind aber den früheren Betrachtungen des wackeren Kämpfers für die ausschließliche Richtigkeit der euklidischen Geometrie nicht überlegen, sondern unterliegen den schon öfter an ihnen gerügten Mängeln (vgl. F. d. M. **31**, 472-473, 1900). Lp.

J. Hjelmslev. Om konvexe Omraader. Nyt. Tidss. for Math. **16**B, 81-97.

Über konvexe Bezirke. Indem der Verf. einen konvexen Bezirk dadurch definiert, daß zwei willkürliche Punkte davon immer in einem Linienstück liegen, das ganz dem Bezirk angehört, wird eine ganze Reihe von Fundamentalsätzen der euklidischen Geometrie hergeleitet.

Ein Linienstück ist der Inbegriff aller Punkte der Geraden AB, welche zwischen A und B liegen. A und B gehören nicht zu dem Linienstück, sondern sind Grenzpunkte desselben. V.

H. Minkowski. Über die Körper von konstanter Breite. Moskau Math. Samml. **25**, 505-508. (Russisch.)

Versteht man unter der Breite eines Körpers in gegebener Richtung die Entfernung zweier zu dieser Richtung normalen Stützebenen ($\equiv$ Ebene, welche mit dem Körper wenigstens einen Punkt gemein hat und den Körper nicht schneidet) und unter dem Perimeter des Körpers den Umfang des normalen Schnittes des von den Stützebenen umhüllten Zylinders, so sind die Körper von konstanter Breite mit denen von konstantem Perimeter untereinander identisch. Si.

R. Bonola. La trigonometria assoluta secondo Giovanni Bolyai. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 1037-1046.

Um die Formeln der absoluten Trigonometrie abzuleiten, benutzt der Verf. die von J. Bolyai eingeführte Funktion O_x, den Umfang eines Kreises vom Halbmesser x, und die de Tillyschen Funktion E_x, die Bogenlänge einer Linie, deren Punkte von den Punkten einer geradlinigen Strecke von der Länge 1 den Abstand x haben. Außerdem stützt er sich noch beim rechtwinkligen Dreiecke auf den Satz von Bolyai: $O_a = O_c \sin\alpha$ und auf den von de Tilly: $\cos\alpha = E_a \sin\beta$, die beide für alle drei Geometrien gültig sind. Er leitet zunächst die Additionstheoreme beider Funktionen ab, gewinnt dann das vollständige Formelsystem für das rechtwinklige und schließlich das für das schiefwinklige Dreieck und gibt überdies an, welche Gestalt die abgeleiteten Formeln insbesondere für jede einzelne der drei Geometrien annehmen. El.

M. Dehn. Über den Inhalt sphärischer Dreiecke. Math. Ann. **60**, 166-174.

Zuerst wird bewiesen, daß der sphärische Exzeß eine Zerlegungsinvariante ist, das heißt, wenn man ein sphärisches Dreieck in eine Anzahl von Dreiecken zerlegt, so ist sein sphärischer Exzeß gleich der Summe der sphärischen Exzesse der Teildreiecke. Auf Grund einfacher Hülfssätze wird dann gezeigt, daß jedes rechtwinklige sphärische Dreieck einem doppeltrechtwinkligen Dreiecke endlich gleich ist, und daraus folgt, daß der sphärische Exzeß stets positiv ist, und daß Polygone mit gleichem sphärischen Exzesse endlich gleich sind. Die Lehre vom Inhalt sphärischer Polygone ist so ohne Benutzung der Stetigkeit begründet. El.

H. LEBESGUE. Sur le problème des aires. S. M. F. Bull. **33**, 273-274.

Richtigstellung eines Versehens in einer früheren Note (s. F. d. M. **34**, 533, 1903). D.

J. FRISCHAUF. Die Kubatur des Tetraeders. Ungar. Ber. **20**, 92-95.

Ausführung der von Bolyai angegebenen „dritten" Methode zur Berechnung des Inhalts des Tetraeders in der hyperbolischen Geometrie. Dieselbe beruht auf der Zerschneidung eines Tetraeders mit rechtwinkliger Basis und einer auf derselben senkrecht stehenden Kante durch Parallelflächen zur Basis. D.

N. J. LENNES. Volumes and areas. American M. S. Trans. **6**, 486-490.

Verf. beweist mit Hülfe des archimedischen Axioms den Satz: Hat ein Polyeder Π_1 größeres Inhaltsmaß als ein Polyeder Π_2, so kann man Π_2 in Teile zerlegen, die einen Teil von Π_1 einfach überdecken. Dieser Satz dient zur Begründung einer Definition der Inhaltsgleichheit. D.

G. COMBEBIAC. Les deux bases de la métrique. Ens. math. **7**, 375-381.

Besprechung und Umformung der Hilbertschen Axiome der Geometrie. D.

R. FISCHER. Ein Beitrag zur hyperbolischen Geometrie. Monatsh. f. Math. **16**, 230-233.

Verf. bespricht eine Reihe von einfachen Eigenschaften der drei Arten von Flächen des hyperbolischen Raumes, die das Fundamentalgebilde in einem Kegelschnitt berühren (gewöhnliche Kugel, Grenzkugel, Fläche gleichen Abstandes). D.

D. M. Y. SOMMERVILLE. Semi-regular net-works of the plane in absolute geometry. Edinb. R. S. Trans. **41**, 725-747.

1. Die euklidische Ebene. Vier Fälle mit zwei, drei Fälle mit drei, ein Fall mit vier Arten von Vielecken. 2. Die elliptische Ebene. Halbregelmäßige Netze auf der Kugel, durch Schlegelsche Diagramme dargestellt. 3. Die hyperbolische Ebene. Da die Anzahl der Typen unendlich ist, wird keine erschöpfende Behandlung gegeben. — Zur Abhandlung gehören zwölf Figurentafeln. Lp.

E. DELSOL. Une nouvelle tentative de réfutation de la géométrie générale. Rev. de métaph. et de mor. **13**, 283-290.

Erwiderung auf eine Kritik der „Principes de géométrie" (Paris, 1903) des Verf. von Lechalas in Bd. **12**, 845-856, derselben Revue. Lp.

Weitere Literatur.

A. L. BAKER. A circular polygon. The Monist **15**, 462-466.

G. DARBOUX. A study of the developement of geometrical methods. Translated by G. B. Halsted. 23 S. 8° (Popular Science Monthly, March 1904).

Vgl. S. 63 dieses Bandes.

G. FUBINI. Le superficie di Bonnet nello spazio ellittico. Bull. Acc. Gioenia Catania Nr. 84, 2-3.

G. FUBINI. Sulle metriche hermitiane. Bull. Acc. Gioenia Catania Nr. 86, 2-3.

G. B. HALSTED. The pseudo-definition of a straight line. Math. Gazette **3**, 291-294.

G. B. HALSTED. Non-euclidean spherics. Amer. Math. Monthly **12**, 9-16.

P. A. LAMBERT. The straight line concept. Proc. Amer. Philos. Soc. **43**, 82-89.

G. LECHALAS. Sur la théorie géométrique du général de Tilly. Rev. de métaphys. et de morale **12**, 74-87.

A. LIASSE. Démonstration du postulatum d'Euclide. Boulogne-sur-Mer: Hamain. 8 S. 8°.

A. LIASSE. Géométries imaginaires et géométrie positive. Paris: De Rudeval. 72 S. 8vo.

P. MANSION. Volume du tétraèdre non-euclidien. Brux. S. sc. **29** A, 67.

P. MANSION. Sur une interprétation non-euclidienne de la géométrie euclidienne et inversement. Brux. S. sc. **29** A, 139-140.

R. DE SAUSSURE. Les grandeurs spatiales. Arch. sc. phys. et nat. (4) **19**, 301-302.

L. SCHLESINGER. Zur intrinseken Geometrie der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Math. és termész ért. **23**, 356-363. (Ungarisch.)

J. SORNEIN. Essai sur l'origine et les fondements de la géométrie. Mém. Soc. sc. nat. et math. de Cherbourg **34** [Mathesis (3) **4**, 252-253, 1904].

VENTURA Y REYES. Le théorème de Ménélaus en géométrie générale. Mathesis (3) **5**, 124-125.

J. W. WITHERS. Euclid's parallel postulate, its nature, validity and place in geometrical systems (Thesis). Chicago: Open Court Publishing Co. VII u. 192 S.

Kapitel 2.
Kontinuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie).

L. D. Ames. An arithmetic treatment of some problems in analysis situs. Diss. Harvard University. Baltimore: The Lord Baltimore Press. 1905, S. 343-380.

Jordan hat bekanntlich zuerst nachgewiesen, daß jede ebene, sich selbst nicht schneidende kontinuierliche geschlossene Kurve die Ebene in zwei Gebiete zerlegt. Die Kompliziertheit dieses Beweises und die bisher vergeblichen Versuche, einen wesentlich einfacheren zu finden, haben eine Reihe von Beweisen für weniger allgemeine Kurvengattungen veranlaßt. So beweist auch der Verf. vorliegender Arbeit den Satz unter der Voraussetzung, daß die Kurve regulär ist, d. h. aus einer endlichen Anzahl von Stücken besteht, welche eine sich stetig ändernde Tangente besitzen. Für die meisten Fälle der Anwendung dürften diese Voraussetzungen allgemein genug sein. — Wertvoll wird die Abhandlung durch die Ausdehnung der Untersuchung auf den Raum. Als „smooth simple closed surface" oder „geschlossene doppelpunktfreie Fläche mit überall bestimmter sich stetig ändernder Tangentialebene" ist dabei eine ganz im Endlichen gelegene, abgeschlossene und zusammenhängende Punktmannigfaltigkeit verstanden, welche noch die folgenden Eigenschaften besitzt: Ist $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ein Punkt der Mannigfaltigkeit, so ist es möglich, drei reelle Funktionen $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$ anzugeben, welche in einer gewissen Umgebung $\mathfrak{U}$ einer Stelle (u_0, v_0) eindeutig definiert sind und stetige Ableitungen besitzen, an der Stelle (u_0, v_0) den Bedingungen

$$\varphi(u_0, v_0) = x_0, \psi(u_0, v_0) = y_0, \chi(u_0, v_0) = z_0,$$
$$(\psi'_u \cdot \chi'_v - \psi'_v \cdot \chi'_u)^2 + (\chi'_u \cdot \varphi'_v - \chi'_v \cdot \varphi'_u)^2 + (\varphi'_u \cdot \psi'_v - \varphi'_v \cdot \psi'_u)^2 \neq 0$$

genügen, in der Umgebung $\mathfrak{U}$ nur Punkte der gegebenen Mannigfaltigkeit, und zwar keinen doppelt, darstellen und endlich innerhalb $\mathfrak{U}$ alle diejenigen Punkte der gegebenen Mannigfaltigkeit darstellen, welche innerhalb einer gewissen Umgebung von P_0 liegen. Daß durch die Beschränkung auf derartige Flächen und solche, die sich aus einer endlichen Anzahl von Stücken derartiger Flächen in bestimmter Weise zusammensetzen, die Hauptschwierigkeiten, welche der Ausdehnung des allgemeinen Jordanschen Satzes auf den Raum entgegenstehen, umgangen werden, ist wohl zweifellos. Indessen sind auch bei der gemachten Einschränkung die Schwierigkeiten beim Beweise des räumlichen Satzes keineswegs gering. Der vom Verf. gegebene Beweis läßt an Strenge nichts zu wünschen übrig, was durchaus nicht von allen Publikationen auf dem Gebiete der Punktmannigfaltigkeiten behauptet werden kann. Die Darstellung ist klar, der Gedankengang verhältnismäßig einfach; alles in allem kann die Arbeit als eine der erfreulichsten Erscheinungen auf ihrem Gebiete bezeichnet werden (vgl. das folgende Referat). Stz.

L. D. Ames. An arithmetic treatment of some problems in analysis situs. American J. **27**, 343-380.

Ausführung des in einem früheren Artikel (F. d. M. **35**, 505, 1904) skizzierten Beweisverfahrens für den Jordanschen Satz (Zerlegung der Ebene durch eine geschlossene Kurve) und seines dreidimensionalen Analogons. Verf. beschränkt sich auf solche Kurven und Flächen, die aus Stücken mit stetig sich ändernden Tangenten (Tangentialebenen) zusammengesetzt sind (vgl. das vorangehende Referat). D.

O. Veblen. Theory of plane curves in non-metrical analysis situs. American M. S. Trans. **6**, 83-98.

Verf. beweist den Jordanschen Satz über die Zerlegung einer Ebene durch eine geschlossene Kurve und anschließende Sätze in einer ebenen stetigen projektiven Geometrie rein geometrisch. Z. B. wird ein Grenzpunkt P einer Punktmenge $[X]$ dadurch definiert, daß jedes P umgebende Dreieck einen Punkt von $[X]$ enthält, usw. Die rein geometrische Definition einer Jordanschen Kurve ist natürlich die Hauptsache (§ 3 der Arbeit). Wir bemerken im besonderen die Postulate C_1' und C_2', die ausdrücken, daß, wenn ein Kurvenstück innerhalb und außerhalb eines Dreiecks Punkte besitzt, es zwei Punkte P_1 und P_2 auf der Kurve gibt von der Art, daß alle Punkte der Kurve zwischen P_1 und P_2 innerhalb des Dreiecks liegen. Es wird auch die Unabhängigkeit der die Kurve definierenden Postulate voneinander nachgewiesen (§ 4).

D.

G. C. Young. On the form of a certain Jordan curve. Quart. J. **37**, 87-91.

Vereinfachung und Verallgemeinerung der von Osgood und Lebesgue (F. d. M. **34**, 533, 1903) zuerst gegebenen Beispiele für Jordansche Kurven mit von Null verschiedenem Inhalte. D.

H. Tietze. Über das Problem der Nachbargebiete im Raum. Monatsh. für Math. **16**, 211-216.

Unter n Nachbargebieten im Raume versteht man n räumliche Gebiete, die jedes mit jedem anderen eine Begrenzungsfläche gemeinsam haben. Im Gegensatz zu den Resultaten, zu denen die entsprechende Fragestellung für zweidimensionale Gebiete führt, steht die bereits früher bekannte Tatsache, daß es im Raume unendlich viele Nachbargebiete gibt. Verf. beweist, daß dies auch dann der Fall ist, wenn man den Gebieten die Bedingung auferlegt, sämtlich konvex zu sein. D.

J. C. Wilson. On the traversing of geometrical figures. Oxford: Clarendon Press. X u. 154 S. (Nature 72, Suppl. Oct. 19, S. VI-VII).

Nach der Anzeige in „Nature“, welche der Redaktion allein zugänglich war, geht der Verf. von der folgenden Aufgabe aus. Auf der Wandtafel sei eine beliebige Figur von einem Umriß begrenzt. Bei ihrem Entstehen beschreibt die Kreide eine gewisse Anzahl geschlossener oder offener Wege; hierbei wird ein Weg bezeichnet als die von der Kreide hinterlassene Spur während der ganzen Zeit einer beliebigen ihrer Berührungen mit der Tafel. Allein die Anzahl der so beschriebenen Wege ist nicht notwendig die kleinste, durch welche die Figur erzeugt werden kann; die Aufgabe besteht nun darin, eine gegebene Figur in die kleinste Anzahl von Wegen zu zerlegen, von denen jeder einmal durchlaufen wird. Die ersten beiden Teile des Buches beschäftigen sich mit dieser und mit verwandten Fragen. Eines der Ergebnisse lautet: Ein Punkt heiße ungerade oder gerade, je nachdem eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Linien von ihm ausstrahlen. Eine Figur mit $2n$ ungeraden Punkten kann in n Wege zerlegt werden, aber nicht in weniger. Im dritten Teile wendet der Verf. das Prinzip der Dualität an; „dies ist der Teil des Buches mit den neuesten Ergebnissen.“ Unter Beschränkung auf geradlinige Figuren werden Segmente in Winkel verwandelt und somit metrische Elemente durch elementare Methoden eingeführt. Der absolute Kegelschnitt wird hierbei als die doppelt zu denkende Gerade im Unendlichen genommen. „Das unverkennbare Ziel seiner Gedanken ist, daß, wenn Punkt und Gerade durch Koordinaten definierbar sind, welche Segmente messen, dann „reziprok“ Gerade und Punkt durch Koordinaten bestimmbar sind, welche Winkel messen. Aber seine Winkelkoordinaten sind in Wirklichkeit nicht den Streckenkoordinaten reziprok; dies erhellt schon daraus, daß seine Gleichung der Ellipse trigonometrisch ist, nicht algebraisch. . . . Man darf nicht annehmen, daß Wilson einen wesentlich neuen Weg zur Konstruktion reziproker Figuren entdeckt hat.“ Nichtsdestoweniger wird das Buch als sehr interessant empfohlen.

Lp.

O. Lodge. Geometry of position. Nature 72, 629.

Durch die vorstehend angezeigte Besprechung des Wilsonschen Buches aufmerksam gemacht, verweist Lodge auf einen Artikel in Philos. Mag. 1875, in welchem er mehrere der angegebenen Sätze mitgeteilt habe.

Lp.

W. B. Carver. On the Cayley-Veronese class of configurations. American M. S. Trans. 6, 534-545.

Die Arbeit beschäftigt sich mit den schon vielfach untersuchten Konfigurationen, welche man erhält, wenn die vollständige, aus einer Anzahl von Punkten des R_n und ihren sämtlichen Verbindungs-Geraden,

-Ebenen etc. bestehende Figur durch einen linearen Raum geringerer Dimension geschnitten wird, ohne im einzelnen Resultate von größerem Interesse zu liefern. Stz.

G. Gallucci. A proposito delle configurazioni iperarmoniche (Un teorema sugli n^{goni} prospettivi). Napoli Rend. (3) **11**, 310-312. Stz.

M. Brückner. Über die diskontinuierlichen und nicht-konvexen gleicheckig-gleichflächigen Polyeder. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 707-713.

Wiener hat zuerst die regulären diskontinuierlichen Polyeder bestimmt. Das Problem der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder ist zuerst von Heß gestellt worden. Er hat die sämtlichen konvexen Polyeder dieser Art, aber auch noch einige nicht-konvexe angegeben, sowie später auch diskontinuierliche in Betracht gezogen. Der Verf. hat diese Untersuchungen mit Hülfe der von Heß angewandten Methoden vervollständigt und gibt eine kurze Übersicht über die erhaltenen Resultate. Die vollständige Untersuchung soll in den Abhandlungen der Kaiserl. Leopold. Carol. Akad. der Naturf. erscheinen. P.

Strenger. Über halbregelmäßige Vielflache. Progr. (Nr. 718) Oberrealsch. Schwäb. Hall 1905. 44 S.

F. Riesz. Über einen Satz der Analysis Situs. Math. és phys. lapok **14**, 13-24. (Ungarisch.)

Kapitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

William Barret Frankland. The first book of Euclid's Elements with a Commentary based principally upon that of Proclus Diadochus. Cambridge: at the University Press. XVI u. 139 S. 8°.

Erst nach der kritischen Textausgabe Heibergs ist es möglich geworden, eine richtige englische Übersetzung des ersten Buches der Elemente herzustellen. Dieses Buch enthält bekanntlich die Theorie der geradlinigen Figuren, besonders des Dreiecks und des Parallelogramms. Der Kommentar des Proklus, der dieser Erklärung zugrunde gelegt ist, mit mehreren Zusätzen und kritischen Bemerkungen, verdiente, wie der Herausgeber der Schrift bemerkt, von den Erklärern gründlicher

gekannt zu sein. Auch der Kommentar des Anaritius ist benutzt worden. Die Einleitung enthält eine kurze Übersicht über die Geschichte der Mathematik bis zu Euklids Zeiten. Ein sehr dankenswerter Namen- und Sachindex schließt das Buch. M.

E. Glinzer. Lehrbuch der Elementargeometrie. I. Teil: Planimetrie. 9. Auflage. Leipzig: H. A. L. Degener. 120 S. 8°.

Besonders hervorzuheben sind die hübschen Anwendungen mancher Sätze, z. B. auf Feldmeßkunde (S. 17, 74), Höhenbestimmung (S. 75), „Reibmaß" des Zimmerers (S. 65), Transversalmaßstab (S. 70), Storchschnabel (S. 78), Peaucelliers Geradführung (S. 85). So hätte auch auf S. 41 das dritte Gesetz durch die Briefwage illustriert werden können. Dem Verf. (Oberlehrer an der Gewerbe- und der Baugewerkschule in Hamburg) lag diese Bezugnahme auf die Praxis jedenfalls nahe; in Lehrbüchern für Gymnasien etc. findet man leider noch zu selten eine derartige Belebung des Stoffes.

Was die Fassung der Lehrsätze (hier „Gesetze" genannt) betrifft, so erscheint es dem Ref. nicht zweckmäßig, Definitionen im Text der Sätze zu geben (so S. 21, 16. Ges.; S. 43, 9. Ges.; S. 74, 1. Ähnl.-Satz). In der Lehre von den Parallelen, dieser Achillesferse vieler Elementarbücher, ist der Beweis des 2. Gesetzes (S. 23) nicht stichhaltig; dem euklidischen Parallelenpostulat wird im 6. Gesetz (S. 25) der bekannte „Beweis" hinzugefügt, dessen Fehler in der unzulässigen Verwendung der Ungleichungen zwischen unendlich großen Winkelräumen besteht (vgl. H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, Leipzig 1905, S. 6ff.)

Im übrigen scheint sich der Leitfaden, da er in 9. Auflage erschienen ist, im Unterricht gut bewährt zu haben. E. M.

G. Holzmüller. Die Planimetrie für das Gymnasium. I. Teil. Quarta bis Untersekunda. 2. Auflage. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 240 S. 8°.

Bei der neuen Auflage der Gymnasialausgabe des Lehrbuches der Elementarmathematik hat der Verf. es für zweckmäßig gehalten, die verschiedenen Gebiete in besonderen Bänden zu veröffentlichen. Der vorliegende erste Band der Planimetrie zerfällt in drei Hauptteile, welche die geometrische Lehraufgabe der Quarta, der Tertia und der Untersekunda umfassen. Der erste Hauptteil ist ein Auszug aus des Verf. „Vorbereitender Einführung in die Raumlehre". Auch dieser Auszug ist noch so umfangreich, daß in der kurz bemessenen Zeit des Unterrichts nur eine Auswahl aus demselben durchgenommen werden kann. In dem Lehrgange der beiden Tertien geht die Darstellung allmählich von der methodischen Behandlungsweise zur systematischen Anordnung über.

Hier und da wird bereits in das Gebiet der folgenden Klasse übergegriffen. Zahlreiche Anwendungen auf die Kartographie, die mathematische Geographie, Mechanik, Physik usw. sind zur Belebung des Unterrichts herangezogen. Zur Weckung des historischen Sinnes dienen biographische Bemerkungen und Zitate in griechischer Sprache. In einem besonderen Anhange sind die aus dem Griechischen stammenden Ausdrücke sprachlich erklärt worden. Zch.

G. MAHLER. Ebene Geometrie. 4. verb. Auflage. Leipzig: G. J. Göschen. 166 S. 110 Fig. (Samml. Göschen Nr. 41.)

Das vorliegende Werkchen zeigt neben vielen Vorzügen auch stellenweise recht störende Mängel, die es jedenfalls zum Schulbuche als nicht geeignet erscheinen lassen. Einige Figuren (21, 50, 60) sind mangelhaft ausgeführt. Wichtige Begriffe, wie „Gerade", „Strahl", „Gegenstrahl", „Höhe", „Transversale" werden nicht definiert. Einige sprachliche Härten, wie „aus der Verbindung dieser beiden Richtigkeiten entsprang der berühmte Satz", oder „er fand für $a = 2n^2 + 2n + 1$" (S. 87) fallen unangenehm auf. Die Erklärung: „Zwei Linien, die sich nicht schneiden, heißen parallel" (S. 21) läßt nicht erkennen, daß sie sich nur auf gerade Linien bezieht. Der Beweis in § 26, 4 setzt den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel voraus; dieser wird aber erst in § 27 ausgesprochen und bewiesen. Der Satz von den Peripheriewinkeln wird nur für die eine der drei möglichen Lagen bewiesen, die beiden anderen Fälle werden überhaupt nicht erwähnt. Als Vorzüge des Buches sind die gelegentlichen geschichtlichen Bemerkungen, sowie die eingehende Behandlung der geometrischen Aufgabe im dritten Abschnitt hervorzuheben. Zch.

G. MARLETTA. Principi di geometria euclidea. Periodico di Mat. (3) **2**, 257-273.

„In dieser Arbeit habe ich die Prinzipien der elementaren Geometrie mit der größten Schärfe auseinandergesetzt, die ich mit den didaktischen Anforderungen habe vereinigen können. Die Behandlung ist größtenteils mein Eigentum. Bei der Geraden habe ich Anregung erhalten in Peanos „Principî di geometria logicamente esposti" (F. d. M. **21**, 524, 1889). Außerdem bin ich Veronese (Elementi di geometria) in der Definition der Parallelen vor derjenigen der Ebene gefolgt und habe die Flächengleichheit der Figuren als eine gewisse zwei-eindeutige Verwandtschaft zwischen Figuren definiert. Im Unterschiede von Veronese habe ich die parallelen Geraden unabhängig von dem Begriffe gleicher Strecken definiert, wie auch die oben erwähnte Definition der Gleichheit etwas abgewandelt ist. — Diese meine Prinzipien sind so abgefaßt, daß sie unter passender Erläuterung an empirischen Beobachtungen den Schülern der höheren Mittelschulen in die Hände gegeben werden können. Nachher kann unter leichten Modifikationen mit jedwedem guten Lehrbuche

der elementaren Geometrie fortgefahren werden, insbesondere mit dem erwähnten Buche Veroneses." I. Die Gerade. II. Der Winkel. III. Parallele Geraden. IV. Die Ebene. V. Gleiche Strecken. VI. Gleiche Figuren. Lp.

H. Schubert. Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. I. Bd. Leipzig: G. J. Göschen. 239 S. 8°.

Der Verf. beabsichtigt mit dem Büchlein vor allem eine Vereinfachung und übersichtliche Gestaltung von Beweisen und Methoden auf dem Gebiete der Schulmathematik zu geben. Es bietet aber auch mehrfach Neues, sowie manches, was der Verf. aus früheren Publikationen in Erinnerung bringt. Es seien erwähnt: Die Summen der n-ten Potenzen der Zahlen, welche in der Kreisteilung durch Addition der konjugiert komplexen Wurzeln aus der Einheit entstehen, Darstellung des Volumens eines Obelisken aus der Höhe und zwei oder drei beliebig gelegten Parallelschnitten, eine elementare Ableitung enger Grenzen für die Schwingungszeit eines einfachen Pendels, ein Beweis des Eulerschen Satzes mit Hülfe der Konstantenzahl eines Polyeders, sowie Sätze über die 16 Kugeln, welche vier gegebene Kugeln berühren. Gt.

H. Schubert. Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. II. Bd. Leipzig: G. J. Göschensche Verlagshandlung. 218 S. 8°.

Dieser Band enthält drei Abschnitte: I. Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie. II. Kettenbrüche und Zahlentheorie. III. Vielstellige Berechnung der Logarithmen auf höherer Stufe (Prima), aber ohne logarithmische Reihen. Der erste Abschnitt, der auch in der Festschrift anläßlich des Kongresses deutscher Philologen und Schulmänner (Hamburg, 1905) erschienen ist, wird S. 543 näher besprochen. Der dritte Abschnitt nimmt den Gegenstand auf der Grundlage wieder auf, die in dem Büchlein „Elementare Berechnung der Logarithmen" (F. d. M. **34**, 472, 193) entwickelt sind. Die Methode, die dort unter dem Namen „Tripelverfahren" erörtert ist, wird jetzt derart verbessert, daß die zu findende obere und untere Grenze für den Logarithmus jeder Zahl sich um viel weniger als in jenem Büchlein unterscheidet.

Der zweite Abschnitt bringt nach ganz elementarem Verfahren in den einzelnen Paragraphen folgende Gegenstände zur Erledigung: 1. Einleitendes. 2. Die drei grundlegenden Formeln der Kettenbruchtheorie. 3. Lösungen der Kongruenzen ersten Grades durch Kettenbrüche. 4. Quadratische Reste und Nichtreste (Wilson, Euler, Fermat). 5. Symmetrische Kettenbrüche. 6. Ein Teiler einer Quadratsumme ist selbst Quadratsumme. 7. Periodische Kettenbrüche. 8. Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen als Kettenbrüche. 9. Die Pellsche Gleichung $t^2 - Du^2 = \pm 1$, wo D rational ist. 10. Die Auffindung aller

Lösungen der Pellschen Gleichung aus der kleinsten. 11. Die Verallgemeinerung der Pellschen Gleichung $t^2 - Du^2 = \pm c$. 12. Berechnung des Zahlenpaares, dessen Quadratsumme eine gegebene Primzahl ist. 13. Berechnung des Zahlenpaares, dessen Quadratsumme eine gegebene Primzahlpotenz ist. 14. Berechnung der Zahlenpaare, deren Quadratsummen gleich einer gegebenen zusammengesetzten Zahl sind.

Lp.

A. Otte. Sammlung planimetrischer Aufgaben, besonders solcher mit algebraischer Analysis. II. Teil. Eingeschriebene und umgeschriebene ebene Figuren. Progr. Realgymn. u. Realsch. Itzehoe. XII u. 62. S.

Nachdem der Verf. bereits 1901 „Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck in algebraischer Behandlung" herausgegeben hat (Progr. Delitzsch), veröffentlicht er nunmehr eine Sammlung von Aufgaben über eingeschriebene und umgeschriebene ebene Figuren. Die Sammlung enthält ein reiches Material von Aufgaben für alle Stufen des geometrischen Unterrichts von Quarta bis Prima. Besonderer Wert ist auf die Zusammenstellung solcher Aufgaben gelegt worden, die mit algebraischer Analysis zu lösen sind. Bei jeder einzelnen Aufgabe ist durch eine Ziffer angegeben, in welcher Klasse sie behandelt werden kann. Die Sammlung zerfällt in sechs Kapitel: I. Das Dreieck in Verbindung mit anderen Dreiecken. II. Das Viereck in Verbindung mit Dreiecken und anderen Vierecken. III. Der Kreis in Verbindung mit geradlinigen Figuren. IV. Der Halbkreis in Verbindung mit anderen Figuren. V. Der Kreissektor in Verbindung mit anderen Figuren. VI. Das Kreissegment in Verbindung mit anderen Figuren. Die Hoffnung des Verf. dürfte nicht unberechtigt sein, daß gerade diese Aufgaben dazu beitragen können, dem Schüler möglichst früh Algebra und Geometrie als zwei zusammenhängende und einander befruchtende Zweige eines und desselben Stammes erscheinen zu lassen.

Zch.

M. Bauer. Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen. Ungar. Ber. **20**, 43-47.

Kürschák hat (Math. Ann. **55**, 597; F. d. M. **33**, 488. 1902) gezeigt, daß jede ebene Konstruktion, die unter ausschließlicher Benutzung der Hilbertschen Axiomengruppen lösbar ist, mit dem Lineal und einem beliebigen Eichmaß ausgeführt werden kann. Der Verf. beweist, daß das Eichmaß nicht durch eine unbeweglich gegebene Strecke oder ein unbeweglich gegebenes Vieleck ersetzt werden kann, daß also wohl die Länge, nicht aber die Beweglichkeit des Eichmaßes unwesentlich ist. Der Beweis stützt sich auf den Satz, daß jeder orthoide Bereich, der in einem Rationalitätsbereich enthalten ist, wieder einen Rationalitätsbereich bildet.

Zch.

H. BECKER. Lorenzo Mascheronis Zirkelgeometrie im Dienste des mathematischen Unterrichts. Progr. (Nr. 5) Gymn. Insterburg 1905, 15 S.

Aus den einzelnen Kapiteln des Mascheronischen Werkes sind diejenigen Aufgaben zusammengestellt, die nach der Meinung des Verf. zur Belebung des mathematischen Unterrichts auf der Oberstufe mit Nutzen verwendet werden können. Der Verf. verspricht sich von der Darbietung dieses Materials eine Anregung des geschichtlichen Interesses. Gleichzeitig sollen diese Aufgaben den Schülern Gelegenheit zur selbständigen Beweisführung geben. Dementsprechend sind den meisten Aufgaben nur kurze Andeutungen des Beweises beigegeben. Zch.

G. WALLENBERG. Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß, sowie mit dem Lineal allein. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 4, 21-22.

Der Verf. behandelt zuerst im Anschluß an Adler, Hilbert und Simon die Lösung der Konstruktionsaufgaben zweiten Grades mit dem Lineal und Eichmaß sowie mit dem Parallellineal allein. Ausgeführt wird das Ziehen einer Parallele durch einen Punkt, das Streckenabtragen und das Halbieren eines Winkels bei nicht gegebenem Scheitel. Es folgt dann noch eine Bemerkung über den Beweis des Satzes, daß die Winkelsumme in einem aus drei durch einen Punkt gehenden Kreisen gebildeten Dreieck zwei Rechte beträgt. Zu diesem Beweise ist nur das Axiom „Zwei Halbkreise desselben Kreises sind kongruent“ und der Satz von den Scheitelwinkeln erforderlich. Zch.

R. GÜNTSCHE. Beiträge zur Geometrographie III. Arch. der Math. u. Phys. (3) 9, 253-266.

Den in diesem dritten Abschnitte der Beiträge behandelten Aufgaben liegt die geometrische Teilung einer Strecke in zwei Abschnitte zugrunde, deren Produkt gleich dem Produkt zweier gegebenen Strecken ist. Die aus den Potenzeigenschaften des Kreises folgende Lösung wird zunächst zur stetigen Teilung einer Strecke und damit zur Fünf- und Zehnteilung des Kreises benutzt. Die beiden geometrischen Lösungen dieser Aufgaben lassen sich allgemein auf die Kreisteilung nach den übrigen Gaußschen Primzahlen übertragen. Aus der an die Spitze gestellten Aufgabe ergeben sich sodann neue geometrographische Konstruktionen der vierten Proportionale, der in bezug auf einen Kreis inversen Punkte zu n gegebenen Punkten, der Polaren dieser Punkte in bezug auf den Kreis und des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen Punkten. Auf diese Aufgabe wird ferner die geometrographische Konstruktion der Doppelpunkte zweier ineinanderliegenden projektivischen geraden Punktreihen zurückgeführt, von denen die Fluchtpunkte und ein Paar homologer Punkte gegeben sind. Darauf folgt eine Modifikation eines von Moreau

angegebenen geometrographischen Verfahrens zur Lösung einer Aufgabe der analytischen Geometrie und endlich eine einfache Konstruktion der Potenzlinie zweier sich nicht schneidenden Kreise und eine darauf zurückzuführende Streckenteilungsaufgabe. Zch.

G. HOLZMÜLLER. Bemerkungen über Geometrographie. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 79-82.

Die Gedanken des Verf. über die richtige Einschätzung der Geometrographie sind schon öfter geäußert worden und haben an sich ihre volle Berechtigung. Lp.

F. MANCINELLI. Il concetto di angolo in „goniometria". Periodico di Mat. (3) **2**, 251-256.

Nachdem zuerst die üblichen Definitionen des Winkels zweier Geraden besprochen sind, schlägt der Verf. vor, diesen Begriff mit Hülfe der Schraubenfläche zu veranschaulichen. Fällt man von zwei Punkten einer Schraubenlinie F und G die Lote f und g auf die Achse, so wird die Gesamtheit aller zwischen diesen Loten liegenden Erzeugenden der Schraubenfläche der Schraubenwinkel mit den Schenkeln f und g genannt. Die Größe eines Schraubenwinkels und die des zugehörigen Bogens der Schraubenlinie sind direkt proportional. Ebenen, die im Abstande der Ganghöhe der Schraube senkrecht zur Achse gelegt sind, teilen die Schraubenlinie in Stücke, die einem Umlaufe entsprechen, usw. Lp.

A. BORRIERO. Sulla congruenza e simmetria delle figure. Periodico di Mat. (3) **2**, 274-281.

„In den „Elementen der Geometrie" von G. Veronese befindet sich eine kurze Note über die kongruenten und symmetrischen Figuren. Wie nun aber ein solcher Gegenstand nicht einen Teil des Programmes für unsere Mittelschulen bildet, so ist er gewöhnlich auch nicht in den Lehrbüchern behandelt. Indem ich den Lesern des Periodico diese kurze Studie vorlege, hoffe ich nicht etwas zu tun, was jedes Interesses bar ist. Bei der Zusammenstellung bin ich genau von den Definitionen ausgegangen, die sich in der erwähnten Note vorfinden, und habe ich mir auch teilweise dasjenige zunutze gemacht, was derselbe Autor über den nämlichen Gegenstand in seinen „Fondamenti di geometria" auseinandersetzt." § 1. Symmetrische Figuren in bezug auf einen Punkt. § 2. Kongruente und symmetrische Strecken auf der Geraden. § 3. Symmetrische Figuren in bezug auf eine Gerade. § 4. Kongruente und symmetrische Figuren auf der Ebene. § 5. Symmetrische Figuren in bezug auf eine Ebene. § 6. Kongruente und symmetrische Figuren im Raume. Lp.

A. Kneser. Über die Begründung der Ähnlichkeitslehre in der Elementargeometrie. S. Abdr. aus Jahresber. d. Schles. Gesellsch. für vaterl. Kultur 1905.

Die Ähnlichkeitslehre wird unabhängig vom Begriff der Zahl, des Maßes, des Inkommensurabeln rein geometrisch aufgebaut. Aus den Grundeigenschaften der Proportionen wird ferner rein geometrisch eine Streckenrechnung abgeleitet, die denselben formalen Regeln wie die Zahlenrechnung unterworfen ist. Der Inhalt des Vortrages stimmt im wesentlichen mit der Arbeit des Verf. im 1. Bande der Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft (F. d. M. **33**, 183, 1902) überein. Zch.

H. M. Taylor. On some geometrical dissections. Messenger (2) **35**, 81-101.

In diesem Aufsatze wird an einer Reihe von einfachen geometrischen Figuren gezeigt, wie man eine gegebene Figur zu zerschneiden hat, um aus den Stücken eine andere Figur von vorgeschriebener Form zusammenzusetzen. Es sind also immer zwei Figuren nebeneinander gestellt, die eine stellt die gegebene Fläche dar mit den an ihr zu vollziehenden Schnitten, die andere die Fläche, in welche die gegebene zu verwandeln ist. Folgende Aufgaben sind auf diese Weise gelöst: 1. Verwandlung eines Parallelogramms in ein anderes von gleicher Grundlinie und Höhe. 2. Verwandlung eines Parallelogramms in ein gleichwinkliges. 3. Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes mit zwei gleichen Seiten. 4. Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes mit einer gleichen Seite und einer anderen von vorgeschriebener Länge. 5. Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes von vorgeschriebener Form. 6. Verwandlung eines Parallelogramms in ein anderes von gegebener Form. 7. Verwandlung eines Rechtecks in ein anderes von gegebener Form. 8. Verwandlung eines Dreiecks in ein Parallelogramm. 9. Verwandlung eines Dreiecks in ein Parallelogramm mit derselben Basis und gegebenen Winkeln. 10. Verwandlung eines Dreiecks in ein Viereck. 11. Verwandlung eines Dreiecks in ein Parallelogramm von gegebener Form. 12. Verwandlung eines Parallelogramms in ein Dreieck. 13. Verwandlung eines Parallelogramms in ein Dreieck von gegebener Form. 14. Verwandlung eines Trapezes in ein Dreieck von gegebener Form. 15. Verwandlung eines Vierecks in ein Dreieck, dessen Basis einer Diagonale des Vierecks gleich ist. 16. Verwandlung eines Vierecks in ein Viereck, dessen Seiten und Winkel zweien Bedingungen genügen.

Lp.

H. M. Taylor. On a paper-folding puzzle. Messenger (2) **34**, 142-143.

Vorschriften über die Art, ein Blatt Papier so zu falten, daß die Seiten eines darin gezeichneten Quadrates und eines regelmäßigen Sechsecks zuletzt in eine einzige Linie zusammenfallen. Lp.

J. H. Keppler. Ein oftmals wiederholter Trugschluß. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 333.

Gegen die Beweise des Satzes gerichtet, daß die Gerade der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist. Lp.

K. Hagge. Zum goldenen Schnitt. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 498-503.

Verschiedene Aufgaben, die mit dem goldenen Schnitt zusammenhängen. Lp.

C. Ciamberlini. Su alcune semplici proprietà del triangolo. Suppl. al Period. 8, 54-55.

Wenn von der Ecke A eines Dreiecks ABC eine Transversale AH des Dreiecks und eine Sehne AD seines Umkreises ausgehen, die in bezug auf den Winkel A isogonal sind, so ist $AB\cdot AC = AH\cdot AD$. Spezialfälle. Lp.

A. Tonali. Alcune relazioni fra gli elementi del triangolo rettangolo. Suppl. al Period. 8, 129-133.

Eine große Zahl von Relationen zwischen verschiedenen Bestimmungsstücken eines rechtwinkligen Dreiecks, unter besonderer Berücksichtigung des Inkreises und der Ankreise, nebst einigen bezüglichen Konstruktionsaufgaben. Lp.

R. Vercellin. Risoluzione della 57ª quistione a concorso. Suppl. al Period. 8, 70-78.

Die von G. de Longchamps gestellte Aufgabe lautet: Unter den merkwürdigen Dreiecken ist dasjenige beachtenswert, bei dem eine Höhe die Gegenseite nach dem goldenen Schnitte teilt. Die diesem Dreiecke eigentümlichen besonderen Eigenschaften sind zu erforschen. — Die Lösung enthält unter 15 Nummern eine Menge von Sätzen und gibt zum Schlusse die Lösungen von sechs auf das „goldene Dreieck" bezüglichen Konstruktionsaufgaben. Lp.

R. Vercellin. Risoluzione della 58ª quistione a concorso. Suppl. al Period. 8, 87-93.

Die von G. Pesci gestellte Aufgabe verlangt die Erforschung der Eigenschaften des bizentrischen Vierecks, besonders auch den Beweis des Satzes, daß die beiden Mittelpunkte des In- und des Umkreises mit dem Diagonalenschnitt in einer Geraden liegen. — Auch diese Lösung des jungen Italieners zeichnet sich durch die Menge der ermittelten Relationen aus. Lp.

E. Eckhardt. Über die Dreiecke, in denen $a^4 = b^4 + c^4$. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 84-88.

Mit Hülfe der in einer früheren Note bewerkstelligten Darstellung von $a^4 = b^4 + c^4$ (F. d. M. **35**, 527, 1904) werden Dreiecke konstruiert, bei denen die Seiten a, b, c dieser Beziehung genügen, und andere Eigenschaften solcher Dreiecke hergeleitet. Lp.

J. Neuberg. Propositions sur les quatrièmes puissances des côtés d'un triangle. Mathesis (3) **5**, 259-262.

Vgl. die Artikel von Eckhardt im Vorjahre. Lp.

J. Langr. Über eine Dreiecksaufgabe. Časopis. **34**, 65-72. (Böhmisch.)

Es sollen auf den Seiten des gegebenen Dreiecks als Grundlinien drei einander ähnliche Dreiecke derart konstruiert werden, daß ihre den Seiten des gegebenen Dreiecks gegenüberliegenden Scheitelpunkte ein gleichseitiges Dreięck bilden. Die drei durch die Aufgabe geforderten Dreiecke sind gleichschenklig mit dem Winkel 120° (oder auch 240°). Pe.

E. Marx. Über winkelhalbierende Linien des Dreiecks. Progr. (Nr. 800) Gymn. Friedland. 17 S.

Nach der Berechnung der Längen der Halbierungslinien der Innen- und Außenwinkel werden die vier Fälle behandelt, daß 1. die Halbierungslinien zweier Innenwinkel gleich groß sind, 2. die Halbierungslinie eines Innenwinkels gleich der des zugehörigen Außenwinkels ist, 3. die Halbierungslinien zweier Außenwinkel gleich groß sind und 4. die Halbierungslinie eines Innenwinkels gleich der eines nicht zugehörigen Außenwinkels ist. Algebraisch ergibt sich, daß im ersten Falle das Dreieck gleichschenklig ist, im zweiten Falle die Differenz der beiden Winkel an der Grundlinie 90° beträgt. Im dritten Falle ist das Dreieck entweder gleichschenklig oder es hat die Eigenschaft, daß die von den Ecken aus gerechneten Abschnitte der Halbierungslinien der drei Innenwinkel stetig geometrisch sind. Im vierten Falle wird die durch Rechnung ermittelte Bedingung nicht weiter geometrisch diskutiert. Es hätte darauf hingewiesen werden können, daß die geometrische Deutung zu einem analogen Resultate wie im dritten Falle führt. Schließlich wird noch gezeigt, daß der dritte und vierte Fall sich miteinander vereinigen lassen. Zch.

D. Biddle. Question 15542. Ed. Times (2) **7**, 33-34.

Von einem Dreiecke ist der Umkreisradius R und der Abstand d des Schwerpunktes vom Umkreismittelpunkt gegeben. Die Grenzen für

den Inhalt des Dreiecks zu finden; ein Dreieck von gegebenem Inhalt aus R und d zu konstruieren. Ist $AH = 2x$ der Abstand der Ecke A vom Höhenschnitte H, so gibt $4x^2 = R^2 + 3dR$ das Maximum, $4x^2 = R^2 - 3dR$ das Minimum des Dreiecks:

$$\text{Max. } \Delta = \frac{3}{4}\left\{3(R-3d)(R+d)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{Min. } \Delta = \frac{3}{4}\left\{3(R+3d)(R-d)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Lp.

C. Ciamberlini. Corrispondenza tra il teorema di Legendre e quello di Stewart. Suppl. al Period. **9**, 1-2.

Durch die Methode der inversen Transformation kann man das Theorem von Legendre über ein Sehnenviereck in das Theorem von Stewart überführen; ebenso den Lehrsatz des Ptolemaeus in die Relation zwischen den Abständen dreier Punkte in einer Geraden.

Lp.

Y. Mikami. A Chinese theorem on geometry. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 308-310.

Der hier erst für das Viereck und dann durch Induktion vollständig bewiesene Satz besagt: Teilt man ein einem Kreise einbeschriebenes Polygon durch die von einem Eckpunkt ausgehenden Diagonalen in Dreiecke, so ist die Summe der Radien der diesen Dreiecken einbeschriebenen Kreise unabhängig von der speziellen Wahl der bevorzugten Ecke. Lwt.

M. Zacharias. Vierecke mit rechtwinkligen Diagonalen. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **4**, 39-42.

Die vorgetragenen Sätze sind nicht neu, sondern, wie der Verf. in einer späteren Bemerkung (Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **6**, 24) mitteilt, bereits 1890 und 1895 im Aufgaben-Repertorium der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. (**21**, 110 und **26**, 427) veröffentlicht. Zch.

Ch. Beyel. Eine Aufgabe über ein besonderes Viereck. Monatsh. f. Math. **16**, 45-48.

Von einem Viereck mit rechtwinkligen Diagonalen sollen eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sein. Die Gegenseite soll die Diagonalen unter gleichen Winkeln schneiden. Die Bestimmung der möglichen Lagen dieser Seite wird auf die Aufgabe zurückgeführt, von einem Kegelschnitt und einem Kreise, die sich in einem gegebenen

Punkte schneiden, die drei übrigen Schnittpunkte zu konstruieren. Jeder Schnittpunkt liefert zwei Vierecke, welche die gestellte Aufgabe lösen. Trigonometrisch ergibt sich für die Tangente des Winkels, den eine Diagonale mit der gegebenen Seite bildet, eine kubische Gleichung.

Zch.

G. HOLZMÜLLER. Vorschlag zum kinematischen Modell eines besonderen Gelenkvierecks. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 13-14.

G. HOLZMÜLLER. Über das bizentrische Viereck. Ergänzung zu dem Artikel über das Gelenkviereck. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 33-34.

Nach Entwicklung einiger Sätze über das Tangentenviereck eines Kreises wird ein solches Viereck als Gelenkviereck behandelt. In dem zweiten Aufsatze wird nach einer brieflichen Mitteilung von Burmester berichtet, daß der vorgeschlagene Mechanismus zu der Klasse der Brennpunktsmechanismen gehört, die Burmester in größerer Allgemeinheit behandelt hat (F. d. M. **25**, 1342, 1893), und daß Darboux den betrachteten Sonderfall schon 1879 bekannt gemacht hat (F. d. M. **11**, 396). Um zur Beschäftigung mit dem „bizentrischen" Viereck anzuregen, gibt Holzmüller dann noch die Lösung mehrerer Aufgaben über dasselbe.

Lp.

H. SCHUBERT. Die Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie. Festschrift des Kongr. deutscher Philol. und Schulmänner. Hamburg 1905. Leipzig: Spamersche Bchdr. 57 S. 8°.

Es wird von der bekannten Eigenschaft der Winkel des heronischen Dreiecks ausgegangen, daß ihre trigonometrischen Funktionen rational sind, und daß durch Addition solcher Winkel ein Winkel derselben Art entsteht; hieraus werden heronische Dreiecke, heronische Dreiecke mit rationalen Winkelhalbierenden, heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie, ferner Sehnenvierecke und Sehnenpolygone mit ganzzahligen Seiten, ganzzahligen Diagonalen und ganzzahligem Inhalt abgeleitet. Ein zweiter Teil beschäftigt sich mit Dreiecken, in welchen außer den Seiten zwei oder drei Mittellinien rational sind. Zum Schluß werden Pyramiden mit rationalen Kanten und rationalem Volumen aufgestellt. Über Literatur und Kritik vergleiche man des Ref. Besprechung Arch. der Math. u. Phys. (3) **10**, 86, 1906.

Gt.

R. HORNY. Die Fläche und der Kreisradius des Tangentenvierecks. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 22.

Ist φ der Diagonalenwinkel, der jeder der beiden Gegenseiten a, c gegenüberliegt, so ist

$$F = \frac{1}{2}(ac - bd)\,\mathrm{tg}\,\varphi,\ \varrho = \frac{ac - bd}{a + b + c + d}\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Lp.

R. TUCKER. Question 15115. Ed. Times (2) 7, 25-26.

$ABCD$ ist ein Sehnenviereck. $(O_a, r_a), (O_b, r_b), (O_c, r_c), (O_d, r_d)$ sind die Inkreismittelpunkte und Inkreisradien der Dreiecke BCD, CDA, DAB, ABC. $O_a\, O_b\, O_c\, O_d$ ist ein Rechteck,

$$r_a + r_c = r_b + r_d, \sum (OO_a)^2 = 4R^2 - 4R(r_a + r_c).$$

Bewiesen von J. H. Taylor und J. Blaikie. Lp.

J. KÜRSCHÁK. Anwendung der komplexen Zahlen zum Beweise eines elementargeometrischen Satzes. Arch. der Math. u. Phys. (3) 8, 285-286.

Den komplexen Zahlen u_1, u_2, v_1, v_2 mögen in der Gaußschen Ebene die Punkte U_1, U_2, V_1, V_2 entsprechen. Aus der Tatsache, daß $\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}$ dann und nur dann einen reellen Wert hat, wenn $U_1 U_2 \,//\, V_1 V_2$ ist, wird in eleganter Weise der bekannte Satz gefolgert: Sind in den Vierecken $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ und $B_1\, B_2\, B_3\, B_4$

$$A_1\, A_4, A_2\, A_4, A_3\, A_4, A_2\, A_3, A_3\, A_1$$

parallel zu

$$B_2\, B_3, B_3\, B_1, B_1\, B_2, B_1\, B_4, B_2\, B_4,$$

so ist auch $A_1\, A_2 \,//\, B_3\, B_4$, von welchem der für die neueren axiomatischen Untersuchungen so wichtige „Pascalsche Satz“ ein besonderer Fall ist (vgl. G. Hessenberg. Math. Ann. **61**, 163; Referat in Abschnitt VIII, Kap. 5A). E. M.

M. ZACHARIAS. Über einen Lehrsatz vom Sechseck. Math. naturw. Bl. **2**, 86.

C. MÜSEBECK. Zu „Über einen Lehrsatz vom Sechseck“. Math. naturw. Bl. **2**, 125.

Errichtet man über den Seiten eines Sechsecks nach außen regelmäßige Sechsecke, und verbindet man der Reihe nach ihre Mitten, so sind die Mitten dieser Verbindungslinien die Ecken eines Sechsecks, dessen Hauptdiagonalen gleich lang sind und sich unter Winkeln von 60° schneiden. Müsebeck weist frühere Literatur nach. Sk.

W. JANISCH. Zur Lehre von der Proportionalität am Kreise. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 342-348.

Der Aufsatz soll zeigen, wie die Sätze über die Lehre von der Proportionalität am Kreise bei Gelegenheit von Repetitionen in Zusammenhang gebracht werden können, und wie sich dadurch manche Aufgaben schnell lösen lassen. Lp.

K. Hagge. Der Satz des Ptolemäus. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 340-342.

Drei einfache geometrische Beweise. Lp.

W. Killing. Eine elementare Behandlung der Polarentheorie für den Kreis. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 81-83.

Gehen von einem Punkte O zwei Strecken OA und OB aus, und fällt man von A auf OB das Lot AA_1, von B auf OA das Lot BB_1, so gilt: $OA \cdot OB_1 = OA_1 \cdot OB$. Das Produkt aus der einen Strecke in die Projektion der anderen auf sie heißt nach Graßmann das innere Produkt beider Strecken. „Zwei Punkte heißen konjugierte Pole in bezug auf einen Kreis, wenn das innere Produkt ihrer Verbindungsstrecken mit dem Mittelpunkte gleich dem (positiven) Quadrate des Radius ist.“ Also: „Wenn B konjugierter Pol zu A in bezug auf einen Kreis ist, so ist auch A konjugierter Pol zu B.“ — Aus diesen an die Spitze gestellten Sätzen folgen leicht die polaren Eigenschaften des Kreises. Die obige Definition der konjugierten Pole ist von Weierstraß im mathematischen Seminar der Berliner Universität (Winterhalbjahr 1868/9) mitgeteilt worden; die von Killing gegebene Ausführung benutzt die von Weierstraß gemachten Andeutungen, nach denen diese Einführung die einfachste und natürlichste ist. Lp.

E. Grigorieff. Über eine bekannte Konstruktionsaufgabe. Spaczinskis Bote, Nr. 403, 162. (Russisch.)

Einfache Konstruktion des Kreises, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt. Si.

Alex. Holm. Determination of the radii of the circles which touch three given circles. Edinb. M. S. Proc. **23**, 75-79.

Die Gleichungen für die Radien der Berührungskreise werden abgeleitet. Die algebraische Rechnung ist sinnreich, aber etwas schwer. Gbs. (Lp.)

K. Petr. Über einen Satz für ebene Vielecke. Časopis. **34**, 166-172. (Böhmisch.)

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ verschiedene Winkel, welche ohne Rücksicht auf die Reihenfolge den Winkeln $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$ gleich sind, und $ABC \ldots L$ ein beliebiges n-Eck. Über den Seiten dieses Vielecks als Grundlinien konstruiere man gleichschenklige Dreiecke mit

dem Winkel a_1 am Scheitelpunkte. Die Scheitelpunkte dieser Dreiecke bilden ein neues n-Eck $A_1 B_1 C_1 \dots L_1$. Über den Seiten dieses n-Ecks konstruiere man wieder gleichschenklige Dreiecke mit dem Winkel a_2 am Scheitelpunkte; man erhält so das Vieleck $A_2 B_2 C_2 \dots L_2$. Wenn man so fortfährt und zu den Konstruktionen alle Winkel $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ nacheinander benutzt, so erhält man im ganzen $n - 1$ neue Vielecke. Das letzte Vieleck $A_{n-1} B_{n-1} \dots L_{n-1}$ reduziert sich auf einen Punkt (Schwerpunkt der Punkte $A, B, C, \dots, L$), und das vorletzte $A_{n-2} B_{n-2} \dots L_{n-2}$ ist regulär. Pe.

A. Kempe. Ein Gelenkmechanismus zur Teilung des Winkels. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 492-496.

Der Mechanismus besteht aus einer Reihe von mit einander auf besondere Art verketteten Rauten, die es zunächst ermöglichen, nach elementaren Sätzen jeden Winkel in $2^n + 1$ oder $2^n - 1$ Teile zu teilen. Da für jede Primzahl p nach dem Fermatschen Satze $2^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ ist, so kann mit Hülfe des Mechanismus eine Teilung in p und somit in beliebig viele Teile erfolgen. P.

A. Turtschaninof. Mechanische Winkelteilung. Spaczinskis Bote Nr. 398, 39-41. (Russisch.)

Der Verf. schlägt verschiedene einfache Gelenkapparate aus kombinierten Linealen zur Dreiteilung, Fünfteilung usw. vor. Si.

Bertling. Winkelteilung durch stereometrische Konstruktion. Magdeb. Ztg. 1905, Nr. 18; Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 60 u. 84.

Der zu teilende Winkel wird auf die Stirnseite eines geraden Zylinders als Zentriwinkel eingetragen. der Bogen durch Rollen auf einer Ebene abgewickelt; der abgewickelte Bogen wird in n Teile geteilt und die Teilung beim Rückwärtsrollen auf den Bogen wieder eingetragen.

Lp.

Kreuschmer. Zwei neue mathematische Meßinstrumente: I. Der Universal-Winkelmeßapparat und II. der neue Transporteur für Winkel und Winkelfunktionen. Progr. (Nr. 586) Realsch. Barmen, 17 S.

Mit dem Universal-Winkelmeßapparat lassen sich alle Winkelmessungen der niederen Geodäsie ausführen mit einer Genauigkeit, die für den propädeutischen Unterricht in Trigonometrie ausreicht. Bezugsquelle: Dörffel & Faerber, Berlin. Preis des Apparates mit Stativ: 103 M., der Nebenapparate ca. 40 M.

Der neue Transporteur ist außer der Kreisteilung mit vier Maßstäben ausgerüstet und gestattet bei jeder Stellung der Alhidade die angenäherten Werte der Kreisfunktionen abzulesen. Lwt.

Th. Harmuth. Näherungsweise Konstruktion des Winkels von 1°. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 14-15.

I. $\frac{2}{3} \operatorname{tg} 1\frac{1}{2}^\circ = \operatorname{tg} 1^\circ 0' 0'', 46.$

II. $\frac{180^\circ}{192} = 56' 15'', \frac{16}{15} \operatorname{tg} 56' 15'' = \operatorname{tg} 0^\circ 59' 59'', 955.$

III. $\frac{24}{25} \operatorname{tg} 56' 15'' = \operatorname{tg} 0^\circ 54' 0'', 0224; 54' = \frac{1}{100} \cdot 90^\circ.$

Praktischer Wert ist diesen Methoden, die offenbar leicht vermehrt werden können, nicht beizumessen. — Pietzker teilt im Anschluß daran ein anderes Verfahren zur angenäherten Konstruktion des Winkels von 25° mit; hieraus folgt 1° als 25°—24°. Lp.

James N. Miller. A method of dividing the circumference of a circle into 360 equal parts. Edinb. M. S. Proc. **23**, 58-60.

Die Gradeinteilung des Kreisumfanges wird mit Hülfe eines Instrumentes, genannt Trisektor, bewerkstelligt (F. d. M. **33**, 555, 1902). Das Instrument kann auch dazu benutzt werden, einen Winkel in fünf gleiche Teile zu teilen. Das Verfahren ist das folgende: 1. Man suche den Winkel 120°, 2. teile 120° in fünf gleiche Winkel von 24°, 3. teile 24° in drei gleiche Winkel von 8°. 4. durch wiederholte Hälftung finde man die Winkel 4°, 2°, 1°. Gbs. (Lp.)

G. Lony. Über die Formel $s_5^2 = s_{10}^2 + r^2$. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 406-407.

Zwei Beweise, auch gültig für regelmäßige Sternfünfecke und Sternzehnecke. Lp.

B. Kaznelson. Angenäherte Konstruktion der Seite des regulären eingeschriebenen Fünfzehnecks. Spaczinskis Bote Nr. 385, S. 20. (Russisch.)

Die Seite des regelmäßigen eingeschriebenen Fünfzehnecks ist $a_{15} = 0 \cdot 4158\, R$. Die Differenz $a_4 - a_6$ ist aber gleich

$$a_4 - a_6 = R\left(\sqrt{2} - 1\right) = 0.4142\, R;$$

für praktische Zwecke ist also zu setzen $a_{15} = a_4 - a_6$. Si.

A. DMITROVSKY. **Über die Änderung des Perimeters der ein- und umgeschriebenen Vielecke bei Vergrößerung der Seitenanzahl um 1.** Spaczinskis Bote Nr. 385, 13-15. (Russisch.)

Einfacher geometrischer Beweis, daß bei der Vermehrung der Seitenzahl um 1 der Umfang des eingeschriebenen Vielecks wächst, der des umgeschriebenen dagegen abnimmt. Si.

G. KOBER. **Zur Konstruktion der regelmäßigen Vielecke dritter Ordnung.** Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 193-194.

Die Konstruktion der regelmäßigen Vielecke dritter Ordnung wird einfacher und natürlicher durch die Bemerkung, daß der Einheitskreis in den Scheitelprojektionen der drei Punkte, von denen in den Fällen $m = 3, 6$ die Eckenpaare des regelmäßigen $(2m+1)$-Ecks linear abhängen, von einer das Projektionszentrum $(0,1)$ und den unendlich fernen Punkt $(\infty,0)$ enthaltenden Hyperbel geschnitten werden. Zch.

P. WIERNSBERGER. **Sur les polygones réguliers et les radicaux carrés superposés.** J. für Math. **130**, 144-152.

Unter „regulären Polygonen" sind hier nicht nur die gewöhnlichen, sondern die allgemeineren Sternpolygone Poinsots (J. de l'Éc. Pol. (1) **10**, 16, 1810) verstanden. Ist eine Kreislinie in n gleiche Teile geteilt, und sind die Teilpunkte der Reihenfolge nach $P_1, P_2, \ldots$, so sei die Länge der Seite des regulären Polygons $P_1 P_{a+1} P_{2a+1} \ldots$ mit $C_{n,a}$ bezeichnet. Alsdann gelten die Formeln:

$$(A) \text{ für } n \equiv 1 \pmod{2}: \quad C^2_{n,a} = 2 \pm C_{2n, \pm(4a-n)},$$

$$(B) \;\; „ \;\; n \equiv 2 \pmod{4}: \quad C^2_{n,a} = 2 \pm C_{n, \pm\left(2a-\frac{n}{2}\right)},$$

$$(C) \;\; „ \;\; n \equiv 4 \pmod{8}: \quad C^2_{n,a} = 2 \pm C_{\frac{n}{4}, \pm\frac{1}{2}\left(a-\frac{n}{4}\right)},$$

$$(D) \;\; „ \;\; n \equiv 0 \pmod{8}: \quad C^2_{n,a} = 2 \pm C_{\frac{n}{2}, \pm\left(a-\frac{n}{4}\right)},$$

wo das positive oder das negative Zeichen gilt, je nachdem $\frac{a}{n} > \frac{1}{4}$ oder $\frac{a}{n} < \frac{1}{4}$ ist.

Mit Hülfe von (D) kann man die Seite eines jeden regulären Polygons, dessen Umkreisradius gleich 1 ist, durch einen endlichen Ausdruck darstellen, der aus superponierten Quadratwurzeln aus 2 gebildet ist, falls die Seitenzahl eine Potenz von 2 ist; ist aber die Seitenzahl

nicht eine Potenz von 2, so ergeben die drei übrigen Formeln in jedem Falle analog gebildete konvergierende unendliche Ausdrücke, in denen die Vorzeichen der Zahlen 2 von einer bestimmten Stelle ab periodische Folgen bilden. Verf. ermittelt die Grenzwerte vieler so gebildeten unendlichen Ausdrücke und gelangt zu neuen Ausdrücken dieser Art für π, $\sin\frac{\pi}{2}x$, $\cos\frac{\pi}{2}x$, $\sin\pi x$ und $\cos\pi x$ (vgl. F. d. M. **35**, 521, 1904).

E. M.

N. Fomenko. Mechanische Quadraturen und Rektifikationen des Kreises mit genügender Genauigkeit. Spaczinskis Bote Nr. 388, 82-87. (Russisch.)

Anstatt des Bingschen Dreiecks (dessen Katheten sich wie 23 : 44 verhalten, Spacz. Bote 1886, Nr. 4) schlägt der Verf. vor, Dreiecke mit den entsprechenden Verhältnissen $\sqrt{\frac{108}{181}}$ und 29 : 133 oder 112 : 145 und 242 : 113 zu benutzen.

Si.

P. Tosatti. Sulla quadratura del cerchio. Riv. di fis., mat. e sc. nat. $\mathbf{6}_2$, 223-227.

Eine angenäherte Quadratur des Kreises.

Vi.

Rhymes on the value of π. Nature **72**, 385, 558, 631.

Mitteilung von französischen, deutschen, englischen Versen, in denen die aufeinander folgenden Wörter so viel Buchstaben haben, wie die aufeinander folgenden Ziffern von 3, 14159 ... angeben.

Lp.

G. Dal Pozzo. Sulla duplicità del cubo. Riv. di fis., mat. e sc. nat. $\mathbf{6}_2$, 324-326.

Zwei geometrische Methoden zur angenäherten Berechnung von $\sqrt[3]{2}$.

Vi.

J. Sobotka. Beitrag zur konstruktiven Auflösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades. Časopis. **34**, 1-5, 97-105. (Böhmisch.)

Man vergleiche Prag. Ber. 1904 (F. d. M. **35**, 524, 1904).

Pe.

D. Efremov. Über die Eulersche Gerade. Spaczinskis Bote Nr. 402, 128-137; Nr. 403, 158-161; Nr. 404-405, 189-195; Nr. 406, 215-220. (Russisch.)

Zuerst werden die Winkel der Eulerschen Geraden mit den Seiten des Dreiecks bestimmt, was in einigen Spezialfällen Aufschlüsse über die Lage dieser Geraden liefert; dann werden die Dreiecke betrachtet, welche die genannte Gerade mit den Seiten des Hauptdreiecks bildet. Endlich wird der Satz von Zeeman bewiesen, und zuletzt werden die charakteristischen Eigenschaften der Geraden zusammengestellt. Si.

C. Canon, G. Fontené. Nouvelles démonstrations du théorème de Feuerbach. Nouv. Ann. (4) 5, 257-260.

Canon zeigt durch elementargeometrische Betrachtungen die Existenz eines auf verschiedene Weise konstruierbaren Punktes auf dem Inkreise, durch den ein anderer den Inkreis berührender Kreis geht, dessen Identität mit dem Neunpunktekreis nachgewiesen wird. Fontené geht von dem Lehrsatz aus, daß die Neunpunktekreise der vier durch vier Punkte A, B, C, D zu bildenden Dreiecke sich in einem Punkte schneiden, durch den auch der Umkreis des Fußpunktendreiecks von D bezüglich des Dreiecks ABC geht. Sk.

W. Sawayama. Démonstration élémentaire du théorème de Feuerbach. Ens. math. 7, 479-481.

Der Beweis beruht allein auf Sätzen aus den drei ersten Büchern des Euklid. Ist PP' der auf BC senkrechte Durchmesser des Umkreises, J der Mittelpunkt des Inkreises, N derjenige des Feuerbachschen Kreises, V die Projektion von J auf PP', U der Schnittpunkt von PP' mit dem von N auf AP gefällten Lote, so ergibt sich

$$PN^2 + PJ^2 = PU^2 + PV^2.$$

Diese Relation führt unmittelbar zu dem Feuerbachschen Satze.

Zch.

O. Gutsche. Über eine Haupteigenschaft des Feuerbachschen Kreises. Arch. der Math. u. Phys. (3) 9, 191-193.

Für den Lehrsatz, daß der Feuerbachsche Kreis den Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks berührt, wird ein neuer, für Obertertianer oder Untersekundaner einer Realanstalt verständlicher Beweis gegeben. Es wird nachgewiesen, daß der Kreis, der durch die Mitte einer Seite geht und den Inkreis einschließend, den dieser Seite angeschriebenen Kreis ausschließend berührt, der Feuerbachsche Kreis ist. Zch.

G. Fontené. Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés. Nouv. Ann. (4) **5**, 529-538.

Die Punkte, in denen der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks von dessen Berührungskreisen tangiert wird, sind die Schnittpunkte der Neunpunktekreise derjenigen Dreiecke, die durch zwei Ecken und einen Berührungskreismittelpunkt des ursprünglichen Dreiecks gebildet werden (Ch. Michel, Bull. sc. math. et phys. **9**, 208). Mittelpunktslage und Durchmesserlänge dieser Kreise werden durch elementare Betrachtungen bestimmt, die zu weiteren Folgerungen Anlaß geben. Sk.

G. Fontené. Extension du théorème de Feuerbach. Nouv. Ann. (4) **5**, 504-506.

Nennt man Fußpunktkreis eines Punktes D in bezug auf ein Dreieck ABC den Kreis K_D, der durch die Fußpunkte der von D auf AB, BC, CA gefällten Lote geht, so treffen die in den zweiten Schnittpunkten von K_D und AB, BC, CA errichteten Lote sich gleichfalls in einem Punkte D', dessen Fußpunktkreis bekanntlich mit dem ersten identisch ist. Bedeutet nun O den Mittelpunkt des Umkreises für ABC, O_1 den des Feuerbachschen Kreises K, so zeigt Verf.: Bewegt sich D auf DO, so geht K_D durch einen festen Punkt P' von K. Dreht sich DO bei festem O um α, so dreht sich $O_1 P'$ im entgegengesetzten Sinne um 2α. Schneiden sich K_D und K außer in P' noch in P, so hat man bis auf Vielfache von π auch dem Sinne nach:

$$\sphericalangle P_a O_1 P' = 2 \sphericalangle (OD, OD').$$

Der besondere Fall $\sphericalangle (OD, OD') = \pi$ des letztgenannten Satzes findet sich nach einem Zitat des Verf. in anderer Form bei M. Weill in Nouv. Ann. (2) **19**, 259, 1880; F. d. M. **12**, 471, 1880. E. M.

Rich. Müller. Über die Dreiecke, deren Umkreis den Kreis der 9 Punkte orthogonal schneidet. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 182-184.

Die Konstruktion aller Dreiecke der genannten Art ergibt sich aus der Gleichung $e^2 = 5r^2$ (e = Abstand des Umkreismittelpunktes vom Höhenschnittpunkt), welche aus der allgemeinen Formel

$$e^2 = r^2 (1 - 8 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)$$

durch Einführung der in der Überschrift genannten Bedingung folgt. Die Winkel dieser Dreiecke genügen der Beziehung

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = -\frac{1}{2},$$

aus welcher sich ergibt, daß ein Winkel zwischen 128° 10,38′ und 135° liegen muß. Auch zwischen den drei Seiten dieser Dreiecke besteht eine bestimmte Beziehung. Zch.

E. Eckhardt. **Der Crelle-Brocardsche Winkel als besonderer Fall einer Aufgabe über das Kreisviereck.** Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 409-422.

Die Formeln von Crelle für den sogenannten Brocardschen Winkel erweisen sich als besondere Fälle von nicht minder eleganten Ausdrücken, die der folgenden Aufgabe über das Kreisviereck entspringen: Welchen Winkel muß man in den Ecken eines Kreisvierecks in demselben Sinne nach innen antragen, damit das entstehende Viereck dem ursprünglichen ähnlich wird? Der vorliegende Aufsatz entwickelt diese Analogien unter Berücksichtigung der verschiedenen möglichen Fälle. Lp.

J. Neuberg. **Gleichbrocardische Dreiecke.** Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 207-208.

Handelt von den gleichbrocardischen Dreiecken, die sich durch Orthogonalprojektion der gleichseitigen Dreiecke einer Ebene in eine zweite ergeben. Lwt.

M. Haberland. **Beziehungen zwischen den Ankreismittelpunkte-, Potenzpunkte- und Gegenpunkte-Dreiecken zu den merkwürdigen Punkten eines Dreiecks.** Progr. (Nr. 803) Großherz. Realsch. (Realprogymn.) Neustrelitz, 20 S.

Die in der Arbeit enthaltenen Sätze sind in sieben Abschnitte geordnet. Von diesen sind die ersten sechs bereits im Aufgaben-Repertorium der Zeitschr. für math. u. naturw. Unterr. **35**, 55-57 und **35**, 214 veröffentlicht worden. Noch nicht veröffentlicht sind die im siebenten Abschnitte mitgeteilten Beziehungen der merkwürdigen Punkte zu dem dem gegebenen Dreieck kongruenten, in bezug auf das Potenzzentrum der drei Ankreise symmetrisch gelegenen Dreieck. Sie sind einfache Folgerungen aus der symmetrischen Lage der beiden Dreiecke. Zch.

G. Fontené. **Discussion d'un triangle donné par les points remarquables O, J, H.** Nouv. Ann. (4) **5**, 241-252.

Die Konstruktion eines Dreiecks aus dem Umkreismittelpunkt O, dem Höhenschnittpunkt H und dem Mittelpunkt J des Inkreises oder eines Ankreises führt auf eine Aufgabe 3. Grades. Liegt J innerhalb des Kreises, der die Entfernung zwischen H und dem Dreiecksschwerpunkt zum Durchmesser hat, so ist er der Inkreismittelpunkt; liegt J außerhalb jenes Kreises, so ist er der Mittelpunkt eines Ankreises; liegt endlich J auf der Peripherie jenes Kreises, so fallen zwei Ecken des Dreiecks zusammen. Die Diskussion der kubischen Gleichung, deren Wurzeln die Seiten des Dreiecks sind, führt zur Bestimmung einer gewissen Kurve vierter Ordnung, die denjenigen Teil der Ebene begrenzt,

in welchem bei gegebenem O und H der Punkt J nicht liegen darf, wenn das Dreieck existieren soll. Liegt J auf dieser Grenzkurve selbst, so ist eine Seite des Dreiecks gleich Null. Soll das Dreieck gleichschenklig sein, so muß J auf einer gewissen Hyperbel liegen.

Zch.

K. Hagge. Über Umkreise und Transversalen des vollständigen n-Seits. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 89-96.

Die von Steiner, Miquel und Clifford über Vierseite, Fünfseite und Sechsseite ausgesprochenen Sätze werden nochmals bewiesen und auf n-Seite in folgender Fassung ausgedehnt: Auf dem merkwürdigen Kreise des Vierseits liegen vier Mittelpunkte, ein merkwürdiger Punkt des Vierecks und vier Transversalenschnittpunkte. — Auf dem merkwürdigen Kreise des Fünfseits liegen fünf Schnittpunkte, ein merkwürdiger Punkt des Fünfseits und 10 Transversalenschnittpunkte. — Auf dem merkwürdigen Kreise des n-Seits liegen

$$n+1+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Punkte. Lp.

J. Neuberg. Le point de Kariya. Mathesis (3) **5**, 158-159.

Vgl. das Referat über Kariya in F. d. M. **35**, 524, 1904. Neuberg gibt frühere Arbeiten über den Gegenstand an, die zumeist in der Mathesis erschienen sind. Andere Quellenangaben von Retali und Neuberg stehen S. 158 und 159 desselben Bandes der Mathesis.

Lp.

D. Efremov. Über einen merkwürdigen Punkt des Dreiecks. Spaczinskis Bote. (Russisch.)

Es handelt sich um den Punkt von J. Kariya-Retali (vgl. vorstehendes Referat). Nach Angabe von Neuberg beweist der Verf. den betreffenden Satz als Folge eines Satzes von E. Lemoine (Ass. Fr. Av. Sc. 1889, 202). Si.

A. Pleskot. Über eine Eigenschaft des Dreiecks. Časopis. **34**, 215-219. (Böhmisch.)

Es wird darauf hingewiesen, daß der von J. Kariya angeführte Satz (Ens. math. **6**, 130; F. d. M. **35**, 524, 1904) ein spezieller Fall des folgenden längst bekannten Satzes ist: Wenn die Geraden $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ in bezug auf einen Kegelschnitt die Pole C_1, A_1, B_1 haben, so sind die Dreiecke ABC, $A_1\,B_1\,C_1$ perspektivisch. Beweis dieses Satzes mit Hülfe der analytischen Geometrie. Pe.

E. PICCIOLI. Contributo alla „geometria recente del triangolo sferico“.
Periodico di Mat. (3) 2, 181-187.

Die Note soll zeigen, daß im sphärischen Dreiecke merkwürdige Punkte vorhanden sind, welche ähnliche Eigenschaften besitzen wie die merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks. Zur Herleitung dient die Rechnung mit Hülfe der Formeln der sphärischen Trigonometrie. Als Ausgangspunkt dient der Satz: Die Großkreisbogen, welche, von den Ecken eines sphärischen Dreiecks ausgehend, die Gegenseiten in solche Stücke schneiden, daß die Sinus derselben den n-ten Potenzen der Sinus der anliegenden Seiten proportional sind, gehen durch zwei Punkte K_n und K'_n, von denen der eine immer innerhalb des gegebenen Dreiecks, der andere innerhalb seines Scheiteldreiecks liegt. Die Sinus der sphärischen Abstände jedes derselben von den Seiten sind den $(n-1)$-ten Potenzen der Sinus der nämlichen Seiten proportional. Lp.

K. BOCHOW. Die Funktionen rationaler Winkel, besonders die numerische Berechnung der Winkelfunktionen ohne Benutzung der trigonometrischen Reihen und ohne Kenntnis der Zahl π.
Progr. (Nr. 317) Städt. Realsch. Magdeburg, 40 S.

Der Verf. zeigt, wie das ganze Gebiet der Darstellung der Funktionen rationaler Winkel ohne Kenntnis der trigonometrischen Reihen und der Zahl π durch die einfache goniometrische Grundformel $2\cos\alpha\cdot 2\cos\beta = 2\cos(\alpha-\beta)+2\cos(\alpha+\beta)$ erschlossen wird. Bezeichnen wir, wie üblich, den gestreckten Winkel mit π und setzen wir zur Abkürzung $n_p = 2\cos\left(\frac{p}{n}\pi\right)$, so lautet jene Grundformel $n_p\cdot n_q = n_{p-q} + n_{p+q}$. Für das Symbol n_p („Sehne vom Nenner n und vom Zähler p“) gelten noch einige weitere elementare Formeln, insbesondere diejenige für die Zählerverdoppelung

$$(2n)_p = \sqrt{2+n_p} = \sqrt{2-n_{n-p}}.$$

Mittels dieser Formeln erhält der Verf. folgende Resultate: 1. Ist der Nenner einer Sehne eine Potenz von 2, so erscheint sie als „dyadische Kettenwurzel“, deren innerster Term $\sqrt{2}$ lautet, ist daher vollkommen bestimmt und berechenbar. Beispiel: $16_7 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

2. Hat ein Nenner die Form $2^q(2m+1)$, so kann die Sehne in zwei verschiedenen Formen dargestellt werden: Entweder als q-fache dyadische Kettenwurzel, deren innerster Term eine Sehne vom Nenner $2m+1$ ist; oder als Aggregat von Produkten solcher Sehnen, deren Nenner Teilnenner des gegebenen Nenners sind. Beispiel:

$$12_1 = \sqrt{2+\sqrt{2+3_1}} = 0{,}5\cdot 4_1\cdot(6_1+3_1).$$

Es kommt demnach darauf an, die Sehnen zu bestimmen, deren Nenner Primzahlen oder Potenzen von Primzahlen sind. Da $(nq)_{pq} = n_p$

ist, so gehören, falls der Nenner eine zusammengesetzte Zahl ist, diejenigen Sehnen, deren Zähler und Nenner einen gemeinsamen Faktor besitzen, bereits kleineren Nennern an. Als „spezifische Sehnen" des Nenners n bleiben nur diejenigen übrig, deren Zähler zu n teilerfremd ist. Die spezifischen Sehnen der Nenner der oben genannten Art genügen nun gewissen Zyklen von quadratischen Gleichungen, aus denen sich eine Darstellung solcher Sehnen durch periodische dyadische Kettenwurzeln ergibt, welche ihre Berechnung mit beliebig großer Annäherung ermöglicht.

Auf Grund dieser Entwicklungen ist es möglich, eine Tafel der Winkelfunktionen für ein beliebiges Intervall zu berechnen, ohne daß man die trigonometrischen Reihen benutzt oder die Zahl π als bekannt voraussetzt. Auf diese Zahl wird man erst geführt, wenn man die Kettenwurzeldarstellung durch die Potenzreihen des Winkelarguments zu ersetzen sucht. Der Verf. gibt in einer Tafel die Zurückführung der Funktionen aller ganzen Grade, also aller „Sehnen vom Nenner 180" auf folgende sechs Grundwerte: $3_1, 5_1, 5_2, 9_1, 9_2, 6_4$. Auch die Art der Weiterführung auf Minuten und Sekunden wird angedeutet. Zum Schluß zeigt der Verf., wie die Maßzahl eines spitzen Winkels, wenn der Gestreckte als Einheit gewählt wird, als „dyadische Bruchreihe", d. h. als Reihe von Potenzen von $\frac{1}{2}$, dargestellt werden kann, welche keine Lücken hat, und in welcher nur die Koeffizienten ± 1 vorkommen. Es werden dann die Beziehungen zwischen den Koeffizienten dieser Bruchreihe und denjenigen der Kettenwurzel für die zu demselben Winkel gehörige Sehne erörtert. Zch.

D. K. Picken. The proof by projection of the addition theorem in trigonometry. Edinb. M. S. Proc. **23**, 40-42.

Eine sorgfältige Aufstellung von Sätzen über die Projektion und ein von Projektionen abhängiger Beweis des Additionstheorems in der Trigonometrie. Gbs. (Lp.)

E. Grigorieff. Einige trigonometrische Identitäten. Spaczinskis Bote Nr. 402, 137-139. (Russisch.)

Für Winkel A, B, C, deren Summe gleich 180° ist, wird die Identität bewiesen:

$$1 - \sin A - \sin B - \sin C + \cos A + \cos B + \cos C$$
$$= 4\sqrt{2}\cos\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{B}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{C}{2}\right);$$

aus ihr werden einige Folgerungen gezogen. Si.

N. Agronomov. **Relationen zwischen den Seiten des Dreiecks, dessen Seiten in einem gewissen Verhältnis zu einander stehen.** Spaczinskis Bote Nr. 401, 109-115. (Russisch.)

Es handelt sich um die Aufgabe, welche, wie der Verf. bemerkt, Euler in Novi Commentarii Ac. Petrop. XI. betrachtet hat. Si.

E. Bunitzky. **Zur Formel von Edelstein in seiner Note: „Bestimmung des Flächeninhalts des Dreiecks mit Hülfe seiner Medianen“.** Spaczinskis Bote Nr. 385, 16-17. (Russisch.)

Die betreffende Formel gilt mit entsprechender Abänderung auch in dem Fall, wenn nicht die Medianen, sondern die Längen der Verbindungsgeraden der Ecken mit den die gegenüberliegenden Seiten in gegebenem Verhältnis teilenden Punkten gegeben sind. Ist also γ der Punkt von AB, für welchen $B\gamma = m \cdot AB\,(0 < m < 1)$, und setzt man $\gamma C = \mu_c$, dann wird

$$\Delta = \frac{\sqrt{\sigma(\sigma - p_a)(\sigma - p_b)(\sigma - p_c)}}{m^2 - m + 1} \qquad (2\sigma = p_a + p_b + p_c).$$

Si.

G. Césàro. **Nouvelle méthode pour l'établissement des formules de la trigonométrie sphérique.** Belg. Bull. Sc. 1905, 434-454.

G. Césàro. **Les formules de la trigonométrie sphérique déduites de la projection stéréographique du triangle. Emploi de cette projection dans les recherches sur la sphère.** Belg. Bull. Sc. 1905, 560-583.

Aus zwei rechtwinkligen Dreiecken, deren Seiten und Winkel Funktionen der Elemente eines sphärischen Dreiecks sind, leitet der Verf. die Formeln der sphärischen Trigonometrie ab. Diese beiden Dreiecke entstehen auf natürliche Art mittels der stereographischen Projektion.

Mn. (Lp.)

B. Levi. **Sur la géométrie et la trigonométrie sphériques.** Ens. math. 7, 193-206.

Verf. gibt eine Ableitung der Geometrie und Trigonometrie auf der Kugel ohne irgendwelche Sätze des ebenen oder dreidimensionalen Raumes zu benutzen. Nachdem die Sätze über die Winkelsumme und den Inhalt geradliniger Figuren abgeleitet sind, wird der Inhalt und die Länge des Kreises bestimmt und die Definition des Sinus gegeben. Es folgen dann durch weitere Überlegungen die Eigenschaften dieser Funktion sowie die fundamentalen trigonometrischen Formeln. D.

E. Brand. Méthode rapide pour retrouver les formules fondamentales des triangles sphériques. Ens. math. 7, 460-461.

Die Methode ist dieselbe, wie in § 72-74 von Spiekers Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zch.

T. J. I'A. Bromwich. The ambiguous cases in the solution of spherical triangles. Edinb. M. S. Proc. 23, 55-57.

Gegeben seien a, b, A; dann ist die Gleichung für c:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Setzt man $\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = t$, so geht diese über in

$$(\cos a + \cos b)\, t^2 - 2t \sin b \cos A + (\cos a - \cos b) = 0.$$

Die Erörterung dreht sich nun um die Betrachtung der Wurzeln der Gleichung in t. Wenn alle Seiten und Winkel unter zwei Rechten liegen, müssen diese Wurzeln in den zulässigen Fällen reell und positiv sein. Gbs. (Lp.)

Weist. Zur stereometrischen Veranschaulichung. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 36, 336-337.

Winke bei der Benutzung von Zeichnungen und Flachmodellen. Lp.

Corneille L. Landré. Stereometrische hoofdstukken ter uitbreiding van de elementaire leerboeken (Stereometrische Kapitel zur Weiterführung der elementaren Lehrbücher). Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Utrecht: Gebr. van der Post. 326 S. 8°.

Das vorliegende Lehrbuch bezweckt eine Weiterführung des stereometrischen Unterrichts. Anknüpfend an den in den elementaren Lehrbüchern behandelten Stoff, bietet es eine Auswahl von anregenden Sätzen und Konstruktionen, welche gewöhnlich keine oder doch nur eine beiläufige Betrachtung finden. Das erste Kapitel enthält weniger bekannte Eigenschaften des Tetraeders, die beiden folgenden sind dem Eulerschen Satze und im allgemeinen den konvexen Polyedern gewidmet. Dann folgt die Herleitung der Inhaltsformel für das Prismoid; hierbei werden die sternförmigen und die durchbohrten Polyeder berücksichtigt. Den Schluß bildet ein sehr ausführliches Kapitel über die Geometrie des Massenmittelpunkts. Kl.

J. C. Kluyver. Over het volume, dat door drie bolloppervlakken is begrensd, die elkaar in twee punten snijden. Nieuw Archief (2) 7, 7-10.

Von drei sich in zwei Punkten schneidenden Kugeln sind die Radien und die Entfernungen ihrer Mittelpunkte gegeben. Wenn auch leicht die

Möglichkeit nachgewiesen werden kann, das von den drei Kugeloberflächen begrenzte Raumstück aus den gegebenen Größen zu berechnen, so ist es doch nicht möglich, einen einfachen expliziten Ausdruck für dasselbe anzugeben. Sind A, B, C die Mittelpunkte, P der eine Schnittpunkt der Kugeln, so erhält man die Hälfte des gesuchten Volumens, wenn man den Inhalt des Tetraeders $PABC$ vermehrt um die in dieses Tetraeder fallenden Teile der bikonvexlinsenförmigen Raumstücke, die von je zwei Kugelflächen begrenzt werden, und vermindert um die Sektoren, die durch die dreikantigen Ecken A, B, C des Tetraeders aus den zugehörigen Kugeln ausgeschnitten werden. Man kann nun zwar jedes dieser Stücke einzeln durch die sechs gegebenen Stücke ausdrücken, jedoch läßt sich das Ergebnis nicht in einer einfachen, übersichtlichen Inhaltsformel zusammenfassen. Zch.

J. Finsterbusch. Über eine neue einfache und vor allem einheitliche Methode, die Rauminhalte der Körper zu bestimmen, deren Querschnittsfunktion den dritten Grad der Höhe nicht übersteigt, und ihre Verallgemeinerung. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 687-706.

Die Methode ist eine Weiterbildung des Cavalierischen Prinzips, wobei noch ein Satz über die Änderung des Volumens durch eine affine Transformation des Körpers hinzugenommen wird. Damit kann man das Integral einer ganzen rationalen Funktion ohne Grenzbetrachtung finden. Nach dieser Methode werden als Beispiele das Volumen eines Ellipsoids, eines parabolischen Zylinders u. a., schließlich auch die Gaußschen Formeln der mechanischen Quadratur abgeleitet. P.

L. Schleiermacher. Zur Massenberechnung im Wegebau. Zs. für Math. u. Phys. 52, 208-221.

Die im Wegebau zur Berechnung der Massen angewendete praktische Formel $V = \frac{1}{2}(Q_0 + Q_1)\,l$, in welcher Q_0 und Q_1 die Flächeninhalte des Anfangs- und Endprofils einer Station und l die Stationslänge bedeuten, wird als streng richtig erwiesen für einen Sechsflächner mit zwei Paaren paralleler Gegenflächen, einen „Klotz". Die weitere Untersuchung lehrt, daß sie auch für alle möglichen Typen solcher Wegkörper, welche von ebenen Flächen begrenzt werden, hinreichend genau ist. Der Verf. zerlegt jeden derartigen Wegkörper in einen Klotz mit dem Inhalte $V = \frac{1}{2}(Q_0 + Q_1)\,l$ und gewisse Restkörper, deren Inhalt gegen das mit der praktischen Formel übereinstimmende erste Glied wenig in Betracht kommt. Zch.

Weitere Literatur.

K. ALBRICH. Lehrsätze aus der Geometrie. Hülfsbuch f. d. unteren Klassen der Mittelschule. Nagyszeben (Hermannstadt). W. Krafft. 36 S. 8°.

A. L. BAKER. The art of geometry. A laboratory manual for students' use, to accompany any text-book. Boston: Sibley. 48 S. 12mo.

P. BENOIT. Essai d'une géométrie nouvelle. Saint-Dié: Weick. 159 S. 8°.

S. BERNARD and J. M. CHILD. New geometry for senior forms. New York. XV u. 33 S.

R. BÖTTCHER und R. SENDLER. Raumlehre für Lehrerbildungsanstalten. Teil 2: Stereometrie und Trigonometrie. Resultate. Breslau: Handel. 15 S. 8°.

E. BOREL. Géométrie, à l'usage des écoles normales primaires (programmes de 1905), des écoles primaires supérieures, des aspirants et aspirantes aux brevets de l'enseignement primaire, et des lycées et colléges de jeunes filles. Paris: Colin. X u. 383 S. 16mo.

H. BOS. Geometría elemental. Paris: Hachette. 283 S. 16mo.

H. BOS. Géométrie élémentaire. 20e édition. Paris: Hachette. 288 S. 16mo.

BOZAL OBEJERO. Tratado elemental de geometría. Madrid: Hernando. 296 S. 8°.

W. N. BUSH and J. B. CLARKE. The elements of geometry. New York: Silver, Burdette & Co. XII u. 355 S. 12mo.

F. CLAUSSEN. Leitfaden der Planimetrie, nebst einer kurzen Anleitung zu trigonometrischen und stereometrischen Berechnungen. 2. erweit. Aufl. Leipzig: F. Hirt & Sohn. 92 S. 120 Fig. 8°.

A. CONSTERDINE and A. BARNES. The rudiments of practical mathematics. London: John Murray. XV u. 332 S. [Nature 72, 393.]

C. DAVISON. Elements of solid geometry. Cambridge: University Press. 130 S. 8°.

F. DURRELL. Plane geometry. Harrisburg Pa. 320 S. 8°.

G. EHRIG. Geometrie für die Zwecke des praktischen Lebens. I. Teil (Geometrie der Ebene). Leipzig: G. Reuschke. VIII u. 121 S. 8°.

F. ENRIQUES e U. AMALDI. Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori. 2a edizione riveduta e semplificata. Bologna: Zanichelli. X u. 567 S. 16mo.

K. ERDMANN. Anfangsgründe der ebenen Geometrie, verbunden mit einer Aufgabensammlung. II. (Schluß-) Teil. Dresden: Bleyl & Kaemmerer. VII u. 164 S. gr. 8°.

F. J. Complément des „Éléments de géométrie" comprenant un complément sur le déplacement des figures. 9e édition. Paris: Poussielgue. S. 495-525, 16mo.

C. W. FOWLER. Inductive geometry; an introduction to and preparation for the regular text. Louisville: Fowler. VIII u. 52 S. 16mo.

C. FUCINI. Geometria piana complementare e geometria solida per gl'istituti nautici. 7ª edizione. Genova. 125 S. 8°.

C. FUCINI. Geometria piana e solida per gl'istituti nautici. 7ª edizione. Genova. 237 S. 8°.

Géométrie. Cours moyen. Par une réunion de professeurs. Paris: Poussielgue. 191 S. 16mo. (Collection d'ouvrages classiques rédigés en cours gradués.)

J. GIROD. Précis de géométrie plane, conforme aux programmes du 27 juillet 1905, pour les classes de seconde *C* et *D* et de mathématiques *A* et *B*. Paris: Alcan. XII u. 252 S. 8°.

A. GRÉVY. Géométrie dans l'espace, conforme au programme du 27 juillet 1905, à l'usage des élèves du deuxième cycle *A* et *B*. Paris: Vuibert et Nony. S. 281-396. 16mo.

A. GRÉVY. Traité de géométrie, à l'usage des élèves de mathématiques *A* et *B* (programme du 31 mai 1902) et des candidats aux Écoles de Saint-Cyr et navale. Paris: Vuibert et Nony. VIII u. 598 S. 8°.

A. GRÉVY. Éléments de géométrie. Paris: Vuibert 16mo.
Classes de seconde et première *A* et *B*. 5e éd. 136 S.
Classes de seconde et première *D*. 3e éd. 120 S.
Classes de quatrième et troisième *A*. 5e éd. 172 S.

A. GRÉVY. Géométrie, à l'usage des élèves des classes de cinquième *B* à troisième *B*. 3e éd. Paris: Vuibert. 223 S. 16mo.

A. GRÉVY. Géométrie théorique et pratique. Paris: Vuibert et Nony. VIII u. 472 S. 16mo.

H. S. HALL and F. H. STEVENS. A school geometry. Part I: Lines and angles; rectilinear figures. London: Macmillan. 12mo.

H. S. HALL and F. H. STEVENS. Lessons in experimental and practical geometry. London: Macmillan and Co. VIII, 94 u. III S. [Nature **71**, 507.]

H. S. HALL and F. H. STEVENS. Key to exercises and examples contained in school geometry. Parts 1-4. London: Macmillan and Co.

G. HAUCK. Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund von F. Kommerells Lehrbuch neu bearbeitet u. erweitert. 9. Aufl. (S. der Neubearbeitung.) Herausgegeb. von V. Kommerell. Tübingen: H. Laupp. XV u. 224 S. 67 Abb. 8°.

FR. HOČEVAR. Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Untergymnasien. 7. Aufl. Wien: F. Tempsky. II u. 122 S. 184 Fig. 8°.

G. I. HOPKINS. Teachers' manual to „Inductive plane geometry". Boston: Heath. 107 S. 16mo.

H. Köstler. Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten, neu herausgegeben von A. Holtze. 2. Heft: Lehre vom Flächeninhalt, Konstruktionslehre. Vierte, teilweise umgearbeitete Auflage. Halle: L. Nebert. 49 S. 8°.

Koppe und Diekmann. Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. Zweiter Teil der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. Ausgabe für Reallehranstalten. (19. Aufl.) 3. Aufl. der neuen Bearbeitung von J. Diekmann. Mit zahlreichen Übungen u. Aufgaben. Essen: Baedeker. IV u. 270 S. 8°.

K. Kraus. Grundriß der Geometrie und des geometrischen Zeichnens für Lehrerbildungsanstalten. 2. Aufl. (unveränd. Abdr. d. 1. Aufl.) Wien: A. Pichlers Witwe & Sohn. II u. 238 S. 305 Fig. gr. 8°.

A. M. Legendre. Compendio di geometria; libro di testo per le scuole tecniche conforme ai programmi governativi, ricavato dagli Elementi di A. M. Legendre per cura di G. Tolomei. Firenze: Ricci. 179 S. 8°.

J. S. Mackay. Plane geometry, practical and geometrical. Books 1-5. London: Chambers. 388 S. 12mo.

G. Mahler. Ebene Geometrie. 4. verb. Aufl. Leipzig: G. J. Göschen. 166 S. 110 Fig. kl. 8°. (Sammlung Göschen Bd. 41.)

Heinr. Müller. Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Für den Unterricht dargestellt. I. Teil: Die Unterstufe (Lehraufgabe der Klassen Quarta bis Untersekunda). 3. Aufl. Ausg. A: Für Gymnasien und Progymnasien. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 136 S. 8°.

C. Musmacher. Lehrbuch der Geometrie für Mittelschulen. Leipzig: Renger. III u. 58 S. 8°.

E. Nannei. Elementi di geometria. 2ª edizione. Parte I: Planimetria. Puntata I, II. Milano: Vallardi. 16mo.

E. Oca. Nociones de geometría, con especial aplicación á la agrimensura, división, agregación y segregación de terrenos y medición de rectas inaccesibles. 7ª edición. Logroño: Oca. 56 S.

A. Rossignon et F. Pillet. Éléments de géométrie, à l'usage de l'enseignement secondaire, de l'enseignement primaire supérieur et des écoles normales, accompagnés de notions sur l'arpentage, le levé des plans et le nivellement. Paris: Rudeval. 512 S. 8°.

J. Rüefli. Kleines Lehrbuch der Stereometrie, nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben. 4. Aufl. Bern: A. Francke. 61 S. 55 Fig. 8°.

J. W. Russell. Elementary treatise on pure geometry, with examples. Revised edition. London: Frowde. 382 S. 17mo.

F. M. Saxelby. A course in practical mathematics. London: Longmans. 450 S. 8°.

G. C. SHUTTS. Plane and solid geometry; suggestive method. Chicago: Atkinson. IX u. 389 S. 12mo.

H. SIEVERT. Lehrbuch der Elementargeometrie zum Gebrauche an Mittelschulen und beim Selbstunterrichte. Teil 1: Geometrie der Ebene. Abteilung 1: Kongruenz, Gleichheit und Ähnlichkeit ebener Figuren. 2. Aufl. Leipzig: Deichert. VI u. 179 S. 8⁰.

P. SIMON. Traité de géométrie élémentaire. Deuxième partie. Livres III et IV. Paris: Belin. S. 191-452. 8vo.

H. A. STERN and W. H. TOPHAM. Elementary practical mathematics. London: George Bell and Sons. VIII u. 110 u. VIII S. [Nature **72**, 393.]

I. SUAREZ SOMONTE. Programa de geometría. Madrid: Ratés. 38 S. 8⁰.

I. SUAREZ SOMONTE. Programa de nociones y ejercicios de aritmética y geometría. Madrid: Ratés. 36 S. 8⁰.

H. THIEME. Leitfaden der Mathematik für Gymnasien. Teil I: Die Unterstufe. 2. Aufl. Leipzig: Freytag. 102 S. 8⁰.

H. THIEME. Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. Teil I: Die Unterstufe. 2. Aufl. Leipzig: Freytag. 128 S. 8⁰.

V. M. TURNBULL. Elementary plane geometry. London: Blackie. 136 S. 12mo.

G. VERONESE. Elementi di geometria ad uso dei ginnasi e licei e istituti tecnici (primo biennio), trattati con la collaborazione di P. Gazzaniga. Parte I. 3a ed. Verona e Padova: Drucker. XXIV u. 124 S. 8⁰ (1904). Parte II. 3a ed. Padova: Prosperini. 220 S. 8⁰ (1905).

J. WILDT und J. SCHLESCHKA. Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie und Projektionslehre in gewerblichen Fortbildungsschulen. Wien: W. Pichlers Witwe & Sohn. 90 S. gr. 8⁰.

H. G. WILLIS. Elementary modern geometry, experimental and theoretical. Part I (Chapters I-IV): Triangles and parallels. London: Frowde. 244 S. 12mo.

W. P. WORKMAN and A. G. CRACKNELL. Preparatory course in geometry. Written as introductory course for „Geometry theoretical and practical". London: W. B. Clive. VIII u. 46 S. 8⁰. [Nature **72**, 150.]

G. CH. YOUNG and W. H. YOUNG. The first book of geometry. London: J. M. Dent and Co. XVI u. 222 S. [Nature **73**, 267-268.]

K. ED. ZETSCHE. Ebene und räumliche Geometrie. 4. verm. u. verb. Aufl.; bearbeitet von Frz. Zetsche. Leipzig: J. J. Weber. XII u. 408 S. kl. 8⁰ (Webers illustrierte Katechismen Nr. 69).

H. ADAMS. Practical trigonometry, for engineers, architects, surveyors. Enlarged edition. London: Whittaker. 78 S. 12mo.

A. BÖTTGER und H. HARTENSTEIN. Die Trigonometrie. Für den Unterricht an Realschulen bearbeitet. Leipzig: Dürrsche Buchhandlung. 35 S. gr. 8⁰.

W. G. Borchardt. Key to a new trigonometry for schools. Parts I, II. London: Bell. 244 S. 12mo.

R. F. D'Arcy. New trigonometry for beginners. London: Methuen. 92 S. 8°.

E. Dessenon. Traité de trigonométrie rectiligne, à l'usage des élèves de seconde et de première C et D, de mathématiques A et B, et des candidats au baccalauréat et aux écoles. 4e édition. Paris: Vuibert. II u. 304 S. 8°.

H. Ferval. Éléments de trigonométrie. Contenant 556 exercices et problèmes. Deuxième cycle (classes de seconde et de première C, D, et de mathématiques A, B). Paris: Hachette. 288 S. 16mo.

J. Girod. Précis de trigonométrie. Avec 414 problèmes et exercices proposés. Paris: Alcan. VIII u. 210 S. 8°.

A. Grévy. Trigonométrie, à l'usage des élèves des classes de seconde et première C et D et mathématiques A et B (programmes du 31 mai 1902). 3e éd. Paris: Vuibert et Nony. VIII u. 274 S. 16mo.

H. S. Hall and S. R. Knight. Elementary trigonometry. 4th ed., enlarged. London: Macmillan. 432 S. 12mo.

P. A. Lambert and H. A. Foering. Plane and spherical trigonometry. New York: Macmillan. VIII u. 104 S. 12mo.

Hub. Müller. Die Elemente der ebenen Trigonometrie, mit einer Sammlung von Aufgaben und deren Lösungen. 4. Aufl. Metz: G. Scriba. VI u. 42 S. mit Fig.

D. A. Murray. Plane trigonometry for colleges and secondary schools. — Spherical trigonometry for colleges and secondary schools. New York: Longmans. XIII u. 212, IX u. 95 S. 12mo.

D. A. Murray. Practical mathematics, including solution of triangles, measurement of areas, heights and distances, the use of logarithms, plotting of graphs, and finding the slopes of curves, with four-place tables. New York: Longmans. X u. 113 S. 8°.

J. G. Pallete. Trigonometría rectilínea e esférica. 10a ed. Madrid. 144 S. 4°.

I. Sommer. Einführung in die Trigonometrie. Pr. Gymn. Klein-Seite in Prag. 29 S. (Böhmisch.)

J. Werestschagin. Sammlung von Fragen und Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie. St. Petersburg. 287 S. 8°. (Russisch.)

C. Zolese. Trigonometria piana e sferica. Libro di testo per le scuole secondarie superiori. Napoli: De Rubertis. 78 S. 16mo.

N. Abramescu. Formeln aus der Dreiecksgeometrie. Gazeta mat. Bukarest **10**, 246-252, 273-277; **11**, 105-109, 127-131. (Rumänisch.)

L. Baur. Methodisch geordnete Aufgaben aus dem Gebiete der Planimetrie und Stereometrie mit Angabe und Begründung der Berechnungsformeln für Schul- und Selbstunterricht. Stuttgart: J. F. Steinkopf. VI u. 167 S. 8°.

G. Candido. Alcune formule sul triangolo. Suppl. al Period. 8, 133-134.

L. L. Conant. Original exercises in plane and solid geometry. New York: American Book Company. 124 S. 12mo.

D. L. López. Soluciones razonadas á las problemas de geometría que exige el programa de oposiciones al Cuerpo de telégrafos. Madrid: Alonso. 19 S. 8°.

B. Matek. Resultate der Aufgaben in Močnik-Spielmanns Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Mittelschulen. Ausgegeben für Gymnasien. Wien: Gerold. IV u. 128 S. 8°.

W. Meiser. Beweise und Lösungen zu Lehrsätzen und Aufgaben aus der Geometrie. Neustadt a. A. 52 S. 8°.

C. Müsebeck. Sammlung von Aufgaben aus der Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie, enthaltend Aufgaben zu Teil I Ausg. B des Leitfadens der Elementarmathematik von H. Lieber und F. v. Lühmann. Berlin: L. Simion. VII u. 115 S. 8°.

E. Price. Solutions of the exercises in Godfrey and Siddons's Elementary Geometry. Cambridge: The University Press. 272 S. (1904). [Nature **71**, 248.]

A. Vázquez Figueroa y A. Cob. Opúsculo de problemas de geometría con un apéndice con la rectificación de la circunferencia, trazado y rectificación de la elipse, ovále, ovoide y espiral con arreglo al última programa de ingreso en el cuerpo de telégrafos. Madrid. 88 S. 8°.

G. Sforza. La teoria delle parallele dal punto di vista didattico. Boll. di Mat. Bologna **4**, 81-86.

R. F. Muirhead. Constructions with straight-edge and dividers. Math. Gazette **3**, 209-210.

J. Neuberg. Symétries successives par rapport à des axes concourants. Mathesis (3) **5**, 178-179.

L. Catalá. División de un segmento en media y extrema razón. Rev. Acad. Madrid **3**, 103-107.

A. Tafelmacher. Sobre triángulos inscritos en un triángulo dado. Rev. de Mat. Santiago de Chile **2**, 207-213, 223-227, 239-242.

E. Linés. Problema de geometría. Rev. Acad. Madrid **2**, 71-72.

Eine Dreieckskonstruktion. Lp.

Edouard Collignon. Démonstrations de deux théorèmes de géométrie. Edinb. M. S. Proc. **23**, 49.

G. Lony. Der Apollonische Kreis als geometrischer Ort. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 581.

L. A. Silva. Los teoremas de Ptolomeo. Rev. de Mat. Santiago de Chile **3**, 345-347.

A. Neppi Modona. Sul principio di polarità. Boll. di Mat. Bologna **4**, 104-106.

G. Delitala. Algunas propiedades de la inversión isogonal. Rev. trim. de Mat. **5**, 76-89.

C. Habicht. Die Steinerschen Kreisreihen. Mitt. Naturf. Ges. Bern 1904, 24 S. 8⁰ u. 4 Taf.

G. Bratu. Über das regelmäßige Neuneck. Gazeta mat. Bukarest **11**, 31-35. (Rumänisch.)

K. Bochow. Einfachste Berechnung des regelmäßigen Zwanzigecks (Fortsetzung). Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 330-333.

L. Catalá. Contribución á la teoría de polígonos regulares. Rev. Acad. Madrid **3**, 108-128.

F. Villareal. Inscripción de polígonos. Rev. de Ciencias, Lima 8, 153-156.

O. Schneider. Neue Konstruktion der Sehnen zu den Bogen von 36° und 108° nebst damit zusammenhängenden Beziehungen. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 15-16.

U. Ceretti. Sopra una costruzione approssimata del quadrato equivalente ad un dato cerchio. Il Pitagora **11**, 136-137.

Th. Adrian. Nachtrag zu den π-Formeln. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 31-33.

B. Plebani. Il latus rectum della spirale archimedèa scoperto dall' autore ed applicato alla quadratura geometrica del cerchio. Memoria. Torino: Paravia. 55 S. 8⁰ u. 4 Taf.

P. Tossati. Sulla quadratura del cerchio. Riv. di fis., mat. e sc. nat. $\mathbf{6}_2$, 223-227.

A. Raffalli. Découverte de la quadrature du cercle. Bastia: Piaggi. 8 S. 8⁰.

D. J. Turbyfill. To trisect any angle; containing an algebraic expression deduced from geometric principles, which trisects any angle. Sulphur Springs, Texas: Avera. 5 S. 8⁰.

F. Villareal. Trisección del ángulo. Refutación. Rev. de Ciencias, Lima **7**, 29-35 (1904).

G. dal Pozzo. Sulla dublicità del cubo. Riv. di fis., mat. e sc. nat. $\mathbf{6}_2$, 324-326.

K. Kosmik. Das Dreieck, vornehmlich betrachtet in bezug auf die ihm zukommenden besonderen Kreise und deren Radien. Pr. Mähr. Weißkirchen. 27 S. 8⁰.

V. Hübner. Ableitung einiger trigonometrischer Sätze. Časopis. **34**, 177-179. (Böhmisch.)

E. Le Grand Roy. Sur les formules fondamentales de la trigonométrie. Arch. sc. phys. et nat. (4) **19**, 293-296.

E. J. Nanson. The power series for sin x, cos x. Math. Gazette **3**, 244-245.

G. H. Hardy. Some notes on certain theorems in higher trigonometry. Math. Gazette **3**, 284-288.

W. W. Hendrickson. Notes on stereographic projection and the astronomical triangle. Annapolis: United States Naval Institute. 31 S. 16mo.

N. Abramescu. Über Tetraeder mit gleichen Seitenflächen. Gazeta mat. Bukarest **10**, 54-56. (Rumänisch.)

A. Bassi. Appunti di geometria metrica: tetraedro a faccie uguali; tetraedro ortocentrico. Il Pitagora **12**, 12-15.

A. Bindoni. Sulla simmetria rispetto ad un' asse di due rette sghembe. Il Pitagora **12**, 11-12.

A. Cabreira. Note sur les rapports des solides. Coimbra. 11 S. 8°.

E. Ducci. Sezioni del cono retto circolare e deduzione delle loro principali proprietà. Lezioni. Melfi: Grieco. 49 S. 8°.

J. Fuller. New and original treatise on the geometrical development of round and oval cones. New York. 53 S. 8°.

G. Hanssler. De los cuerpos de Simpson. Rev. de Mat. Santiago de Chile **2**, 259-264.

A. Sykora. Wie berechnet man die Oberfläche und den Inhalt eines schief abgeschnittenen Rotationskegels? Časopis. **34**, 92-94. (Böhmisch.)

C. E. Wasteels. Sur une transformation des figures sphériques. Mathesis (3) **5**, 203-205.

E. B. Wilson. Seven lectures on spherical geometry. Reprinted from „The American Mathematical Monthly" 1904. 34 S. 8°.

Kapitel 4.

Darstellende Geometrie.

W. Fiedler. Meine Mitarbeit an der Reform der darstellenden Geometrie in neuerer Zeit. Deutsche Math. Ver. **14**, 493-503.

In großen Zügen schildert W. Fiedler seine Entwicklung als darstellender Geometer, den Inhalt seiner Arbeiten über darstellende Geometrie und die Gesichtspunkte, die ihn bei der Abfassung seiner Arbeiten leiteten. Seit 1857 lehrt Fiedler darstellende Geometrie; er ist also jetzt gerade fünfzig Jahre unermüdlich als anregender Lehrer für seine Wissenschaft tätig. Js.

M. BERNHARD. Darstellende Geometrie mit Einschluß der Schattenkonstruktionen und der Perspektive. Als Leitfaden für den Unterricht an technischen Lehranstalten, Oberrealschulen und Realgymnasien, sowie zum Selbststudium herausgegeben. Zweite verbesserte und stark vermehrte Auflage. Stuttgart: H. Enderlen. XI u. 278 S. 8°.

Das Buch gliedert sich in vier Teile, in dessen erstem die nötigen stereometrischen Grundbegriffe und -sätze dargestellt werden. Der zweite, umfangreichste Teil (186 Seiten) behandelt vorzugsweise die orthogonale Projektion auf zwei zueinander senkrechte Ebenen. Hier ist ziemlich am Anfang ein Paragraph der schiefen Parallelprojektion gewidmet, wie dies jetzt vorteilhafterweise häufiger schon geschieht. Auch die wesentlichsten Eigenschaften der Kegelschnitte sind abgeleitet; es sind den projektiven Eigenschaften die Brennpunktseigenschaften vorangestellt und elementar bewiesen. Für ein Lehrbuch der darstellenden Geometrie erscheint es dem Ref. allerdings angemessener, Ellipse, Parabel und Hyperbel als Schnitte des geraden Kreiskegels zu definieren, zumal in dem Buche der schiefe Kreiskegel gar nicht betrachtet ist, und aus dieser Definition ihre Eigenschaften mittels des Dandelinschen Beweises abzuleiten. Auf die Weise hätte sich auch der Satz, daß die Tangente den einen Winkel zwischen den Brennstrahlen halbiert, ohne infinitesimale Betrachtung, die in der Geometrie stets etwas Unbefriedigendes behält und deshalb in derselben soweit, als es nur irgend möglich ist, vermieden werden soll, beweisen lassen. Ziemlich ausführlich sind die zyklischen Kurven wegen ihrer Bedeutung für die Geometrie und die Maschinenlehre behandelt. Von krummen Flächen sind die Umdrehungsflächen sehr ausführlich und die Schraubenflächen behandelt. Den Schluß dieses Teils bilden die Durchdringungen von Vielflachen und krummen Flächen.

In der vorliegenden zweiten Auflage neu hinzugekommen ist der vierte Teil, der die Zentralprojektion im gleichen Umfange, wie der vorhergehende Teil die Schattenkonstruktionen, behandelt. Der Verf. macht von der Parallelverschiebung der Projektionsebenen häufig Gebrauch, wodurch viele Lösungen an Einfachheit und Genauigkeit der Ausführung gewinnen.

Das Buch zeichnet sich durch gute und sorgfältig ausgewählte Abbildungen aus. H.

J. VONDERLINN. Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. Leipzig: G. J. Göschen. 112 S. 8°. (Samml. Göschen, Nr. 260.)

In knapper Weise wird die senkrechte und schiefe Axonometrie, einschließlich der Schattenkonstruktionen behandelt. Der Text ist öfter gegenüber den Figuren zu kurz weggekommen; manche von ihnen, die dem Leser nur wenig bieten, so z. B. Fig. 49, 50, 55, 56, 57, hätten zugunsten des Textes ohne Schaden fortgelassen werden können. Die

Überschrift des zweiten Kapitels ist nicht verständlich, umsomehr als in dem Kapitel selbst der „Kegelkreis“ nirgends erklärt ist; es liegt wohl ein Druckfehler (Kugelkreis) vor, trotzdem sich jenes Wort auch in allen Seitenüberschriften dieses Kapitels findet. H.

R. Schüssler. Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Leipzig: B. G. Teubner. VII u. 165 S. 8°. 29 Tafeln.

Das vorliegende Lehrbuch verfolgt den Zweck, den Leser, ohne daß es von ihm Kenntnisse in der darstellenden Geometrie voraussetzt, in die orthogonale Axonometrie einzuführen und dieser einfachen und anschaulichen Projektionsmethode, die bei der Herstellung von Bildern räumlicher Gebilde vielfache Verwendung findet, auch in theoretischer Beziehung als selbständigem Teile der darstellenden Geometrie größere Verbreitung zu verschaffen. Im besonderen verfolgt der Verf. noch den Zweck, die einfachen Resultate, die in den Abhandlungen von Pelz enthalten sind, leichter zugänglich zu machen. Man findet fast sämtliche Aufgaben, die man in der orthogonalen Projektion auf zwei zueinander senkrechte Tafeln zu behandeln pflegt, hier in orthogonaler Axonometrie durchgeführt.

In dem ersten Kapitel wird das axonometrische Achsenkreuz und seine günstigste Wahl eingehend besprochen. Die folgenden Kapitel handeln über Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen, ihren gegenseitigen Lagebeziehungen, über Schattenkonstruktionen ebenflächig begrenzter Körper, über Pyramiden und Prismen; charakteristischer für die orthogonale Axonometrie sind das sechste und siebente Kapitel über normale Lagen von Geraden und Ebenen und Aufgaben der Geometrie des Maßes. Daß die Orthogonalprojektion des Kreises eine Ellipse ist, wäre wohl besser mittels des Dandelinschen Beweises, statt des auf S. 76 gegebenen gezeigt worden, zumal die Dandelinsche Konstruktion sich in dem folgenden Kapitel über die Kegelschnitte findet. Die folgenden drei Kapitel behandeln die Zylinder- und Kegelflächen zweiten Grades, sowie ihre Durchdringungen. Die letzten drei Kapitel sind der Kugel und den Umdrehungsflächen gewidmet. H.

K. Doehlemann. Raumkunst und Illusionsmalerei. Deutsche Math. Ver. **14**, 47-55.

Wiederabdruck des im vorigen Jahrgange (**35**, 545, 1904) besprochenen Aufsatzes. H.

K. Doehlemann. Die Perspektive der Brüder van Eyck. Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 419-425.

G. Josef Kern hat in seinem Buche „Die Grundzüge der linearperspektivischen Darstellung in der Kunst der Gebrüder van Eyck und

ihrer Schule. I. Die perspektivische Projektion" (Leipzig, 1904) diejenigen Bilder der genannten Künstler, die durch das Vorhandensein von Architektur eine Kontrolle der genauen perspektivischen Konstruktion ermöglichen, in dieser Richtung untersucht. Nach der Richtigkeit der perspektivischen Konstruktion ordnet Kern die Bilder der Brüder van Eyck in eine Reihe, an deren Ende er die Madonna des Kanzlers Rolin (Paris, Louvre) als perspektivisch beste Leistung stellt. Im Gegensatze dazu kommt der Verf. zu dem Schlusse, daß aus der Kernschen Reihenfolge kein stetiger Fortschritt in der Perspektive herauszuerkennen ist; zeigt auch ein Bild geringere perspektivische Fehler als ein anderes, so geht doch die tastende Unsicherheit eines — wenn auch ungewöhnlich scharf beobachtenden — Empirikers durch alle hindurch. Das Gesetz vom Fluchtpunkte der Tiefenlinie (d. h. der auf der Bildebene senkrecht stehenden Geraden) ist Jan van Eyck nicht bekannt gewesen, während es sein Schüler Petrus Christus gekannt zu haben scheint.

Zum Schlusse wendet sich der Verf. mit Recht noch gegen die Überschätzung, die vielfach der Bedeutung von Euklids Perspektive zu teil wird. H.

A. von Öttingen. Die Mängel der psychischen Fähigkeit, perspektivische Bilder richtig aufzufassen. Leipz. Ber. **57**, 360-369.

Obwohl ein Bild nur für einen bestimmten Augenpunkt entworfen ist, gibt es doch viele Fälle, in denen Teile der Zeichnung auch dann noch richtig erscheinen, wenn der Beschauer seinen Standpunkt verändert. Diese Freiheiten der Augenbewegung ohne Gefahr einer Bildverzerrung hat der Verf. in einer früheren Mitteilung (F. d. M. **32**, 521, 1901) systematisch und kombinatorisch in bezug auf die Elemente Horizont, Hauptpunkt und Distanz dargestellt. In der jetzt vorliegenden Mitteilung behandelt er nun die entgegengesetzte Frage, ob trotz Einhaltung des richtigen Augenpunktes das Bild unrichtig oder mangelhaft erfaßt werden kann. Bei dem Versuche, auch diesen Fall systematisch zu ordnen, kommt der Verf. zu der Erkenntnis, daß zwar Mängel vorhanden sind, daß aber eine Schulung oder Übung des Vorstellungsvermögens möglich ist; es bietet uns das strenge mathematische Gesetz ein Mittel dar, die Vorstellungsfähigkeit zu prüfen und zu berichtigen. H.

E. Müller. Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie. Deutsche Math. Ver. **14**, 569-574.

Um auch bei Anwendung von Zentral- oder schiefer Parallel-Projektion einen Punkt des Raumes wieder aus seiner Projektion ermitteln zu können, muß man ihn durch ein orientiertes Punktepaar der Bildebene, d. h. durch ein Punktepaar, bei dem die Reihenfolge der beiden Punkte zu beachten ist, darstellen. Auf diese Weise wird der Raum auf die

Mannigfaltigkeit jener Punktepaare abgebildet, die den Strahlen eines Parallelstrahlenbüschels der Bildebene angehören, und die Aufgaben der darstellenden Geometrie werden zu solchen über Punktepaare und Mannigfaltigkeiten derselben. Der Verf. legt sich nun die Frage vor, unter welchen Voraussetzungen über die Zuordnung von orientierten Punktepaaren der Ebene und Punkten des Raumes sich die Aufgaben über Lagebeziehungen im wesentlichen ebenso lösen lassen wie in der orthogonalen Projektion, wenn man von der Benutzung der Spurelemente absieht. Zur Gewinnung eines allgemeinen Ausdrucks für diese Zuordnung ist es vorteilhaft, die allgemeinere Mannigfaltigkeit, die die erwähnte Punktepaarmannigfaltigkeit als Sonderfall enthält, an und für sich zu betrachten und nachzuweisen, daß sie sich als linearer dreidimensionaler Raum R_3 auffassen läßt. H.

E. Müller. Beiträge zur Zyklographie. Deutsche Math. Ver. **14**, 574-578.

Aus einer Vorlesung, die der Verf. an der technischen Hochschule in Wien über Zyklographie gehalten hat, teilt er hier einige Gedanken mit, die sich in W. Fiedlers Zyklographie gar nicht oder in anderer Form finden. H.

E. Amaturo. I metodi della triprojezione ortogonale, della biprojezione mongiana e della biprojezione parallela (biódiga) per la rappresentazione piana dello spazio ordinario. Batt. G. **43** [(2) **12**], 314-322.

Jeder Punkt (M) des Raumes wird durch ein Punktepaar M. M_1 der Zeichenebene α dargestellt, die der üblichen Bedingung genügen, daß beide Punkte senkrecht zur Projektionsachse untereinander liegen. Die zweite Projektionsebene ist unter einem beliebigen Winkel ω gegen α geneigt. Die drei Projektionen, die der Verf. betrachtet, unterscheiden sich durch die Art, wie M_1 bestimmt wird; M ist stets der Fußpunkt der von (M) auf α gefällten Lotes. Bei der ersten Art der Projektion (biprojezione parallela oder projezione biódiga) wird M_1 als Schnittpunkt des von (M) auf β gefällten Lotes mit α bestimmt; bei der zweiten Projektionsart (triprojezione ortogonale) wird von (M) ein Lot auf β gefällt und von dem Fußpunkte M' dieses Lotes in β noch ein Lot auf α, dessen Fußpunkt M_1 liefert; bei der letzten Projektionsart (biprojezione Mongiana) wird M' wie bei der zweiten bestimmt, von M' aber dann ein Lot auf die Ebene, die den Winkel ω (oder seinen Nebenwinkel) halbiert, gefällt und bis zum Schnittpunkte M_1 mit α verlängert. Für $\omega = 90^0$ versagen die beiden ersten Methoden, während die dritte das gewöhnliche Mongesche Verfahren liefert. H.

A. del Re. Sulle quattro rotazioni che sovrappongono un triedro trirettangolo ad un altro triedro trirettangolo e sulla astatica nei metodi della geometria descrittiva. Napoli Rend. (3) **11**, 215-238.

Die früher von Lipschitz (F. d. M. **31**, 301, 1900) auf analytischem Wege und dann von Burnside (F. d. M. **33**, 588, 1902) durch ein kinematisches Verfahren wieder abgeleiteten Resultate über die Drehung eines räumlichen rechtwinkligen Achsensystems in ein anderes mit demselben Anfangspunkte leitet der Verf. auf projektiv-geometrischem Wege ab und fügt einige weitere, vornehmlich trigonometrische Beziehungen hinzu. Zum Schlusse gibt der Verf. eine Anwendung seiner Betrachtungen auf das Problem, einen unter der Wirkung eines astatischen Kräftesystems, dessen Resultante nicht verschwindet, stehenden und in einem Punkte festgehaltenen Körper in eine Gleichgewichtslage zu bringen.
H.

Th. Schmid. Uneigentliche Projektion und Pilletsche Konstruktion. Monatshefte f. Math. **16**, 25-28.

Die uneigentliche Projektion (vgl. G. Hauck, Berl. M. Ges. **1**, 34; F. d. M. **33**, 547, 1902) des Raumes, die mit dem Aufriß und Kreuzriß komplanar ist, ist dem Schlagschatten auf die Grundebene bei Diagonalbeleuchtung ähnlich. Daraus folgt die Pilletsche Konstruktion des Schlagschattens einer Rotationsfläche mit vertikaler Achse für Diagonalbeleuchtung.
Sk.

M. J. M. Hill, L. N. G. Filon, H. W. Chapman. On the projection of two triangles on to the same triangle. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 403-429.

Die Verbindungslinie zweier Punkte, von denen zwei gegebene Dreiecke $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ im Raume auf ein drittes Dreieck projiziert werden können, ist eine Erzeugende der Regelfläche zweiten Grades, deren drei Leitlinien die Verbindungsgeraden der Ecken von $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ sind; die Ebene des dritten Dreiecks kann beliebig gewählt werden. Bewegen sich die beiden Projektionszentren auf einer Erzeugenden der Regelfläche, so verändert sich die projektive Beziehung zwischen den Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ der beiden Dreiecke $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ nicht, und die Ebene des dritten Dreiecks dreht sich um den festen Punkt der Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$, der sich selbst entspricht; dieser Punkt läßt sich leicht konstruieren. Die Regelfläche wird von den Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ in den Kegelschnitten k_1 und k_2 geschnitten; die Ecken von $\mathfrak{D}_1$ und der Schnittpunkt der Erzeugenden, welche die Projektionszentren verbindet, mit k_1 entsprechen den Ecken von $\mathfrak{D}_2$ und dem Schnittpunkte derselben Erzeugenden mit k_2. Weitere Punkte von k_1 und k_2 können sich im allgemeinen nicht entsprechen; ist es aber der Fall, so entsprechen sich alle Punkte von k_1 und k_2, die auf derselben Erzeugenden liegen.

Beschreibt die Verbindungsgerade der beiden Projektionszentren die Regelfläche, so beschreibt jeder Punkt der zweiten Ebene, der einem festen Punkte der ersten Ebene entspricht, eine Kurve dritter Ordnung mit einem Knotenpunkte. Zusammenhang des obigen Problems mit einem von Graßmann behandelten. H.

G. Tognoli. Sopra alcune costruzioni nel metodo delle projezioni ortogonali. Riv. di fis., mat. e sc. nat. 6_1, 325-326.

Die übliche Auflösung einiger elementaren Probleme der darstellenden Geometrie wird vereinfacht. Vi.

J. Juel-Rénoy. Sur la projection orthogonale du cercle. Nouv. Ann. (4) 5, 543-544.

Aus der Erzeugung eines Kegelschnitts durch Orthogonalprojektion eines Kreises leitet der Verf. die Leitlinien und ihre Eigenschaften her. Sk.

O. Richter. Zur Orthogonalprojektion des Würfels. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 333-335.

Lösung der Aufgabe, „die senkrechte Projektion $OCDE$ dreier in einer Ecke zusammenstoßenden Würfelkanten oder des „Dreibeines" zu zeichnen, wenn die Längen $OC=c$, $OD=d$, $OE=e$ der Kantenprojektionen gegeben sind," nach einem Verfahren, das sich dem von H. Hertzer in den „Grundprinzipien der Parallelprojektion" befolgten anschließt, aber den daselbst gemachten Fehler vermeidet. Diese Methode ist vom Verf. bereits in den „Neuen Jahrbüchern für Philologie und Pädagogik" angegeben; ihrem „Verständnis steht selbst in den sechsstufigen Schulen keine Schwierigkeit entgegen." Lp.

G. Tognoli. Determinazione delle quadrisecanti di una quaterna di rette. Periodico di Mat. (3) **2**, 230.

Nachtrag zu dem Artikel von G. Loria in Periodico di Mat. (2) **4**, 289-291 (F. d. M. **33**, 550, 1902). Tognoli geht von den beiden Hyperboloiden aus, die von g_1, g_2, g_3 und g_1, g_2, g_4 als Erzeugenden einer Schar bestimmt werden. Lp.

N. A. Rynin. Konstruktion der Schnittpunkte der Geraden mit der Oberfläche des geraden Kreiskegels in orthogonaler Projektion. St. Petersb. Polytechn. Institut **3**, Nr. 1-2, 13-29.

Die Aufgabe wird „im Raume" und „in Projektionen" für beide Fälle gelöst, wenn die Spitze des Kegels 1. innerhalb der Grenzen der Zeichnung oder 2. außerhalb derselben liegt; die relative Genauigkeit der verschiedenen Lösungen wird besprochen. Si.

M. Grossmann. Nachweis und Konstruktion des zweiten Kreisschnittsystems eines schiefen Kreiskegels. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 23-24.

Benutzt die Elemente der stereographischen Projektion mit ihren kartographischen Anwendungen. Lp.

J. Adamczik. Konstruktion der Achsen, bezw. konjugierten Durchmesser der Projektionen des Schnittkreises zweier Kugelflächen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 188-189.

Mit Hülfe der Methoden der darstellenden Geometrie. Lp.

Ed. Novák. Über das Polardreieck, welches einem Kegelschnitte und der imaginären Kreislinie gemeinschaftlich ist. Pr. Realsch. in Telč. 8 S. (Böhmisch.)

Es wird eine Konstruktion der Kegelfläche zweiten Grades gegeben, welche durch ihre Leitkurve und Spitze bestimmt ist. Pe.

Č. Nevečeřal. Parallele Beleuchtung eines Rotationsellipsoides in allgemeiner Lage bei Zentralprojektion. Rozpravy. **14**, Nr. 17, 3 S.

Abbildung der Grenze des Eigen- und des Schlagschattens. Pe.

L. Klug. Konstruktion des Reliefs einer Fläche zweiter Ordnung. Wien. Ber. **114**, 65-77.

In einer früheren Mitteilung (F. d. M. **35**, 547, 1904) hatte der Verf. gezeigt, wie man den Perspektivumriß u' einer Fläche zweiter Ordnung F' findet, wenn die Fläche durch das Bild eines Polartetraeders und die Bilder der auf seinen Kanten befindlichen Involutionen der harmonischen Pole der Fläche gegeben ist. Den einen oder den anderen des von diesem Umrisse u' begrenzten Flächenraumes der Bildebene kann man als ein unendlich dünnes Relief der Fläche F betrachten, nämlich als ein Relief, bei dessen Bestimmung die Verschwindungsebene durch das Projektionszentrum geht. Auf Grund der in jener früheren Mitteilung gegebenen Konstruktionen und eines Satzes über die perspektiven Bilder des Reliefluchtpunktes einer Geraden und der Reliefluchtlinie einer Ebene kann man die Zentralprojektion des Reliefs einer Fläche zweiter Ordnung auch in dem allgemeinen Falle in ziemlich einfacher Weise darstellen, was zu zeigen der Zweck der vorliegenden Mitteilung ist. Aus dieser Darstellung kann man Größe und Lage des Reliefs nach den Gesetzen der gewöhnlichen Perspektive finden. H.

C. HEUMAN. Über Trägheitsmomente von Punktsystemen und über eine fundamentale Aufgabe in der Theorie der axonometrischen Abbildung. Arkiv for mat., astr. och fys. 2, Nr. 16, 18 S.

Hauptzweck des Aufsatzes ist: „einen einfachen Zusammenhang aufzuweisen, welcher zwischen der Theorie quadratischer Momente und gewissen graphischen Problemen besteht, namentlich der Konturbestimmung von Flächen zweiter Ordnung.“ Der Verf. erhält dabei auch einen neuen Beweis für den Pohlkeschen Fundamentalsatz der allgemeinen Axonometrie und eine Verallgemeinerung der Form, in welcher Gauß den Hauptsatz der orthogonalen Axonometrie dargestellt hat. Msn.

SCHÖNEMANN. Photogrammetrische Untersuchungen. Progr. (Nr. 432). Kgl. Archigymn. Soest 29 S. 3 Taf.

Die Abhandlnng sucht mit den einfachsten Hülfsmitteln Antwort auf die Frage zu geben: Welche photogrammetrischen Resultate lassen sich mit Hülfe eines gewöhnlichen — nicht eines besonders für photogrammetrische Messungen konstruierten — photographischen Apparates erzielen, und wie muß man im Verein mit einfachen Operationen der praktischen Geometrie verfahren, um die räumlichen Dimensionen zu erhalten? H.

H. WIENERS Sammlung mathematischer Modelle. Leipzig: B. G. Teubner. 28 S.

Die vorliegende Sammlung von 59 Modellen bildet eine Auswahl aus der Sammlung, die auf dem III. internationalen Mathematiker-Kongreß zu Heidelberg von H. Wiener, dem Leiter des mathematischen Instituts der Technischen Hochschule zu Darmstadt, ausgestellt war; „es besteht die Absicht, durch jährlich wiederkehrende Ausgaben neuer Reihen alle wichtigeren der in der genannten Sammlung enthaltenen Modelle auch weiteren Kreisen zugänglich zu machen.“ Auch Modelle anderer Urheber können in die Sammlung aufgenommen werden, wenn sie den Bedingungen genügen, welche für den bis jetzt herausgegebenen Teil maßgebend gewesen sind: „Die Modelle sollen mehr dem Unterricht an höheren Schulen und Hochschulen dienen, als der Sonderforschung; sie sollen in geschlossenen Reihen ganze Gruppen geometrischer Gebilde und mathematischer Sätze umfassen und sich nicht in vereinzelten Stücken auf getrennte Gebiete verlieren; sie sollen endlich nach Größe und Ausstattung die Einheit der Sammlung wahren.“

Die Sammlung ist bis jetzt in 8 Reihen geteilt, von denen die erste 7 Drahtmodelle ebener Gebilde zum Projizieren enthält (Quadrat, regelmäßiges Fünfeck, Sechseck, Kreis mit umschriebenem Quadrat, gleichseitige Hyperbel, Parabel, Sinuslinie). Die beiden nächsten Reihen verdeutlichen ebenflächige Raumgebilde, und zwar besteht die zweite Reihe aus fünf Drahtmodellen der Platonischen Polyeder, die dritte Reihe aus sechs

Drahtmodellen mit Fäden (Würfel mit zwei eingeschriebenen Tetraedern sowie fünf Modellen, die vom Herausgeber schon früher hergestellt worden waren; vgl. Katalog von W. Dyck, Nachtrag 1893, S. 54). Die drei nächsten Reihen sind den Flächen zweiter Ordnung gewidmet: die vierte Reihe enthält sechs Drahtmodelle der Flächen zweiter Ordnung, dargestellt durch ihre Hauptschnitte (Kugel, Ellipsoid, zweischaliges und einschaliges Hyperboloid, elliptisches und hyperbolisches Paraboloid). Als Achsenverhältnis ist beim Ellipsoid und den beiden Hyperboloiden 5 : 4 : 3 gewählt; bei den Paraboloiden sind die Hauptschnitte der einen Fläche denen der anderen kongruent. Sehr schön und für den Unterricht von großer Bedeutung sind die Modelle der beiden nächsten Reihen; die fünfte Reihe enthält sechs bewegliche Modelle der Regelflächen zweiter Ordnung, und zwar zwei Fadenmodelle und vier Stabmodelle. Bei den beiden ersten (Rotationshyperboloid und hyperbolisches Paraboloid) wird die Spannung der Fäden nicht wie sonst durch angehängte Gewichte, sondern durch Unveränderlichkeit der Fadenlängen erreicht. Die Modelle haben aber noch andere große Vorzüge, insbesondere ist es beim Rotationshyperboloid durch eine sinnreiche Einrichtung ermöglicht, daß bei der Verdrehung des Deckkreises gegen den Grundkreis beide (verschieden gefärbte) Scharen von Erzeugenden sich an der (beliebigen) Veränderung der Einschnürung des Hyperboloids beteiligen; vom Zylinder kann man auf diese Weise durch allmähliche Übergänge zum Kegel gelangen. Die vier beweglichen Stabmodelle stellen ein einschaliges Hyperboloid, ferner ein ebensolches halb (zum Umstülpen), ein einschaliges Rotationshyperboloid und ein hyperbolisches Paraboloid dar. „Die Beweglichkeit dieser Stabmodelle beruht auf einem von O. Henrici im Jahre 1873 aufgestellten Satze. Jedes Modell läßt sich durch die gegenseitige Drehung der Stäbe in alle geradlinigen Flächen einer Schar von konfokalen Flächen zweiter Ordnung überführen. Die Schwierigkeit einer dauerhaften Herstellung dieser Modelle beruht darin, daß die Verbindung der Stäbe, die ja keine mathematischen Linien sind, außer der gegenseitigen Drehung um einen festen Punkt (in dem sich beide berühren) auch noch ein Herumwandern des Drehpunktes um den Umfang des Stabes gestatten muß. Dies geschieht durch „H. Wieners geschränktes Verbindungsgelenk“ (D. R. G. M. 208811), das aus zwei seitlich mittels Zapfens verbundenen Hülsen besteht; in diesen Hülsen sind die eingefrästen Stäbe drehbar.“ Die sechste Reihe enthält sechs bewegliche Drahtmodelle der Flächen zweiter Ordnung in Kreisschnitten (Ellipsoid, elliptisches Paraboloid, einschaliges und zweischaliges Hyperboloid, Doppelkegel und elliptischen Zylinder). Der Doppelkegel ist so eingerichtet, daß er mit jedem der beiden Hyperboloide gemeinsam bewegt werden kann, so daß der Kegel stets Asymptotenkegel der beiden Hyperboloide bleibt. Die Drähte sind ebenso wie bei den Modellen der fünften Reihe etwa 2 mm stark und versilbert, nur bei den drei ineinander steckbaren Modellen ist der Asymptotenkegel aus blanken Messingdrähten hergestellt und hebt sich dadurch von den beiden anderen Flächen deutlich ab. Die Beweglichkeit ist wieder durch das „geschränkte Ver-

bindungsgelenk“ erreicht. Zur siebenten Reihe gehören sechs Drahtmodelle von Dreh- und Schraubenflächen (Kugel, Wulst (Ringfläche), Urne, Wendelfläche, schiefe geschlossene Regelschraubenfläche, Schraubenröhrenfläche). Die Kugel ist dargestellt durch eine Schar von Parallelkreisen, deren Ebenen in Abständen aufeinanderfolgen, wie sie in den Helligkeitsstufen bei Parallelbeleuchtung auftreten. Die Ringfläche erlaubt wegen der praktischen Darstellung durch die Meridiankreise eine gute Beobachtung des vierspitzigen inneren Umrisses, der sonst wegen der Undurchsichtigkeit der Modelle immer nur zum kleinsten Teil zu sehen ist. Die Urne hat als Meridian eine zur Sinuslinie affine Kurve. Die (Meusniersche) Wendelfläche enthält außer der Schar der zur Achse senkrechten Erzeugenden noch die zweite Schar Asymptotenkurven (hier Schraubenlinien), die dem Modelle zu einer außerordentlich plastischen Wirkung verhelfen. Leider kann man das Letztere dem Modell der schiefen geschlossenen Regelschraubenfläche nicht ebenso bedingungslos nachrühmen; zwar sind hier die Erzeugenden durch rote, die gekrümmten Asymptotenlinien durch blanke Drähte dargestellt, jedoch kann der Lernende, wenn er sich selbst nur wenige Schritte vom Modell entfernt befindet (wie etwa in mittelgroßen Hörsälen), von der Gestalt der Fläche keine deutliche Anschauung erhalten, wovon sich Ref. bei seinen Vorlesungen in der Berliner Technischen Hochschule überzeugt hat. Zur Abhülfe müßte entweder die Anzahl der Erzeugenden (jetzt in Abständen von $^1/_8$ Umdrehung) und der krummen Asymptotenlinien (desgl.) vermehrt werden, oder aber es müßte die Randschraubenlinie eine geringere Steigung erhalten. Vielleicht läßt sich auch beides ändern. — Die achte Reihe bringt sechzehn Fadenmodelle der Singularitäten von Raumkurven. Dabei sind die Raumkurven durch ihre abwickelbaren Tangentenflächen dargestellt, „und zwar in sechzehn Modellen die acht Fälle von Singularitäten, die an einer Stelle einer Raumkurve auftreten können, je nachdem der Punkt, die Tangente und die Schmiegungsebene ein fortschreitendes oder ein rückkehrendes Element ist, und ferner für die viererlei Lagen dieser Stelle gegen das Unendlichferne.“ [Vgl. hierzu den Zusatz II in H. Wieners Vortrag „Entwicklung geometrischer Formen“ (Verh. d. III. Int. Math. Kongr. Heidelberg 1904, S. 746f.)] Bemerkenswert erscheint, daß die in den Modellen dargestellten Raumkurven als die einfachsten ihrer Art bezeichnet werden können, „weil sie rationale Kurven niedrigster Ordnung sind, die an einer Stelle eine vorgeschriebene Singularität und an einer zweiten die dazu duale enthalten, zwischen beiden aber völlig singularitätenfrei verlaufen, und weil sie ferner ein größtes Maß von Symmetrie besitzen. Durch die Art der Symmetrie erhält man aber ein einfaches und, wie es scheint, bisher nicht beachtetes Merkmal zur Unterscheidung der acht Fälle.“ (Vgl. den soeben zitierten Zusatz.)

Der vortrefflichen Sammlung ist zu wünschen, daß die Fortsetzung ein ebenso hervorragendes Unterrichtsmittel werden möge wie der bisher veröffentlichte Teil.

Z.

H. WIENER. Entwicklung geometrischer Formen. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 739-750.

Im Anschluß an die Modellausstellung des mathematischen Instituts der technischen Hochschule zu Darmstadt stellt der Vortragende einleitend die Bedingungen auf, welche geometrische Modelle zu erfüllen haben, und erläutert ihre Anwendung im Unterricht. An den einzelnen Objekten der ausgestellten Sammlung werden dann die verschiedenen Methoden gekennzeichnet, durch die man aus gegebenen geometrischen Formen neue herleiten kann (Projizieren von Linien und Flächen, Schneiden von Flächen, Konstruktion von Umrißlinien, Isophoten und anderen ausgezeichneten Linien auf Flächen, Erzeugung einer Fläche durch Bewegung einer Linie usw.). Anhangsweise findet sich die Unterscheidung der acht verschiedenen Arten eines Raumkurvenpunktes, die Charakterisierung der 13 Arten von Büscheln von Flächen zweiter Ordnung, welche vier Kegel enthalten, und Bemerkungen über eine Raumkurve, die auf einem Zylinder mit gleichseitig-hyperbolischer Basis dieselbe Rolle spielt, wie die gewöhnliche Schraubenlinie auf dem Kreiszylinder. Sk.

K. MACK. Tangentenkonstruktion mit Hülfe des Spiegellineals. Zs. f. Math. und Phys. **52**, 435-436.

Das von E. Reusch (Das Spiegellineal; Carls Rep. f. exp. Phys. **16**, 255; 1880) angegebene und zur Konstruktion der Normale einer beliebigen Kurve in einem beliebigen Punkte verwendete Spiegellineal besteht im wesentlichen aus einem Planspiegelchen, das längs der Kante eines Lineals senkrecht zur Zeichenebene angebracht ist. Schneidet das Lineal die gezeichnet vorliegende Kurve in einer Sehne, so bilden Kurve und Bild zwei Spitzen, deren Abstand verschwindet, wenn man durch Drehen des Lineals um eine von ihnen die Tangentenlage erreicht.

Sk.

Weitere Literatur.

H. BECKER. Geometrisches Zeichnen. Neubearbeitet von J. Vonderlinn. Dritte (der Neubearbeitung erste) Aufl. Leipzig: G. J. Göschen. 136 S. 290 Fig. 23 Taf. kl. 8°. (Sammlung Göschen Nr. 58.)

P. BERNIOLLE. Leçons de géométrie descriptive, conformes aux programmes du 31 mai 1902, pour les classes de mathématiques *A* et *B*. Paris: Paulin. 160 S. 18mo.

J. CHOLLET. Traité de géométrie descriptive. Paris: Vuibert 8°. Première partie. 2e éd. 188 S. Deuxième partie 204 S.

C. E. FERRIS. Elements of descriptive geometry. New York: American Book Company. VII u. 127 S. 8°.

H. FERVAL. Éléments de géométrie descriptive. 5e édition, complètement remaniée. Paris: Belin. VI u. 298 S. 12mo. 6e édition. VI u. 326 S. 12mo.

TH. HARTWIG. Leitfaden der konstruierenden Stereometrie. Darstellung der Raumformen im Schrägbilde, nebst Anwendung von Schrägbildern auf dem Gebiete der theoret. u. rechn. Stereometrie, darstellenden Geometrie, Mineralogie, Geographie und Physik. Wien: C. Fromme. 39 S. 55 Fig. gr. 8°.

W. J. HEIJDEMAN. Beginselen der beschrijvende meetkunde. Amsterdam: Ahrend & Zoon 91 S. 8°.

G. IZZI. Corso elementare di projezioni e prospettiva, compilato per gli istituti tecnici, le scuole normali, tecniche e complementari. Palermo: Brangi. 79 S. 8°.

W. J. KURDJUMOW. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Abteilung III: Axonometrische, gerad- und krummlinige Projektionen. Zweite verb. Aufl. St. Petersburg. 250 S. gr. 8°. (Russisch.)

E. LEBON. Géométrie descriptive et géométrie cotée, conforme aux programmes du 31 mai 1902 pour l'enseignement secondaire. Classes de mathématiques A et B. Paris: Delalain. VI u. 176 S. 8°.

C. H. MCLEOD. Elementary descriptive geometry. New York: Wiley. IX u. 118 S. 8°.

W. C. MARSHALL. Descriptive geometry, for use of students in engineering at the Sheffield Scientific School of Yale University. New Haven: Yale Cooperative Corporation. 61 S. 16mo.

J. A. MOYER. Descriptive geometry for students of engineering. 2d edition. New York: Wiley. VIII u. 198 S. 8vo.

L. PEDROTTI. Elementi di geometria descrittiva. Milano: Sonzogno. 61 S. 16mo. (Biblioteca del popolo, Nr. 374.)

O. E. RANDALL. Elements of descriptive geometry; with applications to isometric projection and other forms of one-plane projection. A text-book for colleges and engineering schools. Boston: Ginn. 209 S. 8°.

F. SCHÜTTE. Anfangsgründe der darstellenden Geometrie für Gymnasien. Leipzig: B. G. Teubner, und Progr. Gymn. Düren 1905, 42 S. 54 Fig. 8°.
H.

F. SMOLIK's Elemente der darstellenden Geometrie. Ein Lehrbuch für Oberrealschulen. Neubearbeitet von J. F. Heller. Dritte Aufl. Wien: F. Tempsky. Leipzig: G. Freytag. VI u. 306 S. 334 Fig. 8°.

J. WILD und J. SCHLESCHKA. Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie und Projektionslehre. Wien. 90 S. 8°.

E. AMATURO. Sui metodi della geometria descrittiva. Batt. G. **43** [(2) **12**], 29-32.

Der Verf. betrachtet lineare Transformationen der Projektionsebene, welche den Kunstgriff des Umklappens einer ebenen Figur ersetzen können.
Lp.

A. H. BARKER. Graphic methods of engine design, including the graphical treatment of the balancing of engines. 2d ed. London: Technical Publ. Co. 218 S. 12mo.

G. M. BARTLETT. Numerical problems in descriptive geometry for class and drawing-room practice. Ann Arbor, Mich.: Bartlett. 62 S. 12mo.

C. CAPELLI. Sulla prospettiva parallela o prospettiva assonometrica; teorema di Pohlke. Milano: Marcolli. 18 S. 4°.

A. DEL RE. Intorno ai metodi di rappresentazione della geometria descrittiva. Atti Acc. Pontaniana (2) **10**, Nr. 5, 9 S.

V. HÜBNER. Die zentrale und geometrale Beleuchtung der Kugel. Časopis. **34**, 173-177. (Böhmisch.)

V. JEŘÁBEK. Über die Konstruktion der Projektion eines elliptischen Schnittes des Rotationsparaboloides auf eine zu seiner Achse senkrechte Ebene. Časopis **34**, 342-348. (Böhmisch.)

I. JONESCU. Die graphischen Konstruktionen in der angewandten Geometrie. Gazeta mat. Bukarest **10**, 101-104, 125-131, 173-179, 200-202, 221-227. (Rumänisch.)

KÖRBERS Strahlendiagramm zur vereinfachten Herstellung perspektivischer Zeichnungen. (1 Blatt auf Pauspapier.) Berlin: W. Ernst.

Č. NEVEČEŘAL. Konstruktion der Rotationsfläche zweiten Grades, wenn die Rotationsachse und drei Tangenten gegeben sind. Rozpravy. **14**, Nr. 18, 3 S.

PAULMIER. Points de rencontre d'une droite et d'un cône circonscrit à une sphère. Interm. des math. **12**, 213-215, Nr. 2913).

S. L. PENFIELD. On the drawing of crystals from stereographic and gnomonic projection. Amer. Journ. of Science **21**, 206-215.

TH. SCHMID. Bemerkung zur „Aufgabe über trilinear verwandte Felder“. Monatsh. f. Math. **16**, 48. (Zu Monatsh. f. Math. **14**, 343; F. d. M. **34**, 591, 1903.)

J. SCHMIDL. Über die sphärischen Kegelschnitte und ihre orthogonalen Projektionen. Prag-Neustadt. 24 S. 8°.

H. SCHNITZLER. Über die Belichtung von krummen Flächen, speziell von Rotationsflächen zweiter Ordnung. Rostock. 37 S. 8°.

J. WATSON. Oblique and isometric projection. London: Edward Arnold. IV u. 59 S. [Nature **72**, 629.]

Kapitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

F. AMODEO. Lezioni di geometria proiettiva dettata nella R. Università di Napoli. 3ª edizione. Napoli: L. Pierro XV u. 451 S. gr. 8°.

Die Stellung des Verf. zu den fünf Axiomen, welche er in seinen Schriften über projektive Geometrie als Grundlage gewählt hat, ist genügend bekannt (vgl. F. d. M. **20**, 580ff, 1888; **21**, 603ff, 1889; **23**, 694ff, 1891; **27**, 419 und besonders 420-424, 1896). Auch in diesem

Buche, welches aus seinen (autographierten) Vorlesungen über binäre Homographien und über die projektive Geometrie (vgl. Nr. 1, 2 und 4 der zitierten Arbeiten) hervorgegangen ist, stellt er die erwähnten fünf Postulate an den Anfang. Bemerkenswert erscheint, daß gleich von vornherein die Definitionen und Lehrsätze soweit als möglich auch für lineare Räume von n Dimensionen gegeben werden, daß aber natürlich später der Spezialfall $n = 3$, wie ihm gebührt, besonders eingehend behandelt wird. Bezüglich des Inhaltsverzeichnisses zur Einleitung und zum ersten Hauptteil kann auf das Referat über die zweite (noch autographierte) Auflage des Buches (vgl. F. d. M. **33**, 555, 1902) verwiesen werden. Hinzugekommen ist der zweite Hauptteil über eindimensionale Gebilde zweiter Ordnung, in welchem auch die metrischen Beziehungen nicht vernachlässigt werden. Neu sind auch sehr zahlreiche Übungsbeispiele für die Studierenden, und zwar sind die Aufgaben immer am Schlusse eines Kapitels zusammengestellt. Daß der Text gegen die früheren Auflagen verbessert erscheint, ist an zahlreichen Stellen zu bemerken. Die 420 Figuren sind zwar für unsere deutschen Begriffe recht klein geraten, im Druck auch nicht besonders sauber ausgeführt, mögen aber als Skizzen immerhin ihren Zweck erfüllen. Die Sprache ist durchweg klar, die Darstellung eingehend und ziemlich breit, so daß das Buch auch für jüngere Studierende leicht verständlich ist. Z.

K. Doehlemann. Projektive Geometrie in synthetischer Darstellung. 3. verb. Aufl. Leipzig: G. J. Göschen. 181 S. 12mo. (Sammlung Göschen Nr. 72.)

Das in der bekannten „Sammlung Göschen" erschienene Werkchen behandelt die projektive Geometrie mit Benutzung des Doppelverhältnisses. Nachdem in den ersten vier Abschnitten die Grundlagen der synthetischen Geometrie: die perspektive Beziehung, die harmonischen Gebilde, die projektive Beziehung und die Involution dargestellt worden sind, werden in den drei letzten Abschnitten die Kegelschnitte und die Kegel- und Regelflächen zweiter Ordnung als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde behandelt. Die Kegelschnittlehre, die bis zur Polarentheorie reicht, enthält viele lehrreiche Übungsbeispiele. Die Darstellung ist klar und auch für Anfänger leicht verständlich, die Figuren sind deutlich und übersichtlich. Das Werk kann zur Einführung in das Studium der synthetischen Geometrie empfohlen werden. Zch.

A. Emch. An introduction to projective geometry and its applications: an analytic and synthetic treatment. New York: Wiley and Sons. London: Chapman and Hall. VII u. 267 S. 8°. [Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 132-133. Nature **72**, 77.]

„Ein Buch, das sich besonders an Studenten der Technik und an andere wendet, welche die projektive Geometrie bei Werken der Praxis zu benutzen wünschen". Lp.

J. Richard. Sur une manière d'exposer la géométrie projective. Ens. math. **7**, 366-374.

Verf. benutzt die Einführung ebener Vektoren, um die Begründung der projektiven Geometrie zu erleichtern. D.

E. Rose. Die Axiome der projektiven Geometrie linearer Mannigfaltigkeiten. Diss. Straßburg. C. Müh & Cie. 58 S.

Aus einer Anzahl von Axiomen wird die projektive Geometrie linearer Mannigfaltigkeiten durch reine Deduktion abgeleitet. Wer sich in neuerer Zeit mit dieser Geometrie beschäftigt hat, wird wohl selbst ähnliche Überlegungen angestellt haben, trotzdem aber doch die systematischen Darlegungen des Verf. mit Interesse verfolgen. Js.

M. Pieri. Sulla definizione Staudtiana dell'omografia tra forme semplici reali. Periodico di Mat. (3) **3**, 1-6.

Die Definition, welche von Staudt in seiner Geometrie der Lage von der Projektivität zweier Gebilde erster Stufe gegeben hat, ist nach Meinung des Verf. an mehr Bedingungen geknüpft, als nötig sind. Unter Verweisung auf seine Abhandlung: „I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo" (Torino Mem. (2) **48**, 1-62; F. d. M. **29**, 407, 1898) stellt Pieri in dem vorliegenden Artikel die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die v. Staudtsche Definition zusammen. Im übrigen ist auf die vorjährige Arbeit des Verf. zu verweisen: „Circa il teorema fondamentale di Staudt e i principî della geometria projettiva (Torino Atti **39**, 313-331; F. d. M. **35**, 557, 1904). Lp.

G. Kohn. Über den Wurf von sechs Punkten der Ebene. Wien. Ber. **114**, 1431-1459.

„Man kann einem Gebilde Γ eines linearen Gebietes S einen Wurf zuschreiben durch die folgende Definition:

Ein Gebilde Γ des linearen Gebietes S und ein Gebilde Γ' des linearen Gebietes S' sollen dann und nur dann denselben Wurf bestimmen, wenn die beiden Gebiete S und S' so linear ineinander transformierbar sind, daß das eine Gebilde in das andere übergeht."

In der vorliegenden Arbeit werden die Würfe von sechs und von sieben Elementen zweidimensionaler linearer Gebilde näher untersucht. Es zeigt sich, daß gewisse Gruppen solcher Würfe existieren derart, daß durch irgend einen Wurf einer solchen Gruppe alle übrigen mitbestimmt sind. Bei den Würfen von sechs Elementen läßt die Betrachtung der Geraden einer Fläche dritter Ordnung, bei denen von sieben Elementen die der Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierter Ordnung die in Rede stehenden Beziehungen am besten erkennen. Unter den 27 Geraden einer

allgemeinen Fläche dritter Ordnung gibt es bekanntlich Systeme von je sechs untereinander windschiefen. Nun zeigt es sich, daß sechs solche Geraden $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ aus einem variablen Punkte P der Fläche durch sechs Ebenen von konstantem Wurfe projiziert werden. Es ist ferner durch Angabe dieses beliebig zu wählenden Wurfes die Fläche dritter Ordnung, abgesehen von linearen Transformationen, oder also: es ist der Wurf der Fläche vollkommen bestimmt. Da nun die Systeme von je sechs windschiefen Geraden paarweise als sogenannte Doppelsechsen auftreten, so ergibt sich zunächst, daß alle möglichen sechs-elementigen Würfe paarweise als „assoziierte Würfe" zusammentreten. Da es ferner auf einer Fläche dritter Ordnung 36 Doppelsechsen gibt, so werden sich je 36 Paare assoziierter Würfe zu einer Gruppe vereinigen. — Bei den Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierter Ordnung sind es die Aronholdschen Siebenersysteme, welche Veranlassung zur Gruppenbildung unter den sieben-elementigen Würfen geben. Bedient man sich der Hesseschen Erzeugung der Kurve vierter Ordnung, bei welcher die Flächen eines Flächennetzes zweiter Ordnung projektiv auf die Punkte einer Ebene bezogen werden, so entsprechen den im Netz enthaltenen Kegeln die Punkte der Kurve vierter Ordnung; zugleich findet eine eindeutige Beziehung zwischen ihren 28 Doppeltangenten und den Verbindungsgeraden der acht Grundpunkte des Flächennetzes statt. Den sieben von einem Grundpunkte ausgehenden Verbindungsgeraden entspricht ein Aronholdsches Siebenersystem. Hier gilt wieder der Satz, daß durch sieben beliebige Geraden einer Ebene, welche die zu einem Siebenersystem gehörigen Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung sein sollen, diese Kurve eindeutig, durch den Wurf der Tangenten der Wurf der Kurve eindeutig bestimmt ist. Indem nun den acht Grundpunkten des Flächennetzes acht Siebenersysteme entsprechen, ferner die Hessesche Erzeugung auf 36 Arten möglich ist, wodurch sich $8 \cdot 36 = 288$ Siebenersysteme ergeben, folgt, daß auch die sieben-elementigen Würfe sich zunächst zu je acht in Gruppen vereinigen, und daß sodann je 36 dieser Gruppen zu größeren Gruppen zusammentreten.

Wie zwischen dem Problem der Geraden einer Fläche dritter Ordnung und dem Problem der Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung, so bestehen natürlich auch zwischen den sechs- und sieben-elementigen Würfen einfache Beziehungen. Ist ein solcher Wurf von Punkten einer Ebene gegeben, so sind die durch ihn mitbestimmten durch einfache Wurfrelationen mit ihm verknüpft, welche zwar zum Teil durch räumliche Betrachtungen abgeleitet werden, dann aber auch dazu dienen können, die Zusammengehörigkeit der Würfe einer Gruppe zu definieren und aus einem von ihnen die übrigen in der Ebene konstruktiv herzustellen.

Stz.

F. Lucas. Sur la généralisation du rapport anharmonique. S. M. F. Bull. **33**, 225-229.

Verf. hatte (C. R. **77**, 1463; F. d. M. **5**, 304, 1873) das Doppelverhältnis von vier Punkten der Ebene durch den Doppelbruch

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

definiert, wenn die z_i die den Punkten in der komplexen Zahlenebene zugehörigen Zahlen sind. Das Doppelverhältnis ist dann und nur dann reell, wenn die vier Punkte die Ecken eines Kreisvierecks sind; es ist gleich -1, wenn dessen Diagonalen konjugierte Polaren in bezug auf den Kreis sind. Als Doppelverhältnis von vier Geraden der Ebene erklärt Verf. dasjenige ihrer vier Pole in bezug auf einen festen Kreis. Es ist dann zwar von dessen Radius, aber nicht von der Lage seines Mittelpunkts unabhängig. E. M.

G. Remoundos. Sur les rapports hyperanharmoniques. Nouv. Ann. (4) **5**, 364-366.

Der Verf. hat an anderer Stelle (vgl. F. d. M. **35**, 339, 1904) den Begriff des Doppelverhältnisses von vier auf $2n$ Größen ausgedehnt. Die neuen „hyperanharmonischen“ Verhältnisse sind zuweilen auf Produkte aus gewöhnlichen Doppelverhältnissen „reduktibel“, in den meisten Fällen aber nicht. Den Verf. interessieren besonders die letzteren. Er beweist, daß die hyperanharmonischen Verhältnisse durch projektive Transformationen nicht geändert werden, daß z. B. ein Büschel von $2n$ Strahlen mit jeder Geraden $2n$ Schnittpunkte von dem gleichen hyperanharmonischen Verhältnis erzeugt usf., wie bei gewöhnlichen Doppelverhältnissen.

Z.

G. Hessenberg. Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen. Math. Ann. **61**, 161-172.

Seitdem H. Wiener (Deutsche Math.-Ver. **1**, 47; F. d. M. **24**, 500, 1892) darauf hingewiesen hatte, daß der Desarguessche Satz über zwei perspektive Dreiecke und der Pascalsche Satz für das Geradenpaar genügen, um ohne Stetigkeitsbetrachtungen die projektive Geometrie zu entwickeln, sind die Voraussetzungen für die Gültigkeit dieser Sätze vielfach erörtert worden.

Der Desarguessche Satz läßt sich mit ausschließlicher Benutzung der ebenen und räumlichen Axiome der Anordnung und Verknüpfung beweisen. D. Hilbert hat gezeigt (Grundlagen der Geometrie § 23), daß der Satz nicht mehr beweisbar ist, wenn man von den Axiomen lediglich die räumlichen Verknüpfungsaxiome und das Kongruenzaxiom für Dreiecke fallen läßt, und ferner (§ 22), daß man ihn mit Hülfe einer Streckenrechnung aus dem Pascalschen Satze folgern kann. Die hierzu nötige Streckenrechnung setzt aber die Kongruenzaxiome voraus. Man hielt daher neben den Anordnungs- und Verknüpfungsaxiomen bisher beide Sätze für unentbehrliche Bausteine der projektiven Geometrie.

Die vorliegende Arbeit bringt nun einen wichtigen Fortschritt durch den Nachweis, daß der Desarguessche Satz lediglich unter Voraussetzung der ebenen Verknüpfungsaxiome sich aus dem Pascalschen Satze

herleiten läßt. Der Grund dafür ist, daß die Desarguessche Konfiguration durch dreimalige Verwendung einer Pascalschen Konfiguration hergestellt werden kann. Verf. führt den Beweis zunächst für den affinspezialisierten Fall (den Hilbert ausschließlich benutzt) und dann für den allgemeinen Fall, um zu zeigen, wodurch die im ersten Fall notwendigen Hülfslinien begründet sind. Da aus dem affin-spezialisierten Desarguesschen Satz die Existenz sämtlicher ebenen Zentralkollineationen folgt (vgl. Hessenberg, Arch. der Math. u. Phys. (3) **6**, 123; F. d. M. **34**, 531, 1903), so genügt allein der Pascalsche Satz in Hilberts Formulierung zum Beweis aller ebenen Schnittpunktsätze. E. M.

G. Hessenberg. Begründung der elliptischen Geometrie. Math. Ann **61**, 173-184.

F. Schur hat gezeigt (Math. Ann. **51**, 401; F. d. M **29**, 457, 1898), daß sich der Pascalsche Satz für ein Geradenpaar lediglich auf Grund der Anordnungs- und Verknüpfungsaxiome mit Einschluß der räumlichen sowie der ebenen (Math. Ann. **55**, 279, 1901) Kongruenzaxiome, jedoch mit Ausschluß des archimedischen Axioms beweisen läßt. D. Hilbert bewies dann in seinen „Grundlagen der Geometrie“ (Leipzig 1899, § 14, § 31ff) für den affin-spezialisierten Pascalschen Satz, — bei welchem das Parallelenaxiom hinzugenommen werden muß —, daß den Beweis zu führen unmöglich ist, wenn man von jenen Axiomen die Kongruenzaxiome fortläßt, und ferner, daß der Beweis noch möglich ist, wenn man von den Verknüpfungsaxiomen lediglich diejenigen der Ebene benutzt. D. Hilbert zeigte weiter (Math. Ann. **57**, 137-150, = Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl. 120; F. d. M. **34**, 523, 1903) die Beweisbarkeit auch für den Fall, daß unter den letztgenannten Voraussetzungen das Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie durch dasjenige der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie ersetzt wird.

Es blieb der Nachweis zu führen, daß das Gleiche für das Parallelenpostulat der elliptischen Geometrie gilt, d. h. daß der Pascalsche Satz für das Geradenpaar sich unter alleiniger Annahme der Axiome der Anordnung und des Parallelismus, wie sie für die elliptische Geometrie gelten, der ebenen Axiome der Verknüpfung und der Kongruenz beweisen läßt. Verf. erbringt diesen Nachweis, indem er die sphärische Form der elliptischen Geometrie zugrunde legt, und nach dem Vorgange von M. Dehn (Math. Ann. **53**, 404; F. d. M. **31**, 471, 1900) eine Pseudogeometrie einführt, mit dem Unterschiede jedoch, daß er nicht eine Gerade, sondern einen Punkt als ideal postuliert, und als Gerade der Pseudogeometrie nicht die Geraden, sondern die durch jenen Punkt gehenden Kreise der wirklichen Geometrie benutzt. In dieser Geometrie gelingt es nun dem Verf., und zwar ohne Benutzung der Streckenkongruenz, den Satz über die Winkel im Kreisviereck zu beweisen, aus welchem dann der Pascalsche Satz für die Pseudogeometrie und damit auch für die

wirkliche leicht folgt. Aus ihm ergibt sich der Desarguessche Satz, auf Grund dessen die Streckenkongruenz eingeführt wird. Dann sind aber alle Hülfsmittel zur Hand, um den Aufbau der elliptischen Geometrie zu beginnen. E. M.

G. Hessenberg. Neue Begründung der Sphärik. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **4**, 69-77.

Die Schwierigkeit einer zweidimensionalen Begründung der Sphärik konzentriert sich auf den Beweis des projektiven Fundamentalsatzes. Der Verf. zeigt, daß eine solche Begründung ohne Benutzung des archimedischen Axioms möglich ist, die für die euklidische und die beiden Formen der elliptischen Geometrie zugleich gültig ist. Es gibt zunächst einen vom Parallelenaxiom unabhängigen Beweis des Pascalschen Satzes, der folgendermaßen ausgesprochen wird: Laufen die Seiten eines einfachen Sechsecks abwechselnd durch zwei feste Punkte P, Q, so laufen die drei Hauptdiagonalen durch einen dritten Punkt R. Da sich, wie der Verf. an andrer Stelle zeigt (s. oben S. 583) die Figur des Desarguesschen Satzes aus drei Pascalschen Konfigurationen zusammensetzen läßt, so ist damit der projektive Fundamentalsatz begründet. Aus ihm ergibt sich auf bekannte Weise das Rechnen mit Würfen. Aus diesem werden im zweiten Teile des Vortrags die trigonometrischen Funktionen und die Grundformeln der Trigonometrie entwickelt. Zch.

R. Krause. Über senäre Raumkollineationen. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 22-29.

Von den zyklischen Raumkollineationen waren die binären, ternären und quaternären bekannt. (Vgl. Reye, Die Geometrie der Lage. II. Abt. dritte Aufl. Leipzig 1892. 11. Vortrag. Künftig in der dritten Abt.) Verf. hat die möglichen Arten senärer zyklischer Raumkollineationen φ (für die also $\varphi^6 = 1$ ist) dadurch erhalten, daß er eine ternär- und eine mit ihr vertauschbare binär-zyklische Raumkollineation auf jede mögliche Weise kombinierte. Es ergeben sich fünf verschiedene Arten. Die Punkte ordnen sich bei jeder von ihnen zu Ecken von Sechsecken an, die sich bei den fünf Arten folgendermaßen unterscheiden: 1. keine vier Ecken jedes Sechsecks liegen in einer Ebene, 2. die Hauptdiagonalen gehen durch denselben Punkt, 3. das Sechseck ist eben, 4. die sechs Ecken liegen zu je dreien auf zwei windschiefen Geraden, 5. die sechs Ecken liegen sämtlich auf einer Geraden. —

Die Arbeit ist ein Auszug aus der Diss. des Verf. Straßburg (Els.) 1903. E. M.

J. A. Vreeswijk Jr. Involuties op rationale krommen (Involutionen auf rationalen Kurven). Inaugural-Dissertation. Utrecht: J. van Druten. 104 S. 8°.

Zunächst wird die Theorie der quadratischen und auch der höheren Involutionen auf Geraden und auf rationalen, ebenen und räumlichen

Kurven entwickelt; dann werden mehrere, mittels einer gegebenen Involution aus der Kurve abgeleitete geometrische Gebilde in Betracht gezogen und gewisse auf diese Gebilde bezügliche charakteristische Anzahlen ermittelt. Kl.

Weitere Literatur.

D. Nasturas. Über ein System homographischer Punkte. Gazeta mat., Bukarest **10**, 8-11, 32-35. (Rumänisch.)

F. Severi. Complementi di geometria proiettiva. Raccolta di oltre 300 problemi colle relative soluzioni. Bologna: Zanichelli. VI u. 427 S. 8° (1906).

G. Vitali. Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta. Nota. Bologna: Gamberini e Parmeggiani. 5 S. 8°.

B. Besondere ebene Gebilde.

J. Neuberg. Sur un hexagone particulier. Brux. S. sc. **29** A, 186-196.

Wenn die Seiten a, b, c eines Dreiecks durch eine Transversale p in den Punkten A_a, B_b, C_c geschnitten werden, so treffen nach einer Umkehrung des Pascalschen Satzes drei durch diese Punkte gezogene Geraden a', b', c' die Seiten a, b, c in je zwei Punkten, und die so erhaltenen sechs Punkte liegen auf einem Kegelschnitte. Neuberg läßt a', b', c' durch einen Punkt D gehen und beschäftigt sich mit dem System der Kegelschnitte, welche den verschiedenen Lagen von D und p in der Ebene ABC entsprechen. Mn. (Lp.)

Ch. A. Scott. The elementary treatment of conics by means of the regulus. Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 1-7.

„Der „Regulus“ ist das System von Geraden (Strahlen), welche drei nicht inzidente (räumliche) Geraden, die Leitlinien (directors), treffen. Mit Hülfe des Fundamentaltheorems der projektiven Geometrie wird bewiesen, daß der Regulus von einem zweiten Regulus gekreuzt wird; irgendwelche drei Strahlen jedes der beiden dienen als Leitlinien des anderen; durch jeden Punkt auf einem Strahle von jedem geht ein Strahl des anderen.“

„Der Regulus liefert ungemein einfache Beweise für die Eigenschaften eines Kegelschnittes, mag er als Ort oder als Eingehüllte betrachtet werden; diese Beweise haben den Vorzug, daß sie von Anfang an die Punkte eines Kegelschnitts und die Tangenten eines Kegelschnitts verbinden, statt den Zusammenhang später durch eine kunstvolle Schlußkette im Beweise herzustellen.“

„Diese Note enthält die Anwendung der Methode auf die Beweise der Sätze von Chasles, Brianchon und Pascal sowie der polaren und involutorischen Eigenschaften.“ Lp.

J. Hadamard. Sur la théorie des coniques. Nouv. Ann. (4) **5**, 145-152.

Einfache elementare Beweise 1. für die Entstehung einer Ellipse durch proportionale Längenänderung einer Schar paralleler Kreissehnen unter Voraussetzung der Erzeugung der Ellipse als Enveloppe des einen Schenkels eines rechten Winkels, und umgekehrt; 2. für den Satz von der Konstanz der Fläche eines Parallelogramms, von welchem zwei Gegenecken ein Punkt der Hyperbel und ihr Mittelpunkt sind, und dessen Seiten die Richtung der Asymptoten haben — unter Voraussetzung des Satzes von der Gleichheit der Winkel, welche die Brennstrahlen nach den Berührungspunkten und nach dem Schnittpunkt zweier Tangenten der Hyperbel bilden; 3. für den Satz, daß eine beliebige Zentralprojektion eines Kreises ein Kegelschnitt ist. E. M.

L. Garnon. Note sur le cercle de Mannheim. Revue de Math. spéc. **15**, 139-140.

A. Droz-Farny. Note de géométrie. Revue de Math. spéc. **15**, 185.

J. D. Dufaut. Note sur le cercle de Mannheim. Ebenda **15**, 186.

Wenn man um einen Punkt P der Nebenachse eines Kegelschnitts einen diesen berührenden Kreis konstruiert, so schneiden sich die Polare des einen Brennpunkts F bezüglich dieses Kreises, die Gerade FP und die Berührungssehne in einem Punkte der zu F gehörigen Leitlinie des Kegelschnitts. Zu diesem von Garnon gefundenen Satze gibt Droz-Farny frühere Literatur und weitere Folgerungen, während Dufaut für ein von Garnon aus ihm gefundenes Ergebnis einen höchst einfachen geometrischen Beweis liefert. Sk.

E. von Weber. Einige Sätze über die Krümmungskreise eines Kegelschnitts. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 184-188.

„Durch die vorliegende Note möchte ich die Aufmerksamkeit auf eine Kategorie von Sätzen lenken, die mir die Theorie der Krümmungskreise eines Kegelschnitts in einem wichtigen Punkte zu ergänzen scheinen. Ich habe diese Sätze, die hier ohne Beweis mitgeteilt werden, an anderer Stelle (Münch. Ber. **34**, 447-483; F. d. M. **35**, 638, 1904) durch Heranziehung der elliptischen Funktionen und der Theorie der konfokalen Flächen zweiter Ordnung begründet; doch steht zu vermuten, daß sich für dieselben auch direckte geometrische Beweise finden lassen; die analytische Nachprüfung ist natürlich leicht.“ Lp.

B. Procházka. Ein Beitrag zu den Kurven zweiten Grades. Časopis. **34**, 209-215. (Böhmisch.)

Es wird eine Konstruktion der Tangente und des Oskulationskreises eines durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnittes mit Hülfe der kinematischen Geometrie gegeben. Pe.

G. Lery. Sur les trajectoires orthogonales d'une file de cercles. Nouv. Ann. de Math. (4) **5**, 106-109.

Die Orthogonaltrajektorien einer Kreisschar ergeben sich durch eine Riccatische Differentialgleichung; daher ist das Doppelverhältnis, nach dem vier Trajektorien die Kreise schneiden, für alle Kreise konstant (E. Picard). Lery gibt einen geometrischen Beweis des Satzes.

Sk.

J. Neuberg. Sur un groupe de trois hyperboles équilatères. Mathesis (3) **5**, 39-41.

Diese Hyperbeln sind zuerst von Lemoine betrachtet, später von Majcen genauer untersucht (F. d. M. **33**, 560, 1902). Lp.

G. Majcen. Détermination des axes d'une hyperbole, dont deux diamètres conjugués sont donnés. Ens. math. **7**, 221-225.

Aus einigen leicht ableitbaren Eigenschaften einer gleichseitigen Hyperbel ergibt sich durch Orthogonalprojektion eine recht brauchbare Konstruktion der Achsen und Achsenlängen einer Hyperbel, wenn ein Paar konjugierter Durchmesser und die ihnen zugehörigen Durchmessersehnen gegeben sind. Js.

C. Cantoni. Sur la détermination des axes d'une hyperbole. Ens. math. **7**, 396-398.

Die in dem vorstehenden Referate angegebene Konstruktion der Achsen und Achsenlängen einer Hyperbel aus einem Paar konjugierter Durchmesser und den ihnen zugehörigen Durchmessersehnen wird abgeleitet, ohne erst die Hyperbel als orthogonale Projektion einer gleichseitigen Hyperbel aufzufassen. Js.

Clapier. Concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1905 (Mathématiques élémentaires). Nouv. Ann. (4) **5**, 367-372.

Lösung von fünf Aufgaben: Gegeben ein Kreis K mit dem Mittelpunkt O, ferner ein Punkt P im Innern von K. Ein Lichtstrahl FP, der von einem Punkte F der Peripherie von K ausgeht, wird in P an dem Durchmesser OP reflektiert und trifft die Peripherie von K in einem Punkte E. Die Mitte der Sehne EF sei M, und die Sehne von K, welche den Durchmesser OP in P senkrecht schneidet, heiße AB. Gefordert ist: 1. den Ort für die Mittelpunkte der dem Dreieck MAB eingeschriebenen und angeschriebenen Kreise zu finden, wenn F die Peripherie von K durchläuft; 2. unter denselben Bedingungen anzugeben, wie der Kreis sich ändert, der durch die Mittelpunkte der drei angeschriebenen Kreise geht. 3. Man wählt im Innern von K auf OP einen

zweiten festen Punkt P'; ein Lichtstrahl $F'P'//FP$ wird in P' am Durchmesser reflektiert und schneidet K in E'. Den Ort des Schnittpunktes von EF und $E'F'$ zu finden, wenn F und F' sich auf K verschieben. Diesen Ort zu untersuchen unter der Voraussetzung, daß P und P' sich auf einem festen Durchmesser so verschieben, daß die Mitte von PP' fest bleibt. 4. Es sei M' die Mitte von $E'F'$. Die Gerade MM' schneidet den Ort von M in einem zweiten Punkte H und den Ort von M' in einem Punkte H'. Den dem Dreieck HOH' umschriebenen Kreis und die Mittelsenkrechte von HH' zu untersuchen. 5. Es sei T der Punkt, der HH' in einem gegebenen Verhältnis $m:1$ teilt. Zu beweisen, daß der Ort von T im allgemeinen eine Ellipse ist, und zu untersuchen, wie sich die Scheitelkreise dieser Ellipse ändern, wenn m sich ändert.

Die eleganten Lösungen werden durch drei Figuren erläutert. Z.

H. Oppenheimer. Über die Ausartungen der Schröterschen Konstruktion der ebenen Kurven dritter Ordnung. Monatsh. f. Math. **16**, 193-203.

Die Schrötersche sukzessive lineare Konstruktion der Punkte einer ebenen C_3 aus drei konjugierten Punktepaaren kann bei besonderer Lage der drei Paare, wie A. Hurwitz (J. für Math. **107**, 141; F. d. M. **22**, 657, 1890) gezeigt hat, dadurch ein Ende erreichen, daß schließlich die weitere Fortsetzung der Konstruktion keine neuen Punktepaare mehr ergibt und der Prozeß also nur eine endliche Anzahl verschiedener Punktepaare liefert.

Verf. untersucht nun die besondere geometrische Lage auf der C_3 derjenigen Punktepaare, die, als Ausgangspunktepaare gewählt, den Prozeß zu einem endlichen machen, und zeigt auf anschauliche Weise, warum bei solchen Punkten das Konstruktionsverfahren sich schließen muß.

Ferner wird noch der folgende Ausnahmefall hinzugefügt. Aus einem der drei Ausgangspaare (a, a'), (b, b'), (c, c'), etwa (a, a'), und dem unendlich benachbarten ergibt die Konstruktion als neues Paar den dritten Schnittpunkt d der Geraden aa' mit der C_3 und als konjugierten den gemeinsamen Tangentialpunkt von a und a'. Verf. zeigt, daß dieses Paar (d, d') sich als ein „abgeleitetes Paar dritter Ordnung" der drei Ausgangspaare — nach der Bezeichnung von A. Hurwitz — betrachten läßt. Faßt man nun unter dem Namen „Unterordnungssystem eines Punktes p" zusammen: den Punkt p, den Tangentialpunkt p_1 von p, den Tangentialpunkt p_2 von p_1 usw. und alle mit Hülfe von $p, p_1, p_2, \dots$ auf Schrötersche Weise konstruierbaren Punkte, so gilt: Das Schrötersche Verfahren liefert nur eine diskrete Mannigfaltigkeit von Punkten der Kurve, wenn a, b, c dem Unterordnungssystem eines einzigen, im übrigen beliebigen Kurvenpunktes p angehören. E. M.

H. A. W. Speckman. Eene bijzondere kromme van den derden graad en hare toepassing op de Nieuwe Meetkunde. (Eine spezielle Kurve dritten Grades und ihre Anwendung auf die neuere Geometrie.) Handel. Nederl. Nat. en Geneesk. Congr. **10**, 184-189.

Geometrische Untersuchungen über die Graßmannsche Erzeugung der Kurven dritter Ordnung und über einige mit dieser Erzeugung zusammenhängende Figuren. Anwendung der Resultate auf gewisse Systeme von Schnittpunkten und Verbindungsgeraden, abgeleitet aus einem willkürlichen Fünf- oder Sechsecke. Kl.

O. Marcus. Démonstration géométrique du théorème sur la constance du rapport anharmonique des quatre tangentes, menées à une cubique par un de ses points. Nouv. Ann. (4) **5**, 105-106.

Der Inhalt ist durch den Titel genügend gekennzeichnet. Sk.

V. Jamet. Sur une propriété de la parabole. Nouv. Ann. (4) **5**, 411-413.

V. Retali. Sur une propriété de la strophoïde. Nouv. Ann. (4) **5**, 545-546.

Zwei geometrische Beweise des Satzes:

Verbindet man in einer Strophoide die Endpunkte zweier vom Doppelpunkte ausgehenden Radienvektoren, die mit den Tangenten in diesem gleiche Winkel bilden, so umhüllt diese Geradenschar eine Parabel. Jamet erhält ihn aus der Entstehung der Strophoide als Fußpunktkurve einer Parabel, Retali aus dem Umstande, daß die imaginären Punkte für die Kurve ein Paar konjugierter Punkte sind. Sk.

B. Procházka. Über die durch ein bewegliches Dreieck erzeugte Kurve. Rozpravy **14**, Nr. 26, 4 S. (Böhmisch.)

Eine kinematische Lösung folgender Aufgabe: Die Seiten eines veränderlichen Dreiecks drehen sich um feste Punkte O, O_1, O', und zwei seiner Eckpunkte beschreiben zwei gegebene Kurven. Es sollen in einem Punkte des geometrischen Ortes des dritten Eckpunktes die Tangente und der oskulierende Kreis konstruiert werden. Pe.

B. Procházka. Eine Bemerkung zur kinematischen Geometrie. Rozpravy **14**, Nr. 25, 5 S. (Böhmisch.)

Der Verf. gibt eine neue Konstruktion der Tangente bei den Kurven an, mit welchen sich A. Sucharda beschäftigt hat. (S. Prag. Ber. 1901, Nr. 27; F. d. M. **32**, 561, 1901.) Pe.

A. KRUG und O. GUTSCHE. Zu 127 (M. Peche) Lösung einer Aufgabe. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 307-308.

Zwei Lösungen einer Aufgabe über die gemeine Cykloide. Lwt.

Weitere Literatur.

G. W. CAUNT and C. M. JESSOP. Geometrical conics. London: Edward Arnold. VI u. 80 S. [Nature **72**, 393.]

K. GEISSLER. Die Kegelschnitte und ihr Zusammenhang durch die Kontinuität der Weitenbehaftungen. Mit einer Einführung in die Lehre von den Weitenbehaftungen. Jena. 8°.

P. HEBERDEY. Die Kegelschnitte. Pr. Wien. 35 S. 8°.

J. E. MAYER. Das mathematische Pensum des Primaners. 17, 18. Lehre von den Kegelschnitten in elementarer Behandlung. Vollständig gelöste Übungsbeispiele. Elemente der projektiven Geometrie. Leipzig: M. Schäfer. 83 S. 8°.

L. KLUG. Der Kegelschnitt als Ort von Punkten, deren Abstandsverhältnisse von gewissen Gebilden konstant sind. Math. és phys. lapok. **13**, 255-278, 323-351; **14**, 57-81. (Ungarisch.) Vgl. Abschn. IX, Kap. 2c.

G. BERKHAN. Zur projektiven Behandlung der Dreiecksgeometrie. Diss. Königsberg. 31 S. 8°.

J. NEUBERG. Sur les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle. Mathesis (3) **5**, 118-122.

J. NEUBERG. Sur les triangles autopolaires par rapport à une ellipse. Mathesis (3) **5**, 125.

M. WALTER. Die gleichseitige Hyperbel. Straßburg. 32 S. 8° (1904).

CL. SERVAIS. Quelques théorèmes de Steiner. Mathesis (3) **5**, 90-93.

J. A. VREESWIJK. De involutie I_p op een rechte lijn en op een kegelsnede. Wiskundig tijdschrift **2**, 25-28.

Auszug aus der Dissertation des Verf. (s. oben S. 585).

V. JEŘABEK. Podaire de l'hypocycloïde de Steiner par rapport à un point de rebroussement. Mathesis (3) **5**, 206-207.

H. BROCARD. Podaire de l'hypocycloïde de Steiner par rapport à un point de rebroussement. Mathesis (3) **5**, 245.

V. RETALI. Sur une podaire. Mathesis (3) **5**, 245-246.

C. Besondere räumliche Gebilde.

G. FONTENÉ. Sur les éléments doubles de deux figures semblables dans l'espace. Nouv. Ann. (4) **5**, 213-220.

Bestimmung der Doppelelemente von zwei direkt- oder invers-ähnlichen oder kongruenten Elementargebilden 2. und 3. Stufe. Wird die Ähnlich-

keitskollineation zwischen zwei superponierten Räumen durch zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ und durch das Verhältnis k entsprechender Strecken bestimmt, so zeigt Verf., wie man die stets vorhandene, sich selbst entsprechende reelle Ebene π und auf ihr den sich selbst entsprechenden reellen Punkt O in einfacher Weise konstruieren kann. Die drei anderen Ecken des Haupttetraeders der Kollineation sind die imaginären Kreispunkte von π und der unendlich ferne Punkt des auf π in O errichteten Lotes. E. M.

G. Fontené. Sur l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres de genre un. S. M. F. Bull. **33**, 115-123.

Der Aufsatz bildet die Fortsetzung derer, über welche in F. d. M. **35**, 566-569, 1904, berichtet ist. Statt „ringförmig" (torique) nennt Fontené die von ihm betrachteten Polyeder jetzt „netzförmig" (réticulé). Aus einem netzförmigen Polyeder, das zu den Zahlen p und q (vgl. das vorjährige Referat) gehört, entsteht durch Spezialisierung ein anderes mit acht Tetraederecken, 8 Vierecksseiten, 16 Kanten, das von Bricard in Nouv. Ann. (4) **4**, 554, 1904, beschrieben ist. Wenn man auf einem einschaligen Hyperboloid vier Erzeugende des einen Systems herausgreift und vier des anderen, leitet man aus ihnen ein solches Polyeder ab. Die Ecken eines solchen Polyeders bilden ein Lamésches Punktsystem; sie sind nämlich auf vier verschiedene Arten zu je vier auf zwei Ebenen verteilt; die Seiten bilden ein Laméschés Tangentialsystem.

Hieraus ergibt sich nach einer Bemerkung von Bricard, daß die Aufgabe, ein solches einer Quadrik umgeschriebenes und einer anderen Quadrik eingeschriebenes Polyeder zu konstruieren, statt scheinbar bestimmt zu sein, dem Anscheine nach ein dreifach unbestimmtes Problem ist. Es entsteht also die Frage, ob aller Wahrscheinlichkeit zuwider die Quadriken nicht noch einer Bedingung zu genügen haben. Nach Erfüllung dieser Bedingung wäre dann die Aufgabe vierfach unbestimmt. Die nähere Untersuchung erbringt den Beweis, daß die Sache wirklich sich so verhält. In dem früheren Artikel der Nouv. Ann. hatte Fontené für den Fall $p=4$, $q=4$ zwei verschiedene Bedingungen der Schließung gefunden. Jetzt hat sich durch genauere Untersuchung ergeben, daß die eine Bedingung dem allgemeinen Polyeder $p=4$, $q=4$ zugehört, die andere dagegen dem Bricardschen Polyeder. Lp.

J. E. Estienne. Note sur le théorème de Pascal dans l'espace. Nouv. Ann. (4) **5**, 66-75.

Lehrsätze recht spezieller Natur, die mit dem Pascalschen Satze für Kegelschnitte gewisse Analogien zeigen: 1. Verallgemeinerung eines Hesseschen Satzes (über drei hyperboloidische Sechsseite, die sich aus einem beliebigen Sechsseit ableiten; vgl. Hesse, J. für Math. **85**, 304 oder

Salmon-Fiedler, Raumgeometrie I, 253). 2. Beziehungen zwischen einer Erzeugenden und sieben beliebigen Punkten einer Fläche zweiter Ordnung. 3. Aufstellung und Verallgemeinerung einer Relation, die ausdrückt, daß zwei Dreiecke demselben Kegelschnitt eingeschrieben sind.

Sk.

G. Gallucci. Risoluzione del problema dei tetraedri iperboloidici. Napoli Rend. (3) **11**, 175-196.

Zwei eindeutig aufeinander bezogene Tetraeder werden hyperboloidisch genannt, wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken einer Geradenschar eines Hyperboloids angehören. Nach einem Satze von Chasles gilt dann dasselbe von den Schnittlinien ihrer entsprechenden Seitenflächen. Nach Valyis analytischer Untersuchung sind fünf Fälle möglich, in denen zwei Tetraeder gleichzeitig auf mehr als eine Art hyperboloidisch liegen. Dabei sind diejenigen Fälle ausgeschlossen, in denen das eine Tetraeder dem andern eingeschrieben ist. In der vorliegenden Arbeit werden die fünf möglichen Fälle durch eine rein geometrische Methode abgeleitet, welche zugleich auch zur Konstruktion der mehrfach hyperboloidischen Tetraeder führt.

Die Schnittpunkte der Kanten des ersten Tetraeders mit den Flächen des zweiten und der Flächen des ersten mit den Kanten des zweiten liegen zu je dreien auf gewissen Geraden. Die Art dieser Verbindung in Gruppen von drei Punkten hängt von der gewählten Zuordnung der Ecken ab. Für jede der 24 möglichen Zuordnungen hat der Verf. die charakteristischen Gruppen tabellarisch zusammengestellt.

Der Verf. betrachtet nun das eine Tetraeder und die Geradenschar des Hyperboloids, zu welcher die Schnittlinien der entsprechenden Flächen der beiden Tetraeder gehören sollen, als gegeben und sucht dann mittels der Tabellen die Konfiguration der Schnittpunkte der Kanten und Flächen des gegebenen Tetraeders mit den Flächen und Kanten des zu findenden Tetraeders schrittweise so zu konstruieren, daß gleichzeitig die, verschiedenen Eckenzuordnungen entsprechenden, Lagebeziehungen erfüllt sind. Auf diese Weise ergibt sich, welche der 24 Zuordnungen mit einer beliebigen von ihnen verträglich sind, und welche mehrfach hyperboloidischen Lagen existieren können. So gelangt der Verf. im ersten Abschnitt zu den drei- und sechsfach hyperboloidischen und im zweiten Abschnitt zu den zwei- und vierfach (zyklisch- und anharmonisch-) hyperboloidischen Tetraedern. Zum Schluß weist der Verf. auf die beiden verschiedenen, bei den vierfach hyperboloidischen Tetraedern auftretenden Konfigurationen $(24_4, 32_3)$ hin.

Zch.

G. Müth. Die projektive Erzeugung der Rotationsflächen zweiten Grades. Diss. Breslau. H. Fleischmann. 62 S.

Die Rotationsflächen zweiten Grades werden zunächst durch projektive Gebilde erster Stufe, dann aber auch durch projektive Gebilde zweiter

Stufe erzeugt. Den Schluß der Arbeit bildet eine kurze Besprechung des rotatorischen polaren Raumes. Das Rotationsparaboloid bleibt von der Untersuchung ausgeschlossen. Eine übersichtliche Disposition gestattet, sich über den Inhalt der Arbeit sehr leicht zu orientieren. Js.

Th. Reye. **Über Tetraeder, deren Kanten eine Fläche zweiter Ordnung berühren.** Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 217-220.

Sätze, welche sich auf Tetraeder beziehen, deren Kanten eine Fläche zweiter Ordnung berühren, werden ohne Beweise mitgeteilt. Da diese Beweise in einer Preisarbeit der Universität Straßburg gefordert und von zwei Bewerbern gefunden worden sind, so dürfte ihre Veröffentlichung demnächst erfolgen. Js.

A. Krusche. **Über Kurven und Flächen, welche sich aus geradlinigen Flächen zweiten Grades durch gemeinsame Lote zwischen den Erzeugenden ableiten lassen.** Diss. Breslau. H. Fleischmann. 58 S.

Es bezeichnen G und L die beiden Regelscharen eines einschaligen Hyperboloids. Betrachtet wird das System der Geraden, welche je zwei Geraden von G senkrecht schneiden. Ist g_0 eine feste, g eine bewegliche Gerade von G, so beschreibt der auf g liegende Fußpunkt des g_0 und g gemeinsamen Lotes eine g_0 schneidende Ellipse. Man erhält so ein System von ∞^1 den Geraden von G eindeutig entsprechenden Ellipsen. Zu demselben Ellipsensystem führt die andere Regelschar L, und zwar liefert jede Gerade l dieser Schar dieselbe Ellipse wie die zu ihr parallele g von G. Der Abstand von g und l ist gleich der kleinen Achse dieser Ellipse. Die Ellipsenebenen umhüllen einen mit dem Hyperboloid konzentrischen und koaxialen Kegel zweiten Grades und berühren ihn längs der großen Achsen ihrer Ellipsen. Kegel und Hyperboloid durchsetzen sich in einer Raumkurve vierter Ordnung erster Art, durch welche auch eine mit dem Hyperboloid konzentrische Kugel hindurchgeht, und welche aus bald ersichtlichen Gründen „Grenzkurve" genannt wird. Auf jeder Geraden g von G (ebenso von L) liegen zwei verschiedene reelle Punkte dieser Kurve, die „Grenzpunkte" von g; sie grenzen auf g eine endliche Strecke ab, von deren Punkten je zwei reelle der zu g gehörigen Lote ausgehen. Von jedem Punkte außerhalb der Strecke gehen zwei imaginäre Lote, von jedem der beiden Grenzpunkte je ein reelles Lot, „Grenzlot" genannt, aus. In diesen Grenzloten liegen die Scheitel der großen Achse der zugehörigen Ellipse, während der Abstand der beiden Grenzpunkte den Abstand der beiden Ellipsenbrennpunkte angibt. Die Grenzlote sind Bisekanten der Grenzkurve. Die zu den Geraden von G gehörigen Grenzlote bilden die eine, die zu den Geraden von L gehörigen die andere Regelschar eines zweiten, mit dem ersten konzentrischen und koaxialen Hyperboloids. Die Grenzkurve des ersten Hyperboloids stellt

für das zweite die Orthogonalkurve (Ort der sich unter rechtem Winkel schneidenden Geraden der Fläche) dar. — Dies die hauptsächlichsten Resultate des allgemeinen Teils. Es folgen Untersuchungen besonderer Hyperboloide. Stz.

F. Bernstein. Über eine neue geometrisch-mechanische Erzeugungsweise des Kreises und der sphärischen Kegelschnitte. Zs. für Math. u. Phys. **52**, 330-335.

Wird ein geschlossener Faden von unveränderlicher Länge, der durch zwei auf den Schenkeln eines spitzen Winkels gleitende Ringe geschlungen ist, durch einen Schreibstift in einem Punkte gespannt, so nehmen die Ringe auf den Schenkeln bestimmte Gleichgewichtslagen an, und der Punkt bewegt sich auf einem Kreisbogen um den Scheitel des Winkels. Die Übertragung auf den Raum führt zu der Erzeugung eines sphärischen Kegelschnitts durch ein geradliniges Fadendreieck mit beweglichen Ecken. Läßt man hierbei den Mittelpunkt der Kugel ins Unendliche rücken, so ergibt sich die bekannte Fadenkonstruktion der ebenen Ellipse. Zch.

C. Juel. En Sätning af Dr. V. Kommerell. Nyt. Tidss. for Math. **16** B, 69-70.

Alle zur Hauptachse eines Paraboloides parallelen Lichtstrahlen werden von ihm so reflektiert, daß sie nach der Reflexion seine beiden Fokalparabeln schneiden. Dieser Sonderfall eines von Plücker (System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1847, Seite 334) zuerst ausgesprochenen Satzes wird elementar bewiesen. V.

G. Majcen. Eine neue Erzeugungsart für verschiedene typische Formen der Fläche dritter Ordnung. Deutsche Math.-Ver. **14**, 438-447.

Ist O ein Punkt einer Fläche zweiter Ordnung F^2, welcher nicht in einer Ebene ε liegt, so ist F^2 auf ε projektiv abgebildet, wenn einem Punkte P von F^2 derjenige Punkt von ε zugeordnet wird, in dem der Strahl OP die Ebene ε schneidet. Projektiv auf ε abgebildet ist aber auch eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1, wenn jedem Strahle von C_1^1 sein Schnittpunkt mit ε entspricht. Durch Vermittlung von ε können sonach F^2 und C_1^1 selbst projektiv aufeinander abgebildet werden. Diese Abbildung wird völlig eindeutig — und so wird sie im folgenden vorausgesetzt —, sobald die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 auf ihrem mit ε inzidenten Strahle dieselbe Punktinvolution wie F^2 hervorruft. Den Punkten von F^2 entsprechen eindeutig ihre Tangentialebenen; folglich besteht durch Vermittlung von F^2 auch eine eindeutige Zuordnung zwischen dem F^2 einhüllenden Ebenenbündel zweiter Ordnung Φ^2 und

C_1^1. Ist nun Ψ^2 ein zu Φ^2 kollinearer zentrischer Ebenenbündel zweiter Ordnung, so erzeugt Ψ^2 mit C_1^1, wie nachgewiesen wird, eine allgemeine kubische Fläche dritter Ordnung. Bei geeigneter Spezialisierung der Lage von Ψ^2 zu C_1^1 ergeben sich die kubischen Flächen mit Doppelpunkten und die kubischen Regelflächen. Js.

R. M. Ssolowjev. Über die der Cayleyschen Kurve analoge Fläche für die kubischen Flächen. Moskau Math. Samml. **25**, 386-416. (Russisch.)

Den Namen der Cayleyschen Fläche gibt der Verf. der Fokalfläche der Hesseschen Kongruenz (Inbegriff der Verbindungsgeraden der konjugierten Punkte der Hesseschen Fläche) der kubischen Fläche. Weitere Erzeugungen. Die Ordnung der C.-Fläche ist gleich 24, die Klasse gleich 16. Die Strahlen der Hesseschen Kongruenz sind die Doppeltangenten der C.-Fläche; die C.-Fläche wird von den ersten Polaren der Punkte der Hesseschen Fläche umhüllt. Sie berührt die Hessesche längs der Kurve J_{18}, welche der parabolischen Kurve R_{12} konjugiert ist. Räumliches Zehneck und die Winkellinie auf der C.-Fläche (von der Ordnung 134). Si.

R. Sturm. Über diejenigen Cremonaschen Verwandtschaften, bei denen den Ebenen des einen Raumes allgemeine Flächen dritter Ordnung im andern entsprechen. Deutsche Math.-Ver. **14**, 18-24.

Cremona hat in Lomb. Ist. Rend. (2) **4**, 269 und 315, 1871 (F. d. M. **3**, 429, 1871) bekanntlich ein Verfahren angegeben, um aus eindeutigen Verwandtschaften zwischen Ebenen solche zwischen Räumen abzuleiten. In der vorliegenden Notiz wird eine recht anschauliche Modifikation des Cremonaschen Verfahrens an denjenigen eindeutigen Raumverwandtschaften erläutert, bei denen den Ebenen des einen Raumes allgemeine kubische Flächen im andern entsprechen. Ausgegangen wird von einer kubischen Fläche φ_0 eines allgemeinen F^3-Gebüsches und ihren ∞^3 veränderlichen Schnittkurven mit den anderen Flächen dieser Mannigfaltigkeit, wobei unvollständige Schnittkurven durch die Basiskurve des F^3-Gebüsches vervollständigt werden. Diesen veränderlichen Kurven müssen in der gesuchten Raumverwandtschaft die Strahlen einer Ebene α_0', hingegen auf einer beliebigen Ebene π abgebildet, die Kurven eines homaloiden Kurvennetzes entsprechen. Zu untersuchen ist, ob ein solches vorhanden ist.

Außer den von Cremona gefundenen sechs Raumverwandtschaften, bei denen den Ebenen des einen Raumes eindeutig die Flächen des F^3-Gebüsches entsprechen, ergibt sich noch eine siebente derartige Raumverwandtschaft, auf welche schon 1890 Loria in Torino Atti **26**, 275 (F. d. M. **22**, 825, 1890) hingewiesen hat. Js.

J. DE VRIES. Über Flächenbüschel n-ter Ordnung. Nieuw Archief (2) **6**, 362-364.

Der Ort F_p^{2n-1} der Berührungspunkte der durch einen gegebenen Punkt P gehenden Tangenten wird dem Punkte P zugeordnet; auf diese Zuordnung stützt sich die Betrachtung. So wird die Schnittkurve der den Punkten P und Q zugeordneten Flächen F_p^{2n-1} und F_q^{2n-1} untersucht. Die Flächen $\mathfrak{F}^{2n-1}$, welche den Punkten X von AB zugeordnet sind, bilden einen Flächenbüschel, dessen Basiskurve aus zwei Kurven σ und λ zusammengesetzt ist. Die Kurven σ und λ schneiden sich in $2n^2(n-1)$ Punkten. Ferner wird der bekannte Satz gefolgert, daß es in einem Büschel n-ter Ordnung $4(n-1)^3$ Flächen mit einem Doppelpunkte gibt. Lp.

B. PROCHÁZKA. Über die Bestimmung der Oskulationskugel der Raumkurven. Rozpravy. **14**, Nr. 8, 6 S. (Böhmisch.)

Eine Konstruktion der Oskulationskugel auf kinematischer Grundlage. Anwendung auf die Schraubenlinie. Pe.

B. PROCHÁZKA. Ein Beitrag zu den Raumkurven. Rozpravy. **14**, Nr. 9, 2 S. (Böhmisch.)

Es wird mit Hülfe der kinematischen Geometrie die folgende Aufgabe gelöst: „Es ist eine abwickelbare Fläche gegeben als Enveloppenfläche von Tangentenebenen, welche zwei Raumkurven gemeinsam sind; es soll der Krümmungshalbmesser in einem Punkte ihres Durchschnittes mit der Projektionsebene konstruiert werden." Pe.

P. ZÜHLKE. Eine Aufgabe aus der Theorie der Raumkurven. Math. naturw. Bl. **2**, 86-87.

Rein geometrische Bestimmung der Raumkurven, für die der Richtungskegel der Hauptnormalen ein Rotationskegel ist. Sk.

A. SAINTE-LAGUË et J. HAAG. Représentation de cercles par des points. Nouv. Ann. (4) **5**, 337-355.

Rotationszylinder, deren Erzeugende senkrecht zur Scheitelebene π eines Rotationsparaboloides P stehen, schneiden π und P bzw. in den Kreisen C_π und den Kegelschnitten C_P. Wird jedem Kreise C_π der Pol c_P der Ebene des zugehörigen Kegelschnitts C_P für das Paraboloid P zugeordnet, so sind die Kreise der Ebene π auf die Punkte des Raumes abgebildet. Dieser Sonderfall der von Lie und Darboux untersuchten Beziehung zwischen den Punkten des Raumes und den Kreisen der Ebene wird eingehend besprochen. Js.

St. Jolles. Neue Beweise einiger Sätze aus der Theorie der linearen Komplexe. J. für Math. **130**, 238-242.

Die Komplexe eines Bündels linearer Komplexe haben eine Regelschar gemein, welche jedoch nicht reell zu sein braucht; reell jedoch ist stets das zu der Regelfläche gehörige Polarsystem. Es entsteht somit die Aufgabe, dieses Polarsystem synthetisch ohne Heranziehung imaginärer Elemente in allgemein gültiger Form abzuleiten. Dies geschieht durch den Nachweis des Satzes: Durch die geschart involutorischen Räume, welche zu den linearen Kongruenzen eines Bündels linearer Komplexe gehören, werden einer Ebene (einem Punkte) die Ebenen eines Punktes (Punkte einer Ebene) zugewiesen. Die so erhaltene Zuordnung von Punkten und Ebenen erweist sich als das oben erwähnte Polarsystem. Es wird ferner gezeigt, daß ein Bündel linearer Komplexe und der zugehörige Stammbündel der zu dem Bündel nullinvarianten (d. i. involutorisch liegenden) Komplexe dasselbe Polarsystem bestimmen. Stz.

E. Meyer. Über das in der kinematischen Geometrie auftretende Nullsystem. Math. Ann. **60**, 242-255.

Zwei kollineare Räume Σ, Σ' mit vier Inzidenzpunkten haben bekanntlich, wenn zwei von diesen Inzidenzpunkten reell sind, zwei reelle Inzidenzebenen $\varepsilon, \varepsilon'$. Sind nun A, A' ein Paar homologer Punkte beider Räume, und ist K eine beliebige Zahl [illegible] 1, so möge durch K, durch die Punkte A, A' und durch den Schnittpunkt $A_{1\varepsilon}$ von AA' mit ε ein Punkt A_1 derart bestimmt werden, daß das Doppelverhältnis $(A_{1\varepsilon}\, A_1\, A A')$ dieser vier Punkte den Wert K hat. Durch A_1 und durch die Polare a von $A_{1\varepsilon}$ für einen in ε gelegenen Kegelschnitt k^2 geht eine Ebene $(A_1\, a)$, welche dem Punkte A_1 zugeordnet wird. Diese Zuordnung der Punkte und Ebenen des Raumes bestimmt einen quadratischen Nullraum. Er geht in den gewöhnlichen Nullraum über, sobald von den vier Inzidenzpunkten der kollinearen Räume Σ, Σ' der außerhalb ε gelegene mit einem Inzidenzpunkte T von ε zusammenfällt, ferner die Verbindungsgeraden von T mit den beiden anderen Inzidenzpunkten T_1, T_2 den Kegelschnitt k^2 bzw. in T_1, T_2 berühren und K einen durch die kollinearen Räume Σ, Σ' und k^2 eindeutig bestimmten Wert annimmt. K kann nur -1 werden, wenn der zu Σ gerechnete Kegelschnitt k^2 durch den zu Σ kollinearen Raum Σ' in sich selbst übergeführt wird. Der in der kinematischen Geometrie auftretende Nullraum ist ein Sonderfall des soeben abgeleiteten linearen Nullraumes. Bei ihm ist ε die unendlich ferne Ebene und k^2 der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis. Js.

E. Meyer. Über die in einem Reyeschen Komplexe enthaltenen Regelscharen. Math. Ann. **61**, 200-202.

Schneiden die Strahlen eines tetraedralen Komplexes sein Haupttetraeder in harmonischen Punktwürfen, so sind sechs Systeme von ∞^2 Regelflächen zweiten Grades vorhanden, deren Regel- und Leitscharen dem Komplexe angehören. Js.

J. Klobouček. Methodische Bemerkung zur Theorie des A^2 Komplexes. Rozpravy. **14**, Nr. 7, 20 S. (Böhmisch.)

Es wird eine neue und übersichtliche Ableitung der Eigenschaften des quadratischen Komplexes gegeben, welcher von den Achsen aller linearen Komplexe gebildet wird, die sich in einem Systeme dritter Stufe befinden. Insbesondere werden singuläre Punkte und Ebenen des Komplexes und das System der Flächen zweiten Grades, deren Achsen dem Komplexe angehören, untersucht. Pe.

P. Gerlich. Über den Tangentenkomplex der Fläche zweiten Grades. Diss. Breslau. H. Fleischmann. 60 S.

1. Der Grad, die singuläre Fläche, die singulären Strahlen, die stationären Punkte und Ebenen, die stationären Doppelstrahlen des Tangentenkomplexes; die Komplexfläche einer Geraden in bezug auf ihn. 2. Die Charakteristiken des Systems der Komplexkegelschnitte. 3. Die Korrespondenzen, welche durch den Tangentenkomplex auf einer Geraden hervorgerufen werden. 4. Die Polare einer Geraden, die Polarebene eines Punktes in bezug auf den Tangentenkomplex. 5. Die einem Strahlenbüschel, einem Punkte, einer Ebene durch den Komplex zugeordneten Gebilde. 6. Die Durchmesser und Zylinderachsen des Tangentenkomplexes. 7. Die Systeme von parabolischen Strahlennetzen im Tangentenkomplex. 8. Die „linear berührenden" Regelscharen des Tangentenkomplexes. 9. Die „konisch berührenden" Regelscharen des Tangentenkomplexes. 10. Die Gebüsche Σ_3 von „konisch berührenden" Regelscharen im Tangentenkomplex. 11. Die Dupelsysteme Σ_5 von Tangenten im Komplex. Stz.

St. Jolles. Zu 111 (St. Jolles). Lösung einer Aufgabe. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 304.

Ein einfacher Beweis des Satzes, daß die Komplexe eines Büschels linearer Komplexe eine Regelschar zweiter Ordnung, die keinem von ihnen angehört, in den Strahlenpaaren einer Involution schneiden. Zch.

Weitere Literatur.

J. Hartwig. Die Sätze von Pascal und Brianchon auf der Kugelfläche. Pr. Wiener-Neustadt. 11 S. 8°.

G. Ertelt. Synthetische Beweise einiger Sätze aus der Theorie der Flächen zweiten Grades. Pr. Bielitz. 21 S. 8°.

R. Suppantschitsch. Einiges über eine besondere Lage von Flächen zweiter Ordnung. Wien. 20 S. 8°.

J. Kounovsky. Über das Normalenproblem der allgemeinen Flächen zweiten Grades. Pr. Realsch. in Königgrätz. 14 S. (Böhmisch.)

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

P. H. Schoute. Mehrdimensionale Geometrie. II. Teil. Die Polytope. Leipzig: G. J. Göschen. IX u. 326 S. 8°. (Samml. Schubert XXXVI.)

Allgemeine Inhaltsübersicht. 1. Topologische Einleitung. Als Polytop im R_n bezeichnet Verf. allgemein jedes irgendwie begrenzte Stück dieses Raumes. Vorwiegend (nämlich in den ersten drei der vier Abschnitte) werden linear begrenzte Polytope behandelt. Das einfachste unter ihnen, das von $n+1$ linearen R_{n-1} begrenzte „Simplex" bildet den Ausgangspunkt der Untersuchung, wobei neben den begrenzten R_{n-1} auch die unbegrenzten in Betracht gezogen werden. Von der Betrachtung der Schnitte und Projektionen des Simplex gelangt man dann leicht zu den allgemeinen polyedralen Konfigurationen. Es folgen die vorbereitenden Definitionen für die Probleme der Polyedertheorie zunächst im R_3 — Begriffe wie Isomorphismus, allgemeines Polyeder —, welche dann auf den R_n übertragen werden. Nachdem sodann noch einige spezielle Polytope, Verallgemeinerungen von Pyramiden und Prismen, besprochen sind, wird der Eulersche Satz im R_3 und R_n ausführlich erörtert und werden die nächstliegenden Konsequenzen aus ihm gezogen.

2. Maßverhältnisse: Kongruenz und Ähnlichkeit. Inhaltsbestimmungen.

3. Regelmäßige Polytope.

4. Die runden Polytope: Kugelräume, Kegel- und Zylinderräume. Allgemeinere Rotationsräume.

Das Buch zeichnet sich durch zweckmäßige Anordnung des Stoffes, welche geeignet ist, das Interesse des unkundigen Lesers für die hier behandelten Probleme zu wecken, durch klare und exakte Darstellung, zahlreiche und sorgfältig ausgeführte Figuren aus. Wenn das vorhandene Material nicht erschöpft ist, so liegt dies hauptsächlich in der Beschränkung, welche sich der Verf. hinsichtlich des Umfanges auferlegen mußte. Indessen ließe sich durch noch kürzere Behandlung namentlich des zweiten Abschnittes Raum für andere Untersuchungen wie die von Minkowski gewinnen, welche man nur ungern vermißt. Denn bei solchen Sätzen der dreidimensionalen Geometrie, deren Verallgemeinerung für den Raum von n Dimensionen fast unmittelbar zu übersehen ist, wird der Leser nach einiger Anleitung sehr bald die Beweise mühelos finden können, so daß es genügte, sie etwa als Aufgaben anzufügen. Von größtem Interesse sind natürlich solche Tatsachen, die erst in höheren Räumen deutlich hervortreten oder Schwierigkeiten bieten, oder bei denen diese Räume ein wesentlich anderes Verhalten bieten als unser Raum. Darum erscheint mir auch der dritte Abschnitt als der interessanteste, und es

ist hier hervorzuheben, daß die sechs regulären Polytope, durch die sich der R_4 auszeichnet, mit Recht eine sehr ausführliche Behandlung erfahren und, was besonders erfreulich ist, daß die Schlegelschen Modelle, welche die Projektionen dieser Körper auf den R_3 darstellen, beschrieben und zum Teil auch gezeichnet sind. Bei der Bearbeitung der regulären Polytope höherer Art (Sternpolytope) des R_4 ist dem Verf. leider eine Arbeit entgangen; er gibt nur die beiden von Schläfli gefundenen Polytope an, während es zehn gibt, die sämtlich von Hess (Sitzungsber. d. Ges. z. Beförd. d. Naturwiss. zu Marburg; F. d. M. **17**, 520, 1885) angegeben worden sind. Bei solchen Problemen, die, wie etwa das Problem der regelmäßigen Raumeinteilungen, eine erschöpfende Behandlung des vorgeschriebenen Umfangs wegen nicht erfahren können, und die doch von größtem Interesse sind, wäre eine Angabe der Literatur sehr erwünscht.

Wir glauben mit diesen Bemerkungen einem Wunsche des Verf. zu entsprechen und hoffen, daß ein starker Absatz des vorzüglichen Lehrbuches eine zweite Auflage bald notwendig machen wird. Stz.

P. H. Schoute. Over niet-lineaire stelsels van elkaar rakende bolruimten. Amst. Ak. Versl. **13**, 589-600.

Es handelt sich um die Gesamtheit der Kugelräume von $n-1$ Dimensionen im R_n, welche n willkürlich gegebene solche Kugelräume berühren. Dieselbe zerfällt in 2^{n-1} getrennte Systeme, deren jedes einen Kegelschnitt zum Ort der Mittelpunkte hat. Außer einigen weiteren Eigenschaften dieser Kugelsysteme wird noch die Frage behandelt, ob es auch für $k > 1$ Paare nicht linearer Systeme von k- resp. $(n-k-1)$-facher Dimension gibt, derart, daß jede Kugel des einen Systems jede des anderen berührt. Durch Angabe einiger Beispiele wird die Frage bejahend beantwortet. D.

H. Poincaré. Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de géométrie. C. R. **140**, 113-117.

Wird um einen Punkt O des n-dimensionalen Raumes R_n eine Hypersphäre H_{n-1} beschrieben, so wird diese durch n durch O gelegte lineare R_{n-1} (Hyperebenen), welche außer O keinen Punkt gemein haben, in 2^n Gebiete eingeteilt, „hypersphärische n-eder", denen ebensoviele „n-dimensionale Ecken" im Punkte O entsprechen. Die Größe einer solchen Ecke wird durch die des zugehörigen hypersphärischen n-eders angegeben, wenn die halbe Hypersphäre als Einheit angenommen ist. Von den 2^n Ecken werde eine herausgegriffen und mit e_n bezeichnet; es werde ferner bei jedem der begrenzenden R_n die Seite, auf welcher e_n liegt, als die positive von der anderen, der negativen, unterschieden. Durch je zwei der R_{n-1} wird, wenn man nur immer die positive Seite ins Auge faßt,

ein gewöhnlicher Winkel (= zweidimensionale Ecke) e_2 bestimmt: allgemein bestimmen je k dieser R_{n-1} eine k-dimensionale Ecke e_k, deren Größe ebenfalls durch das zugehörige Gebiet der Hypersphäre unter Zugrundelegung der halben Hypersphäre als Einheit bestimmt wird. Es bezeichne s_k die Summe der $\binom{n}{k}$ Ecken e_k, welche zu e_n gehören, so daß also $s_n = e_n$. Im Falle $n = 3$ wird der Satz, daß der Inhalt des sphärischen Dreiecks durch seinen sphärischen Exzeß bestimmt ist, durch die Formel $e_3 = s_3 = \frac{1}{2} s_2 - \frac{1}{2}$ ausgedrückt. Allgemein gelten für beliebiges n, wenn man noch $s_0 = 2$, $s_1 = n$ setzt, die Relationen

$$s_p = \sum_{q=0}^{p} (-1)^q \binom{n-q}{n-p} s_q \qquad (p = 0, \ldots, n).$$

Von diesen sind jedoch diejenigen mit geradem p eine Folge derer mit ungeradem p, und diese zeigen, daß die s_p mit ungeradem p durch diejenigen mit geradem ausgedrückt werden können. Insbesondere erhält man für ungerades n:

$$e_n = s_n = \tfrac{1}{2}(s_0 - s_1 + s_2 - s_3 + \cdots + s_{n-1}),$$

welche Formel die Verallgemeinerung des Satzes vom Inhalt des sphärischen Dreiecks für Räume ungerader Dimensionenzahl darstellt.

Um von der für das hypersphärische n-eder geltenden Formel zu einer solchen für das ebene zu gelangen, braucht man nur e_n unendlich klein anzunehmen. Man erhält dann für das im $(n-1)$-dimensionalen Raume von n linearen R_{n-2} begrenzte Gebilde, falls $n-1$ gerade ist, die Formel:

$$s_0 - s_1 + s_2 - s_3 + - \cdots + s_{n-1} = 0.$$

Sie besagt für $n - 1 = 2$, daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt, und stellt also die Verallgemeinerung dieses Satzes für Räume gerader Dimensionenzahl dar. Stz.

L. Autonne. Sur le connexe linéaire dans l'espace à $n-1$ dimensions. C. R. **138**, 1148-1149 (1904).

L. Autonne. Sur les droites fondamentales dans les collinéations de l'espace à $n-1$ dimensions. S. M. F. Bull. **33**, 172-190.

Bestimmung der Fundamentalpunkte, Fundamentalebenen und Fundamentalgeraden g_m m^{ten} Grades $(n-m)^{\text{ter}}$ Klasse eines $(n-1)$-dimensionalen Raumes, der einer Kollineation (linearen Transformation der Koordinaten seiner Elemente) unterworfen wird. Dabei versteht man unter einer Geraden g_m die Mannigfaltigkeit der Punkte, die $n-m$ Ebenen gemeinsam sind. Indem die Kollineation in eine einfache typische Form gesetzt wird, gelingt die Bestimmung der genannten Fundamentalelemente durch eine verhältnismäßig einfache Regel. Sk.

A. NATUCCI. Sull' estensione del teorema di Desargues. Batt. G. **43** [(2) **12**], 6-8.

A. NATUCCI. Sull' estensione di un teorema di Clebsch. Batt. G. **43** [(2) **12**], 68-73.

Diese zwei Aufsätze gehören zur elementaren Geometrie des n-dimensionalen Raumes. Sie enthalten einige Anwendungen der Begriffe, welche Castelnuovo in einer Arbeit auseinandersetzt, über die wir seinerzeit ausführlich berichtet haben (F. d. M. **21**, 671, 1889). Im ersten Aufsatze werden zwei Sätze bewiesen, welche als besondere Fälle in der Ebene den Desarguesschen Satz und im Raume zwei Theoreme haben, welche den Lesern der Reyeschen „Geometrie der Lage" (d. h. allen Geometern!) bekannt sind. Im zweiten Aufsatze wird bewiesen, daß man die Castelnuovosche Verallgemeinerung eines Clebschschen Satzes (vgl. das o. a. Referat) nicht als allgemein gültig annehmen darf. La.

E. PICCIOLI. Fondamenti per la geometria dell' n-edro in uno spazio lineare con $n-1$ dimensioni. Periodico di Mat. (3) **3**, 49-63.

Der Aufsatz enthält die Erweiterungen der Eigenschaften des Dreiecks und des Tetraeders auf das n-Flach im $(n-1)$-dimensionalen Raume. Als grundlegende Sätze werden im § 1 die folgenden gegeben: I. Eine Seite eines n-Flachs ist gleich der Summe der Produkte der anderen $n-1$ Seiten, jede multipliziert mit dem Kosinus des Winkels, den sie mit der ersten bildet. II. Das Quadrat einer Seite eines n-Flachs ist gleich der Summe der Quadrate der übrigen, vermindert um das Doppelte der Summe der Produkte dieser letzteren zu je zweien, jedes Produkt multipliziert mit dem Sinus des zwischen den beiden Faktoren eingeschlossenen Winkels. Der Inhalt der folgenden Paragraphen ist durch ihre Überschriften genügend gekennzeichnet. § 2. Die merkwürdigen Punkte. § 3. Allgemeines Prinzip (Verallgemeinerung des Satzes des Ceva). § 4. Der Sinussatz. § 5. Das Theorem von Stewart. § 6. Anwendungen des Theorems von Stewart. § 7. Erweiterung des Begriffs eines merkwürdigen Punktes. § 8. Ausdehnung der Abstandsformel auf das n-Flach. Lp.

G. FANO. Sul sistema ∞^3 di rette contenuto in una quadrica dello spazio a quattro dimensioni. Batt. G. **43** [(2) **12**], 1-5.

Die ∞^6 Geraden von [4] können bekanntlich mittels zehn homogener Koordinaten r_{ik} analytisch dargestellt werden, welche durch drei quadratische Gleichungen verbunden sind. Betrachtet man nun die r_{ik} als die projektiven Koordinaten eines Punktes in [9], so bilden die jenen ∞^3 Geraden entsprechenden Punkte eine sechsdimensionale Mannigfaltigkeit

fünfter Ordnung M_6^5, welche elliptische Schnitte besitzt; und jedem System von ∞^k Geraden von [4] entspricht auf M_6^5 eine Mannigfaltigkeit M_k von M_6^5. Der Verf. setzt insbesondere voraus, daß es sich um das System Γ handle, welches aus den ∞^2 Geraden einer Quadrifläche besteht; die entsprechende Mannigfaltigkeit M_3^8 ist achter Ordnung, besitzt auch elliptische Schnitte und ist in keinem linearen Komplex enthalten. Γ ist ein rationales System, welches in ∞^{14} quadratischen Komplexen enthalten ist; usw. La.

E. Abzählende Geometrie.

E. Study. Über das sogenannte Prinzip der Erhaltung der Anzahl. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 388-395; Arch. der Math. u. Phys. (3) 8, 271-278.

Der auf dem internationalen Kongreß in Heidelberg gehaltene Vortrag stellt einen lebhaften und durchaus berechtigten Protest gegen den Mangel an Präzision dar, der heute noch großenteils in der Geometrie anzutreffen ist und, wie die Duldung durch die öffentliche Kritik zeigt, von weiten Kreisen nicht einmal empfunden wird. Wir begnügen uns damit, auf diesen bedeutsamen Vortrag hinzuweisen, der in knapper und dabei überaus klarer Weise die wichtigsten Einwendungen, welche gegen das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl zu erheben sind, zur Sprache bringt. Stz.

G. Z. Giambelli. La teoria delle formole d'incidenza e di posizione speciale e le forme binarie. Torino Atti **40**, 1041-1062.

Jedermann kennt die Krisis, welcher das Prinzip der Erhaltung der Anzahl seit einigen Jahren unterliegt; in dem Aufsatze Sul principio della conservazione del numero (Deutsche Math.-Ver. **13**, 1904) hat Giambelli einen glücklichen Versuch gemacht, jenem Prinzip eine solche Form zu geben, daß seine Anwendung einwandfrei wird. In dem vorliegenden lehrt er unter anderem eine geistreiche Methode, um in vielen Fällen die Anwendbarkeit desselben zu prüfen und nötigerweise zu verbessern. Infolgedessen behält jenes Prinzip in vielen Fällen seine Kraft als Entdeckungsmethode und wird, wenn anwendbar, streng. Zu diesem Resultat gelangt der Verf. in der in Rede stehenden Abhandlung (welche als die Fortsetzung einer früheren anzusehen ist; vgl. F. d. M. **34**, 199, 1903), indem er einen unerwarteten Zusammenhang zwischen der abzählenden Geometrie und der Theorie der binären Formen beachtet. Daß damit verschiedenen Fragen der projektiven Geometrie der beliebig ausgedehnten Räume eine endgültige Auflösung erhalten, erfährt der Leser aus der reichhaltigen Originalarbeit. La.

F. Schuh. Vergelijkend overzicht der methoden ter bepaling van aantallen vlakke krommen. (Vergleichende Übersicht der Methoden zur Anzahlbestimmung ebener Kurven.) Inaugural-Dissertation. Amsterdam: M. M. Olivier, 1905, 218 S. 8⁰.

Ausführliche geschichtliche und kritische Übersicht der klassischen Untersuchungen von Chasles, Zeuthen, Cremona, Jonquières, Schubert und Halphen zur Anzahlbestimmung der ebenen Kurven, welche $\frac{1}{2} m (m + 3)$ Bedingungen erfüllen. Insbesondere wird der Fall erörtert, in welchem die bestimmenden Bedingungen aus lauter vorgeschriebenen Berührungen beliebiger Ordnung einer gegebenen Kurve bestehen. Dabei werden die Korrespondenzprinzipien einer eingehenden Betrachtung unterzogen, und der Verf. wird zu originellen Erweiterungen der Jonquièresschen und Cayleyschen Formeln geführt. Ein beinahe 20 Seiten umfassendes, sehr vollständiges Literaturverzeichnis erhöht den Wert dieser Schrift, welche einen genauen Einblick in ein wichtiges Kapitel aus der Theorie der ebenen Kurven gewährt. Kl.

A. A. Dalhuisen. Over eenige aantallen van kegelsneden, die aan acht voorwaarden voldoen. (Über einige Anzahlen von Kegelschnitten, welche acht Bedingungen genügen.) Inaugural-Dissertation. Utrecht: J. van Druten, 1905, 79 S. 8⁰.

Die Verfasserin gibt eine Ableitung sämtlicher Kegelschnittanzahlen $\mu^m \nu^n \varrho^{8-m-n}$ ausschließlich mit Hülfe des Prinzips von der Erhaltung der Anzahl, nachdem sie zuerst die Anzahlen bestimmt hat, welche die Bedingung P oder T enthalten. Nachher betrachtet sie Kegelschnitte, die eine siebenfache Bedingung erfüllen, und berechnet verschiedene charakteristische Anzahlen für die von den Kegelschnitten erzeugte Fläche. Kl.

A. Toxopeus. De aantallen kwadratische hyperruimten in de ruimte van vijf afmetingen. Amst. Ak. Verh. 9, 1-38.

Die Arbeit stellt die Zahlen der quadratischen Überräume auf, welche durch gegebene Anzahlen von Überräumen, Räumen, Ebenen, Geraden und Punkten im Raum von fünf Dimensionen bestimmt sind. Auch für Kegelschnitte, Kegel, Flächen zweiten Grades, quadratische Räume und ihre Ausartungen werden die Kombinationszahlen gegeben. Wö.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Kapitel 1.

Lehrbücher, Koordinaten.

L. Heffter und C. Koehler. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Erster Band. Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. XVI u. 527 S. gr. 8°.

In seinem Erlanger Programm (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen) und ausführlicher in seinen autographierten Vorlesungen über höhere Geometrie (Leipzig 1892/1893) hatte F. Klein den grundlegenden Gedanken durchgeführt, daß jede Geometrie als Invariantentheorie einer gewissen Gruppe von Operationen, ausgeübt auf die Elemente des Raumes, anzusehen ist. Dabei ist die Art des zugrunde gelegten Raumelements für den Charakter der geometrischen Betrachtungen nur von sekundärer Bedeutung. Für die Behandlung des gewöhnlich in den Lehrbüchern dargestellten Stoffes ergibt sich daher folgende naturgemäße Systematik: 1. Untersuchung der allgemeinen projektiven Gruppe. 2. Ihre affine Untergruppe. 3. Die Gruppe der Bewegungen. Bleiben bei der ersten nur die visuellen Eigenschaften (Inzidenz von zwei verschiedenen Elementen) erhalten, so treten in der zweiten Gruppe die Parallelität, in der Gruppe der Bewegungen die Orthogonalität als invariante Eigenschaften hinzu. Unsere bisherigen Lehrbücher der analytischen Geometrie gehen auf diese naturgemäße Einteilung gar nicht oder nur anhangsweise ein, während sonst ihr Inhalt in buntem Wechsel Ergebnisse der projektiven, affinen und äquiformen (so bezeichnen die Verf. die Geometrie der Bewegungsgruppe) Geometrie aufweist. Wenn auch diese Zurückhaltung die Lehrbücher in der Adoptierung eines systematisch zwar vortrefflichen Einteilungsprinzips, das aber die größten pädagogischen Schwierigkeiten bietet, wohl zu verstehen ist, so ist es mit um so größerer Freude zu begrüßen, wenn die

Verf. des vorliegenden Werks diese Schwierigkeiten nicht scheuten, sondern die natürliche Systematik konsequent durchgeführt und damit einen neuen Typus in der Lehrbücherliteratur der analytischen Geometrie geschaffen haben. Ihr Ziel war, „eine völlig elementar einsetzende und durchweg leicht faßliche Darstellung der Geometrie zu bieten, die dennoch dem Leser bald einen umfassenden Überblick verschaffen sollte. Wir wünschten, den Stoff systematisch so zu ordnen, daß jeder Gegenstand einen ihm aus erkennbarem Grunde zukommenden Platz fände, jeder Fortschritt der Untersuchung sich mit erkennbarer Notwendigkeit vollzöge.“ Daß sie dieses Ziel so vortrefflich erreichen, ist nicht nur der zweckgemäßen Einteilung, sondern auch der äußerst klaren und ansprechenden Darstellung zu verdanken. Allerdings haben auch die Verf. die pädagogischen Schwierigkeiten, die bisher von dem eingeschlagenen Weg abschreckten, nicht ganz überwinden können: einmal mußte gleich am Anfang der systematische Gang verlassen werden und die Einführung der geometrischen Elemente (Punkt, Gerade, Ebene) sowie ihrer elementaren Lagebeziehungen (Inzidenz, Parallelität, Orthogonalität) rein anschaulich begründet werden. Trotzdem wird von dem in geometrischen Betrachtungen nicht Geübten in der Einleitung, wo Wesen, Grundbegriffe, Einteilung der Geometrie klargelegt werden, immer noch ein nicht geringes Maß von Abstraktionsfähigkeit verlangt. Auch im ersten Abschnitt ist auf die systematische Gedankenbildung verzichtet worden; da die projektive Behandlungsweise vorangestellt wurde, der abstrakte Begriff des von Staudtschen Wurfs dagegen vermieden werden sollte, kommen zuerst doch noch metrische Verhältnisse hinein, und erst später folgt daraus die Invarianz des Doppelverhältnisses.

Die Disposition des Buches gliedert sich nach den Grundgebilden der verschiedenen Stufen; der vorliegende erste Band enthält die Grundgebilde erster Stufe und die Grundgebilde zweiter Stufe in der Ebene. Der zweite abschließende Band will dann die Geometrie im Bündel und die Geometrie im Raume umfassen. Innerhalb dieser großen Abschnitte ist eine Scheidung in projektive, affine und äquiforme Eigenschaften vorgenommen. Eine eingehende Darstellung des reichen Inhalts würde den zu Gebote stehenden Raum weit überschreiten; wir müssen uns daher auf die Wiedergabe der im Inhaltsverzeichnis gegebenen Disposition beschränken:

Einleitung. I. Abschnitt. Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe. 1. Elemente der projektiven und affinen Geometrie in der eigentlichen Punktreihe. 2. Quadratische Gleichungen: Das Punktepaar und seine Involution. 3. Projektive und äquiforme Geometrie im eigentlichen Büschel. II. Abschnitt. Geometrie in den Grundgebilden zweiter Stufe. A. Geometrie in der Ebene. 1. Elemente der projektiven Geometrie in der Ebene: Koordinaten. 2. Fortsetzung: Dualitätsgesetz; projektive Sätze über Punkte und Gerade. 3. Fortsetzung: Die kollineare oder projektive und die korrelative oder reziproke Transformation der Ebene. 4. Elemente der affinen Geometrie in der Ebene. 5. Elemente der äquiformen Geometrie in der Ebene. 6. Allgemeine

projektive Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse. 7. Projektive Einteilung der Kegelschnitte. 8. Polarität in bezug auf einen Kegelschnitt. 9. Projektive Eigenschaften des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschar. 10. Affine Klassifikation und parallelmetrische Eigenschaften der Kegelschnitte als Punkt- und als Strahlenkurven. 11. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen in der affinen Geometrie. 12. Die orthogonalmetrischen Spezialfälle der Kegelschnitte. 13. Die Hauptachsen der Kegelschnitte. 14. Brennpunkte und Fokaleigenschaften der Kegelschnitte. 15. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen in der äquiformen Geometrie. Anhang: Determinanten.

Das Werk wird ohne Zweifel eine bedeutsame Stellung im Unterricht der höheren Geometrie einnehmen. Sk.

O. Staude. **Analytische Geometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie.** Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. VIII u. 447 S. gr. 8°. (Teubners Sammlung von Lehrbüchern aus dem Gebiete der math. Wiss. Bd. 16.)

Die vorliegende Monographie ist als Einleitung oder erster Teil eines vom Verf. geplanten Lehrbuchs der Flächen zweiter Ordnung entstanden, sie wahrt indessen ihre volle Selbständigkeit. Ihre Absicht ist, in systematischer Weise die Koordinatensysteme in den Mannigfaltigkeiten der verschiedenen Stufen darzustellen, ihren gegenseitigen Zusammenhang aufzudecken und ihre Anwendung zu zeigen. Inhaltlich ist der Stoff beschränkt auf das, was sich analytisch durch lineare Gleichungen und lineare Transformationen ausdrückt. Aber auch in dieser Beschränkung ist eine absolute Erschöpfung des Stoffes nicht angestrebt, vielmehr sollen vor allem die im Gebrauche wichtigsten Begriffe und Methoden eingehend und exakt dargestellt werden. Diese Aufgabe ist mit vorzüglicher Klarheit in der Anordnung und Exaktheit des Ausdrucks gelöst. Das Werk zerfällt in drei Abschnitte, von denen der erste die Punktreihe und den Strahlenbüschel, der zweite die Ebene, der dritte den Raum, den Ebenenbüschel und den Ebenenbündel behandelt. Immer wird, dem historischen Entwicklungsgange folgend, mit den kartesischen Koordinaten begonnen und in allmählicher Weiterentwicklung zu den allgemeinen projektiven Koordinaten fortgeschritten. Auf den Inhalt des Werkes näher einzugehen, dürfte sich erübrigen, da ja der Stoff allgemein bekannt ist. Hervorzuheben aber ist die Übersichtlichkeit der Disposition, die sich schon darin äußert, daß jeder Artikel seine besondere Überschrift trägt. Ein Inhaltsverzeichnis und Sachregister tragen mit dazu bei, die Orientierung und Benutzung zu erleichtern. Die Anmerkungen, die die letzten 46 Seiten des Buches einnehmen, bringen zahlreiche historische und literarische Angaben, auch einzelne kleinere Ergänzungen. So finden sich dort die Grundbegriffe der Determinantentheorie und der Theorie linearer Gleichungen auseinandergesetzt. Übungsaufgaben, die dem Plane des Werks nicht entsprochen hätten, sind nicht aufgenommen. Sk.

G. SCHOUTEN. Analytische meetkunde van de kegelsneden en de oppervlakken van den tweeden graad. (Analytische Geometrie der Kegelschnitte und der Flächen zweiter Ordnung.) Derde herziene Druk. Delft: J. Waltman jr. 315 S. 8°.

Das vorliegende, für die Studierenden an der technischen Hochschule in Delft bestimmte Lehrbuch enthält in faßlicher und kurzer Form den traditionellen Stoff. Zu erwähnen ist, daß der Verf., ehe er zur Koordinatengeometrie schreitet, vorher mittels der Dandelinschen Konstruktion die Kegelschnitte geometrisch definiert und ihre Haupteigenschaften ableitet. Für den Anfänger hat diese Behandlungsweise den Vorteil, daß, sobald er mit der Koordinatenlehre vertraut geworden ist, er sogleich imstande ist, diese Lehre zur Herleitung einer großen Menge ihm schon bekannter Resultate zu benutzen. Der zweite Teil über die Flächen zweiter Ordnung gibt die übliche Darstellung, zeigt dabei aber deutlich das Streben des Verf., sich auf die für den Techniker wichtigsten Grundlagen zu beschränken.

Kl.

O. TH. BÜRKLEN. Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig: G. J. Göschen. 196 S. 12mo (Samml. Göschen 256).

In 627 Aufgaben werden Punkte, Strecken, Gerade, Kreise, die drei Kegelschnitte, die allgemeine Gleichung zweiten Grades, der Gebrauch der Polarkoordinaten und einzelne höhere Kurven verarbeitet. Die Resultate sind natürlich angegeben. Leider ist die sonst sehr brauchbare Sammlung in dieser ersten Auflage noch wenig korrekt; z. B. ergab eine Stichprobe auf S. 66/67 die Aufgaben 203, 204, 206 als fehlerhaft.

R. M.

J. DE VRIES. Zur Einführung in die normalen Koordinaten. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 9, 33-36.

Eine Ebene ε im Raume wird von den rechtwinkligen Koordinatenebenen in einem Dreieck geschnitten. Man kann jeden Punkt von ε charakterisieren durch seine drei Abstände α, β, γ von den Seiten dieses Dreiecks. In diesen Koordinaten stellt Verf. die Gleichungen von Geraden und Kreisen der Ebene sowie die Formel für den Abstand zweier Punkte her.

R. M.

M. D'OCAGNE. Sur la déformation des coordonnées tangentielles dites parallèles. Nouv. Ann. (4) 5, 160-163.

Wenn man von einem Nomogramm mit sich schneidenden Geraden zu einem solchen mit geradlinig liegenden Punkten (points alignés) übergehen will, wird man praktisch von kartesischen Punktkoordinaten so zu Linienkoordinaten übergehen, daß man als Koordinaten direkt die Achsenabschnitte erhält. Dies führt auf die vom Verf. und von anderen wiederholt untersuchten Parallelkoordinaten. [Literaturangaben s. Traité de nomographie p. 126].

Sk.

R. W. GENESE. On the interpretation of signs in the formulae of solid geometry. Brit. Ass. Rep. South Africa, 343-344.

Bemerkungen über die Deutung und die Festlegung der Vorzeichen in den Formeln für die einfachen Größen der analytischen Geometrie des Raumes. Lp.

F. J. VAES. Indeelingen (Einteilungen). Handel. Nederl. Nat. en Geneesk. Congr. **10**, 176-181.

Wenn man bei von drei veränderlichen Parametern abhängigen Figuren diese Parameter als homogene Koordinaten eines Punktes in einer Ebene auffaßt, entspricht jedem Punkte dieser Ebene eine bestimmte Figur. Den verschiedenen Typen der Figur gemäß wird die Ebene in getrennte Gebiete geteilt, und die Betrachtung dieser Gebietseinteilung erleichtert die Übersicht über die möglichen Gestaltungen der Figur. Beispiele: Dreieck, Schneckenlinie, elliptische Konchoide. Kl.

F. DANIËLS. Les coordonnées projectives sur la sphère. Ens. math. **7**, 206-221.

Durch die Vektoren, die durch das Zentrum der Kugel gehen, werden projektive Koordinaten für die Punkte, resp. größten Kreise derselben eingeführt. Es werden die (linearen) Gleichungen des Punktes und der Geraden in Linien-, resp. Punktkoordinaten abgeleitet, daraus die des Kreises. Diese Koordinatenbestimmung wird mit der entsprechenden Konstruktion in der Ebene in Verbindung gesetzt. D.

K. CWOJDZIŃSKI. Distanzrelationen zwischen Punkten und Geraden der Ebene, sowie Punkten und Ebenen im Raum. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 8-10.

Für die 49 Lote, welche sich von sieben Punkten auf sieben Gerade der Ebene fällen lassen, wird bewiesen, daß die aus ihren Quadraten gebildete Determinante verschwindet. Der entsprechende Satz gilt für sechs Punkte und sechs Gerade, falls die Punkte auf einem Kegelschnitt oder die Geraden Tangenten eines solchen sind. Verallgemeinerung für n Punkte und n Gerade der Ebene und für den Raum. Jhk.

V. H. O. MADSEN. Note om Rumtal. Nyt. Tidss. for Math. **16** B, 31-35.

$Z_{r,\theta}$ wird eine Raumzahl genannt, wenn ein Punkt im Raume die Koordinaten $r\cos\theta$, $r\sin\theta$ und z hat. Die Addition zweier solcher Zahlen ist die gewöhnliche, während die Multiplikation dadurch bestimmt ist, daß

$$Z'_{r',\theta'} \times Z''_{r'',\theta''} = Z_{r,\theta},$$

wenn

$$Z = Z' \cdot Z'', \quad r = r' r'', \quad \theta = \theta' + \theta''.$$

V.

K. Eichler. Beitrag zur Graßmannschen Punktrechnung. Festschr. 48. Vers. deutscher Phil. 73-96. Altona: M. Gehricke.

Die Untersuchung, welche der Verf. als Ergänzung der Arbeiten Graßmanns d. J. aufgefaßt wissen will, bezieht sich auf die Punktrechnung in der Ebene. An erster Stelle werden Punktidentitäten in bekannter Weise in Sätze der elementaren Geometrie und Statik umgedeutet. Der zweite Abschnitt handelt von den Kegelschnitten, der dritte von den Kurven dritter Ordnung, deren Gleichungen, nach dem Vorgange von Möbius, in Form von Punktgleichungen eingeführt werden. So lautet die Kegelschnittgleichung in der Bezeichnung des Verf. $\varrho x = a + \lambda b + \lambda^2 c$, wo x, a, b, c Punkte und λ einen Parameter bedeuten. Es ist nicht recht erfindlich, weshalb der Verf. seine Bezeichnung nicht mit der üblichen der elementaren Geometrie in Einklang gebracht, d. h. Punkte durch große und Strecken durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet hat. Die Schwierigkeiten, welche Graßmanns Arbeiten bieten, liegen doch wohl nicht zum geringsten Teile an der wenig geschickten Bezeichnung.

Von größerem Interesse ist der letzte Abschnitt, der sich mit der geometrischen Deutung des Δ-Operators beschäftigt und den Zusammenhang der Punktrechnung mit den binären Formen erkennen läßt. Jhk.

J. Laub. Elemente der Vektoranalysis. Wiad. mat. 9, 134-179. (Polnisch.)

Erster Abschnitt: Vektoren (Definition, Operationen). Zweiter Abschnitt: Vektorfelder (Gaußscher und Greenscher Satz). Dritter Abschnitt: Wirbelfelder (Stokesscher Satz, Potential, Anwendung auf Elektrodynamik). Dn.

H. B. Phillips. Applications of quaternions to four dimensions. Johns Hopkins Univ. Circ. 1905, Nr. 1, 9-16.

Im Raume von vier Dimensionen seien vier paarweise aufeinander senkrechte Achsen gegeben, und es seien die Einheitsvektoren längs dieser Achsen $1, i, j, k$. Die Quaternione $x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ läßt sich dann durch einen Punkt dieses Raumes mit den kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 abbilden, ein Gedanke, der zuerst von C. Stephanos (Math. Ann. **22**, 590; F. d. M. **15**, 582, 1883) ausgesprochen worden ist. Die vorliegende Note hat den Zweck, das Quaternionen-Produkt auf elementarem Wege im Raume von vier Dimensionen geometrisch zu interpretieren. E. M.

I. Stringham. A geometric construction for quaternion products. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 437-439.

„In der hier gegebenen Konstruktion ist angenommen, daß die wirklich ausgezogenen Linien der Figur auf einer Hypersphäre liegen

(sphärischer Raum von drei Dimensionen), die einen Radius gleich der linearen Einheit hat, und daß insbesondere alle Linien mit Ausnahme der vier mit φ und ψ bezeichneten auf einer sphärischen Oberfläche liegen, welche durch die Endpunkte der Einheitsvektoren i, j, k der Quaternionen geht." Die Wiedergabe der Einzelheiten der Konstruktion würde eine vollständige Übersetzung der Note erfordern. Lp.

R. W. GENESE. On some useful theorems in the continued multiplication of a regressive product in real four-point space. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 383-387.

Wohlbekannte Anwendungen der regressiven Multiplikation auf die analytische Geometrie des Raumes (vgl. u. a. des Referenten Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Leipzig: B. G. Teubner, S. 163-164).

Jhk.

G. MONNET. Vecteurs relatifs à une courbe. Ens. math. 7, 225-231.

Im Anschluß an Burali-Forti macht der Verf. einfache Anwendungen der Graßmannschen Methoden auf die Raumkurven und Mechanik.

Jhk.

G. MARLETTA. Distanza ed angolo di enti complessi. Palermo Rend. **19**, 120-128.

Der Verf. wendet die bekannte Darstellung der imaginären Elemente an, welche v. Staudt in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage" begründet hat. Zur Darstellung eines Punktes P, welcher auf der reellen Geraden r liegt, dient also die elliptische (oder parabolische) Involution, von der C der Zentralpunkt sei und $-k^2$ die Potenz; die Buchstaben r_1, C_1, k_1 haben eine ähnliche Bedeutung für einen zweiten Punkt P_1. Seien ferner h die Länge der Strecke CC_1, α und α_1 die Winkel der positiven Richtung der Geraden CC_1 resp. mit r und r_1; endlich sei ε der Winkel der positiven Richtungen von r und r_1. Dann wird die Entfernung der Punkte P und P_1 durch die folgende Formel erklärt:

$$\overline{PP_1} = \pm [h^2 - (k^2 + k_1^2) + 2kk_1 \cos\varepsilon + 2h(k\cos\alpha - k_1\cos\alpha_1)\, i]^{\frac{1}{2}},$$

wo im allgemeinen durch $[m + ni]^{\frac{1}{2}}$ der Wert von $\sqrt{m+ni}$ bezeichnet wird, dessen reeller Teil positiv ist.

Zur Darstellung einer Geraden r, welche reell oder imaginär erster Art ist, dient eine parabolische oder elliptische Strahleninvolution. Man bezeichne durch o den Strahl derselben, welcher zu seinem konjugierten o_1 senkrecht ist, und durch $-\lambda^2$ die Involutionspotenz; o', o_1', λ' haben eine ähnliche Bedeutung für eine zweite Gerade r'. Dann wird nach dem Verf. der Winkel der Geraden r, r' folgendermaßen definiert:

$$\cos rr' = \frac{\cos oo' - \lambda\lambda' \cos o_1 o_1' - i(\lambda \cos o_1 o' + \lambda' \cos oo_1')}{[(1-\lambda^2)(1-\lambda'^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Sind endlich zwei Gerade gegeben, von denen mindestens eine imaginär zweiter Art ist, so betrachtet man als ihren Winkel denjenigen, welchen die Parallelen bilden, die man zu den gegebenen durch einen beliebigen Raumpunkt ziehen kann. Der Verf. beweist, daß zufolge dieser Definition die Haupteigenschaften der Längen und Winkel bestehen.

La.

C. Segre. Relazione sulla memoria del Prof. Mario Pieri: Nuovi principii di geometria projettiva complessa. Torino Atti **40**, 378-379.

In seinen berühmten „Beiträgen zur Geometrie der Lage" hat von Staudt die Theorie der (imaginären) komplexen Elemente auf die der reellen gegründet, indem er an Stelle eines beliebigen komplexen Elementes seine reelle Darstellung setzte. In der Pierischen Abhandlung (welche in Torino Mem. erschienen ist; Referat nachfolgend) wird die „komplexe Geometrie" direkt, ohne die Hülfe der reellen behandelt, indem man von einem geeigneten System von Definitionen und Postulaten ausgeht, was (wie der Berichterstatter sagt) „einem philosophischen Begriff und einer wissenschaftlichen Notwendigkeit entspricht." La.

M. Pieri. Nuovi principii di geometria projettiva complessa. Torino Mem. (2) **55**, 189-235.

In der vorliegenden Arbeit begründet Verf. die Geometrie der projektiven linearen komplexen Mannigfaltigkeiten auf Grund eigener Postulate, d. i. ohne Heranziehung metrischer Hülfsmittel, noch wie es v. Staudt gemacht hat, mit Hülfe der reellen projektiven Geometrie. Er gebraucht dazu 30 Postulate, von denen die ersten elf gewöhnliche Verknüpfungsaxiome sind einschließlich des Axioms über die Nicht-Identität des vierten harmonischen Punktes mit den drei voneinander verschiedenen Punkten einer Geraden, die ihn erzeugen. Die übrigen Postulate beziehen sich auf die Struktur der Ketten von Punkten auf einer komplexen Geraden, d. i. Systeme von Punkten, die zu je vieren ein reelles Doppelverhältnis haben und also durch drei Grundpunkte mittels Bildung des vierten harmonischen Punktes (und Grenzprozesse) erzeugt werden können. Man kann sie sich auch veranschaulichen als die Kreise der Gaußschen Ebene, die zu den Geraden gehört. Diese Postulate gliedern sich demgemäß in solche, die bloß die topologischen Eigentümlichkeiten eines Kreises (Ordnungstypus) oder der Systeme von Kreisen festlegen, und solche über die Eigenschaften der Kreisverwandtschaften. Daß die dreißig Postulate hinreichend sind, wird durch Einführung von Koordinaten bewiesen. D.

E. B. Wilson. Sur le groupe qui laisse invariante l'aire gauche. Nouv. Ann. (4) **5**, 163-170.

Mit Hülfe des Vektorkalküls wird gezeigt, daß (aus infinitesimalen Transformationen) zusammensetzbare Raumtransformationen, die die Größe

des von Peano zuerst (des weiteren von Fréchet, s. F. d. M. **35**, 497, 1904) eingeführten vektoriellen Inhalts einer Raumkurve unverändert lassen, Bewegungen sind. Das Resultat läßt sich auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinern. D.

E. Study. Kürzeste Wege im komplexen Gebiet. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 313-321.

E. Study. Kürzeste Wege im komplexen Gebiet. Math. Ann. **60**, 321-378.

Die zweite Arbeit enthält eine ausführliche Darstellung der in der ersten nur kurz geschilderten Untersuchungen. Wir beschränken uns daher auf einen Bericht über die zweite Arbeit, der freilich auch nur einzelne Hauptpunkte hervorheben kann. Es handelt sich darum, eine solche Erweiterung der metrischen Begriffe zu entwickeln, daß die Beziehungen des Größer- und Kleinerseins, also namentlich die Probleme über Maxima und Minima auch auf komplexe Figuren anwendbar bleiben. Die analytische Fortsetzung der reellen Metrik ins komplexe Gebiet versagt in dieser Beziehung; dagegen wird das Gewünschte, wie der Verf. zeigt, geleistet, wenn man eine Hermitesche quadratische Form $\sum a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu$ mit konjugiert komplexen Veränderlichen $x_\mu, \bar{x}_\nu$ und mit konjugiert komplexen Koeffizienten $a_{\mu\nu}, a_{\nu\mu}$ benutzt, um in dem Raume $x_1 \dots x_n$ eine „Hermitesche" Maßbestimmung einzuführen, die der von Cayley auf eine reelle quadratische Form gegründeten vollständig analog ist. Den Gedanken, eine solche Maßbestimmung einzuführen, hat allerdings Fubini schon früher als der Verf. veröffentlicht (F. d. M. **35**, 142, 1904), jedoch noch nicht in vollkommener Form und namentlich ohne die wichtigste Frage zu erledigen, die nämlich, ob der Satz über die Gerade als den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten im komplexen Gebiete bestehen bleibt. Der Verf. bespricht zunächst in § 1 gewisse Gruppen, die zu einer Hermiteschen quadratischen Form gehören, und bezeichnet insbesondere die Gruppe der Kollineationen und Antikollineationen, bei denen die Form invariant bleibt, als Hermitesche Bewegungen und Umlegungen. In §§ 2 und 3 wird die hyperbolische Hermitesche Maßbestimmung entwickelt, zu der eine indefinite Hermitesche Form im ternären komplexen Gebiet Anlaß gibt, und es wird gezeigt, daß sie das komplexe Gebiet in zwei Teile zerlegt derart, daß je zwei Punkte des einen Gebiets eine reelle Entfernung bekommen und durch eine einzige „Normalkette" von ∞^1 Punkten verbunden werden können, die den kürzesten Weg (das geodätische Band) zwischen beiden darstellt. §§ 4-7 behandeln die Maßbestimmung bei einer definiten Hermiteschen Form. Hier bestimmen je zwei Punkte, die nicht in bezug auf die Hermitesche Form konjugiert sind, ein geodätisches Band, ihre kürzeste Verbindungslinie, und dieses Band ist eine Staudtsche Kette auf der durch beide Punkte gehenden Geraden des ternären Gebiets. Die ∞^4 Punkte des komplexen ternären Gebiets bilden einen vierfach ausgedehnten elliptischen Hermiteschen Raum, in dem man verschiedene Arten von

Volumenelementen betrachten kann. Insbesondere wird das Gesamtvolumen dieses Raumes $= 8\pi^2$ gefunden. Ferner untersucht der Verf. die Beziehung zwischen zwei verschiedenen Winkelbegriffen, zu denen die betrachtete Maßbestimmung führt. Endlich werden die Mannigfaltigkeiten untersucht, die aus den ∞^1 durch einen ebenen Büschel von Fortschreitungsrichtungen bestimmten geodätischen Bändern bestehen. In §§ 8 und 9 betrachtet der Verf. gewisse Konfigurationen im Hermiteschen Raume. In §§ 10 und 11 wird gezeigt, daß der elliptische Hermitesche Raum in gewissen gewöhnlichen elliptischen, in gewissen euklidischen und in gewissen gewöhnlichen hyperbolischen Räumen enthalten ist und also durch reelle vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten repräsentiert werden kann. § 12 enthält gruppentheoretische Folgerungen, namentlich über die reell verschiedenen Formen, die man der Zusammensetzung der allgemeinen projektiven Gruppe eines Raumes von n Dimensionen geben kann. § 13 handelt über die konformen und die geodätischen Abbildungen in Hermiteschen Räumen, § 14 über die parabolische Hermitesche Maßbestimmung. El.

Ch. Bioche. Remarques sur un cas de symétrie dans l'espace. S. M. F. Bull. 33, 13-14.

Wenn eine räumliche Figur zwei zueinander rechtwinklige Symmetrieachsen ox, oy besitzt, so ist auch die auf beiden Richtungen senkrechte Gerade oz eine Symmetrieachse. Dabei ist aber weder o notwendig ein Symmetriezentrum, noch eine der Ebenen oxy, oxz, oyz eine Symmetrieebene, während andere Symmetrieebenen vorkommen können. Es werden Raumkurven als Beispiele zu den vorhandenen Möglichkeiten angegeben. Sk.

A. Brill. Elimination und Geometrie in den letzten Jahrzehnten. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 275-283.

Der Vortrag weist in der Einleitung auf die Verdienste von Hesse, der nach Heidelberg etwa 50 Jahre vor Abhaltung des Kongresses berufen wurde, um das im Thema angedeutete Gebiet hin. Die dann folgenden Bemerkungen sollen „eine Art von geometrischem Anhang zu dem in der Enzyklopädie von E. Netto erstatteten ausführlichen Bericht über Elimination geben.“ Lp.

Weitere Literatur.

G. Danisi. Il sistema di coordinate nell'orario grafico dei treni: studio geometrico analitico. Padova: Prosperini. 24 S. 8°.

W. Fuhrmann. Aufgaben aus der analytischen Geometrie. Königsberg. 28 S. 4° (s. F. d. M. 35, 577, 1904).

H. S. Hall. Easy graphs. London: Macmillan and Co. VII u. 64 S. [Nature 72, 393.]

Th. Hartwig. Schule der Mathematik zum Selbstunterrichte. Zweiter Band. Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Mit 150 Aufgaben. Wien: M. Perles. 200 S. gr. 8°.

W. Jamieson. Graphs for beginners. London: Blackie and Son. 64 S. [Nature 72, 533.]

C. J. Joly. Manual of quaternions. London: Macmillan. 348 S. 8°.

J. M. de Madariaga. Sobre la representación simbólica por complejas imaginarias, de las magnitudes sinusoidales. Rev. Acad. Madrid 3, 287-291.

S. M. Schmall. A first course in analytical geometry, plane and solid, with numerous examples. New York: Van Nostrand. VII u. 318 S. 8°. (Van Nostrand series of text-books.)

P. F. Smith and A. S. Gale. The elements of analytic geometry. Boston: Ginn. XII u. 424 S. 8°.

P. F. Smith and A. S. Gale. Introduction to analytic geometry. A condensation of „Elements of analytic geometry“. Boston: Ginn.

P. G. Waldner. Sobre coordenadas barycéntricas. Rev. de Mat. Santiago de Chile 3, 376-387, 424-438.

Worked examples in coordinate geometry. Graduate course in right line and circle. 2d ed. London: Clive. 80 S. 12mo (University tutorial series).

Kapitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Kurven.

F. Gomes Teixeira. Tratado de las curvas especiales notables. Memoria premiada por la Real Academia de ciencias exactas, físicas y naturales de Madrid, y publicada per la misma Academia. Madrid. IX u. 632 S. gr. Lex. 8°.

Die Akademie der Wissenschaften zu Madrid stellte 1892 als Preisaufgabe: Ein geordnetes Verzeichnis aller Kurven beliebiger Art, die einen besonderen Namen erhalten haben, unter Hinzufügung einer kurz gefaßten Angabe der Gestalt, der Gleichungen und der allgemeinen Eigenschaften jeder einzelnen nebst Anführung der Bücher oder Autoren, die sie zuerst bekannt gemacht haben. Da bei dem Fälligkeitstermine 1895 keine Arbeiten eingereicht waren, wurde die Aufgabe von neuem gestellt, und nun liefen am Ende des Jahres 1897 zwei Arbeiten ein, zwischen denen der Preis geteilt wurde, die eine von G. Loria, die andere von F. G. Teixeira (vgl. den Bericht in F. d. M. **31**, 33, 1900). Loria arbeitete dann die von ihm eingereichte Bewerbungsschrift um und ließ sie in deutscher Übersetzung erscheinen (s. F. d. M. **33**, 594, 1902).

Die Herausgabe der Schrift von Teixeira wurde durch verschiedene Umstände verzögert. Die Arbeit wurde aus dem Portugiesischen ins Spanische übersetzt von dem Sekretär der Madrider Akademie Miguel Merino, der auch den Druck im Bande XXII der Memorias dieser Akademie überwachte. Der während des Drucks erfolgte Tod Merinos verschuldete besonders den großen Aufschub der Veröffentlichung.

Während Loria sich nicht genau an den Wortlaut der Aufgabe gehalten hat, um den gewaltigen von ihm zusammengetragenen Stoff unter allgemeineren Gesichtspunkten zu ordnen, ist Teixeira den durch die Fassung der Aufgabe vorgeschriebenen Linien gefolgt. Reichhaltiger und systematischer ist das Buch von Loria, das wie ein Lehrbuch der ebenen Kurven angesehen werden kann, in dem auch zusammengehörige Eigenschaften und Sätze verschiedener Kurven durch die Darstellung miteinander verknüpft werden. Bei Teixeira tritt jede Kurve zunächst als Einzelerscheinung auf; die sich auf sie beziehenden Rechnungen werden ausführlicher und vollständiger als bei Loria gegeben, besonders solche, die sich auf die Anwendungen der Differential- und Integralrechnung beziehen. Dagegen werden die zusammenfassenden Gesichtspunkte, welche viele Sätze einheitlich überschauen lassen, nur zuweilen erörtert. Loria hatte über die ebenen Kurven so viel beizubringen, daß er die Raumkurven ausschließen mußte. Teixeira behält dagegen durch Beschränkung auf die Vorschriften des Themas so viel Platz, daß er auf S. 521-605 auch noch die bekanntesten Kurven doppelter Krümmung erledigen kann. Die Literaturnachweise sind vollständiger bei Loria.

In bezug auf die Anordnung des Inhalts mögen wenige Andeutungen genügen. Die Einteilung der Kurven ist nach Maßgabe ihrer Gleichungen getroffen. Daher beginnt das erste Kapitel mit den zirkularen kubischen Kurven, und im zweiten werden die übrigen Kurven dritter Ordnung behandelt, welche besondere Namen erhalten haben. In den beiden folgenden Kapiteln III und IV werden die bizirkularen Kurven vierter Ordnung vorgeführt, im Kapitel V die anderen benannten Kurven vierter Ordnung. Die algebraischen Kurven von einer höheren Ordnung als der vierten, welche einen Namen erhalten haben, werden im Kapitel VI betrachtet.

Nach Beendigung des Abschnittes der algebraischen Kurven wird zur Aufzählung der transzendenten in den Kapiteln VII und VIII geschritten; das letztere ist im besonderen den Spiralen gewidmet (dieses Wort im geometrischen Sinne genommen).

Die Kapitel IX, X und XI beziehen sich auf Gleichungen, die je nach dem Parameter, der in sie eingeht, manchmal algebraische Kurven, ein anderes Mal transzendente Kurven darstellen. Zuerst werden die Parabeln und die Hyperbeln verschiedener Ordnungen durchgenommen, sodann die zykloidalen Kurven, endlich verschiedene Gattungen von Kurven, die in den früheren Gruppen nicht einbegriffen sind.

Unter den Raumkurven werden zunächst im Kapitel XII die sphärischen Kurven besprochen, die übrigen im Kapitel XIII. Das letzte

Kapitel ist der Theorie der Polhodie und der Herpolhodie von Poinsot gewidmet. Es folgen dann noch einige Noten, die Ergänzungen zu einigen Punkten bringen, eine alphabetische Liste aller behandelten Kurven, umfassend 178 Namen, endlich ein Verzeichnis der zitierten Autoren.

Wir haben schon oft den großen Nutzen hervorgehoben, den solche Zusammenstellungen größerer Gebiete auf dem Grunde historischer Forschung für den schaffenden Mathematiker sowie für den Lehrer haben. Auch die vorliegende Schrift wird jedem, der auf dem Gebiete der speziellen Kurven arbeitet, große Dienste leisten können. Lp.

R. v. Mises. Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven. Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 44-85.

Hat man in einer Ebene ein System $\mathfrak{S}$ von Punkten, Geraden, veränderlichen Kurven, deren Koordinaten, bezw. Gleichungskoeffizienten Funktionen eines Parameters t sind (differenzierbar, soweit es die jeweilige Untersuchung erfordert), so durchläuft das System eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Phasen. Betrachten wir die Bewegung in einer bestimmten Phase, so hat jeder Punkt p des Systems eine bestimmte Bewegungsrichtung, jede Gerade G einen momentanen Drehpunkt: ferner kommt, wenn wir t als Zeit deuten, jedem Punkt eine bestimmte Geschwindigkeit, jeder Geraden eine Winkelgeschwindigkeit zu. Diese Größen sind zwar abhängig von der Wahl des Parameters t, unabhängig davon aber sind ihre Verhältnisse. Man ordne nun jedem Punkte p einen Punkt p', jeder Geraden G eine Gerade G' so zu, daß die Geraden pp' die Bewegungsrichtung, die Schnittpunkte GG' die Drehpunkte darstellen, und daß ferner die Verhältnisse der Strecken pp' und der trigonometrischen Tangenten der Winkel GG' den Verhältnissen der Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten gleichkommen. Die Punkte p' und die Geraden G' heißen die Charakteristiken von p und G. Durch diese Charakteristiken wird der momentane Bewegungszustand der Punkte und Geraden in demselben Maße geometrisch charakterisiert, wie analytisch durch die Verhältnisse der ersten Differentialquotienten der Koordinaten und Koeffizienten. — Dasselbe leisten die vom Verf. eingeführten Charakteristiken der Systemkurven für diese. Zieht man durch einen Punkt p einer Kurve C des Systems Strahlen, welche in der Ebene fest bleiben, während C die verschiedenen Phasen durchläuft, so werden die zunächst mit p zusammenfallenden Schnittpunkte dieser Strahlen und der Kurve C Bewegungen ausführen, und es wird jedem von ihnen im Anfangsmoment der betrachteten Bewegung eine bestimmte, auf dem zugehörigen Strahl gelegene Charakteristik zukommen. Alle diese Charakteristiken liegen nun auf einer zur Tangente von C im Punkte p parallelen Geraden, welche als „Charakteristik von C für den Punkt p“ bezeichnet wird. Faßt man also C als Punktort auf, so erhält man ∞^1 Gerade als Charakteristiken, welche eine neue Kurve C', den „charakteristischen Geradenort“, bestimmen. Faßt man C als Geradenort auf, so gelangt

man in analoger Weise zu dem „charakteristischen Punktort" von C. So hat man für jedes Element E, welches Punkt, Gerade, Kurve sein kann, eine Charakteristik E', welche wiederum Punkt, Gerade oder Kurve ist. Auch für metrische Elemente: Strecken, Winkel usw. werden Charakteristiken eingeführt.

Bezeichnet $\mathfrak{S}'$ das System der Charakteristiken der sämtlichen Elemente von $\mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{S}'$, welches auch als „Charakteristik von $\mathfrak{S}$" bezeichnet werden kann, wiederum ein System, welches mit $\mathfrak{S}$ zugleich ∞^1 Phasen durchläuft. $\mathfrak{S}'$ besitzt dann wieder eine Charakteristik $\mathfrak{S}''$ usf. Die Angabe von $\mathfrak{S}$ und seinen Charakteristiken bis zur $(n-1)$-ten Ordnung $\mathfrak{S}', \ldots, \mathfrak{S}^{(n-1)}$ ist nach gewöhnlicher Ausdrucksweise gleichwertig mit n aufeinanderfolgenden Phasen des Systems $\mathfrak{S}$.

An diese Definitionen schließen sich zwei Kurvendefinitionen an, welche als synthetische Definition erster und zweiter Art unterschieden werden. Bei der ersten wird durch eine Reihe fester und ein bewegliches Element E_1, sowie durch gewisse Operationsgesetze ein Element E_n definiert, welches mit E_1 ∞^1 Phasen durchläuft. Ist eine Phase von E_1 mit ihren Charakteristiken bis zur $(k-1)$-ten Ordnung gegeben, so ist damit auch die zugehörige Phase von E_n nebst ihren Charakteristiken bis zur $(k-1)$-ten Ordnung bestimmt. E_n erzeugt eine Kurve, welche an der der Phase von E_n entsprechenden Stelle zugleich mit denjenigen Elementen (Tangente, Krümmungsmittelpunkt usw.) bestimmt ist, welche sich analytisch durch die Differentialquotienten bis zur $(k-1)$-ten Ordnung ausdrücken lassen. Die Aufgabe, die so bestimmten Elemente konstruktiv zu ermitteln, wird ausführlich erörtert. — Bei der Kurvendefinition zweiter Art ist neben einer Reihe fester Elemente ein bewegliches nebst den Charakteristiken bis zur $(n-1)$-ten Ordnung gegeben; ferner ein Gesetz, nach welchem aus diesen die Charakteristik n-ter Ordnung gefunden wird. Aufgabe ist, die hierdurch mitbestimmten Charakteristiken höherer Ordnung zu ermitteln. Das Element E erzeugt eine Kurve. Das analytische Äquivalent zu dieser Kurvendefinition ist die Bestimmung einer Funktion einer Veränderlichen durch eine Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Die allgemeine Theorie wird an einer Reihe von Beispielen weiter verfolgt. Stz.

G. Scheffers. Über Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 349-356.

Am Schluß der Arbeit werden von Zufälligkeiten freie Definitionen der Isogonal- und Äquitangentialkurven gegeben. In der Arbeit wird unter Äquitangentialkurve eine Kurve verstanden von der Beschaffenheit, daß die ∞^1 Tangenten, die sie mit gegebenen ∞^1 Kurven gemeinsam hat, sämtlich dieselben Längen haben. Nach seiner Übersicht über seine Ergebnisse, die die Schar von ∞^2 Isogonalkurven und ihren Zusammenhang mit gewissen ∞^1 Berührungstransformationen betreffen, leitet der

Verf. in gewissem Sinne dual gegenüberstehende Sätze ab und führt Transformationen ein, die mit einer Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven in Verbindung stehen. Am auffallendsten ist die Analogie, die sich zu den Beziehungen der Isogonalkurven und der konformen Abbildung und ihrem analytischen Ausdruck durch die Gleichung

$$x' + iy' = f(x + iy)$$

ergibt. Die oben erwähnten Transformationen heißen äquilong, weil sie jede Gerade in eine Gerade und eine Strecke in eine gleich lange Strecke überführen. Sie verwandeln eine Schar von Äquitangentialkurven in eine Schar derselben Art. Sind u, v die Hesseschen Linienkoordinaten, so wird durch die Gleichung

$$u' + jv' = f(u + jv), \text{ wobei } j^2 = 0,$$

jeder Geraden u, v eine Gerade u', v' zugeordnet, und diese Zuordnung ist eine äquilonge Transformation.

Für Äquitangentialkurven werden drei Beispiele angegeben. Lwt.

G. Scheffers. Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen. Math. Ann. **60**, 491-531.

Die Arbeit enthält eine ausführliche Darstellung von Untersuchungen, über die der Verf. auf dem Heidelberger Kongreß berichtet hat (Referat vorstehend), und knüpft an zwei ältere Arbeiten an (F. d. M. **29**, 491, 1898 und **35**, 673, 1904). Jede Schar von ∞^1 Kurven der Ebene ordnet jedem Punkte ein Linienelement zu, und es gibt eine bestimmte Berührungstransformation, die jeden Punkt in die Gerade des zugeordneten Linienelements überführt; umgekehrt ist durch diese Berührungstransformation die Kurvenschar vollständig bestimmt. Aus der Kurvenschar kann man auf zwei Arten ∞^1 neue Kurvenscharen ableiten: Dreht man die Gerade jedes ihrer Linienelemente um einen konstanten Winkel α um den Punkt des Linienelements, so erhält man ∞^1 Isogonalkurven, die die Kurven der ersten Schar unter dem Winkel α schneiden. Verschiebt man den Punkt jedes Linienelements um eine konstante Strecke a auf der Geraden des Linienelements, so erhält man ∞^1 „Äquitangentialkurven", die mit jeder Kurve der ursprünglichen Schar eine Tangente von der Länge a gemein haben. Zu jeder so erhaltenen Kurvenschar gehört eine Berührungstransformation, deren Eigenschaften der Verf. näher bespricht. Jede Schar nun von ∞^2 Kurven, die aus den sämtlichen Isogonalkurven (Äquitangentialkurven) einer Schar von ∞^1 Kurven besteht, ist dadurch charakterisiert, daß je drei Kurven der Schar ein Dreieck von der Winkelsumme π bilden (daß die gemeinsamen Tangenten je dreier Kurven der Schar ein Dreieck bilden, dessen Seitensumme Null ist). Ferner gehört zu jeder Schar von ∞^2 Isogonalkurven (Äquitangentialkurven) eine zweite Kurvenschar derselben Art, und zwar beruht die Beziehung zwischen beiden Scharen auf Gegenseitigkeit. Das wird erst synthetisch und dann

analytisch bewiesen. Neben die Gruppe aller konformen Punkttransformationen, bei der offenbar jede Schar von ∞^2 Isogonalkurven eine solche Schar bleibt, tritt nun eine Gruppe von Berührungstransformationen, die „äquilonge Gruppe“, bei der jede Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven eine solche Schar bleibt. Diese Gruppe führt jede Gerade in eine Gerade über und jede Strecke einer Geraden in eine gleich lange Strecke. Bei geeigneter Wahl der Linienkoordinaten u, v wird sie, wie der Verf. zeigt, durch eine Gleichung: $u' + jv' = \varphi(u + jv)$ dargestellt, wo j eine komplexe Einheit ist, deren Quadrat verschwindet. Die Analogie mit der konformen Gruppe tritt hier besonders deutlich hervor. Übrigens ist die äquilonge Gruppe nur ein besonderer, allerdings der interessanteste Fall der Gruppe von äquidistanten Berührungstransformationen, die Study in einer etwas später veröffentlichten Arbeit (Referat in Abschnitt IX, Kap. 5B) betrachtet hat. El.

G. Scheffers. Ebene Kurvennetze ohne Umwege. Leipzig. Ber. 57, 353-359.

Zwei Scharen von je ∞^1 Kurven der Ebene nennt der Verf. ein Kurvennetz, wenn durch jeden Punkt von allgemeiner Lage je eine Kurve jeder Schar geht. Er legt nun den Bogenlängen jeder Schar einen bestimmten Sinn bei und nennt das Netz ein solches ohne Umwege, wenn alle die unendlich vielen Wege, die man zwischen zwei beliebigen Punkten P und Q aus Kurvenstücken des Netzes zusammensetzen kann, gleiche Bogenlänge haben. Das allgemeinste Netz dieser Art wird, wie der Verf. auf drei verschiedene Arten zeigt, durch eine Differentialgleichung von der Form:

$$(\varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy)^2 = dx^2 + dy^2$$

definiert. Außerdem beweist er, daß die Kurvennetze ohne Umwege im Infinitesimalen durch folgende Eigenschaft charakterisiert werden: Ist $PP'RQ'$ ein unendlich kleines Viereck, und gehören die Seiten $PP', Q'R$ Kurven der einen Schar, die Seiten $PQ', P'R$ Kurven der andern Schar an, so ist der Schnittpunkt der ersten Seiten ebenso weit von P entfernt wie der Schnittpunkt der zweiten Seiten. El.

M. Fréchet. Sur deux suites remarquables de polynomes et de courbes. Nouv. Ann. (4) 5, 538-542.

1. Jede zwischen 0 und 1 stetige Funktion ist als Grenze einer Reihe von passend gewählten Funktionen darstellbar, die einer von vornherein festgewählten abzählbaren Menge von Polynomen entnommen sind.

2. Jede stetige Kurve ist die Grenze einer unendlichen Reihe von Kurven, die aus einer unendlichen Menge von Unikursalkurven passend ausgewählt sind. Sk.

E. B. Ross. Contact between a curve and its envelope. Edinb. M. S. Proc. **23**, 50-54.

Der Aufsatz behandelt einige der einfacheren Spezialisierungen der Schnittverhältnisse zwischen einer ebenen Kurve und der Enveloppe der Familie, zu der sie gehört. Die Gleichung der Kurvenfamilie sei $\varphi(x, y, t) = 0$; die Rechnung vereinfacht sich, wenn man als Kurve diejenige aus der Schar nimmt, für welche $t = 0$ ist; ferner als Berührungspunkt der Kurve und der Enveloppe den Koordinatenanfang, als Tangente die x-Achse. Die Gestalt von $\varphi(x, y, t)$ wird hiernach so angenommen:

$$(c_0 y + d_0 x + \cdots) + (b_1 x + c_1 y + \cdots) t + (a_2 + b_2 x + \cdots) t^2 + (a_3 + \cdots) t^3 + \cdots$$

Annäherungen für die Enveloppe in der Nähe des Ursprungs der Koordinaten werden dann für einige Fälle ermittelt, in denen eine oder mehrere der Konstanten $c_0, d_0, \ldots, a_3, \ldots$ Null sind. Die so gewonnenen Resultate werden endlich in einer Tabelle zusammengestellt, die von der besonderen Wahl des Ursprungs und der Achsen unabhängig ist. Gbs. (Lp.)

D. G. Taylor. Polar loci. Edinb. M. S. Proc. **23**, 61-65.

Der erste Teil des Artikels enthält Winke zur Vereinfachung der Konstruktion und Auffassung von Kurven, deren Gleichungen in Polarkoordinaten gegeben sind. Der zweite Teil handelt von Kurven, die aus einer gegebenen Kurve durch Vergrößerung oder Verkleinerung des Polarwinkels nach einem gegebenen Verhältnisse abgeleitet werden; so geht aus dem Kreise $r = a \sin \vartheta$ die Kurve $r = a \sin m\theta$ hervor.

Gbs. (Lp.)

P. Böhmer. Über elliptisch-konvexe Ovale. Math. Ann. **60**, 256-262.

Wenn eine Kurve in einem Punkte M als fünfpunktig berührenden Kegelschnitt eine Ellipse besitzt, nennt der Verf. die Kurven in M elliptisch gekrümmt; ein konvexes Oval, das in jedem seiner Punkte elliptisch gekrümmt ist, heißt danach ein „elliptisch-konvexes“ Oval. Für ein solches Oval gilt der Satz: Fünf Punkte eines elliptisch konvexen Ovals liegen stets auf einer Ellipse. Lp.

O. Lesser. L-Kurven und Evoluten. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 241-265.

Fortsetzung der Betrachtungen des Vorjahres (F. d. M. **35**, 584, 1904). „Die Arbeit bildet gewissermaßen die Fortsetzung jenes Aufsatzes; sie setzt die L-Kurve in Beziehung zur Evolute und will zeigen, daß zur Auffindung der Krümmungsmittelpunktskurve der Grundkurve auch die

L-Kurve recht gute Dienste zu leisten vermag — ja, daß die Herleitung der Evolutengleichung aus der der L-Kurve unter Umständen der Entwicklung auf dem gewöhnlichen Wege sogar vorzuziehen sein möchte." Ref. hat seine Ansicht über den Gegenstand im vorjährigen Referate angedeutet und in einem kleinen Artikel des Arch. d. Math. u. Phys. (3) **11**, 369-371, 1907, näher begründet. Lp.

F. Sibirani. Sul luogo di un punto univocamente coordinato ad una coppia di punti mobili. Periodico di Mat. (3) **2**, 202-208.

Die beiden Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ gehören bzw. den beiden Kurven (1) $\varphi_1(x, y) = 0$ und $\varphi_2(x, y) = 0$ an; zwischen ihnen bestehe eine Beziehung (2) $\psi(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$. Mit P_1 und P_2 sei ein Punkt P_3 eindeutig verbunden durch die Gleichungen

$$(3) \quad \theta_1(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = 0, \quad \theta_2(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = 0.$$

Den Ort von P_3 zu finden, wenn P_1 und P_2 sich auf den Kurven (1) bewegen. Es genügt, die vier Koordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 aus den fünf Gleichungen $\varphi_1(x_1, y_1) = 0$, $\varphi_2(x_2, y_2) = 0$, $\psi = 0$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ zu eliminieren. Für die so charakterisierte Aufgabe werden einzelne Beispiele durchgerechnet; z. B. wird bestimmt, daß das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ einem gegebenen Dreiecke ähnlich sein soll. Lp.

E. Amaturo. Curve projettate in vera grandezza dalle tangenti o dalle normali. Batt. G. **43**, 182-195.

Eine Kurve soll so bestimmt werden, daß die Tangenten (oder Normalen) in den Endpunkten jedes Bogenstückes auf der x-Achse eine dem Bogen gleiche Strecke begrenzen. Für beide Fälle und einige naheliegende Verallgemeinerungen kann Verf. die Kurvengleichungen, die Rektifikation, den Krümmungsradius und anderes angeben. R. M.

C. Wargny. Nomenclatura de las curvas. Rev. de Mat. Santiago de Chile **3**, 336-344, 367-375, 415-425.

B. Theorie der algebraischen Kurven.

H. Wieleitner. Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. Leipzig: G. J. Göschen. XXII u. 308 S. (Samml. Schubert XLIII.)

Die letzte (zweite) Auflage des Salmon-Fiedlerschen Werkes über höhere ebene Kurven ist im Jahre 1882 erschienen. So ist denn eine Neubearbeitung der Theorie der ebenen algebraischen Kurven mit Freuden zu begrüßen, da in der Zwischenzeit erhebliche Fortschritte erzielt wurden.

Der Verf. betont von vornherein, daß er kein gelehrtes Buch für Gelehrte habe schreiben wollen, sondern eine Einführung für Anfänger, von denen nur die Kenntnis der Anfangsgründe der Differentialrechnung und Algebra nebst einer größeren Vertrautheit mit der Theorie der Kegelschnitte vorausgesetzt wird. Wenn der Verf. aber dann fortfährt: „Denn die Theorie der höheren Kurven ist ja hiervon eigentlich nur die Fortsetzung", so hätte man erwarten sollen, daß er zunächst die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung mit möglichst elementaren und direkten Methoden in Angriff genommen hätte, um an ihnen allmählich die für Kurven höherer Ordnung maßgebenden Gesichtspunkte zu entwickeln. Der Verf. hat es aber dem Leser sehr viel schwerer gemacht, der sich erst durch elf umfangreiche Abschnitte durcharbeiten muß, die die allgemeine, durchaus nicht so leicht verständliche Theorie der algebraischen ebenen Kurven behandeln, bis er endlich auf S. 213 zu den Kurven dritter und weiter auf S. 255 zu denen vierter Ordnung gelangt.

Es mag erst ein allgemeiner Überblick über den Inhalt des Buches gegeben werden. Im ersten Abschnitt wird der Begriff einer algebraischen Kurve erklärt, insbesondere der einer Kurve n-ter Ordnung, und es wird gleich zwischen projektiven und metrischen Eigenschaften, zwischen reellen und imaginären Elementen unterschieden, woran sich das Dualitätsprinzip, die Linienkoordinaten und der Begriff des Büschels von selbst anschließen. Der Ref. möchte dabei bemerken, daß hier der projektive Charakter der Theorie viel zu stark betont wird und überhaupt im ganzen Buche zu sehr im Vordergrunde steht (trotz eines besonderen Abschnitts über höhere Transformationen). Der Leser erhält so den Eindruck, als ob die projektiven Eigenschaften der algebraischen Kurven eigentlich das Wesentliche erschöpfen, während doch gerade die letzten Jahrzehnte zu der Erkenntnis geführt haben, daß das Projektive nur als eine Vorstufe zu betrachten ist, daß vielmehr die Geometrie auf der Kurve (d. h. die höheren Transformationen gegenüber invarianten Eigenschaften) den eigentlichen Kern der Theorie bildet.

Im zweiten Abschnitt wird die allgemeine Polarentheorie entwickelt, die zu den einfachen Singularitäten führt. Hierbei wird, wie natürlich, der dualistische Standpunkt eingenommen, der seinen Ausdruck in der Beziehung zwischen Ordnung und Klasse einer Kurve, sowie im Übergange von Punkt- zu Linienkoordinaten findet. An letzteren Übergang knüpft sich ungezwungen die Theorie der Einhüllenden, wobei auf die praktische Czubersche Methode besonderer Wert gelegt wird.

Der dritte Abschnitt ist den wichtigsten kovarianten Kurven, der Hesseschen, Steinerschen und Cayleyschen gewidmet; hierbei macht sich bereits das Chaslessche Korrespondenzprinzip geltend, dessen Bedeutung indessen wohl mehr hätte hervorgehoben werden sollen.

Damit sind die Vorbereitungen getroffen, um den Leser im vierten Abschnitt mit den (gewöhnlichen) Plückerschen Formeln bekannt zu machen.

Ein Zwischenabschnitt (V) teilt die Kurven nach ihrem Geschlecht ein; indessen beschränkt sich der Verf. auf eine erste Einleitung in die

Lehre der Kurven vom Geschlecht Null (der rationalen Kurven), mit Anwendung auf die bezüglichen Kurven dritter Ordnung.

Im nächsten Abschnitt (VI) werden die gestaltlichen Verhältnisse der Kurven untersucht, unter besonderer Berücksichtigung der Singularitäten und der Asymptoten („Kurvendiskussion"), wobei zweckmäßig der Begriff des analytischen Dreiecks und Polygons an die Spitze gestellt wird.

Hierauf gestützt, geht der Verf. im siebenten Abschnitt an die genauere Untersuchung der höheren Singularitäten, wobei auch die feineren Unterscheidungen (lineare und superlineare Zweige, Äquivalenzzahlen, Diskriminantenindex, Multiplizität eines Schnittpunktes) aufgenommen sind. Die beiden folgenden Abschnitte (VIII, IX) handeln von der Transformation der Kurven und dem hieraus hervorgehenden verallgemeinerten Korrespondenzprinzip. Als Grundlage wird die quadratische Transformation einschließlich ihrer Ausartungen studiert und als eine instruktive Anwendung die Einteilung der rationalen Kurven vierter Ordnung in Typen gegeben. Die Zusammensetzung quadratischer Transformationen zu höheren liefert dann das Mittel, höhere Singularitäten in einfache aufzulösen. In den Mittelpunkt der Lehre vom verallgemeinerten Korrespondenzprinzip wird der Begriff der Wertigkeit einer Korrespondenz gestellt, und daran der Beweis der Cayley-Brillschen Korrespondenzformel angeschlossen. Die bekannten Hurwitzschen Untersuchungen, welche höhere Kenntnisse beanspruchen, mußten wohl ausgeschlossen bleiben; indessen wäre doch ein Hinweis wünschenswert gewesen, daß erst durch diese Untersuchungen die Korrespondenztheorie als ein organisches Ganzes erscheint, dem sich auch alle Ausnahmefälle glatt einordnen.

Im Abschnitte X werden die grundlegenden Begriffe und Sätze über Schnittpunktsysteme auf Kurven zusammengestellt (Residuum, Korresidualität, Restsatz, Spezialgruppen) und finden in Abschnitt XI Anwendung auf Kurven dritter und einige Kurven höherer Ordnung.

Die beiden folgenden Abschnitte (XII, XIII) enthalten, wie schon erwähnt, Einzelausführungen für die Kurven dritter und vierter Ordnung, die insbesondere für die ersteren mit Recht ziemlich ausführlich gehalten sind (Konfiguration der Wendepunkte und harmonischen Polaren, Hessesche, Cayleysche Kurve und andere kovariante Kurven; Kölmel-Wienersche Einteilung der Kurven in Gattungen).

Ein Schlußabschnitt beschäftigt sich mit den Systemen von Kurven. Zuerst kommen lineare Systeme zur Behandlung; bei den Büscheln werden einige bezügliche Berührungsaufgaben gelöst und der Grad der Berührungsinvariante bestimmt, bei den Netzen steht die Jacobische Kurve im Vordergrunde. Im letzten Paragraphen wird für nichtlineare Kurvensysteme die Charakteristikentheorie gestreift; einige Aufgaben über Anzahlbestimmungen werden angeschlossen.

Im ganzen hat der Verf. die Aufgabe, wie er sie sich gestellt hat, in durchaus befriedigender Weise erledigt; sehr schätzenswert sind die zahlreichen eingestreuten Beispiele und deren Unterstützung durch instruktive, zumeist nach gegebenen Gleichungen wirklich berechnete Figuren, desgleichen auch die Literaturangaben. Es mag noch auf einige Einzel-

heiten eingegangen werden. In § 1 wird erwähnt, daß Habenicht für die Formen der Blätter verschiedener Pflanzen Näherungsgleichungen aufgestellt hat. Hier wären wohl vor allem die systematischen Untersuchungen von Schwendener anzuführen. Ferner wird in § 1 gesagt, daß Polarkoordinaten im Buche nur selten gebraucht werden. Aber für viele spezielle, insbesondere aus der Mechanik und Kinematik herrührende Kurven sind Polarkoordinaten praktisch die geeigneten. In § 2 heißt es, daß Monge den imaginären Elementen in der analytischen Geometrie das Bürgerrecht verlieh. Das dürfte mit mehr Recht von Poncelet gelten.

In § 4, beim Hinweise darauf, daß die Ebene bei Zulassung imaginärer Elemente ∞^4 Punkte (Geraden) enthält usf., durfte Juel nicht vergessen werden.

Bei der wichtigen Joachimsthalschen Schnittmethode fehlt das Zitat.

In § 6 sagt der Verf. bezüglich der Diskriminante Δ einer Gleichung (mit einer Unbekannten), ihr allgemeines Bildungsgesetz sei noch nicht so klar, daß es möglich wäre, Δ für eine beliebige Gleichung n-ten Grades in „geschlossener Form" anzugeben. Was soll das heißen? Ist nicht die Bézoutsche Determinantendarstellung von Δ ein allgemeines Bildungsgesetz von geschlossener Form?

Sodann wird in § 6 bei Gelegenheit der Formensymbolik auf das Werk von Clebsch-Lindemann verwiesen. Das grundlegende Werk in dieser Richtung ist doch das von Gordan-Kerschensteiner. In § 8 heißt es: Der Doppelpunkt ist ein Knoten oder ein isolierter Punkt, je nachdem die Zerlegung der (zugehörigen) quadratischen Form in zwei lineare reell ausführbar ist oder nicht. Diese Ausdrucksweise ist doch leicht irreführend. Warum nicht einfach: je nachdem die quadratische Form in zwei reelle Linearfaktoren zerfällt oder nicht?

Die Formel (1) in § 7, resp. (1*) in § 8 wird gewöhnlich als erste Plückersche Formel bezeichnet, was bereits an diesen Stellen zu erwähnen wäre. Der Ausdruck in § 13, p. 54: „eine Kurve, die als Hessesche Kurve (oder Form) eine große Rolle spielt", ist als inkorrekt zu bezeichnen. Wenn in § 16, p. 63 auf die „staunenswerte Vollständigkeit" des fundamentalen Werkes von Loria hingewiesen wird, so ist zu sagen, daß diese Vollständigkeit nicht immer eine kritische ist. Auf p. 72, § 18 ist der Beweis für die Existenz von Kurven n-ter Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ wirklichen Doppelpunkten unzureichend.

In dem Abschnitte über rationale Kurven (§§ 19, 21, 36 ff.) vermißt Referent den Hinweis auf sein eigenes Buch über Apolarität: verschiedene Sätze sind daselbst erheblich einfacher bewiesen als im vorliegenden Buche. In § 20 wird festgesetzt, daß zwei Kurven durch irgend eine nicht transzendente Relation punktweise ein-eindeutig einander zugeordnet werden. Aber gerade die transzendente Zuordnung bei Hurwitz macht erst die Theorie durchsichtig. Bei der Untersuchung der gestaltlichen Verhältnisse der Kurven (§ 22) heißt es: „Diese Untersuchungen können naturgemäß, im Gegensatz zu den vorausgegangenen, keinen invarianten Charakter tragen." Natürlich nicht invariant im Sinne der projektiven Geometrie, wohl aber im Sinne der Analysis situs. In

diesem Abschnitt vermißt Ref. besonders ein Eingehen auf die schönen Realitätsuntersuchungen von Zeuthen, Klein, Harnack u. a., sowie auf die wichtigen Klein-Riemannschen Flächen. Das Kapitel über Näherungskurven (§ 26ff) wäre bei Verwendung rationaler Näherungskurven (Brill) einfacher und durchsichtiger geworden.

Der Abschnitt über höhere Singularitäten ist einer der gelungensten des ganzen Buches; hätte der Verf. die nicht geringen Anforderungen, die er hier an das Verständnis des Lesers stellt, auch stellenweise in den anderen Partien erhoben, so hätte er ungleich tiefer eindringen können.

In § 35, der von der quadratischen Transformation als Grundlage der Cremonaschen handelt, wird gesagt, daß diese letztere Transformation nach einem Satze von Noether durch eine Folge von quadratischen ersetzbar sei (Zitat fehlt). Der Satz wurde zuerst von Clifford ausgesprochen und bald darauf fast gleichzeitig und unabhängig voneinander von Noether und Rosanes bewiesen. Ebenfalls in § 35 wird der Satz zugrunde gelegt, daß jede (sc. eindeutige) quadratische Transformation durch passende Wahl des Koordinatendreiecks auf eine sehr einfache kanonische Form gebracht werden könne. Man brauche dann nur die Variabeln durch ihre reziproken Werte zu ersetzen. Dieser Satz ist nicht richtig; selbst wenn man Reelles und Imaginäres nicht auseinander hält, gibt es noch zwei andere wesentlich verschiedene Typen eindeutiger quadratischer Transformationen.

In § 36 wird eine Reihe von Kegelschnittsätzen aufgestellt, die dann auf rationale Kurven vierter Ordnung übertragen werden. Ref. verweist hier auf seine Abhandlung über den Pascalschen Satz (F. d. M. **32**, 574, 1901), in der eine organische Theorie derartiger Sätze für beliebige algebraische Kurven (und Flächen) entwickelt wird. In § 47, p. 184 heißt es bei Besprechung der neun Grundpunkte eines Büschels von Kubiken: „Dieser neunte Punkt ist also durch die acht gegebenen eindeutig bestimmt, und wir können nur acht Punkte zur Bestimmung einer Kubik ganz beliebig nehmen.“ Die Fassung des zweiten Teiles dieses Satzes kann doch sehr leicht mißverstanden werden.

Im übrigen sind die anschließenden Untersuchungen über das verallgemeinerte Korrespondenzprinzip und die Schnittpunktsysteme auf Kurven als wohlgelungen zu bezeichnen; insonderheit sind die bei Gelegenheit der Restsätze verwendeten Diagramme recht instruktiv. Was die bezügliche Literatur angeht, so ist zwar die Macaulaysche Arbeit von 1895 erwähnt, nicht aber die viel tiefer eingreifende von 1904. Diejenige von 1905 (Heidelberger Kongreß), die wiederum wesentlich höher steht, konnte wohl dem Verf. noch nicht bekannt sein. Auch die arithmetische Richtung von Dedekind-Weber müßte wenigstens erwähnt werden. Bei dem großen Kapitel über Kubiken bedauert Ref., daß von den gerade in neuerer Zeit geförderten Untersuchungen über Apolarität, durch die die verwickelte Theorie der Kubik sehr viel durchsichtiger wird, keine Rede ist: der Begriff der Apolarität wird überhaupt nirgends erwähnt. Sodann ist auszusetzen, daß von der Methode des „Konstantenzählens“ durchaus in der früher üblichen anfechtbaren Art

Gebrauch gemacht wird; der Verf. sei auf die kritische Arbeit von Lasker (F. d. M. **35**, 122, 1904) hingewiesen.

In § 60, p. 225 wird behauptet, daß das System der ersten Polaren einer C_n für $n > 3$ kein Netz bildet; gemeint ist, wie sich nachher herausstellt, daß sie kein „allgemeines" Netz bilden. In § 65 wird der ursprüngliche Salmonsche Beweis für die Konstanz des Doppelverhältnisses der vier von einem Punkte der Kubik an sie gehenden Tangenten ohne ein Wort der Kritik reproduziert.

Der Sachindex ist lobenswert: im Literaturverzeichnis vermißt Ref. die grundlegenden Abhandlungen von E. Kötter, de Paolis, Thieme, sowie einen Hinweis auf die vom Verf. über den vorliegenden Gegenstand gehörten Vorlesungen, die doch wohl auf die Anlage des Ganzen einen bestimmenden Einfluß ausgeübt haben. Doch genug der Einzelheiten, die ja nur den Weg bezeichnen sollen, auf dem der fleißige und begabte Verf. bei einer zweiten Auflage — an der Hand des inzwischen erschienenen Enzyklopädie-Artikels von Berzolari — Verbesserungen vornehmen kann; möchte er sich dann bemühen, seine frische und anregende Art der Darstellung zugleich präziser zu gestalten. My.

F. S. Macaulay. The intersections of plane curves with extensions to n-dimensional algebraic manifolds. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 284-312.

Das allgemeine Problem in der Lehre von den Schnittpunkten algebraischer Kurven ist das folgende: Sind $M_1, M_2, \ldots, M_k$ k gegebene ganze (nichthomogene) Polynome der n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß für ein Polynom M die Identität erfüllt ist: (I) $M = M_1 X_1 + \cdots + M_k X_k$, wo die $X_1, X_2, \ldots, X_k$ unbestimmte Polynome sind? Man schreibt (I) auch als Kongruenz in bezug auf das Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots, M_k)$ $M \equiv 0 \,(\text{mod. } M_1, M_2, \ldots, M_k)$. Es soll sich um die Systeme linearer Gleichungen handeln, denen die Koeffizienten von M genügen müssen: sie heißen die linearen Gleichungen der Mannigfaltigkeit (M), die der Schnitt der k Mannigfaltigkeiten $M_1 = 0$, $M_2 = 0, \ldots, M_k = 0$ ist. Dabei ist die Mannigfaltigkeit (M) in ihrem ganzen algebraischen Umfange aufzufassen, so daß jede eigentliche, einen Teil von (M) bildende Mannigfaltigkeit mit einer bestimmten Multiplizität zu versehen ist. Der Schnitt von zwei Mannigfaltigkeiten $(M), (N)$ erscheint als der größte gemeinsame Teiler H der Modulsysteme M, N, so daß

$$H \equiv 0 \,(\text{mod. } M_1, M_2, \ldots; N_1, N_2, \ldots),$$

und entsprechend für eine beliebige Anzahl $(M), (N), \ldots$ Die eigentlichen Mannigfaltigkeiten von (H) sind Teilschnitte von (M) und (N) usf. Die Frage nach der Anzahl der linear unabhängigen Polynome M eines gegebenen Grades d, die (M) enthalten, d. h. die von der Form $M_1 X_1 + \cdots + M_k X_k$ sind, ist von Hilbert gelöst worden (F. d. M. **22**, 133, 1890). Man wird zur Betrachtung der allgemeinen Lösung

der Gleichung (II) $M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cdots + M_k X_k = 0$ geführt und weiterhin zu der der Gleichungssysteme (III) $M_{1i} X_1 + M_{2i} X_2 + \cdots + M_{mi} X_m = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, wo die $X_1, X_2, \ldots, X_m$ als unbekannt anzusehen sind. Dies letztere System (III) ist von demselben Charakter, wie das Kongruenzsystem (III') $M_{1i} X_1 + \cdots + M_{mi} X_m \equiv 0$ (mod. $M_1, M_2, \ldots, M_k$), da dieses nur voraussetzt, daß die in die linken Seiten eingehenden Koeffizienten den linearen Gleichungen von (M) genügen. Das System (III') reduziert sich für das in Rede stehende Schnittpunktproblem auf den Fall $m = 1$. Schreibt man X für X_1, und N_i für M_{1i}, so geht also (III') über in (IV) $XN_i \equiv 0$ (mod. $M_1, M_2, \ldots, M_k$) $(i = 1, 2, \ldots, l)$, oder bequemer (IV') $XN \equiv 0$ (mod. $M_1, M_2, \ldots, M_k$), wo $N \equiv 0$ (mod. $N_1, N_2, \ldots, N_l$).

Nach Hilbert ist die allgemeine Lösung von (IV') gegeben durch (V) $X \equiv 0$ (mod. $X_1, X_2, \ldots$), wo $X_1, X_2, \ldots$ eine endliche Anzahl partikularer Lösungen für X bedeuten.

Man wird nun zur Auffindung von X zuerst die linearen Gleichungen von (M) aufstellen, aus denen sich, wie sich zeigt, diejenigen von (X) unmittelbar herleiten lassen, und alsdann diese linearen Gleichungen von (X) auflösen. Man hat hierbei genauer zwei inverse Aufgaben zu unterscheiden, je nach der Art, wie man sich die Mannigfaltigkeit (M) gegeben denkt. Entweder sind die Polynome von (M) gegeben und ihre linearen Gleichungen zu suchen, oder aber umgekehrt; hier wird nur das erstere Problem behandelt. Der Deutlichkeit halber beschränke man sich auf drei Variabeln x_1, x_2, x_3, sodaß man hat: (VI) $M_i = \sum a_{pqr}^{(i)} x_1^p x_2^q x_3^r$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $M = \sum z_{pqr} x_1^p x_2^q x_3^r \equiv 0$ (mod. $M_1, M_2, \ldots, M_k$).

Sei jetzt (VII) $\sum \xi_{pqr} z_{pqr} = 0$ irgend eine lineare Gleichung von (M), also eine solche, die durch die Koeffizienten z von M identisch befriedigt wird, während die ξ als Konstanten anzusehen sind. Da mit $M \equiv 0$ zugleich $x_1^l x_2^m x_3^n M \equiv 0$ ist (l, m, n natürliche Zahlen), so folgt (VII') $\sum \xi_{p+l, q+m, r+n} z_{pqr} = 0$, wo sich die Summation nur auf die p, q, r bezieht. Da die Werte der l, m, n keine Grenze haben, so zieht jede Gleichung (VII) eine unbegrenzte Anzahl „abgeleiteter" („derivates") (VII') nach sich; (VII) heißt die „Quelle" („prime equation"). Dies ist die charakteristische Eigenschaft jedes „Systems" von Lineargleichungen einer Mannigfaltigkeit, daß die Ableitungen irgendeiner Gleichung des Systems dem System angehören. Umgekehrt ist jedes System von Lineargleichungen mit der angegebenen Eigenschaft ein Linearsystem einer Mannigfaltigkeit.

Da alle Gleichungen $\sum \xi_{pqr} z_{pqr} = 0$ durch die Koeffizienten von M identisch erfüllt werden, so ist dies auch mit den Koeffizienten der einzelnen Polynome $M_1, M_2, \ldots, M_k$ der Fall: (VIII) $\sum a_{pqr}^{(i)} \xi_{pqr} = 0$, $\sum a_{pqr}^{(i)} \xi_{p+l, q+m, r+n} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Diese Gleichungen heißen die „ξ-Gleichungen". Umgekehrt, genügen die ξ allen diesen Gleichungen (VIII), so genügen auch die Koeffizienten von M den entsprechenden „z-Gleichungen" (VII') $\sum \xi_{pqr} z_{pqr} = 0$, $\sum \xi_{p+l, q+m, r+n} z_{pqr} = 0$. Ein besonders wichtiger Spezialfall tritt ein, wenn (M) die Dimension Null

besitzt, d. h. aus einer endlichen Anzahl getrennter Punkte besteht. Jeder dieser Punkte heißt ein „Basispunkt“ und ist selbst als eine Mannigfaltigkeit anzusehen, mit einem bestimmten System von Lineargleichungen, deren Gesamtheit dann das System von (M) ausmacht. Ein Basispunkt ist als Mannigfaltigkeit dadurch ausgezeichnet, daß zu ihm eine endliche und bestimmte Anzahl unabhängiger Lineargleichungen gehört. Ist jeder Basispunkt von (M) ein „einreihiger“, d. h. besitzt er eine einzelne Primgleichung (Quelle), so hat man nur diese Quellen aller Basispunkte zu addieren, um eine einzelne Quelle für (M) zu erhalten. Der Bequemlichkeit halber werden die Lineargleichungen eines Basispunktes auf diesen Punkt als Koordinatenursprung bezogen. Unter der „Multiplizität“ eines Basispunktes ist die Totalanzahl seiner unabhängigen Lineargleichungen zu verstehen. Ein „t-reihiger“ Basispunkt besitzt t Quellen, von denen keine aus dem Rest und deren Ableitungen ableitbar ist.

Sodann wird ein Verfahren angegeben, die Lineargleichungen eines den $M_1, M_2, \ldots, M_k$ gemeinsamen (in den Ursprung verlegten) Basispunktes aufzustellen. Das ganze System der ξ-Gleichungen wird in Reihen angeordnet; jede Reihe enthält alle Gleichungen desselben Grades, und die Grade werden wiederum steigend angeordnet. Gelangt man so zu einer Reihe vom Grade d mit ebensoviel Gleichungen, wie die Anzahl der ξ vom Grade d beträgt, nämlich $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$, so darf man alle ξ von einem Grade $\geqq d$ gleich Null setzen. Tritt dagegen dieser Fall nicht ein, so ist der Schnitt von $M_1, M_2, \ldots, M_k$ im Ursprunge ein Basispunkt von unendlicher Multiplizität, d. h. $M_1, M_2, \ldots, M_k$ haben eine Kurve oder eine noch höhere Mannigfaltigkeit gemein, die den Ursprung enthält.

Die Theorie wird an einigen Beispielen erläutert, z. B. wenn ein einreihiger Punkt (im Ursprunge) eine einzelne Quelle endlichen Grades besitzt.

Die Mannigfaltigkeit (M) von n Dimensionen, der Schnitt von $M_1 = M_2 = \cdots = M_k = 0$ besteht aus einer endlichen Anzahl eigentlicher Mannigfaltigkeiten der Dimension $\leqq n$; eine jede solche kann in (M) vielfach auftreten oder aber nicht vielfach. Jede eigentliche vielfache Mannigfaltigkeit von (M) von h Dimensionen, die nicht etwa ganz in einer anderen eigentlichen Mannigfaltigkeit von (M) höherer Dimension enthalten ist, besitzt eine ganz bestimmte Multiplizität μ in (M). Man nehme nämlich einen allgemeinen Punkt der in Rede stehenden Mannigfaltigkeit als Ursprung und drücke h der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linear und homogen aus durch die übrigen (mit willkürlichen konstanten Koeffizienten); durch Einsetzung in $M_1, M_2, \ldots, M_k, M$ gehen diese über in Polynome $M'_1, M'_2, \ldots, M'_k, M'$ in $n-h$ Variabeln: dann ist μ die Multiplizität des durch $M'_1, M'_2, \ldots, M'_k$, im Ursprunge bestimmten Basispunktes. Als Beispiel dient unter anderem der Schnitt der drei Flächen $M_1 = x_1^3$, $M_2 = x_2^3$, $M_3 = x_1 x_2 + (x_1^2 + x_2^2) x_3$.

Die so entwickelte Theorie wird im besonderen auf die Schnitte ebener Kurven angewandt. Die allgemeinen Eigenschaften der Basispunkte sind dann folgende. I. Alle Schnittpunkte von zwei Kurven M_1, M_2 ohne gemeinsamen Faktor sind einreihige Punkte. II. Die (in üblichem Sinne verstandene)

Multiplizität irgend eines Schnittpunktes von M_1, M_2 stimmt überein mit der (oben erklärten) Multiplizität des entsprechenden Basispunktes. III. Zwei durch einen einreihigen Punkt mit gegebener Quelle gelegte (allgemeine) Kurven besitzen keinen höheren Schnitt daselbst. IV. Werden k unabhängige Kurven durch einen Punkt gelegt, so bestimmen sie daselbst einen $(k-1)$-reihigen Punkt. V. Das ganze System unabhängiger Lineargleichungen für einen Basispunkt läßt sich so anordnen, daß die ersten $\mu_1 (\mu_1 = 1, 2, \ldots, \mu)$ derselben die Gleichungen für einen Basispunkt von der Multiplizität μ_1 werden. Versteht man unter zwei „residualen" Basispunkten solche, deren Gleichungen auf eine gewisse Normalform gebracht werden können, so lautet Satz VI: Ist der eine von zwei residualen Basispunkten t-reihig, so ist der andere entweder $(t-1)$-reihig oder t-reihig, oder $(t+1)$-reihig. Der Satz VII deckt sich inhaltlich mit dem „Restsatze", der Satz VIII mit dem Riemann-Rochschen (Brill-Noetherschen) „Reziprozitätssatze". Von diesen acht allgemeinen Sätzen sind III, IV und VI auf die Ebene beschränkt, während die übrigen auf den Raum von n Dimensionen übertragbar sind, wodurch die Methode des Verf. eine glänzende Rechtfertigung erhält.

My.

F. G. Teixeira. Sur le nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe par un point situé sur la courbe. Ens. math. 7, 138-141.

Elementare Ableitung der von Salmon gegebenen Formel. R. M.

G. Lazzeri. Sulla determinazione degli assintoti delle curve algebriche. Periodico di Mat. (3) 3, 6-13.

In den Lehrbüchern wird meistens nur der Fall erörtert, bei welchem die Gleichung n-ten Grades, aus der die Richtungskoeffizienten der Asymptoten gefunden werden, lauter verschiedene Wurzeln besitzt. Lazzeri zeigt, wie man im Falle mehrfacher Wurzeln die Rechnung durchzuführen hat, und erläutert das Verfahren an den beiden Kurven:

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1, \qquad \frac{a^3}{x^3} + \frac{b^3}{y^3} = 1.$$

Lp.

C. Juel. Über einen neuen Beweis der Kleinschen Relation zwischen den Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve. Math. Ann. 61, 77-87.

Die imaginären Punkte der Ebene werden im Staudtschen Sinne gedeutet, die Auffassung weiter entwickelt und kurz dargelegt. Sie dient dann dazu, die Kleinschen Relationen:

$$2d'' + r' + k = 2t'' + w' + u, \quad \delta - \tau = n - k$$

abzuleiten. Das Wesentliche seiner Beweisführung hebt Verf. im letzten Paragraphen hervor.

Lwt.

I. Cipolla. Sul numero dei punti di Weierstraß fra loro distinti di una curva algebrica di genere p. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 210-214.

Verfasserin erniedrigt die von Segre (F. d. M. **30**, 509, 1899) gefundene Grenze für die Anzahl der von einander verschiedenen Weierstraßschen Punkte auf einer algebraischen (nicht hyperelliptischen) Kurve von gegebenem Geschlecht. Wbg.

J. de Vries. Over netten van algebraische vlakke krommen. Amst. Ak. Versl. **13**, 708-710.

Ein ebenes Kurvennetz: $y_1 x_1^n + y_2 x_2^n + y_3 x_3^n = 0$ (wo $x_1 : x_2 : x_3$ Punktkoordinaten, $y_1 : y_2 : y_3$ Parameter) enthält $\frac{3}{2}(n-1)(n-2) \times (3n^2-3n-11)$ Kurven mit zwei Doppelpunkten und $12(n-1)(n-2)$ Kurven mit einem Doppelpunkt. Die Klasse der Zeuthenschen Kurve, d. h. der Umhüllungskurve der Doppelpunktstangenten des Netzes, ist $3(n-1)(2n-3)$. Wö.

J. de Vries. Over lineaire stelsels van algebraische vlakke krommen. Amst. Ak. Versl. **13**, 748-753.

Der Ort der Punkte, in denen eine Kurve eines k-fach unendlichen C_n-Systems eine Gerade durch einen festen Punkt O $(k+1)$-fach berührt, ist eine Kurve von der Ordnung $\frac{1}{2}(k+1)(2n-k)$ mit O als $\frac{1}{2}k(k+1)$-fachem Punkt. Die Doppeltangenten der Flächen eines Büschels umhüllen eine Kurve $2n(n-2)(n-3)$-ter Klasse; die Basispunkte des Büschels sind $(n+4)(n-3)$-fache Punkte derselben. $\frac{1}{2}(n-4)(n-3)^2(10n^4+35n^3-21n^2-80n+20)$ Kurven haben einen Wendepunkt, dessen Tangente noch einmal berührt; $\frac{3}{2}(n-3) \times (n^3+n^2-8n+4)$ Kurven haben einen Undulationspunkt. In einem Kurvennetz ist der Ort der Spitzen von der Ordnung $4(2n-3)$.

Wö.

P. Zeeman. Iets over autopolaire krommen en oppervlakken. Nieuw Archief (2) **7**, 26-37.

Ein Kegelschnitt ist autopolar in bezug auf ∞^2 Kegelschnitte, die ihn alle doppelt berühren. Eine C_3 mit Spitze ist autopolar in bezug auf ∞^1 Kegelschnitte, für welche alle das Dreieck aus Spitzentangente, Wendetangente und Verbindungslinie von Spitze und Wendepunkt ein Poldreieck ist. Durch jeden Punkt gehen drei solche Kegelschnitte. Eine C_4 mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkt ist autopolar in bezug auf zwei Kegelschnitte. Die Kurven $x^m y^n = a^{m+n}$ sind autopolar in bezug auf ∞^1 Kegelschnitte. Eine F_2 ist autopolar in bezug auf ∞^3 F_2, die sie in einem Kegelschnitt berühren, und in bezug auf ∞^4 F_2, die mit ihr ein windschiefes Viereck gemein haben. Eine F_3 mit drei biplanaren Punkten ist autopolar in bezug auf ∞^2 F_2, für deren jede das Tetraeder

aus der Ebene der drei biplanaren Punkte und aus den Tangentenebenen durch die Verbindungslinien derselben zu je zweien ein Poltetraeder ist. Eine Fresnelsche Wellenfläche ist autopolar in bezug auf $8\,F_2$; eine Fläche $x^m y^n z^p = a^{m+n+p}$ in bezug auf $\infty^2\,F_2$. Wö.

A. Ferrari. Intorno allo spezzamento delle linee parallele alle curve piane algebriche. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_2$, 275-281.

Es sei n die Klasse eines Zweiges einer ebenen algebraischen Kurve, c die Anzahl ihrer Berührungen mit der unendlich fernen Geraden. Zieht man zu dem Zweige eine Parallelkurve (auf beiden Seiten in gleichem Abstand), so besteht diese aus zwei oder aus einem Zweige, je nachdem $m + c$ gerade oder ungerade ist.

Verf. berichtigt im Anschlusse hieran die Angabe Cayleys (Quart. J. **11**, 183-200; F. d. M. **3**, 343, 1871), der behauptet hatte, daß die Parallelkurve einer gegebenen Kurve zerfällt, wenn sich von den imaginären Kreispunkten an die letztere keine Tangenten ziehen lassen, die im Endlichen berühren. E. M.

M. Stuyvaert. Quadrilatères de Steiner dans certaines courbes et surfaces algébriques. Nouv. Ann. (4) **5**, 455-470, 481-504.

Verf. zeigt zunächst: der Steinersche Schließungssatz (Steiner, Werke **2**, 373) über Polygone, die gewissen ebenen Kurven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten so einbeschrieben werden können, daß die Seiten abwechselnd durch die Doppelpunkte gehen, ist, wenn man ihn auf Vierecke beschränkt, im Grunde identisch mit dem einfacheren: Wenn eine unikursale ebene Kurve zweiter Ordnung in ein Linienpaar degeneriert, so müssen die beiden Linien des Paares zusammenfallen.

Eine nicht zerfallende, Steinersche Vierecke zulassende ebene Kurve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, von denen keiner ein doppelter Inflexionspunkt ist, wird von allen durch einen Doppelpunkt gehenden Geraden in Punktepaaren geschnitten, die von dem anderen Doppelpunkte aus durch eine Strahlen-Involution projiziert werden. — Die Diagonalenschnittpunkte der Vierecke liegen auf dem Polarkegelschnitt eines beliebigen der Doppelpunkte bezüglich einer Kurve dritter Ordnung, welche Polarkurve des andern Doppelpunkts für die Fundamentalkurve ist. Die Diagonalen der Vierecke umhüllen eine Kurve vierter Klasse, welche die Diagonalen desjenigen Vierecks zu Doppeltangenten hat, das von den sich selbst entsprechenden Strahlen der genannten Involutionen gebildet wird.

Damit eine ebene Kurve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, von denen keiner ein doppelter Inflexionspunkt ist, Steinersche Vierecke zuläßt, deren Gegenseitenpaare sich in zweien der Doppelpunkte schneiden, ist notwendig und hinreichend, daß diese Doppelpunkte durch die Tangenten des dritten Doppelpunkts harmonisch getrennt werden.

Der Diagonalenschnittpunkt beschreibt einen Kegelschnitt, und die Diagonalen umhüllen eine Kurve dritter Klasse mit einer Doppeltangente.

Für den Fall, daß die Kurve vierter Ordnung in eine solche dritter Ordnung und in eine Gerade zerfällt, ergeben sich meist bekannte Resultate, während für den Fall des Degenerierens in zwei Kegelschnitte, insbesondere in zwei Kreise, interessante Sätze auftreten.

Für eine beliebige Raumkurve vierter Ordnung erster Art wird der Ort aller Raumpunkte gesucht, von denen aus die Kurve durch Kegel projiziert wird, deren ebene Schnitte Steinersche Vierecke zulassen. Es ergibt sich, daß der Ort der Spitzen dieser Kegel in die sechs Voßschen Flächen zweiter Ordnung desjenigen Büschels zerfällt, welcher die Raumkurve vierter Ordnung zur Grundkurve hat.

Es wird dann eine rationale Raumkurve vierter Ordnung als gegeben angenommen, und es werden solche Raumpunkte P gesucht, daß sich die beiden Gegenseitenpaare unendlich vieler der Raumkurve einbeschriebenen Vierecke auf je eine von zwei bestimmten durch P gehenden Bisekanten stützen.

In einem Schlußabschnitt wird die Frage behandelt, was für eine Fläche diejenigen Ebenen einhüllen, die aus einer windschiefen Regelfläche vierter Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve solche Kurven ausschneiden, welche Steinersche Vierecke zulassen. Es ergibt sich als Enveloppe gleichfalls eine Fläche vierter Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve, im besonderen Falle eine Fläche vierter Ordnung mit einer dreifachen Geraden.

Außer den obigen Resultaten enthält die elegante und reichhaltige Arbeit noch eine Reihe anderer. E. M.

G. Fontené. Décomposition d'une correspondance tangentielle entre deux courbes unicursales. Nouv. Ann. (4) 5, 433-454.

Die Gleichung $F(t,t')=0$ sei vom Grade n in t und vom Grade m' in t'. Sie vermittelt eine Korrespondenz (n,m') zwischen diesen beiden Variabeln. Neben den gewöhnlichen Koinzidenzen der Korrespondenz können noch besondere vorkommen, die Verf. simultane Koinzidenzen nennt. Eine solche tritt dann ein, wenn dem Wert t eines Paars (t,t') von Werten, die der Gleichung $F=0$ genügen, zwei zusammenfallende Werte von t' und gleichzeitig dem Werte von t' zwei zusammenfallende Werte von t zugeordnet sind. Dafür, daß eine Korrespondenz (n,m') in zwei Korrespondenzen (α,α') und (β,β') zerfällt, wo $\alpha+\beta=n$, $\alpha'+\beta'=m'$ ist, gilt die notwendige Bedingung, daß in der Korrespondenz (n,m) $\alpha\beta'+\alpha'\beta$ simultane Koinzidenzen vorhanden sind. Diese Bedingung ist aber im allgemeinen nicht hinreichend. Sie ist es, wenn zwischen den Zahlen $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ noch die beiden Gleichungen $(\alpha-1)(\alpha'-1)=0$ und $(\beta-1)(\beta'-1)=0$ bestehen. Aber auch dann bleiben im allgemeinen für die Zahlen $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ verschiedene Wertquadrupel möglich.

Unter „tangentialer Korrespondenz“ zwischen einer Kurve X von der Klasse n und einer Kurve X' von der Ordnung m' versteht man die Zuordnung eines Punktes A' der zweiten (nebst seiner Tangente) zu den von ihm an die erste Kurve gezogenen Tangenten (nebst ihren Berührungspunkten). Aus den angegebenen Bedingungen für das Zerfallen einer allgemeinen Korrespondenz werden Bedingungen für das Zerfallen einer tangentialen Korrespondenz zwischen zwei unikursalen Kurven X, X' abgeleitet. Ist z. B. X ein Kegelschnitt, X' von der Ordnung m', so ist für das Zerfallen der Tangentialkorrespondenz notwendig und hinreichend, daß X die X' in m' Punkten berührt. Im Falle (2,2) ist das Ergebnis des Zerfallens sehr bekannt: man erhält zwei lineare, zu einander inverse Korrelationen, deren Inzidenzkurven (Kernkurven) die beiden sich doppelt berührenden Kegelschnitte sind. Verf. untersucht weiter die Fälle (2, 3), (2, 4) und (3, 3). Für den letzten Fall ergibt sich, wenn die eine Teilkorrespondenz ein-eindeutig ist, ein bemerkenswerter Satz. E. M.

R. Torelli. Sulle involuzioni irrazionali nelle curve iperellittiche. Palermo Rend. **19**, 297-304.

„Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine hyperelliptische Kurve vom Geschlecht p:

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_i)$$

(wo i gleich $2p + 2$ oder $2p + 1$ ist) eine (hyperelliptische) γ^1_ν vom Geschlecht π enthalte, ist die, daß mit den $2p + 2$ Verzweigungspunkten auf der Doppelgeraden jeder unpaarmal gerechnet ($\geqq 1$), und eventuell mit anderen Punkten, jeder paarmal gerechnet ($\geqq 2$), $2\pi + 2$ Gruppen einer Involution I^1_ν auf der Geraden bilden können.“ Dieser Satz, welcher als das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit zu betrachten ist, findet sich für den Fall $p = 2$ schon implizit in der Abhandlung Humberts „Sur les surfaces de Kummer elliptiques“ (Am. Journ. **16**, 1894). Hier wird derselbe allgemeiu und streng bewiesen; spezielle Fälle und Anwendungen folgen. La.

C. E. Brooks. Orthic curves; or algebraic curves which satisfy Laplace's equation in two dimensions. Proc. Amer. Philos. Soc. **43**, 294-331 (1904).

In den Grundgedanken übereinstimmend mit der Arbeit: A note on the orthic cubic curve (F. d. M. **35**, 600-601, 1904), aber weiter ausgeführt. Die Gleichung $U(x, y) = 0$ der Kurven bedingt die andere $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$. Lp.

C. Decio. Studio sull' equazione mista di una curva piana algebrica. Riv. di fis., mat. e sc. nat. 6_1, 209-231, 481-500.

Eine Zusammenstellung der Untersuchungen von Laguerre über die Darstellung der ebenen Kurven durch ihre „gemischte Gleichung", d. h. durch die Gleichung, welche zu jedem Punkte der Ebene die aus demselben zur betrachteten Kurve gehenden Tangenten angibt. Vi.

P. Pecl. Über eine kubische birationale Transformation und ihre Anwendung in der Kurventheorie. Pr. Gymn. in Raudnic. 14 S. (Böhmisch.)

Es wird die birationale Transformation der Ebene

$$x_1 = \frac{ax^3}{bx^2 + cy^2}, \quad y_1 = \frac{ax^2 y}{bx^2 + cy^2}$$

betrachtet und auf die Konstruktion einiger rationalen Kurven angewandt. Pe.

Weitere Literatur.

J. A. Vreeswijk. Involuties op rationale krommen. Utrecht. 138 S. 8°. Referat auf S. 585 dieses Bandes.

J. de Vries. Curvas harmónicas definidas por una curva plana algebráica. Rev. trim. de Mat. 5, 90-91.

H. Wieleitner. Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890-1904. Pr. Leipzig: G. J. Göschen. 58 S. gr. 8°. Referat auf S. 68 dieses Bandes.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

E. Waelsch. Binäranalyse zur Geometrie des Dreiecks. Monatsh. f. Math. 16, 273-311.

Seit einer Reihe von Jahren verfolgt der Verf. das Ziel, die binäre Invariantentheorie auf solche Gebiete der Geometrie der Ebene, des Raumes usf. (nebst Anwendungen auf Mechanik und Physik) zu übertragen, die ihrer Natur nach eine solche Behandlung überhaupt zulassen.

Trotzdem auch die neuere Dreiecksgeometrie hierher gehört, so waren bisher doch nur einzelne Ansätze in dieser Richtung zu verzeichnen gewesen (s. vor allem Study, F. d. M. 27, 369, 1896; 28, 518, 1897): es ist daher um so mehr anzuerkennen, daß der Verf. nunmehr dieser Disziplin in dem fraglichen Sinne ein systematisches Studium gewidmet hat; freilich ist dabei nicht außer acht zu lassen, daß von diesem „binäranalytischen" Gesichtspunkt aus die überaus mannigfaltigen Sätze über die merkwürdigen, mit dem Dreieck verknüpften Figuren nur in einer gewissen partikularen Beleuchtung erscheinen.

Zunächst werden Punkte und Gerade, Kurven zweiter und dritter Ordnung, resp. Klasse, sowie Kreise unter Zugrundelegung eines „Normkreises" durch ihre „Binärbilder" dargestellt, woran sich Beziehungen dieser Gebilde und ihre Polarentheorie anschließen.

Das Dreieck $\bigtriangledown$ denke man sich in bekannter Weise durch eine kubische Form $\varphi = \varphi_\xi^3$ einer binären Variable ξ gegeben, die auf seinem Umkreise C als „Normkreise" ausgebreitet ist; auf ihm sind dann die beiden imaginären „Kreispunkte" durch eine quadratische Form $u = u_\xi^2$ repräsentiert. Eine lineare Transformation von ξ in eine neue Variable ξ' wird ausgeübt, wenn die Ebene einer Ähnlichkeitstransformation unterworfen wird, wobei das Dreieck $\triangle$ mit seinem Umkreise C in ein Dreieck $\bigtriangledown'$ mit seinem Umkreise C', und die Formen φ, u in Formen φ', u' der neuen Variable ξ' auf C' übergehen. Daraus folgt ohne weiteres, daß die gegenüber Ähnlichkeitstransformationen invarianten merkwürdigen Punkte und Geraden des Dreiecks auf dem Umkreise C quadratische Formen bestimmen, die binäre Simultankovarianten von φ und u sind. Das System dieser letzteren führt somit von selbst zu einer geeigneten Klassifikation jener Punkte und Geraden (und weiterhin auch höherer Gebilde). So repräsentiert z. B. u selbst das Zentrum von C, und die Hessesche Form Δ von φ den Lemoineschen Punkt des Dreiecks. Die zweite Überschiebung von u, φ liefert einen Punkt p des Umkreises C, der bisher wenig beachtet worden ist, der aber im folgenden in zahlreichen Bedeutungen auftritt.

Es zeigt sich nun vor allem, daß die bekanntesten merkwürdigen Punkte des Dreiecks im Systeme der drei Formen u, Δ und p enthalten sind (auch die Dreiecksform φ selbst). Seinem Ansatze nach, der die Ähnlichkeitstransformationen der Ebene zugrunde legt, beschränkt sich der Verf. auf solche Sätze, in die nur Verhältnisse von Strecken eingehen; ferner auf rationale Gebilde, so daß die Dreiecksform φ nicht in ihre linearen Faktoren zerlegt wird.

Die allgemeine Grundlage des Ganzen bildet nach Hesse, Klein und dem Ref. der „Normkegelschnitt" C, auf dem eine binäre Variable $\xi = \xi_1/\xi_2$ ausgebreitet ist; jedem Punkte a und jeder Geraden b der Ebene ist dadurch eine Quadrik zugeordnet; Punkt a und Gerade b sind inzident, wenn ihre Quadriken apolar sind, $[a\,b] = 0$. Ist x der laufende Punkt der Geraden a, so ist demnach $[a\,x] = 0$ deren Gleichung; die Form $[a\,x]$ heißt das Binärbild der Geraden a, und entsprechend für einen Punkt. Bedeutet ferner $\mathfrak{v}$ eine „Biquadrik" (binäre biquadratische Form), so wird vermöge der Gleichung (I) $x' = [\mathfrak{v}x] + cx$, wo c eine Konstante ist, dem Punkte x eine Gerade x' der Ebene zugewiesen, und zwar ist (I) eine Korrelation, nämlich die Polarität bezüglich einer gewissen Kurve zweiter Ordnung C_2, deren Gleichung lautet: (II) $[\mathfrak{v}x^2] + c\,[x] = 0$. Die vier Wurzelpunkte von $\mathfrak{v}$ auf C sind die Schnittpunkte von C_2 mit C, die „Normpunkte" der C_2. Ist dualistisch eine Kurve zweiter Klasse C^2 vermöge der Formen $\mathfrak{v}', c'$ gegeben, so lautet die Bedingung der Apolarität von C_2 und C^2: (III) $[\mathfrak{v}\mathfrak{v}'] + 3\,cc' = 0$. Ist im besonderen c, resp. c' gleich Null, so ist C_2, resp. C^2 apolar zum

Normkegelschnitt C. Sodann wird die unendlich ferne Gerade durch ihre Quadrik u festgelegt, das ist die Quadrik des Mittelpunktes von C. Daraufhin läßt sich die binäre Bedingung des Parallelismus zweier Geraden aufstellen sowie die Quadrik des Mittelpunktes einer Strecke. Nunmehr wird für die Untersuchung des Dreiecks, wie schon oben erwähnt, der Normkegelschnitt als Normkreis C gewählt. Stellt u wieder den Mittelpunkt von C dar, α einen Punkt von C, so repräsentiert (u, α) den α diametral gegenüberliegenden Punkt von C. Um die binären Bilder an die übliche Darstellung durch kartesische Koordinaten x, y anzuschließen, sei $x^2 + y^2 = r^2$ die Gleichung von C, so setze man, für ϱ als einen Proportionalitätsfaktor: (IV) $x + iy = \varrho a_0, r = \varrho a_1, x - iy = \varrho a_2$, so ist damit dem Punkte $X(x, y)$ die Quadrik $a_\xi^2 = a_0 \xi_1^2 + 2a_1 \xi_1 \xi_2 + a_2 \xi_2^2$ zugeordnet. Für einen reellen Punkt X sind a_0, a_2 konjugiert komplex, a_1 reell; die Quadrik heißt dann eine „Realquadrik". Liegt X im besondern auf C, und ist seine Linearform $\alpha_\xi = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$, so sind wiederum für einen reellen Punkt X α_1, α_2 konjugiert komplex; α_ξ heißt dann eine „Reallineare". Darauf wird eine einfache Darstellung der Potenzlinie (Chordale) eines Kreises $\mathfrak{K}$ mit dem Normalkreise C, der „Normchordale" von $\mathfrak{K}$, gegeben, und hieraus wird die Bedingung der Orthogonalität von $\mathfrak{K}$ und C abgeleitet, sowie die andere, daß $\mathfrak{K}$ ein Punktkreis ist, endlich wird die Quadrik für den Potenzpunkt dreier Kreise aufgestellt. Liegt ferner ein Klassenkegelschnitt C^2 vor, so wird sein „Direktorkreis" binär bestimmt, das ist der Ort des Punktes, von dem sich an C^2 zwei zueinander senkrechte Tangenten legen lassen.

Nunmehr werden die Dreiecksform φ und ihre Polaren in Betracht gezogen. Sind α, β, γ die Linearformen für die Ecken des Dreiecks $\bigtriangledown$, so heißt eben die Kubik $\varphi = \alpha\beta\gamma$ die Dreiecksform, das Dreieck erscheint als Kurve dritter Klasse $\bigtriangledown^3$. Dualistisch wird die Kurve dritter Ordnung $\bigtriangledown_3$ eingeführt, die aus den Seiten des Dreiecks $\bigtriangledown$ besteht. Die Bildung der ersten und zweiten Polare eines Punktes, resp. einer Geraden bezüglich der Kurve $\bigtriangledown_3$, resp. $\bigtriangledown^3$ liefert mit Leichtigkeit eine Fülle interessanter Dreieckssätze, insbesondere den schon eingangs erwähnten über die Darstellung des Lemoineschen Punktes (resp. der Lemoineschen Geraden) durch die quadratische Kovariante $\triangle$ von φ.

Sodann wird systematisch das volle System der Formen u, φ zugrunde gelegt, nebst den zahlreichen zwischen den Bildungen des Systems bestehenden Identitäten (Syzygien). Die erste lineare Kovariante $p = [\varphi\, u]$ von φ und u liefert den (ebenfalls schon erwähnten) merkwürdigen Punkt p des Dreiecks. Geometrisch entsteht derselbe z. B. so: Die Tangenten α, β, γ des Normkreises in den Ecken des Dreiecks $\bigtriangledown$ schneiden sich in den Ecken a, b, c eines Dreiecks D. Der zweite Schnittpunkt der Geraden $a\alpha$ auf dem Normkreise C sei α', entsprechend β' und γ'. Legt man nun den „Brocardschen Durchmesser" ϑ des Dreiecks $\bigtriangledown$, das ist die Gerade ϑ, die den Lemoineschen Punkt $\triangle$ mit dem Mittelpunkt u des Normkreises C verbindet, wo ϑ durch $(u, \triangle)$ dargestellt ist, so schneidet dieser Durchmesser ϑ die Seiten des Dreiecks $\bigtriangledown$ in

einem geradlinigen Dreiecke, das zum Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ perspektivisch ist mit dem Perspektivitätszentrum p. An diesen Punkt p schließen sich noch drei andere q, r, s vermöge der Linearformen $[up]$, $[p\triangle]$, $[\vartheta p]$. Weiterhin werden gewisse Kurven dritter Ordnung und solche dritter Klasse untersucht, die mit dem Dreiecke $\triangledown$ in dem angegebenen Sinne invariant verknüpft sind. Durch Polarenbildung gelangt man unter anderem zu der „Brocardschen Ellipse“ und der „Brocardschen Geraden“ des Dreiecks, ferner zum „Brocardschen Kreis“ und den beiden „Brocardschen Punkten“. Wir erwähnen noch den Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt des Dreiecks, die Eulersche Gerade, den Steinerschen und Tarryschen Punkt, die Kiepertsche Hyperbel, sowie gewisse Kurven zweiter Ordnung oder Klasse, die dem Dreieck ein- oder umbeschrieben sind. Diese Hinweise mögen genügen, um die Dreiecksgeometer zum Studium der inhaltreichen Abhandlung anzuregen. My.

E. Eckhardt. Der Gauss-Lemoinesche Punkt im Kreisviereck. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 329-340.

In einer dem Sonderfall des Kreisvierecks angepaßten rechnerischen Behandlung wird hier der Punkt, für den die Summe der Quadrate der Abstände von den Seiten ein Minimum ist, ermittelt und seine Konstruktion aus einigen neuen Winkeleigenschaften abgeleitet; seine Beziehungen zu gewissen gleichseitigen Hyperbeln spielen eine Hauptrolle. R. M.

G. Kober. Die Konstruktion des Kreisvierecks aus der Gleichung seiner Ecken. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 100-101.

Die homogenen Koordinaten sind so gewählt, daß die Ecken durch diejenigen Werte von $\lambda = x_1/x_2 = x_2/x_3$ bestimmt werden, für die

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$$

ist. Diese Eckpunkte sind den Kegelschnitten 1) $x_1 x_3 = x_2$ und 2) $a_0 x_1^2 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_1 x_3 + a_3 x_2 x_3 + a_4 x_3^2 = 0$ gemeinsam. Für die letzteren gibt Verf. einfache lineare Konstruktionen. Übrigens braucht nicht, wie Verf. annimmt, 1) ein Kreis und 2) eine Hyperbel zu sein. E. M.

O. Meissner. Zu 102 (Paul Stäckel). Lösung einer Aufgabe. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 181-185.

Ein Punkt beginnt seine Bahn in einem Punkte einer Rechtecksseite. Er bewegt sich immer geradlinig, bis er an die Begrenzung des Rechtecks trifft. Dort wird er rechtwinklig zu seiner Bahn abgelenkt. Für alle interessierenden Anfangsbedingungen wird die Aufgabe gelöst, die Bahnen zu finden, die den Punkt nach einer endlichen Anzahl von Knicken in seine Anfangslage überführen. Lwt.

J. A. H. JOHNSTON. **The intersection of two conic sections.** London M. S. Proc. (2) **3**, 390-402.

Die Ungleichungen, welche die Koeffizienten zweier Kegelschnittgleichungen erfüllen müssen, damit die Kurven sich in vier reellen oder in vier imaginären Punkten schneiden, sind so wenig durchsichtig, daß die verschiedenen Untersuchungen zu Resultaten gekommen sind, die nicht nur der Form nach von einander abweichen. Verf. gibt eine neue Abteilung der Bedingungen und eine Kritik der früheren Formeln von Kemmer, Storey, Gundelfinger; auch entwickelt er die dualen Formeln für vier reelle oder imaginäre gemeinsame Tangenten. R. M.

R. F. DAVIS. **Note on the determination of the axes of a conic.** Edinb. M. S. Proc. **23**, 94-95.

Es sind α, β, γ die bekannten trilinearen Koordinaten (die wirklichen Längen der Lote) des Mittelpunktes bei einem dem Bezugsdreiecke ABC eingeschriebenen Kegelschnitte. Sind dann x, y, z die Koordinaten des einen Brennpunktes, so sind $\varrho^2/x, \varrho^2/y, \varrho^2/z$ die Koordinaten des anderen, wo 2ϱ die kleinere Achse ist. Da nun der Mittelpunkt der Halbierungspunkt der die Brennpunkte verbindenden Geraden ist, folgt $x + \varrho^2/x = 2\alpha$ und $x = \alpha + (\alpha^2 - \varrho^2)^{\frac{1}{2}}$ nebst ähnlichen Ausdrücken für y und z. Aber $ax + by + cz = a\alpha + b\beta + c\gamma$; daher

$$a(\alpha^2 - \varrho^2)^{\frac{1}{2}} + b(\beta^2 - \varrho^2)^{\frac{1}{2}} + c(\gamma^2 - \varrho^2)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt die Achsen, indem ja α, β, γ als bekannt vorausgesetzt sind. Beispielsweise wird gezeigt, daß die Achsen der Steinerschen Ellipse auf diese Weise leicht gefunden werden.

Gbs. (Lp.)

L. KLUG. **Der Kegelschnitt als Ort von Punkten, deren Abstandsverhältnisse von gewissen Gebilden konstant sind.** Ungar. Ber. **23**, 82-155.

Ausgehend von der bekannten Eigenschaft der Kegelschnitte, daß das Verhältnis der Abstände ihrer Punkte von dem Brennpunkt und der Leitlinie konstant ist, wird bewiesen, daß der Ort der Punkte im Raume, deren Abstände von einem Punkte und einer Geraden ein konstantes Verhältnis haben, ein Sphäroid oder ein einschaliges Hyperboloid oder ein parabolischer Zylinder ist. Da nun allgemein die ebenen Schnitte dieser Flächen Kegelschnitte sind, so folgt, daß der Ort jener Punkte in einer Ebene, deren Abstände von einem von der Ebene unabhängigen Punkte F und einer Geraden f in konstantem Verhältnis stehen, ein Kegelschnitt ist. Die Art desselben und seine Lage zu f wird näher bestimmt. Es folgt darauf die Lösung der Aufgabe, zu einem Kegelschnitt und einer Geraden f, die zu jenem die in dem Satze festgestellte Lage hat, den Punkt F und umgekehrt zu F die Gerade f zu konstruieren.

Im ersten Falle liegt F auf einem gewissen zur Ebene des Kegelschnitts senkrechten Kreise. Die erste Aufgabe ist quadratisch, die umgekehrte kubisch.

Das Ellipsoid, das zweischalige Hyperboloid und das elliptische Paraboloid, welche durch Rotation einer Ellipse, Hyperbel und Parabel um ihre Hauptachse entstehen, haben die Eigenschaft, daß das Verhältnis der Abstände ihrer Punkte von einem Brennpunkte und der zugehörigen Leitebene konstant ist. Da die ebenen Schnitte dieser Flächen Kegelschnitte sind, so ist der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von einem Punkte F und einer Ebene φ in konstantem Verhältnis stehen, ein Kegelschnitt, dessen Leitlinie zu φ parallel ist. Dieser Satz führt zu der Aufgabe, zu einem Kegelschnitt und einer zu einer Leitlinie parallelen Ebene φ den entsprechenden Punkt F und umgekehrt zu F die Ebene φ zu konstruieren. Zu jeder Ebene φ ergeben sich zwei Punkte F und F' des Fokalkegelschnitts der gegebenen Kurve.

Die Abstände der Punkte eines Kegels zweiter Ordnung von einem Fokalstrahl f und seiner Polarebene φ stehen in konstantem Verhältnis. Jeder Schnitt des Kegels hat somit auch die Eigenschaft, daß die Abstände seiner Punkte von f und φ in konstantem Verhältnis stehen. Sind der Kegelschnitt und die Ebene φ gegeben, so kann man die zugehörige Gerade f konstruieren.

Der Ort solcher Punkte, deren Abstände von zwei Geraden f und g in konstantem Verhältnis stehen, ist ein orthogonales Hyperboloid, ein orthogonaler Kegel, ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid oder ein orthogonales Ebenenpaar. Da die ebenen Schnitte dieses Ortes Kegelschnitte oder Geradenpaare sind, so ergibt sich die Aufgabe: Zu einem Kegelschnitt und einer Geraden f eine solche Gerade g zu konstruieren, daß die Abschnitte der Punkte des Kegelschnitts von f und g in konstantem Verhältnis stehen. Zch.

A. S. Hawkesworth. Some new ratios of conic curves. Amer. Math. Monthly **12**, 1-8, 29-37.

Der Kegelschnitt als Ort eines Punktes, dessen Abstände von einem festen Punkte und einem festen Kreise gleich sind. Lp.

Ventura y Reyes. Sur une généralisation du théorème de Pascal. Mathesis (3) **5**, 257-259.

Wenn fünf Ecken eines einfachen Sechsecks fest bleiben und die sechste sich so bewegt, daß die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare ein Dreieck von konstantem Inhalte bilden, so beschreibt die sechste Ecke einen Kegelschnitt. Mn. (Lp.)

M. W. Haskell. The construction of conics under given conditions. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 268-273.

Den homogenen Koordinaten wird ein Bezugsdreieck zugrunde gelegt, welches das Diagonalendreieck eines vollständigen Vierseits oder Vierecks ist. Das Viereck oder Vierseit wird als „Normalviereck“ oder „Normalvierseit“ bezeichnet (standard quadrangle or quadrilateral). I. Kegelschnitte bestimmt durch fünf Punkte oder durch fünf Tangenten. 1. Die acht Ecken zweier Normalvierecke liegen auf einem und demselben Kegelschnitt. 2. Die Geraden zwischen je zwei entsprechenden Ecken zweier Normalvierecke bilden ein Normalvierseit. 3. Die Tangenten in vier beliebigen Punkten eines Kegelschnitts bilden ein Vierseit, das normal ist bezüglich des Diagonalendreiecks des Vierecks jener vier Punkte. 4. Die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte mögen ein Normalviereck bilden. Dann sind die beiden Vierseite, gebildet durch ihre Tangenten, normal und hüllen also einen Kegelschnitt ein. 5. Das Vierseit der vier gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte hat dasselbe Diagonalendreieck wie das Viereck ihrer vier Schnittpunkte. — In ähnlicher Weise werden Lehrsätze bewiesen für die Fälle: II. Harmonische Reihen auf einem Kegelschnitt. Kegelschnitte durch vier gegebene Punkte, die eine gegebene Gerade berühren. III. Kegelschnitte mit zwei gegebenen Punkten und drei gegebenen Tangenten. Lp.

J. L. S. Hatton. Question 15747. Ed. Times (2) 8, 106-107.

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts in trilinearen Koordinaten sei $ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2gzx+2fyz=0$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gleichung einen Kreis darstellt, ist:

$$(a+b+c-2h\cos C-2g\cos B-2f\cos A)^2+4\Delta=0,$$

wo

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g & \sin A \\ h & b & f & \sin B \\ g & f & c & \sin C \\ \sin A & \sin B & \sin C & 0 \end{vmatrix}.$$

Beweise von J. A. H. Johnston, Sanjána und C. M. Ross. Die Formel steht schon in Salmon, Conic Sections, sechste Aufl., S. 352. Lp.

Nash. Question 9388. Ed. Times (2) 7, 17-20.

Die Brennpunkte des Kegelschnitts $l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2=0$ werden durch die Gleichungen $l\alpha A=m\beta B=n\gamma C$ gegeben, wo $A=\beta\gamma+\alpha(\beta\cos B+\gamma\cos C-\alpha\cos A)$ usw. Wenn der Kegelschnitt vier gerade Linien berührt, ist der Ort der Brennpunkte eine zirkulare kubische Kurve, welche durch die sechs Ecken des durch die Geraden gebildeten Vierseits geht, ferner durch die Fußpunkte der Höhen des harmonischen

Dreiecks jenes Vierseits. Wenn der Kegelschnitt durch vier feste Punkte geht, ist der Ort der Brennpunkte eine bizirkulare Kurve sechster Ordnung, die in den Ecken isolierte Punkte besitzt und in den Fußpunkten der Höhen des harmonischen Dreiecks jenes Vierecks Doppelpunkte. Bewiesen von H. Bateman, A. M. Nesbitt und Sanjána. Lp.

E. J. NANSON. Question 15546. Ed. Times (2) 7, 31-32.

Den Ort des Brennpunktes eines Kegelschnitts zu finden, der vier gegebene Geraden berührt; daraus den Ort des Brennpunktes einer Parabel abzuleiten, der drei gegebene Geraden berührt. Gelöst von H. M. Taylor und Sanjána. Lp.

J. J. BIELANKIN. Allgemeine Theorie der Brennpunkte der Kurven zweiter Ordnung. Kiew Polytechn. Inst. 5, Nr. 3, 1-21. (Russisch.)

Ausrechnung der Koordinaten der Brennpunkte usw. nach der Auffassung von J. Plücker aus der allgemeinen Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten. Si.

E. v. WEBER. Über die Beziehungen zwischen Kegelschnitten und die Theorie des Imaginären. Monatsh. f. Math. **16**, 217-229.

Nähere Ausführung der vom Verf. früher (Das Imaginäre in der Geometrie der konfokalen Flächen zweiter Ordnung. Münch. Ber. **34**, 447-483; F. d. M. **35**, 639, 1904) entwickelten Resultate für Kegelschnitte. Jede Minimalebene des Raumes wird dadurch reell repräsentiert, daß man ihr einen Speer zuordnet, nämlich eine bestimmte Richtung derjenigen reellen Geraden, die sie mit ihrer konjugiert imaginären Minimalebene gemeinsam hat. Dadurch entsprechen den ∞^2 Minimalebenen, die allen Flächen eines konfokalen Systems Σ umschrieben sind, umkehrbar eindeutig ∞^2 Speere, die mit den orientierten reellen Erzeugenden der ∞^1 in Σ enthaltenen einschaligen Hyperboloide identisch sind. Für das Speersystem gilt nun eine durch elliptische Funktionen vermittelte Parameterdarstellung. Andererseits wird ein komplexer Punkt Π $(x'+ix'', y'+iy'', z'+iz'')$ reell repräsentiert durch die reellen Punkte $A'(x'y'z')$, $A''(x''y''z'')$. Der Kreis k, dessen Ebene in A' senkrecht auf dem Pfeile $A'A''$ des Punktes Π liegt, werde mit einem passenden Umlaufsinn versehen. Die Erzeugenden der ∞^1 konfokalen einschaligen Rotationshyperboloide, deren Fokalkreis k ist, bilden dann, ebenfalls mit passendem Umlaufsinn, einen Zyklus von ∞^2 Speeren, dessen Äquator k ist. Dieser Zyklus ist der reelle Repräsentant der ∞^2 Minimalebenen durch den Punkt Π. Aus diesen Feststellungen ergibt sich fast unmittelbar eine große Reihe von teils schon bekannten, teils

neuen Sätzen über Kegelschnitte, deren Entwicklung den Rahmen des Referats überschreiten würde. Doch sei bemerkt, um die Richtung der Untersuchung zu kennzeichnen, daß das Ponceletsche Schließungsproblem durch die entwickelte Methode naturgemäß erledigt wird. Sk.

A. Maluski. Sur la développée et les quasi-développées d'une conique. Nouv. Ann. (4) 5, 97-103.

Die Gleichung der Evolute eines Kegelschnitts (K) wird in Tangentialkoordinaten gewonnen, indem man in die Gleichung für das Tangentenpaar in den Schnittpunkten einer Geraden g mit K die Bedingung einführt, daß eine der Tangenten des Paares senkrecht zu g ist. Dieselbe Methode wird auf Quasievoluten angewandt (vgl. Salmon, höhere Kurven, Art. 109), und aus der einfachen Form der Gleichung werden weitere Folgerungen gezogen. Sk.

Éd. Collignon. Recherches sur l'enveloppe des pédales des divers points d'une circonférence par rapport à un triangle inscrit. Edinb. M. S. Proc. 23, 2-34.

Dieser Aufsatz enthält eine interessante Diskussion der Enveloppe der Wallace-Linie (F. d. M. 23, 38, 1891), wenn der Punkt, aus dem die Lote gefällt werden, die ganze Peripherie des Kreises durchläuft, dem das Dreieck einbeschrieben ist.

Verschiedene geometrische Konstruktionen zur Bestimmung des Berührungspunktes der Geraden mit ihrer Enveloppe werden gegeben; ebenso werden Methoden zur Aufzeichnung der Enveloppe erörtert. Die Rektifikation und die Quadratur der Kurve werden betrachtet. Der letzte Abschnitt ist kinematischen Betrachtungen gewidmet. Zahlreiche Figuren erläutern die Entwicklungen. Gbs. (Lp.)

V. Jung. Eine Bemerkung zum Normalenproblem bei der Ellipse. Časopis. 34, 123-129. (Böhmisch.)

Wenn man die Fußpunkte der von einem beliebigen Punkte an die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ gezogenen Normalen durch parallele Geraden von der Richtungstangente $\pm\frac{b}{a}(1 \pm \sqrt{2})$ auf die Ellipse projiziert, so erhält man vier auf einem Kreise liegende Punkte. Der Verfasser benutzt diesen schon bekannten Satz zu einer konstruktiven Lösung des Normalenproblems. Pe.

J. Neuberg. Question 15707. Ed. Times (2) 8, 70-71.

Man verbinde den Scheitel A einer Ellipse mit einem beliebigen Punkte M der Kurve; das Lot in M auf AM treffe die Ellipse in N; endlich ergänze man das Rechteck $AMNP$. Den Ort des Punktes P zu finden.

Für A als Koordinatenanfang und die große Achse als x-Achse findet man

$$a^2b^2(x^2+y^2)^2+(a^2-b^2)x^2y^2=2\,ab^2x\,[a^2(x^2+y^2)+(a^2-b^2)y^2],$$

oder in Polarkoordinaten r, θ:

$$r=2\,ab^2\cos\theta\,\frac{a^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta}{a^2b^2+(a^2-b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

Lösungen von R. Tucker und R. F. Davis. Lp.

Un Abonné. Sur un lieu connu. Nouv. Ann. (4) 5, 471-474.

Eine oft behandelte Aufgabe von Chasles (Ort des Schnittpunktes der gemeinschaftlichen Tangenten eines gegebenen Kegelschnittes und eines veränderlichen Kreises, der durch zwei feste Punkte des Kegelschnittes geht; Verf. gibt die Literatur genau an) findet eine neue Lösung.

R. M.

E. N. Barisien. Quistione 666. Periodico di Mat. (3) 2, 231-234.

Zwei Kreise c und c' sind gegeben. Man betrachte die Parabel π von konstantem Parameter p, deren Scheitel auf c liegt und deren Achse c berührt, ferner die Parabel π' von konstantem Parameter p', deren Scheitel auf c' liegt und deren Achse c' berührt. Wenn die Achsen von π und π' aufeinander senkrecht stehen, ist der Ort für den Mittelpunkt des Kreises, der durch die vier Schnittpunkte von π und π' geht, aus acht Pascalschen Schnecken zusammengesetzt. Beweis von R. U. Gandini. Lp.

C. Massing, H. Brocard. Correspondance. Nouv. Ann. (4) 5, 179-181, 227-228.

Satz über die Höhenschnittpunkte der beiden Dreiecke, welche von 3 Tangenten der Parabel und von den 3 zugehörigen Normalen gebildet werden. R. M.

O. Lesser. Wie verteilen sich die freien Eckpunkte aller Pythagoreischen Dreiecke über die Ebene, wenn die Dreiecke mit einer Kathete über einer festen Geraden stehen und allen der auf dieser Geraden liegende Hypotenusenendpunkt gemeinsam ist? Unterrichtsbl. f. Math. 11, 6-11.

O. Lesser. Rationale Zahlen in der Ebene und im Raume. Unterrichtsbl. f. Math. 11, 54-60.

Setzt man $x=2\,mn$, $y=m^2-n^2$, $z=m^2+n^2$, so ist $x^2+y^2=z^2$; für alle ganzen Zahlen m, n werden also x, y, z ebenfalls ganze Zahlen.

Nimmt man x und y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes in der Ebene, so folgt nach Elimination von m oder n:

$$(1)\ 4\,n^2 y = x^2 - 4\,n^4,\quad (2)\ 4\,m^2 y^2 = 4\,m^4 - x^2.$$

Sieht man m und n als variable Parameter an, so stellt (1) eine erste Schar konfokaler Parabeln dar, (2) eine zweite Schar mit dem Nullpunkt als Brennpunkt, und zwar sind dies zwei Scharen orthogonaler Parabeln. Der Punkt mit den Koordinaten x, y ist also der Schnittpunkt einer Parabel der ersten Schar und einer der zweiten. — Eine andere Schar orthogonaler Parabeln läßt sich durch alle Punkte legen, deren y eine ungerade Zahl ist, usw.

Die zahlentheoretischen Bemerkungen enthalten nur bekannte Dinge. Die bezüglichen Ausführungen sowohl des ersten, als auch des zweiten Aufsatzes können daher übergangen werden. An der zweiten Stelle zitiert der Verf. einen Vorgänger in seiner Darstellung der Pythagoreischen Zahlen: Baer, Parabolische Koordinaten in der Ebene und im Raum (F. d. M. **20**, 684, 1888). Die Betrachtungen können Material für Schüleraufgaben liefern. Der Versuch, die Rationalzahlen der Gleichung $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$ im Raume darzustellen, hat zu nichts Bemerkenswertem geführt. Lp.

M. Bôcher. A problem in analytic geometry with a moral. Annals of Math. (2) **7**, 44-48.

Die für Studierende geschriebene Notiz behandelt die Aufgabe, alle Kegelschnitte zu finden, die eine gegebene gleichseitige Hyperbel orthogonal schneiden, und fügt an die Lösung die Moral, daß man durch unbekannte Konstanten nicht dividieren dürfe, ehe man ihr Nullwerden verfolgt hat. R. M.

V. Fischer. Die Bestimmung einer beliebigen Hyperbel aus zwei gleichseitigen Hyperbeln. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 209-210.

Der Vergleich der vektoriellen Hyperbelgleichung $\mathfrak{v}_h = \mathfrak{a} \cosh \psi + \mathfrak{b} \sinh \psi$ mit der vektoriellen Ellipsengleichung $\mathfrak{v}_e = \mathfrak{a} \cos \varphi + \mathfrak{b} \sin \varphi$ führt zu der analogen Konstruktion der Hyperbel aus den beiden gleichseitigen Hyperbeln mit den Achsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wie sie bei der Ellipse aus den beiden Kreisen mit den Durchmessern $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wohlbekannt ist. Jhk.

G. Kober. Die Asymptoten der Hyperbel, welche den Einheitskreis auf vier durch ihre Gleichung gegebenen Scheitelstrahlen schneidet. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 101-102.

Der „Einheitskreis“ ist der Kreis $x^2 + y^2 = 1$, sein „Scheitel“ $x = 0$, $y = 1$. Die Gleichungen derjenigen Hyperbel nebst ihren Asymptoten werden aufgestellt, die den Kreis in den vier vom Scheitel verschiedenen Punkten schneidet, für welche

$$a_0\left(\frac{x}{1-y}\right)^4+a_1\left(\frac{x}{1-y}\right)^3+a_2\left(\frac{x}{1-y}\right)^2+a_3\left(\frac{x}{1-y}\right)+a_4=0$$

ist, wenn außerdem die eine Asymptote der X-Achse parallel ist. Ein bemerkenswertes Ergebnis findet sich in der Note nicht. E. M.

J. Neuberg. Question 15371. Ed. Times (2) 7, 100-102.

Von einer gleichseitigen Hyperbel, die durch zwei gegebene Punkte A und B geht und deren eine Asymptote einen dritten gegebenen Punkt C enthält, den Ort der Mittelpunkte zu finden. — Man nehme C als Koordinatenanfang, die y-Achse parallel zu AB. Die Koordinaten von A und B seien (c, a) und (c, b); dann hat der gesuchte Ort die Gleichung $x(x^2+y^2)=xy(a+b)+c(x^2-y^2)$. Außer den Lösungen von Nesbitt und Sanjána gibt Neuberg selbst eine Diskussion des Ortes.

Lp.

C. C. Grove. On a closed system of conics. Johns Hopkins Univ. Circ. 1905, Nr. 1, 16-22.

Zu einem syzygetischen Büschel von ebenen Kurven dritter Ordnung gehören 36 Kegelschnitte, deren Polarsysteme sämtlich die Eigenschaft haben, daß durch sie das System der Wendepunkte, Wendepunktslinien und Wendepunktsdreiecke jenes Büschels in sich übergeht. Verf. stellt diese Kegelschnitte auf und klassifiziert ihre Polarsysteme. Die Aufeinanderfolge zweier solcher Polarkorrelationen ist eine Kollineation aus der „Hesseschen Gruppe“ von 216 Kollineationen (vgl. Maschke, Math. Ann. **33**, 323; F. d. M. **20**, 139, 1888 und **21**, 142, 1889), die jenes syzygetische Büschel in sich überführen. Untergruppen dieser Kollineationen und ihre Beziehungen zu den Wendepunktsdreiecken und den 36 Kegelschnitten werden aufgeführt. E. M.

A. B. Coble. The normal form of a collineation, and the simultaneous reduction of two conics to a normal form. Johns Hopkins Univ. Circ. 1905, Nr. 1, 27-38.

Es handelt sich um diejenigen ebenen Kollineationen, deren Elementarteiler sämtlich linear sind, d. h. diejenigen vom Typus 1) [111] 2) [(11)1] 3) [(111)], also 1) die mit 3 getrennten Doppelpunkten, 2) die perspektivische, bei welcher Achse und Zentrum getrennt liegen, und 3) die identische. Verf. stellt die Gleichungen der Doppelpunkte und -geraden auf, und gibt, ohne das Koordinatendreieck zu spezialisieren, für die Kollineationen Normalformen an unter möglichster Benutzung jener Gleichungen der Doppelelemente. — Soll das Produkt zweier Polarkorrelationen eine Kollineation von einer der genannten Arten sein, so müssen die

beiden Ordnungskurven der Polarkorrelationen bezw. 1) allgemeine Lage zu einander haben, 2) sich doppelt berühren, 3) identisch sein. Es ergeben sich dann, entsprechend den Normalformen für die Kollineationen, Normalformen für diese Kegelschnitte. E. M.

Weitere Literatur.

G. BAUER. Von der Kurve sechster Ordnung, welche der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte ist, welche durch vier Punkte gehen. München. 11 S. 8vo.

Vgl. Kap. IX, 2D, S. 653.

F. BOEGEHOLD. Ableitung einiger Eigenschaften des Kegelschnittbüschels aus orthogonalen Invarianten und Kovarianten. Jena. 78 S. 8°.

K. GEISSLER. Die Kegelschnitte und ihr Zusammenhang durch die Kontinuität der Weitenbehaftungen; mit einer Einführung in die Lehre von den Weitenbehaftungen. Für Selbststudien und Unterricht. Jena: H. W. Schmidt. VIII u. 201 S., 50 Fig. auf 19 Taf. gr. 8°.

S. HALLER. Über die Brennpunktskurven zweier besonderen Gruppen von Kegelschnittsystemen. Pr. München. 31 S. 8°.

H. OFFERHAUS. Lineaire kegelsneestelsels en -weefsels. Diss. Groningen: Noordhoff. VIII u. 100 S. 8°. 2 Taf.

D. K. PICKEN. A direct method of obtaining the foci and directrices from the general equation $(a, b, c, f, g, h)(x, y, 1)^2 = 0$. Edinb. M. S. Proc. **23**, 96-99.

P. SZABO. Ein neuer analytischer Beweis des Desarguesschen Satzes. Math. és phys. lapok **14**, 316-319. (Ungarisch.)

H. L. TRACHTENBERG. A new cubic connected with the triangle. Math. Gazette **3**, 288-291.

G. TZITZÉICA. Reduktion einer ternären oder quaternären quadratischen Gleichung. Gazeta mat. Bukarest **10**, 1-8, 29-32. (Rumänisch.)

E. WEBER. Sur quelques coniques associées au triangle. Mathesis (3) **5**, 148-151, 170-174.

H. BROCARD. Au sujet de l'article de M. E. Weber sur quelques coniques associées au triangle. Mathesis (3) **5**, 246.

D. Andere spezielle Kurven.

F. KÖLMEL. Ableitung der verschiedenen Formen der ebenen Kurven dritter Ordnung durch Projektion und Klassifikation derselben III. (Die Kurven vom Geschlechte 1 ohne Oval.) Progr. Oberrealsch. u. Realgymn. Baden (1904), 14 S.

Diese Arbeit ist bereits F. d. M. **35**, 600, 1904 kurz angezeigt worden. Inzwischen ist ein Selbstreferat des Verf. (Zs. f. math. u. naturw.

Unterr. **36**, 371, 1905) erschienen mit Angaben aus einer Arbeit desselben „Über gewisse Transformationen von ebenen C_3“ (die im Arch. der Math. u. Phys. erscheinen wird). Jene Angaben haben den Zweck, den Zusammenhang der in der ersten Programm-Abhandlung des Verf. (F. d. M. **25**, 1132, 1893/4) gegebenen Einteilung der C_3 in dreizehn reelle Gattungen mit der 1901 von H. Wiener veröffentlichten „Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung in dreizehn Gattungen“ (Halle a. S. bei M. Schilling; F. d. M. **32**, 593, 1901) darzulegen. Wieleitner hat in § 66 seiner „Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung“ Leipzig 1905 (Referat S. 623 ff. dieses Bandes) eine Darstellung dieser Einteilung unter Vereinigung der Standpunkte jener beiden Autoren gegeben. Ferner wird von dem Verf. eine mit dem vorliegenden Gegenstand in Zusammenhang stehende Arbeit „über eine Gruppe von Transformationen vom Grade 6 aus der Theorie der ebenen C_3, die mit der Diedergruppe vom Grade 6 isomorph ist“, erscheinen.

In der vorliegenden Programm-Arbeit III werden alle ebenen Kurven dritter Ordnung, die durch Kollineation in einander übergeführt werden können, zu derselben „Grundform“ gerechnet. Nach der Verschiedenheit ihrer Gestalten ergibt sich nun eine Reihe von „Typen“ innerhalb derselben Grundform. Unterscheidungsprinzip für diese ist in erster Linie das Verhalten der Kurven gegen die unendlich ferne Gerade „nach folgenden Gesichtspunkten: Realität, bzw. Koinzidenz der Schnittpunkte, Art dieser (gewöhnliche oder singuläre Punkte), die Lage der Satellite der unendlich fernen Geraden, der Schnitt der Asymptoten unter einander und mit der Kurve dritter Ordnung.“ Es werden für diejenigen Kurven ohne Oval ($R > 0$), für welche $S < 0$, $T < 0$ ist, 27 Typen angegeben und gezeichnet; für die übrigen Untergruppen von Kurven dritter Ordnung ohne Oval werden die möglichen Typen vergleichsweise mit denjenigen der ausführlich behandelten Untergruppe aufgezählt. E. M.

L. Fahoun. Ein Beitrag zur Theorie und Konstruktion der rationalen Kurven dritter Ordnung. Časopis. **34**, 219-224. (Böhmisch.)

Konstruktion dieser Kurven als cissoidaler Kurven. Es wird dabei insbesondere folgender Satz für rationale Kurven dritter Ordnung mit drei reellen Asymptoten bewiesen und benutzt: „Trifft eine durch den Doppelpunkt O der Kurve gehende Gerade die Asymptoten in den Punkten M_1, M_2, M_3 und die Kurve im Punkte S, so ist $OM_1 + OM_2 + OM_3 = OS$.“

Pe.

K. Zahradník. Über eine birationale kubische Transformation und ihre Anwendung in der Kurventheorie. Časopis. **34**, 105-123, 329-341. (Böhmisch.)

Es wird zuerst die birationale Transformation der Ebene

$$x_1 = \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \quad y_1 = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

untersucht und auf die Erzeugung verschiedener rationaler Kurven angewendet. Die zweite Abteilung ist eine Reproduktion der Abhandlung des Verf.: „Beitrag zur Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung" (Wien. Ber. **113**, 973; F. d. M. **35**, 601, 1904). Pe.

K. Zahradník. Das Cartesische Blatt als Cissoidale. Časopis. **34**, 19-21. (Böhmisch.)

Ein Beispiel zur Konstruktion der cissoidalen Kurven. Pe.

K. Petr. Bemerkung über die Konstruktion der rationalen Kurven. Časopis. **34**, 43-47. (Böhmisch.)

Es wird eine lineare Konstruktion der rationalen Kurven von den Gleichungen

$$\frac{x}{z} = A + \frac{\alpha_1}{t-\delta_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{t-\delta_n},$$
$$\frac{y}{z} = B + \frac{\beta_1}{t-\delta_1} + \cdots + \frac{\beta_n}{t-\delta_n}$$

angegeben; dabei sind $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ reell vorausgesetzt. Ein spezieller Fall dieser Konstruktion ist die bekannte Konstruktion eines Kegelschnittes aus fünf Punkten. Pe.

R. Schröder. Die Cissoide des Diokles nebst Lehrsätzen, Formeln und Aufgaben. Pr. Nr. 146 Oberrealsch. Gr. Lichterfelde. 45 S. 8°.

Diese mit elementaren Mitteln durchgeführte Monographie ist für bessere Primaner oder junge Studenten als Einführung in die Eigenschaften kubischer Kurven recht geeignet. R. M.

M. González. Nota sobre las curvas de tercer grado. Anales Soc. cient. Arg. **59**, 179-184.

A. B. Basset. An elementary treatise on cubic and quartic curves. New York: Macmillan. XVI u. 255 S. 8vo (s. F. d. M. **32**, 593, 1901).

R. A. Roberts. On the plane quartic curve with a centre and the corresponding cone. Messenger (2) **34**, 171-183.

Zuerst wird gezeigt, daß Kurven vierter Ordnung mit einem Mittelpunkte von 12 Konstanten abhängen, und daß ihre Gleichungen auf eine der beiden Formen gebracht werden können:

(3) $U \equiv (z^2 + ax^2 + by^2 + 2cxy)^2 - (x^4 + y^4 + 6mx^2 y^2) = 0,$

(4) $U \equiv (z^2 + ax^2 + by^2 + 2cxy)^2 - x^2 (x^2 + y^2) = 0.$

Die Kurve (4) ist eine speziellere Kurve mit Mittelpunkt; ihre Gleichung hängt nur von 11 Konstanten ab. Setzt man $c = -1$, was unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann, ferner $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $z^2 - 2xy = Z$, so kann man (3) in die Form bringen:

$$(Z + aX + bY)^2 - (X^2 + Y^2 + 6mXY) = 0,$$

und dieser Kegelschnitt läßt sich weiter auf die Form (6) $z^2 - 4xy = 0$ transformieren. Somit ist eine Korrespondenz zwischen dem Kegelschnitte (6) und der behandelten Kurve hergestellt, und diese dient zur Herleitung einer Reihe von Eigenschaften der Kurven (3) und (4). Hierbei ist zu beachten, daß die Form (3) auf drei verschiedene Arten gewonnen wird, daß also drei verschiedene Kegelschnitte auftreten. Für die Form (4) existiert nur eine Reduktionsart. Wenn $c = 0$ ist in (3), so hat die Kurve in einem allgemeineren Sinne drei Mittelpunkte, kann nämlich auf drei verschiedene Arten so projiziert werden, daß jedesmal ein anderer Punkt als Mittelpunkt im gewöhnlichen Sinne erscheint. Die Gleichung (3) geht dann über in

(10) $(a, b, c, f, g, h)(x^2, y^2, z^2)^2 = 0.$

Zuerst werden die Doppeltangenten der Kurve aufgesucht mit den zugehörigen invarianten Relationen. Dann wird gezeigt, daß, wenn die Kurve vierter Ordnung eine gewisse Invarianten-Bedingung erfüllt, sie mit einem der Kegelschnitte (6) durch eine gewisse geometrische Beziehung verbunden ist; es gibt dann nämlich unendlich viele n-Ecke, die dem Kegelschnitte umgeschrieben und der Kurve vierter Ordnung eingeschrieben sind.

In dem zweiten Teil der Arbeit werden die bezüglichen Untersuchungen auf die entsprechenden Kegel ausgedehnt. Lp.

R. A. Roberts. On polygons inscribed in a binodal quartic and circumscribed about a conic. Messenger (2) **34**, 161-171.

Es wird gezeigt, daß einer Kurve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten unendlich viele Polygone von gerader Seitenanzahl eingeschrieben werden können, deren Seiten einen besonderen Kegelschnitt eines Systems von vierpunktigem Kontakt mit der Kurve berühren. Nach dem allgemeinen Beweise, bei welchem die Form einer bizirkularen Kurve vierter Ordnung zugrunde gelegt ist, wird die Aufgabe für die Fälle durchgeführt, bei denen das Polygon ein Viereck, Sechseck, Achteck, Zehneck ist. In diesen Fällen werden die notwendigen und hinreichenden invarianten Relationen jedesmal hergeleitet. Lp.

H. Brocard. Nota acerca de la cuestión 77. Rev. trim. de Mat. **5**, 65-68.

Über eine besondere Kurve vierter Ordnung. Lp.

P. Field. Quintic curves for which $p = 1$. American J., **27**, 243-246.

Die möglichen Gestalten der reellen Kurven fünfter Ordnung vom Geschlecht 1 mit 5, 3, 1 reellen Doppelpunkten werden diskutiert und durch 112 Figuren erläutert. T.

A. B. Basset. Compound singularities of quintic curves. Quart. J. **36**, 359-372.

Verf. unterscheidet die einfachen Singularitäten: Doppelpunkt, Spitze, Doppeltangente und Wendetangente von den zusammengesetzten, die sich als Vereinigung von zwei oder mehreren einfachen Singularitäten ansehen lassen. Als solche „konstituierende" einfache Singularitäten können entweder nur Punkt- oder nur Liniensingularitäten oder aber sowohl solche von der einen, als von der anderen Art auftreten. Demgemäß werden die zusammengesetzten Singularitäten in Punkt-, Linien- und gemischte Singularitäten eingeteilt.

Bei ihrer Untersuchung kann man analytisch und synthetisch vorgehen (im Sinne der Chemie). Auf die erstere Art findet Verf. z. B. das Resultat: Ein vielfacher Punkt von der Ordnung n, von dessen Tangenten r zusammenfallen, hat als Konstituenten $\frac{1}{2}n(n-1)-r+1$ Doppelpunkte und $r-1$ Spitzen. Synthetisch ist dagegen die Herstellung der Hauptarten derjenigen singulären dreifachen Punkte einer ebenen Kurve fünfter Ordnung, welche dadurch entstehen, daß eine oder mehrere von den Tangenten, die in diesem Punkte ihre eigenen Zweige oskulieren, miteinander oder mit gewöhnlichen Tangenten dieses Punktes zusammenfallen. Diese Singularitäten gehören zu den gemischten.

Es zeigt sich die merkwürdige Tatsache, daß eine gemischte Singularität auf mehr als eine Weise durch stetigen Übergang erzeugt werden kann. So kann z. B. ein dreifacher Punkt einer ebenen Kurve C_5 mit zwei gewöhnlichen und einer Inflexionstangente, die aber mit einer der ersteren zusammengefallen ist, als Vereinigung eines gewöhnlichen dreifachen Punktes (mit nicht zusammenfallenden Tangenten) und eines Doppelpunktes angesehen werden, — aber auch als ein Selbstberührungspunkt, durch welchen noch ein einzelner Zweig der Kurve hindurchgeht. Man vergleiche auch die Note des Verf. in Nature **71**, 101 (F. d. M. **35**, 583, 1904). E. M.

A. B. Basset. On trinodal and quadrinodal quintics. Quart. J. **37**, 106-121.

Ableitung einiger Beziehungen der ebenen C_5 mit drei Doppelpunkten zu Kegelschnitten, die sie mehrpunktig berühren, mit Hülfe von quadra-

tischer birationaler Transformation der C_5 in gewisse ebene C_4. Aufstellung der Gleichung einer allgemeinen ebenen C_5 mit drei Doppelpunkten und besonderer Arten derselben (z. B. C_5 mit einem Selbstberührungspunkt und zwei gewöhnlichen Doppelpunkten, C_5 mit einer Schnabelspitze). — Eine C_5 kann drei Selbstberührungspunkte oder drei Schnabelspitzen haben.

Die Tangenten in den Doppelpunkten einer C_5 mit drei Doppelpunkten können sämtlich Doppeltangenten sein. Aufstellung der Gleichung einer solchen Kurve und Ableitung einiger ihrer Eigenschaften, z. B.: es gibt sowohl einen Kegelschnitt, der jene sechs Doppeltangenten berührt, als auch einen zweiten, der durch die sechs Punkte geht, wo diese Tangenten außer in den Doppelpunkten die Kurve berühren.

Aufstellung von Gleichungsformen für eine C_5 mit vier Doppelpunkten, für eine C_5 mit drei Spitzen, für eine C_5 mit vier Spitzen. Diskussion der besonderen C_5 mit vier Doppelpunkten, deren Gleichung $S_1^2\,u = S_2^2\,v$ ist (wo $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ die Gleichungen zweier Kegelschnitte, $u = 0$ und $v = 0$ diejenigen zweier Geraden sind), für die verschiedenen Lagen dieser Kegelschnitte zu einander.

Poncelet sche Dreiecke, d. h. solche, deren Ecken auf der Kurve liegen, und deren Seiten Tangenten der Kurve sind, für ebene C_4 mit einem Doppelpunkt und ebene C_4 mit einer Spitze. E. M.

R. P. Stephens. A curve of the fifth class. Johns Hopkins Univ. Circ. 1905, Nr. 1, 23-26.

Es handelt sich um eine Kurve fünfter Klasse und sechster Ordnung mit fünf Doppelpunkten. E. M.

G. Bauer. Von der Kurve sechster Ordnung, welche der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte ist, welche durch vier Punkte gehen. Münch. Ber. **35**, 97-108.

Diese letzte Arbeit des im Jahre 1906 verstorbenen Verf. stellt die Gleichungen der im Titel genannten Kurven in einer auf das Polardreieck des Kegelschnittbüschels bezogenen Form in einfacher Weise so dar, daß ihre Singularitäten sofort hervortreten. Als bemerkenswerter Spezialfall wird die konzyklische Lage der vier Basispunkte behandelt; hier zerfällt die Kurve, wie schon Sylvester bewiesen hat, in zwei Kurven dritter Ordnung, deren Asymptoten auf einander senkrecht stehen. Sk.

E. Correale. Sulla curva che ha per podaria una data ellisse. Batt. G. **43**, 293-296.

Die Kurve, deren Fußpunktkurve (in bezug auf den Koordinaten-Nullpunkt) eine Ellipse ist, ist sechster Ordnung vierter Klasse; ihre Gleichungen in Punkt- und Linienkoordinaten, ihre Krümmung, Rektifikation und Quadratur werden abgeleitet. R. M.

R. P. Stephens. **A system of parastroids arising from the projection of a variable point in the Wallace lines at a fixed inclination.** Johns Hopkins Univ. Circ. 1905, Nr. 1, 1-9.

Einem Kreise sei ein Viereck einbeschrieben. Spiegelt man einen beliebigen festen Punkt P des Kreises an den Seiten des Vierecks, so liegen die Spiegelbilder zu je dreien auf einer Geraden. Man erhält so vier solche Geraden. Projiziert man nun P unter einem beliebigen Winkel α auf diese vier Geraden, so liegen die Projektionspunkte wiederum in einer Geraden L. Beschreibt P den Kreis, so umhüllt L eine „Parastroide". Variiert α, so erhält man ein System solcher Kurven, und dieses System wird vom Verf. untersucht (Vgl. Steggall, Edinb. M. S. Proc. **14**, 122-126; F. d. M. **27**, 480, 1896. — Converse, Annals of Math. (2) **5**, 105-139; F. d. M. **35**, 607, 1904). E. M.

Barbarin. **Une curiosité géométrique.** Bordeaux Procès-Verb. 1905, 30.

S. 152, Bd. 9 der Werke von Huygens befindet sich ein Brief von Tschirnhaus an Huygens mit einer Kurve, die 25 Doppelpunkte enthält. Barbarin macht darauf aufmerksam, daß die a. a. O. nicht weiter erklärte Kurve etwa so entsteht: Man nehme vier Kreise mit den Durchmessern OA, BC, DE, FG längs einer und derselben Geraden und suche den geometrischen Ort eines Punktes M, für den das Produkt der vier Tangenten von diesem Punkte aus die mittlere Proportionale zwischen den sieben Abständen MA, MB, ..., MG und einer gegebenen Länge ist. Der Ort von M ist eine Kurve der Ordnung 16, hat eine Form, die der Tschirnhausschen Zeichnung ähnelt, und besitzt die sieben Punkte $A, B, \ldots, G$ zu Doppelpunkten. Lp.

E. N. Barisien. **Étude de quelques courbes remarquables.** Assoc. Franç. Grenoble **33**, 116-158.

Zweck der Arbeit ist die Entwicklung der Eigenschaften gewisser unikursaler Kurven, nämlich solcher, deren kartesische Koordinaten x, y sich einfach durch Kosinus und Sinus eines Parameters φ ausdrücken lassen. Folgende Kurven werden untersucht:

I. Die unikursale Kurve vierter Ordnung:

$$x = A\cos\varphi + B\cos^2\varphi,\quad y = C\sin\varphi + D\sin^2\varphi.$$

II. Die unikursale Kurve sechster Ordnung:

$$x = A\cos\varphi + B\cos^3\varphi,\quad y = C\sin\varphi + D\sin^3\varphi.$$

III. Die unikursale Kurve sechster Ordnung:

$$x = A\cos^2\varphi + B\cos^3\varphi,\quad y = C\sin^2\varphi + D\sin^3\varphi.$$

IV. Die unikursale Kurve sechster Ordnung, von der die Kurven I, II, III besondere Fälle sind:

$$x = A + B\cos\varphi + C\cos^2\varphi + D\cos^3\varphi,$$
$$y = A' + B'\sin\varphi + C'\sin^2\varphi + D'\sin^3\varphi.$$

V. Die unikursale Kurve vierter Ordnung:

$$x = A\cos\varphi + B\cos 2\varphi,\ y = C\sin\varphi + D\sin 2\varphi.$$

VI. Die Ellipse:

$$x = A\cos^2\varphi + B\cos 2\varphi,\ y = C\sin^2\varphi + D\sin 2\varphi.$$

VII. Die Parabel:

$$x = A\cos^2\varphi + B\cos^4\varphi,\ y = C\sin^2\varphi + D\sin^4\varphi.$$

Besonders die Kurven unter I, II, III werden genauer diskutiert; ihre Formen für verschiedene besondere Werte der Konstanten A, B, C, D werden abgebildet, und es werden die bekannten Kurven aufgesucht, die durch diese Gleichungen dargestellt werden. Bei vielen der Kurven werden Inhaltsberechnungen durchgeführt. Lp.

B. Habenicht. **Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter.** Berlin: O. Salle. 32 S. 8° u. 4 Taf.

Die schon F. d. M. **26**, 688, 1895 und **28**, 578, 1897 besprochenen Aufstellungen von Kurvengleichungen nach dem Schema $r = f(\cos\varphi)$ setzt der Verf. allen Kritiken zum Trotz unermüdlich fort. R. M.

G. Pirondini. **Sur les pseudo-spirales.** Teixeira J. **15**, 145-173.

Unter einer Pseudospirale wird eine Kurve verstanden, deren Gleichung in natürlichen Koordinaten r, s (Krümmungsradius, Bogen) lautet: $r = a^{1-k}s^k$, wo a und k Konstanten sind. Die Gleichung stellt dar: für $k = 0$ einen Kreis, $k = 1$ die logarithmische Spirale, $k = \frac{1}{2}$ die Kreisevolvente, $k = -1$ die Klothoide usw. Von diesen Kurven werden zahlreiche Eigenschaften bewiesen. Unter einer „Hauptevolvente" wird eine solche verstanden, deren Anfang im Anfang der Bogen s liegt.

Die aufeinander folgenden Evoluten einer Pseudospirale sind andere Pseudospiralen. Diese Evoluten bilden eine endliche Reihe, wenn die Stammspirale die Hauptevolvente (beliebiger Ordnung) eines Kreises ist; eine unendliche Reihe in jedem anderen Falle. — Die Hauptevolventen einer Pseudospirale sind im allgemeinen andere Pseudospiralen. Eine Ausnahme macht die Pseudospirale $r = a^{\frac{1}{1-n}}s^{\frac{n}{n-1}}$ (n eine ganze positive Zahl), deren Hauptevolventen in zwei Familien zerfallen: die, deren Ordnung $\overline{\gtrless}\, n-2$, sind Pseudospiralen; die, deren Ordnung $> n-2$, sind Kurven anderer Art. — In § II werden Sätze über die Krümmungsradien und die Bogenlängen sowie die Radialen einer Pseudospirale und ihrer Evoluten abgeleitet. Der § III dient zur Entwicklung von Sätzen über Flächeninhalte. In § IV werden die für ganzzahlige Werte von n erhaltenen Ergebnisse auf beliebige Werte von n erweitert. Endlich der § V stellt eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften der Pseudospiralen zusammen. Lp.

Kapitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven.

E. Cotton. Généralisation de la théorie du trièdre mobile. S. M. F. Bull. **33**, 42-64.

Analytische Untersuchungen sehr allgemeiner und formaler Natur über die Bewegungen in der n-fachen Mannigfaltigkeit, die durch lineare totale Differentialgleichungen erster Ordnung definiert werden. Re.

E. J. Wilczinsky. General projective theory of space curves. American M. S. Trans. **6**, 99-133.

Die Invariantentheorie einer linearen Differentialgleichung ist bisher meist von wesentlich analytischem Standpunkte aus betrachtet worden; nur Halphen (Sur les invariants différentiels des courbes gauches. Journ. de l'Éc. Polytechn. **47**, 1—102, 1880) hat sie von der geometrischen Seite erfaßt und darauf eine Kurventheorie gegründet. Aber auch Halphens Abhandlung erkennt der Verf. nicht als eine grundlegende, alles umfassende Arbeit an, sondern er erblickt diese Grundlage in der hier gegebenen geometrischen Interpretation der Semikovarianten.

Als Richtschnur dient die allgemeine projektive Theorie der Regelflächen, die vom Verf. früher auf die Theorie der In- und Kovarianten eines Systems zweier linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gegründet wurde.

Hier wird als Ausgangspunkt die lineare Differentialgleichung:

$$y^{(4)} + 4\,p_1\,y^{(3)} + 6\,p_2\,y^{(2)} + 4\,p_3\,y^{(1)} + p_4\,y = 0$$

gewählt. Diejenigen Funktionen der Koeffizienten, die bei einer Transformation der abhängigen, nicht aber der unabhängigen Variablen invariant bleiben, werden als Semiinvarianten und, wenn sie noch y bis $y^{(3)}$ enthalten, als Semikovarianten bezeichnet.

Nachdem diese gefunden und durch geeignete Transformation die Glieder mit der Ableitung zweiter und dritter Ordnung entfernt sind und dadurch die Gleichung auf eine Form gebracht worden ist, die als die Laguerre-Forsythsche kanonische Form bezeichnet wird, geht der Verf. zur geometrischen Interpretation über. Er deutet die ein Fundamentalsystem jener Differentialgleichung bildenden vier Funktionen y_1, y_2, y_3, y_4 als die homogenen Koordinaten eines Punktes P_y einer Raumkurve C_y, setzt die y_k in die drei relativen Semikovarianten z, ϱ, σ ein und bestimmt dadurch drei Kurven C_z, C_ϱ, C_σ, die mit C_y eng zusammenhängen. Auf diese Weise findet er eine Reihe von Sätzen über Raumkurven, die zum Teil schon bekannt sind, auf die im einzelnen hier nicht eingegangen werden kann, und mit denen die Halphenschen Untersuchungen leicht in Zusammenhang gebracht werden können. Sh.

E. J. Wilczynski. General theory of curves on ruled surfaces. American M. S. Trans. 6, 75-82.

Bemerkungen über einige Kurven auf den geradlinigen Flächen und über die Differentialgleichungen, die sie definieren. Der Titel entspricht, wie dem Ref. scheint, nicht ganz dem Inhalt der Arbeit. Re.

E. J. Wilczynski. The general projective theory of space curves and ruled surfaces. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 361-365.

Es seien (y_k, z_k), wo $k = 1, 2, 3, 4$, vier Lösungspaare des simultanen Systems

$$y'' + p_{11}\, y' + p_{12}\, z' + q_{11}\, y + q_{12}\, z = 0,$$
$$z'' + p_{21}\, y' + p_{22}\, z' + q_{21}\, y + q_{22}\, z = 0,$$

so würden, wenn (y_1, y_2, y_3, y_4) und (z_1, z_2, z_3, z_4) die homogenen Koordinaten zweier Raumpunkte P_y und P_z, L_{yz} ihre Verbindungslinie ist, bei Änderung von x P_y und P_z Raumkurven beschreiben, welche auf einer von L_{yz} beschriebenen Regelfläche S liegen. Durch eine Transformation $\eta = \alpha y + \beta z$, $\zeta = \gamma y + \delta z$, $\xi = f(x)$ verwandeln sich P_y und P_z in die Kurven P_η und P_ζ auf S; die Invarianten der Transformation liefern alsdann durch ihr Verschwinden projektivische Eigenschaften von S. Natürlich ist klar, daß S nicht algebraisch sein muß. Der Verf. gelangt unter anderem zu dem Satze: Zieht man in jedem Punkt der Wendeknotenkurve die zur Tangente dieser Kurve in Bezug auf die Erzeugende und die Wendeknotentangente harmonische Gerade, so umhüllen diese Geraden eine Developpable, die der Verf. sekundäre Developpable der Wendeknotenkurve nennt. Es gibt dann ∞^1 Regelflächen, von denen jede einen Zweig ihrer Wendeknotenkurve mit S gemeinsam hat. Diese Flächen werden erzeugt durch eine Involution, die jede Fläche mit ihrer Wendeknotenfläche paart. Die primäre und die sekundäre Developpable der Wendeknotenkurve sind die Doppelflächen dieser Involution. Wö.

G. Sannia. Trasformazione di Combescure ed altre analoghe per le curve storte. Palermo Rend. 20, 83-92.

Indem der Verf. in den Formeln von Cesàro (Natürl. Geometrie S. 156 [3])

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{z}{\varrho} + 1, \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} - \frac{z}{r}, \quad \frac{\delta z}{ds} = \frac{dz}{ds} + \frac{x}{\varrho} + \frac{y}{r}$$

$\delta y = \delta z = 0$ setzt, erhält er aus einer Kurve C mittels einer Transformation von Combescure eine Kurve C_1, wobei die Richtungen der Tangente, der Binormale, der Hauptnormale, der rektifizierenden Geraden und das Verhältnis von Krümmung und Torsion erhalten bleiben. Mit $\delta x = \delta z = 0$ entsteht eine Transformation B von C; diese kann zu-

sammengesetzt werden aus einer Transformation von Combescure und einer solchen von C in B_0, bei welcher die beiden Krümmungen und die Richtungen der Tangente und Binormale vertauscht, die der Hauptnormale umgekehrt wird. Mit $\delta x = \delta y = 0$ entsteht eine Transformation von C, wobei die Tangente und die Binormale der neuen Kurve zur Hauptnormale und rektifizierenden Geraden der alten parallel sind. Die Rückkehrkurve der Enveloppe der Normalebenen einer Kurve C (Ort der Zentren der Schmiegungskugeln) erhält man durch eine Transformation B aus C. Der Ort der Krümmungszentren eines tordierten Kreises geht aus letzterem durch eine Transformation B hervor. Der Verf. bestimmt dann weiter eine Kurve, welche eine gegebene als Ort der Zentren der Schmiegungskugeln hat. Die Rückkehrkurven der Abwickelbaren, welche durch Gerade, die in der rektifizierenden Ebene parallel und in gleichem Abstand zur Tangente gezogen werden, erzeugt sind, entstehen aus C durch eine Transformation T. Dreht man eine Gerade, die parallel zur Tangente in M durch den Mittelpunkt der Schmiegungskugel gezogen ist, um M in der Normalebene um $90°$, so erzeugt sie eine Abwickelbare. Die Evolventen einer Kurve entstehen aus ihr durch eine Transformation N.

Wö.

S. Chassiotis. Notes sur les courbes gauches. Nouv. Ann. (4) 5, 394-399.

Folgerungen aus der Combescureschen Transformation, die aber großenteils mit Rechenfehlern behaftet sind. Insbesondere sind die von dem Verf. gefundenen algebraischen Kurven konstanter Krümmung leider nur durch fehlerhafte Ausführung von Quadraturen erhalten. Es sind daher bis jetzt immer noch keine derartigen Kurven bekannt, wenn man von dem trivialen Fall des Kreises absieht.

Sk.

P. Saurel. On the twist of a tortuous curve. Annals of Math. (2) 7, 10-14.

Ist die Abweichung einer Raumkurve von ihrer Schmiegungsebene nach der positiven Seite der Binormale gerichtet, so ist ihre Torsion positiv. Nach dieser Bestimmung zeigt der Verf., daß das Vorzeichen der Torsion mit dem der Determinante

$$\begin{vmatrix} x^{(p)} & y^{(p)} & z^{(p)} \\ x^{(q)} & y^{(q)} & z^{(q)} \\ x^{(r)} & y^{(r)} & z^{(r)} \end{vmatrix}$$

übereinstimmt, wobei $x^{(p)}, \ldots, z^{(r)}$, $p < q < r$, die niedrigsten von Null verschiedenen Ableitungen der Koordinaten x, y, z nach dem Parameter t, der sie analytisch darstellt, bedeuten. Mit Hülfe der Ergebnisse der nachstehend besprochenen Note wird dann das Vorzeichen der Torsion für alle acht möglichen Arten von Kurvenpunkten bestimmt.

Sk.

P. Saurel. On the singularities of tortuous curves. Annals of Math. (2) **7**, 3-9.

Darstellung der von Staudtschen Kriterien (Geometrie der Lage, S. 110) zur Unterscheidung singulärer Punkte von Raumkurven in analytischer Form. Voran geht eine analoge Unterscheidung der vier möglichen Arten von ebenen Kurvenpunkten, während die leichte Verallgemeinerung auf den n-dimensionalen Raum den Beschluß bildet. Sk.

V. Rouquet. Sur une propriété caractéristique des courbes de Bertrand et son application à la recherche des surfaces dont les lignes asymptotiques d'une famille sont des courbes égales. Toulouse Mém. (10) **5**, 180-199.

Wenn bei allen Lagen eines starren räumlichen Systems vier Gerade, die nicht alle auf einer F_2 liegen, immer auf den Bahnen aller ihrer Punkte senkrecht stehen, so beschreiben die Fußpunkte O und O' der gemeinsamen Normalen der zwei Geraden D und D', welche die vier genannten Geraden treffen, zwei konjugierte Bertrandsche Kurven; die Bewegung des Systems wird erzeugt durch die Bewegung der unveränderlich unter sich verbundenen Haupttrieder der beiden Bertrandschen Kurven, und alle Geraden der durch D und D' bestimmten Kongruenz stehen senkrecht auf den Bahnen aller ihrer Punkte. Dieses Theorem benutzt der Verf. zur Begründung eines von Goursat (S. M. F. Bull **30**, 13; F. d. M. **33**, 637, 1902) gefundenen Satzes über Flächen mit einem System ebener Haupttangentenkurven. Wö.

E. Salkowski. Zur Bestimmung aller Raumkurven, für welche zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge eine gegebene Gleichung besteht. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **4**, 64-69.

Es seien $\varkappa$, τ, s Krümmung, Torsion und Bogenlänge einer Raumkurve (x, y, z) und K, T, S dieselben Größen für eine zweite Raumkurve (X, Y, Z), die der ersten durch parallele Tangenten zugeordnet ist; dann bestehen die Relationen:

$$\varkappa ds = KdS,\quad \tau ds = TdS,\quad \varkappa : \tau = K : T.$$

Ist daher die Raumkurve $X = X(u)$, $Y = Y(u)$, $Z = Z(u)$ und eine Relation (natürliche Gleichung) $f(\varkappa, \tau, s) = 0$ gegeben, so berechne man $K = K(u)$, $T = T(u)$, $S = S(u)$, bestimme aus den beiden vorstehenden Gleichungen $\varkappa = \varkappa(s, u)$, $\tau = \tau(s, u)$ und danach $s = s(u)$ aus $\varkappa ds = KdS$; dann werden x, y, z durch Quadraturen gefunden:

$$x = \int \frac{X'}{S'} s' du, \ldots,$$

wo $X' = \dfrac{dX}{du}, \ldots$. Spezielle Anwendungen zeigen die Brauchbarkeit dieser Formeln. Re.

G. Lony. Über einen Satz der Kurventheorie. Hamb. Mitt. **4**, 204-205.

Rechnerischer Beweis des Satzes: Hat eine Raumkurve konstanten Krümmungsradius, so ist sie die Krümmungsmittelpunktskurve ihrer Krümmungsmittelpunktskurve. Der Satz ist bekannt. Vgl. z. B. R. Hoppe: Das Aoustsche Problem in der Kurventheorie. Arch. d. Math. u. Phys. (1) **66**, 386 (F. d. M. **13**, 590, 1881). Sk.

E. Rath. Lösung der Aufgabe 105. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 92-94.

P. Epstein hatte (Arch. d. Math. u. Phys. (3) **8**, 82) den Satz aufgestellt: Wenn $u(t)x+v(t)y+w(t)z=p(t)$ $(u^2+v^2+w^2=1)$ die Schmiegungsebene einer Raumkurve ist und

$$\Delta=\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}, \quad D=\begin{vmatrix} p & p' & p'' & p''' \\ u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \\ w & w' & w'' & w''' \end{vmatrix} \quad \left(u'=\frac{du}{dt} \text{ usw.}\right)$$

gesetzt wird, so ist die Krümmung $1/r$ und die Torsion $1/\varrho$ gegeben durch

$$\frac{1}{r}=\frac{\Delta^3}{D(u'^2+v'^2+w'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{1}{\varrho}=\frac{\Delta^2}{D}.$$

Verf. führt den Beweis und erörtert das Vorzeichen von D für den Fall rechts- und linksgewundener Kurven. E. M.

G. Sannia. Le sviluppate oblique di una curva piana o storta. Batt. G. **43** [(2) **12**], 172-181.

„Wenn sich bei der Verschiebung eines Punktes auf einer ebenen oder gewundenen Kurve eine Normale der Kurve nach einem bestimmten Gesetze bewegt, so beschreibt sie im allgemeinen eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante eine geodätische Linie der Polardeveloppablen der Kurve ist etc. Diese Sätze sind leicht zu verallgemeinern.“ Der Verf. nimmt nämlich an, daß es sich nicht um eine Normale der Kurve, sondern um eine Gerade t' handele, welche von dem sich bewegenden Punkte M der Kurve C ausgeht und mit der Tangente t in M einen konstanten Winkel θ bildet, aber so, daß t' bei der Bewegung von M eine abwickelbare Fläche S beschreibt. Die Rückkehrkante C' dieser Fläche S nennt er eine „sviluppata obliqua θ“ der Kurve C und entsprechend C eine „sviluppante obliqua θ“ von C'. Es ergibt sich dann, daß jede Kurve eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von „sviluppate θ“ besitzt, daß diese letzteren geodätische Linien auf der „Pseudopolarfläche θ“ sind, daß eine Kurve ihre Pseudopolarflächen in ihren Rückkehrpunkten trifft, und andere Sätze, insbesondere auch solche über die geodätische Krümmung der orthogonalen Trajektorien der „sviluppate θ“. Sie sind

sämtlich in unserer Sprache schwer wiederzugeben, da sich für die genannten Ausdrücke deutsche Übersetzungen nicht recht finden lassen; ist doch bis jetzt nicht einmal für den speziellen Fall ($\theta = 90°$) der „Rückkehrkante der Polardeveloppablen" ein kurzer und treffender Ausdruck eingeführt worden. Z.

E. Vessiot. Sur les courbes minima. C. R. **140**, 1381-1384.

Jede Minimalkurve (Kurve von der Länge 0) hat eine Pseudobogenlänge s, die durch $\Sigma\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 = 1$ definirt ist, und die dazu dienen kann, die Differentialinvarianten der Minimalkurven gegenüber der Gruppe der Bewegungen in einfacher Weise abzuleiten. Auch kann man in jedem Punkt der Kurve ein Trieder bestimmen, für das Formeln gelten, die den Frenet-Serretschen analog sind. Diese Ergebnisse können, wie der Verf. später zeigen will, für die allgemeine Theorie der Kurven und Flächen verwertet werden. El.

M. Fréchet. Sur l'écart de deux courbes et sur les courbes limites. American M. S. Trans. **6**, 435-449.

Zwei stetige Raumkurven seien durch je drei Funktionen desselben Parameters gegeben. Das Maximum der Entfernung der gleichparametrigen Punkte der beiden Kurven sei m. Die untere Grenze für die Größen m für alle möglichen Parameterdarstellungen nennt Verf. Entfernung (écart) der beiden Raumkurven. Mit Hülfe dieses Begriffes wird der Begriff „Grenzkurve" definiert, gegen die unter Umständen eine unendliche Reihe von Raumkurven konvergiert. Nach Ableitung einer Reihe wichtiger Eigenschaften dieses Gebildes wird die geometrische Bedingung dafür aufgestellt, daß eine Kurvenmenge kompakt ist, d. i. jede transfinite Teilmenge derselben mindestens eine Grenzkurve besitzt. D.

E. Cesàro. Per l'analisi intrinseca delle figure tracciate sopra una superficie. Napoli Rend. (3) **11**, 375-406.

Mit Hülfe eines Koordinatensystems, welches auf der Fläche beweglich ist, gelangt der Verf. zu Sätzen insbesondere über Drehungsflächen. Auf der Pseudosphäre sind die Loxodromen Kurven konstanter Krümmung, ebenso die Orthogonaltrajektorien aller von einem Punkte ausgehenden Loxodromen. Die Bogenlänge einer Evolvente eines Parallelkreises zwischen ihm und einem andern Parallelkreis ist reziprok zur Krümmung der Kurven konstanter Krümmung, welche den ersten Parallelkreis berühren und auf dem zweiten senkrecht stehen. Auf der Drehfläche einer Ribaucourlinie schneiden die Kurven, in welcher die Krümmung zum Krümmungsmaß der Fläche proportional ist, die Meridiane unter Winkeln, deren Tangente der Bogenlänge proportional ist. Wö.

E. Cesàro. Sulla rappresentazione intrinseca delle superficie. Napoli Atti (2) **12**, Nr. 7, 20 S.

Sind q_1, q_2 krummlinige Koordinaten auf einer Fläche, so setzt der Verf. eine gegebene Funktion σ von q_1 und q_2 gleich einer willkürlichen Funktion des Bogens s einer Flächenkurve und bestimmt dann die Fläche durch die Gleichung $1/\varrho^2 = \lambda\sigma'^2 + 2\mu\sigma' + \nu$, wo ϱ der Krümmungsradius der Flächenkurve, λ, μ, ν Funktionen von q_1, q_2 und σ sind. Er zeigt dann, daß die sämtlichen Kurven auf einer Fläche nicht ohne Änderung ihrer Gestalt auf eine andere von ihr verschiedene Fläche übertragen werden können. Wählt man als krummlinige Koordinaten ein System geodätischer Linien $\sigma =$ konst. und sein geodätisches Orthogonalsystem $\tau =$ konst. so geht die Gleichung der Fläche über in

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\sigma'^2}{1-\sigma'^2} + 2\mu(\sigma,\tau)\sigma' + \nu(\sigma,\tau,\sigma'),$$

wobei alle auf eine gegebenen Fläche abwickelbaren Flächen sich nur in der Funktion ν unterscheiden. Der Verf. erörtert schließlich den Fall, daß μ und ν von τ unabhängig sind. Wö.

K. M. Peterson. Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes. Traduit du russe par M. Eugène Cosserat. Toulouse Ann. (2) **7**, 5-43.

K. M. Peterson. Sur les courbes tracées sur les surfaces. Traduit du russe par MM. Eugène Cosserat et Henri Frenkel Toulouse Ann. (2) **7**, 45-68.

K. M. Peterson. Sur la déformation des surfaces du second ordre. Traduit du russe par M. Édouard Davaux. Toulouse Ann. (2) **7**, 69-107.

Von den hier in französischer Übersetzung vorliegenden Arbeiten des russischen Mathematikers, auf dessen Bedeutung erst in der letzten Zeit von mehreren Seiten gebührend hingewiesen ist, sind die beiden ersten in den Jahren 1865-67, die letzte 1883 in der mathematischen Sammlung der Moskauer Mathematischen Gesellschaft erschienen. Sie enthalten eine große Zahl von Sätzen aus der Theorie der Flächen und Kurven, die, zum Teil nahezu gleichzeitig von Mathematikern des Westens entdeckt, heutzutage unter deren Namen zum Gemeingut aller Geometer geworden sind. So beginnt z. B. die erste Arbeit, die sich mit der Abbildung und Verwandtschaft zweier Flächen beschäftigt, mit dem Satze, daß bei einer beliebigen Abbildung stets ein orthogonales Netz entsprechender Kurven existiert; diesen Satz hat bekanntlich Tissot 1859 gefunden und Dini im Jahre 1869 zum Beweise des Beltramischen Problems der geodätischen Abbildung benutzt. Die ebenfalls diskutierte Abbildung zweier Flächen durch parallele Normalen ist durch Christoffels Untersuchungen, die Flächen mit ebenen und sphärischen Krümmungslinien durch Joachimsthals, Ennepers und Dobriners Arbeiten bekannt.

Die letztgenannte Abhandlung beschäftigt sich mit dem jetzt im Vordergrunde des Interesses stehenden, viel behandelten Problem der Biegungen der Flächen zweiten Grades. Es wird eine große Zahl spezieller Deformationen der Flächen zweiten Grades angegeben und genauer untersucht, besonders der Rotationsflächen. Wenngleich somit die Ergebnisse durch die neueren weit allgemeineren Arbeiten von Darboux und anderen überholt sind, so scheint die Petersonsche Abhandlung doch eine Fundgrube interessanter spezieller Beispiele zu sein, deren Verarbeitung im Sinne der Darbouxschen und Bianchischen Resultate erwünscht und wohl auch lohnend wäre.

Überhaupt regt die Lektüre aller dreier Abhandlungen Petersons zu vergleichenden flächentheoretischen Betrachtungen an; leider haben sich die Übersetzer mit wenigen formalen Bemerkungen begnügt. Das große Verdienst, das sie sich durch die Übersetzung erworben haben, wäre für die Flächentheorie sehr viel wertvoller, wenn sie sich entschlossen hätten, durch Literaturnachweise, durch kritische Vergleiche und Kennzeichnung des wirklich Neuen das Verständnis und die Würdigung der Petersonschen Arbeiten vom mathematisch-historischen Standpunkt zu erleichtern. Re.

J. Knoblauch. Der innere Zusammenhang der flächentheoretischen Grundformeln. J. für Math. **130**, 113-143.

Man kann bekanntlich eine vollständige „Flächentheorie“ auf der Theorie eines Systems zweier simultanen quadratischen Differentialformen aufbauen. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, auf Grund dieser Methode den Nachweis der Verknüpfung der flächentheoretischen Grundformeln unter einander zu erbringen.

Da das bearbeitete Formelmaterial der Natur der Sache nach im wesentlichen bekannt ist, muß es hier genügen, auf den methodischen Charakter der Arbeit, auf die streng invariantentheoretischen Beweise und auf den logisch systematischen Aufbau der Fundamentalformeln hinzuweisen. Re.

P. Stäckel. Isometrische Flächenpaare. Deutsche Math.-Ver. **14**, 507-516.

Die Untersuchungen gruppieren sich um folgenden Fundamentalsatz über die Isometrie der Flächen: Sind x, y, z analytische Funktionen von p und q, so läßt sich der Ausdruck:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

durch Einführung neuer Veränderlicher u und v stets auf eine der fünf Formen bringen:

$$1)\ 0,\quad 2)\ du^2,\quad 3)\ u^2dv^2,\quad 4)\ dudv,\quad 5)\ l(u,v)dudv,$$

wo $l(u,v)$ nicht das Produkt einer Funktion von u allein und einer Funktion von v allein ist. Die zu den betreffenden Linienelementen gehörigen analytischen Gebilde haben der Reihe nach den Typus:

1. Punkt, Minimalgerade, Minimalkurve; 2. Gerade, Kurve, Minimalebene; 3. Minimalkegel, Tangentenfläche einer Minimalkurve; 4. Ebene, Zylinder, Minimalzylinder, Kegel, Tangentenfläche einer Kurve; 5. Fläche (im engeren Sinne). Re.

Abbé de Montcheuil. Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. S. M. F. Bull. **33**, 170-171.

Im Anschluß an seine früheren Untersuchungen (S. M. F. Bull. **31**, 1-27; F. d. M. **34**, 667, 1903) erhält der Verf. in den den Nabellinien einer beliebigen Fläche entsprechenden Kurven auf ihrer Mittelfläche die Lösung des Problems, Koordinaten und Bogenlänge einer beliebigen Raumkurve explizit, d. h. ohne Quadraturen darzustellen. Sk.

P. Sicard. Solution de la question d'analyse du concours d'agrégation de 1905. Nouv. Ann. (4) **5**, 546-557.

Für eine in Tangentialkoordinaten explizit vorgelegte Fläche sind konjugierte Kurvenscharen, Krümmungslinien, Hauptkrümmungsradien zu finden. Bestimmung der geodätischen Linien, ihrer Krümmung und Torsion auf einer spezialisierten Fläche der vorgegebenen Art. Sk.

J. Eiesland. On a certain system of conjugate lines on a surface connected with Euler's transformation. American M. S. Trans. **6**, 450-471.

Die Untersuchungen schließen sich an die Eulersche Transformation der partiellen Differentialgleichungen an. Die Resultate sind geometrisch nicht einfach. „Eulersche Linien" nennt der Verf. eine zweifach unendliche Schar konjugierter Linien von folgender Eigenschaft: Man projiziere sie auf eine Ebene, z. B. die xy-Ebene, dann bilden die Tangenten in jedem Schnittpunkt mit jeder Achse ein gleichschenkliges Dreieck. Bei einer Eulerschen Transformation der Flächen entsprechen diesen Linien die Asymptotenkurven der transformierten Fläche. Re.

P. Cattaneo. Nozioni fondamentali sulle superficie parallele. Batt. G. **43** [(2) **12**], 281-289.

Zusammenstellung und kurze Beweise der (wohl fast durchgängig bekannten) Hauptsätze über Parallelflächen. Re.

L. P. EISENHART. Surfaces of constant curvature and their transformations. American M. S. Trans. 6, 472-485.

Der Verf. untersucht auf den sphärischen Flächen solche Kurven, die als Koordinatenlinien (u, v) die zweite Fundamentalform in der Gestalt $\lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$ ergeben, d. h. also, für die die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N den Bedingungen $L = N$, $M = 0$ genügen. Die Fundamentalgrößen erster Ordnung sind dann gegeben durch die Bestimmung, daß F und $E - G$ die Gleichung $\partial^2\varphi/\partial u^2 + \partial^2\varphi/\partial v^2 = 0$ befriedigen müssen.

Bei der Fülle der vorhandenen Literatur über die Flächen konstanten Krümmungsmaßes dürfte es schwer sein, festzustellen, welche von den vom Verfasser abgeleiteten geometrischen Sätzen neu sind. Dies gilt insbesondere auch von der vom Verfasser mitgeteilten Transformation, die auf der Bemerkung beruht, daß wenn E, F, G der obigen Bedingung genügen, dies auch für die Größen $E_1 = \frac{1}{2}(E + G - 2F)$, $F_1 = \frac{1}{2}(E - G)$, $G_1 = \frac{1}{2}(E + G + 2F)$, wo $E_1 G_1 - F_1^2 = EG - F^2$, der Fall ist.

Die entsprechenden Betrachtungen werden auch für die pseudosphärischen Flächen angestellt, wo sich zum Teil imaginäre Resultate ergeben. Re.

L. P. EISENHART. Surfaces with the same spherical representation of their lines of curvature as pseudospherical surfaces. American J. 27, 113-172.

Der Verf. untersucht das Problem der sphärischen Abbildung in dem speziellen Fall, wo das Quadrat des Linienelements der Gaußschen Kugel

$$d\sigma^2 = \sin^2\omega\, du^2 + \cos^2\omega\, dv^2$$

lautet und ω eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \sin\omega\cos\omega$$

ist. Bekanntlich kommt diese Abbildung den pseudosphärischen Flächen zu. Die Bestimmung aller Flächen dieser Abbildung (A-Flächen in des Verf. Bezeichnung) führt auf die Integration einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Alle Parallelflächen einer A-Fläche sind wieder A-Flächen. Speziallösungen der Differentialgleichung werden diskutiert. Zu den A-Flächen gehören auch die von Bianchi angegebenen, bei denen die Kugeln, die um jeden Abschnitt der Normalen zwischen den Krümmungszentren als Durchmesser beschrieben werden können, eine feste Kugel in Großkreisen oder orthogonal schneiden. Eine Anzahl von Transformationen der A-Flächen werden mitgeteilt, die zum Teil denen nachgebildet sind, die aus der Theorie der Flächen konstanten Krümmungsmaßes bekannt sind. Re.

L. P. EISENHART. Surfaces analogous to the surfaces of Bianchi. Annali di Mat. (3) **12**, 113-143.

Diese Arbeit enthält eine Fortsetzung der im vorhergehenden Referat angegebenen Untersuchungen über $\varDelta$-Flächen, besonders der von Bianchi mitgeteilten Flächenklasse. Re.

P. CATTANEO. Alcuni teoremi sull' evoluta armonica. Nota. Ven. Ist. Atti [(8) 7] **64**, 1039-1052.

Die harmonische Zentrafläche ist der Ort der Punkte, welche auf der Flächennormale zum Flächenpunkt in bezug auf die beiden Hauptkrümmungszentra harmonisch liegen. Dieselbe reduziert sich nie auf eine Raumkurve. Nur die Flächen konstanter mittlerer Krümmung sind zu ihren harmonischen Zentraflächen parallel und bilden sich konform auf sie ab. Die harmonische Zentrafläche einer Drehfläche ist eine koaxiale Drehfläche, wobei Meridiane und Parallelkreise sich gegenseitig entsprechen. Bei den Drehflächen und den Flächen konstanter mittlerer Krümmung, und nur bei diesen, entsprechen die Krümmungslinien der harmonischen Zentrafläche denjenigen der Fläche. Die harmonische Zentrafläche einer abwickelbaren Fläche ist eine Regelfläche, bei der die Erzeugenden denen der Fläche entsprechen, und welche nur abwickelbar ist, wenn die Fläche ein Kegel oder ein Zylinder ist. Wö.

G. PIRONDINI. Deux problèmes relatifs aux lignes tracées sur une surface de révolution. Note de géométrie analytique. Teixeira J. **15**, 174-180.

Auf einer Umdrehungsfläche Σ sei eine beliebige Linie L gezogen. Die Normalen, von allen Punkten von L auf Σ gefällt, schneiden Σ in der Kurve L_1, der „Projektion" von L auf Σ. Die Normalen, in allen Punkten von L auf Σ errichtet, schneiden Σ in der Kurve $\varDelta_1$, der „Antiprojektion" von L auf Σ. Geht man von einer bestimmten Linie L aus, so kann man die Folge der Linien konstruieren:

$$\left.\begin{matrix} L_1, L_2, \ldots, L_{k-1}, L_k, \ldots \\ \varDelta_1, \varDelta_2, \ldots, \varDelta_{k-1}, \varDelta_k, \ldots \end{matrix}\right\} \text{ mit der Bedingung, daß } \left\{\begin{matrix} L_k \\ \varDelta_k \end{matrix}\right.$$

$$\text{die} \left\{\begin{matrix} \text{Projektion} \\ \text{Antiprojektion} \end{matrix}\right\} \text{ von } \left\{\begin{matrix} L_{k-1} \\ \varDelta_{k-1} \end{matrix}\right. \text{ ist. Dann heißt } \left\{\begin{matrix} L_n \\ \varDelta_n \end{matrix}\right.$$

$$\text{die } n\text{-te} \left\{\begin{matrix} \text{Projektion} \\ \text{Antiprojektion} \end{matrix}\right\} \text{ von } L.$$

Die Note zeigt in kurzen Worten eine Methode zur Bestimmung dieser beiden Familien abgeleiteter Kurven. Als Beispiel wird zuletzt das Rotationsparaboloid behandelt. Lp.

W. QUIDDE. Über Gaußsche Kreise auf Rotationsflächen. Diss. Kiel: Schmidt & Klaunig. 85 S.

Ausführliche Untersuchungen über die Gestalt und die Singularitäten der Kurven, die von einem festen Punkte einer Fläche einen konstanten geodätischen Abstand haben. Re.

S. CARRUS. Sur les familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes. C. R. **140**, 208-211.

G. DARBOUX. Note sur la communication précédente. C. R. **140**, 211-216.

Ist $f(x, y, z) =$ konst. eine Flächenschar, deren orthogonale Trajektorien ebene Kurven sind, so läßt sich, wie Carrus zeigt, die partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für die Funktion f auf folgende Form bringen: Man setze

$$2u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2, \quad v = \frac{\partial(f, u)}{\partial(x, y)} : \frac{\partial(f, u)}{\partial(x, z)},$$

so ist

$$(f, v) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Daraus folgt, daß die Flächen $v =$ konst. auf den anderen, $f =$ konst., senkrecht stehen, also die orthogonalen Trajektorien enthalten. Da die Ebene dieser Kurven ebenfalls durch Differentiation bestimmbar ist, so ergibt sich also, daß dies für die Kurven selbst auch der Fall ist.

Darboux zeigt in der angefügten Bemerkung, daß die Differentialgleichung der Flächen sich in folgender Form schreiben läßt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \left(f, \frac{\partial u}{\partial x}\right) & \left(f, \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \left(f, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man nun

$$D = \det \left| x, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right|,$$

$$l = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial(f, u)}{\partial(y, z)}, \quad m = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial(f, u)}{\partial(z, x)}, \quad n = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial(f, u)}{\partial(x, y)},$$

so ergeben sich die Differentialgleichungen

$$(f, l) = 0, \quad (f, m) = 0, \quad (f, n) = 0,$$

in denen die Carrussche speziell enthalten ist. — Darboux zeigt ferner, daß die partielle Differentialgleichung dritter Ordnung des Problems ein erstes Integral besitzt. Einige weitere Bemerkungen und Spezialisierungen beschließen die Arbeit. Re.

G. Carrus. Familles de Lamé à trajectoires orthogonales planes. Familles de surfaces à lignes de courbure planes. C. R. **140**, 562-564.

Es sei $f(x, y, z) =$ konst. eine Lamésche Flächenschar, deren orthogonale Trajektorien in Ebenen liegen, die der x-Achse parallel sind, so genügt f der Differentialgleichung

$$1 : \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = A(f) \cdot x + B(f).$$

Spezielle Fälle werden betrachtet und einige die Krümmungslinien betreffende Sätze hinzugefügt. Re.

G. Darboux. Sur les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces. C. R. **140**, 618-622.

Man betrachte eine von n Parametern abhängige Fläche $\varphi(x, y, z; a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ von der Eigenschaft, daß sie eine der orthogonalen Trajektorien einer Flächenschar $f(x, y, z) =$ konst. von möglichst hoher Ordnung berührt. Sucht man nun alle Flächenscharen $f(x, y, z) =$ konst. zu bestimmen, für welche die Fläche $\varphi = 0$ dieselbe ist für alle Punkte jeder orthogonalen Trajektorie, so erhält man eine partielle Differentialgleichung n-ter Ordnung. Es wird gezeigt, daß sie eine $(n-2)$-malige Integration gestattet. Das Verschwinden einer Funktionaldeterminante bedingt einen Ausnahmefall. Re.

C. Guichard. Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux. Paris: Gauthier-Villars. 96 S. 8°. (Scientia, Nr. 25.)

Der Verf., wohlbekannt durch seine fundamentalen Untersuchungen über Netze und Strahlensysteme, gibt in der vorliegenden Schrift eine Übersicht über die Hauptsätze der Systeme mit drei Parametern. Um einen kurzen Einblick in den Inhalt zu geben, muß es hier genügen, die Überschriften der Kapitel des Buches, mit einigen Bemerkungen, anzuzeigen: Kap. I: Punktsysteme, Geradensysteme, Ebenensysteme. Ein Punktsystem von drei Parametern in einem n-dimensionalen Raum ist ein System von n Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$, die je drei Laplaceschen Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k} + P_l(u_1, u_2, u_3) \frac{\partial x}{\partial u_i} + Q_l(u_1, u_2, u_3) \frac{\partial x}{\partial u_k} = 0$$

$$(i, k, l = 1, 2, 3).$$

Außer den Koordinaten x werden noch die Normalparameter (Richtungskosinus der Tangenten) als Variable ξ eingeführt. Ein Geradensystem wird von einer beliebigen Tangente eines Punktsystems gebildet, ein Ebenensystem von einer Ebene, die durch zwei Tangenten eines Punktsystems geht. — Kap. II: Brennpunktseigenschaften. — Kap. III:

Zusammengesetzte (assemblés) Systeme. Ein Punktsystem und ein Geradensystem, die sich entsprechen, heißen zusammengesetzt, wenn jeder Punkt auf der entsprechenden Geraden liegt; usw. — Kap. IV: Gesetz der Orthogonalität der Elemente. Wenn $\sum\xi\xi'=0$ für zwei Punktsysteme, so heißen sie orthogonal. Es sind hier merkliche Unterschiede in der Behandlung der Räume von $3n, 3n+1, 3n+2$ Dimensionen vorhanden. — Kap. V: Punktsysteme O. Wenn $\sum\xi_i\xi_k=0$ und $\sum\xi_i^2=1$ ist, heißt das Punktsystem ein O-System (orthogonal). — Kap. VI: Systeme, die sich an die O-Systeme angliedern. Projektionen von O-Systemen (ein pO-System ist die Projektion eines O-Systems aus einer $(n+p-1)$-fachen Mannigfaltigkeit auf eine n-fache), Nullsysteme usw. — Kap. VII: Anzeige verschiedener Arten von Problemen. „Das Ziel dieses Kapitels ist, zu zeigen, wie die vorangehenden Theorien erlauben, neue dreifach-orthogonale Systeme zu finden.“ — Kap. VIII: Die Systeme O, $4O$ im dreidimensionalen Raum, die auf Systeme im sechsdimensionalen abwickelbar sind. Studium eines speziellen Problems. — Inhaltsverzeichnis.

Re.

H. Poincaré. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. American M. S. Trans. 6, 237-274.

Hadamard hat bekanntlich in zwei grundlegenden Arbeiten die Gestalten der geodätischen Linien auf negativ gekrümmten Flächen untersucht. In der vorliegenden Arbeit greift Poincaré dieselbe Fragestellung für die konvex gekrümmten Flächen auf, wo aber größere Schwierigkeiten zu überwinden sind. Vorausgesetzt werden analytische, durchweg konvexe Flächen, deren Hauptkrümmungsradien gewisse Grenzwerte nicht überschreiten; es sei $ds^2=du^2+\lambda(u,v)dv^2$ das Quadrat des Linienelements, bezogen auf ein Gaußsches orthogonal-geodätisches Koordinatensystem. Nach einem Satze von Hadamard treffen sich zwei von einem Punkte ausgehende unendlich-benachbarte geodätische Linien in unendlich vielen Punkten, den Brennpunkten; die Enveloppe aller von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien ist die Brennlinie mit der Gleichung $\lambda(u,v)=0$.

Man betrachte eine durch einen Punkt O gehende geodätische Linie; dann gibt es immer auf ihr einen Punkt P der Eigenschaft, daß OP noch kürzeste Linie ist, während dies für jeden von O weiter entfernten Punkt der geodätischen Linie nicht mehr gilt. Den geometrischen Ort der Punkte P nennt der Verf. „Teilungslinie“ (ligne de partage). Er untersucht nun speziell den Verlauf der geodätischen Linien auf einer von der Kugel in gewisser Weise unendlich wenig verschiedenen Fläche und zeigt, daß es auf ihr nur eine ungerade Anzahl geschlossener geodätischer Linien geben kann.

Nachdem bewiesen ist, daß man stets von einer beliebigen konvexen analytischen Fläche mittels einer stetigen Folge ebensolcher Flächen zu einer beliebigen anderen derselben Eigenschaft übergehen kann, ergibt sich der Satz: Auf jeder analytischen konvexen Fläche gibt es stets

mindestens eine geschlossene geodätische Linie ohne Doppelpunkt; ihre Anzahl ist stets ungerade.

Betrachtet man nun die geodätischen Linien, die in unendlicher Nachbarschaft einer geschlossenen, g_0, liegen, so läßt ihre Differentialgleichung zwei periodische Lösungen zu. Sind sie imaginär, so heißt g_0 stabil, sonst instabil. Dann gilt der Satz: Auf jeder analytischen konvexen Fläche ist von den geschlossenen geodätischen Linien ohne Doppelpunkt die Zahl der stabilen von der Zahl der instabilen um 1 verschieden. Es gibt stets mindestens eine geschlossene stabile geodätische Linie ohne Doppelpunkt. Zum Schluß der Arbeit werden die einzelnen Typen der geodätischen Linien besprochen. Re.

E. Cesàro. Sulle immagini delle geodetiche nella rappresentazione piana delle superficie. Napoli Rend. (3) **11**, 312-321.

Beltrami hat, wie bekannt, gezeigt, daß die Flächen konstanten Krümmungsmaßes die einzigen sind, deren geodätische Linien als Geraden auf eine Ebene abgebildet werden können. Der Verf. untersucht nun umgekehrt die Bedingungen, die eine ebene Abbildung der geodätischen Linien erfüllen muß, damit diese einer Fläche konstanten Krümmungsmaßes angehören können. Diese Bedingungen sind natürlich gewisse Relationen zwischen den Koeffizienten der Differentialgleichung der geodätischen Linien. Setzt man die Differentialgleichung in die Form

$$du\,d^2v - dv\,d^2u = \alpha_0\,du^3 + 3\alpha_1\,du^2\,dv + 3\alpha_2\,du\,dv^2 + \alpha_3\,dv^3,$$

und bedient sich der Abkürzungen

$$e = 2(\alpha_0\,\alpha_2 - \alpha_1^2) - \frac{\partial\alpha_0}{\partial v} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial u},$$

$$f = \alpha_0\,\alpha_3 - \alpha_1\,\alpha_2 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial v} + \frac{\partial\alpha_2}{\partial u},$$

$$g = 2(\alpha_1\,\alpha_3 - \alpha_2)^2 - \frac{\partial\alpha_2}{\partial v} + \frac{\partial\alpha_3}{\partial u},$$

$$\sigma = g\,\alpha_0 - 2f\,\alpha_1 + e\,\alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial e}{\partial v},$$

$$\tau = g\,\alpha_1 - 2f\,\alpha_2 + e\,\alpha_3 + \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v},$$

so gelten allgemein die Gleichungen

$$F\frac{\partial K}{\partial u} - E\frac{\partial K}{\partial v} = \sigma, \qquad G\frac{\partial K}{\partial u} - F\frac{\partial K}{\partial v} = \tau.$$

In dem betrachteten Falle muß also $\sigma = 0$, $\tau = 0$ sein. Zu speziellen Lösungen dieser beiden Differentialgleichungen gehören spezielle Abbildungen. Mehrere Einzelfälle werden besprochen. Re.

E. KASNER. Surfaces whose geodesics may be represented in the plane by parabolas. American M. S. Trans. **6**, 141-158.

Die allgemeine Theorie derartiger Abbildungen der geodätischen Linien ist durch die Untersuchungen von Beltrami, Dini, Lie u. a. gegeben; die Diskussion des behandelten speziellen Problems, in dem die Bilder der geodätischen Linien in der Ebene Parabeln von der Form $y = \lambda x^2 + \mu x + \nu$ sein sollen, macht keine besonderen Schwierigkeiten, erfordert aber die Unterscheidung einer größeren Zahl besonderer Fälle. Als Endresultat ergeben sich außer den Flächen konstanten Krümmungsmaßes noch solche, deren Linienelement auf die Form $ds^2 = v(du^2 + dv^2)$ gebracht werden kann, nebst ihren geodätischen Bildflächen, d. h. denjenigen Flächen, die auf sie geodätisch abgebildet werden können. Das angegebene Linienelement kommt den Rotationsflächen zu:

$$x = h\sqrt{v}\cdot\cos\frac{u}{h},\quad y = h\sqrt{v}\cdot\sin\frac{u}{h},\quad z = \int\sqrt{\frac{4v^2 - h^2}{4v}}\,dv.$$

Re.

R. v. LILIENTHAL. Über äquidistante Kurven auf einer Fläche. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 375-378.

Vgl. die ausführlichere Arbeit in Math. Ann. **62**, 539-567. Re.

P. STÄCKEL. Über die geodätischen Linien einer Klasse von Flächen, deren Linienelement den Liouvilleschen Typus hat. J. für Math. **130**, 89-112.

Es werden die allgemeinen Grundlagen für die Untersuchung der Gestalt der geodätischen Linien auf den Flächen gegeben, bei denen das Quadrat des Linienelements auf die Form gebracht werden kann:

$$ds^2 = (U(u) - V(v))\,(du^2 + dv^2).$$

Re.

G. PRASAD. Über die Hilbertschen Sätze in der Theorie der Flächen konstanter Gaußscher Krümmung. Math. Ann. **61**, 203-210.

Hilbert hat folgenden Satz bewiesen: Eine pseudosphärische Fläche, die sich stetig und mit stetiger Änderung ihrer Tangentialebene in der Umgebung jeder Stelle überallhin ausdehnt, kann nicht überall analytisch sein. Der Verf. gibt eine Verallgemeinerung dieses Satzes und entsprechende Sätze für die Flächen konstanter positiver Krümmung. Re.

S. Bernstein. Sur la déformation des surfaces. Math. Ann. **60**, 434-436.

Beweis des Satzes: Eine Fläche, die sich auf eine analytische Fläche positiven Krümmungsmaßes abwickeln läßt, ist notwendigerweise analytisch.
Re.

S. S. Büschgens. Über die Transformation der Flächen konstanter Krümmung. Moskauer Math. Samml. **25**, 478-489. (Russisch.)

Der Verf. kehrt die von Bäcklund (Math. Ann. 1880 u. 1882) behandelte Frage um und fragt, wie die Beziehungen $F_i(x, y, z, p, q; x', y', z', p', q') = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ beschaffen sein müssen, damit z als Funktion von x und y, z' als Funktion von x' und y' gegebene Differentialgleichungen befriedigen. Von Spezialfällen aus gelangt der Verf. zu den Resultaten: Zwischen allen Transformationen der Form $F_1 \equiv x' - x = 0$, $F_2 \equiv y' - y = 0$, $F_3(x', y', z', p', q', x, y, z, p, q) = 0$, $F_4(x', y', z', p', q', x, y, z, p, q) = 0$ führen nur die Transformationen von Bianchi und Bäcklund die Gleichung $S' = \sin z'$ über in die Gleichung $S = \sin z$. Sind die beiden ersten Gleichungen $F_1 \equiv z - z' - p(x - x') - q(y - y') = 0$, $F_2 \equiv z - z' - p'(x - x') - q'(y - y') = 0$, so ist die Transformation von Bäcklund die einzige, welche die Gleichung $rt - s^2 = k(1 + p^2 + q^2)^2$ in sich überführt. Si.

G. Fubini. Sulle coppie di varietà geodeticamente applicabili. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{14}_1$, 678-683; $\mathbf{14}_2$, 315-322.

Untersuchungen über das von Levi-Civita auf mehrfache Mannigfaltigkeiten erweiterte Dinische Problem der geodätischen Abbildung. Besonders wird folgende Fragestellung behandelt: Es sei das Linienelement einer Mannigfaltigkeit gegeben, die eine geodätische Abbildung zuläßt; es sollen alle Mannigfaltigkeiten aufgefunden werden, die auf die gegebene geodätisch abgebildet werden können. Im speziellen werden gewisse geodätisch abbildbare Räume von drei Dimensionen untersucht.
Re.

L. Raffy. Sur la recherche des surfaces isothermiques. C. R. **140**, 1672-1674.

Zur Untersuchung der isothermen Flächen geht der Verf. aus von der Bonnetschen Differentialgleichung der aufeinander abwickelbaren Flächen:

$$\frac{rt - s^2}{4pq} \cdot \varphi - \frac{t}{2q}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{r}{2p}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

in der wie üblich p, q, r, s, t die partiellen Ableitungen bedeuten, und zwar der aus den kartesischen Koordinaten der Fläche gebildeten Funktion

$\xi = x + iy$; das Quadrat des Linienelements ist dabei $4\varphi^2(\alpha, \beta) \cdot d\alpha\, d\beta$. Damit nun die Fläche isotherm sei, ist die Bedingung

$$2\, Bp \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - 2Aq \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + (At - Br)\, \varphi = 0$$

zu erfüllen, worin $A = A(\alpha)$, $B = B(\beta)$. Die Elimination von φ aus beiden Gleichungen ist ohne Schwierigkeiten möglich und führt zu einer, allerdings sehr komplizierten, partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung für ξ, deren Integration alle isothermen Flächen liefern würde. Die Charakteristiken sind die Krümmungslinien und die Nullinien. Re.

L. Raffy. Recherches sur les surfaces isothermiques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 397-439.

Diese Arbeit beschäftigt sich in ausführlicher Untersuchung mit gewissen speziellen, von Bonnet und von Thybaut diskutierten isothermen Flächen. Den Ausgangspunkt bilden die Darbouxschen Sätze über die Enveloppenflächen einer Kugelschar: Wenn die beiden Schalen einer Enveloppe von Kugeln sich mittels ihrer Krümmungslinien aufeinander konform abbilden lassen, so sind sie isotherm. Eine Fläche ist ebenfalls isotherm, wenn ihre harmonischen Kugeln eine zweite Fläche berühren, deren Krümmungslinien denen der ersten entsprechen. (Harmonische Kugel ist eine Berührungskugel der Fläche, deren Mittelpunkt zum Berührungspunkt harmonisch konjugiert in bezug auf die beiden Hauptkrümmungszentren ist.)

Der Verf. untersucht zunächst das Problem, alle isothermen Flächen zu finden, deren harmonische Kugeln eine andere isotherme Fläche berühren. Er gelangt zu den Thybautschen Flächen, deren harmonische Kugeln eine (nicht isotrope) Ebene berühren, und ihren inversen. Sind R und R_1 die Hauptkrümmungsradien und

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right), \quad \Gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right), \quad K = \frac{1}{RR_1},$$

so genügen diese Flächen der Relation

$$\Omega^2 - 2\, K + \Delta_2 \log \Gamma = 0,$$

unter Δ_2 den zweiten Differentialparameter verstanden.

Für die weiteren Untersuchungen werden die Bonnetschen Resultate über die Biegung der Flächen benutzt (vgl. das vorige Referat). Die Bedingung der Isothermie läßt sich in die Form setzen:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right) = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right).$$

Die von Bonnet untersuchten Isothermflächen sind, wie gezeigt wird, identisch mit denjenigen, deren harmonische Evolute (Ort der Mittelpunkte der harmonischen Kugeln) eine isotrope Ebene ist.

Ein bekannter Satz von Christoffel lautet: Wenn zwei Flächen aufeinander durch parallele Normalen konform abgebildet werden können,

so sind sie isotherm. Raffy zeigt, daß bei dieser Abbildung jeder Bonnetschen Fläche wieder eine Bonnetsche, jeder Thybautschen wieder eine Thybautsche Fläche entsprechen muß. Von diesen beiden Flächenklassen gilt auch folgender Satz: Es sei ds ihr Linienelement, so ist sowohl Γds wie auch Ωds das Linienelement einer Kugel.

Endlich wird die Frage nach allen Isothermflächen aufgeworfen, für die Γds das Linienelement einer Kugel wird; es ergeben sich: die Minimalflächen und ihre Inversen, die Thybautschen Flächen und ihre Inversen und die Bonnetschen Flächen. Eine Fortsetzung der Untersuchungen steht in Aussicht (inzwischen erschienen). Re.

L. Bianchi. Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche. Annali di Mat. (3) 11, 93-157.

Ebenso wie die Arbeit von Raffy (Referat vorstehend) knüpft die vorliegende an den Satz von Darboux an: Die beiden Schalen einer Enveloppe von Kugeln sind isotherm, wenn sie sich mittels ihrer Krümmungslinien aufeinander konform abbilden lassen. Die analytische Behandlung dieses Satzes zeigt, daß sich durch ihn aus einer isothermen Fläche S eine dreifach unendliche Schar neuer isothermer Flächen ableiten läßt, wobei noch eine willkürliche Konstante (m) zur Verfügung steht. Bianchi nennt diese Flächen S_1: aus S durch eine Darbouxsche Transformation D_m entstanden. Betrachtet man nun die konforme Abbildung zweier isothermen Flächen durch parallele Normalen (Christoffelsche Transformation C), so besteht folgender Satz: die Christoffelsche Transformation verwandelt jedes Paar von Isothermflächen, die auseinander durch eine Darbouxsche Transformation hervorgegangen sind, in ein Paar derselben Eigenschaft. Außerdem besteht die symbolische Relation $D_m C = C D_m$. Sei $\bar{S}$ eine durch eine C-Transformation aus S hervorgegangene Fläche. Man betrachte auf den vier Flächen $S, S_1, \bar{S}, \bar{S}_1$ vier entsprechende Punkte $P, P_1, \bar{P}, \bar{P}_1$, so gelten die Sätze:

$$1)\quad PP_1 \,||\, \bar{P}\bar{P}_1, \qquad 2)\quad PP_1 \times \bar{P}\bar{P}_1 = \frac{2}{m}.$$

Sehr wichtig ist die Existenz eines Vertauschbarkeitssatzes: Wenn von einer Isothermfläche S mittels zweier Transformationen D_{m_1} und D_{m_2} zwei neue Isothermflächen S_1 und S_2 abgeleitet werden, so existiert eine vierte Fläche S', die vollständig bestimmt und in endlicher Weise konstruierbar ist, und die ihrerseits mit denselben Flächen S_1, S_2 durch zwei Transformationen D_{m_2}, D_{m_1} mit vertauschten Konstanten, m_1 und m_2, verbunden ist. Ist $m_1 = m_2$, so ist S mit S' identisch, sonst nicht.

Jedes Flächenpaar (S, S_1), das durch eine Darbouxsche Transformation verbunden ist, wird durch eine beliebige andere Darbouxsche Transformation in ein Paar derselben Art verwandelt.

Die ausführliche analytische Untersuchung zeigt, daß der Vertauschbarkeitssatz auch imaginäre Darbouxsche Transformationen zu

benutzen erlaubt, um aus einer reellen Isothermfläche neue reelle abzuleiten; ferner, daß alle aus einer gegebenen Fläche durch eine Darbouxsche Transformation abgeleiteten Flächen durch bloße Differentiationen bestimmbar sind.

Sind (S, S_1, S_2, S') vier durch den Vertauschbarkeitssatz verbundene Isothermflächen, so werden sie sowohl durch eine Christoffelsche Transformation, wie auch durch eine Darbouxsche in vier derselben Art verwandelt.

Die abgeleiteten Sätze werden auf die speziellen Isothermflächen angewendet, die Darboux mit der Deformation der Flächen zweiten Grades in Verbindung gebracht hat. Sie können analytisch folgendermaßen definiert werden: es seien $ds = \lambda\sqrt{du^2 + dv^2}$ ihr Linienelement, r_1, r_2 ihre Hauptkrümmungen,

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad L = \lambda^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \quad M = \frac{1}{2} LH,$$

so ist

$$\lambda^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\right) + M^2 + 2AM + 2BH + 2CL + D = 0,$$

wo A, B, C, D Konstanten bedeuten. Eine zu diesen Konstanten gehörige Fläche sei mit (A, B, C, D) bezeichnet. Eine Christoffelsche Transformation ändert sie in eine andere (A, C, B, D) mit vertauschten Konstanten B, C. Unter den ∞^3 Flächen, die aus einer speziellen der Klasse (A, B, C, D) durch eine Darbouxsche Transformation D_m abgeleitet werden können, existieren ∞^2 spezielle derselben Klasse (A, B, C, D). Die Anwendungen des Vertauschbarkeitssatzes liefern eine Reihe weiterer Eigenschaften dieser speziellen Flächenklasse. Für die Flächen konstanter mittlerer Krümmung, die ja zu den isothermen gehören, gilt folgender Satz: Man bilde aus einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung mittels zweier Darbouxschen Transformationen zwei neue Flächen derselben konstanten mittleren Krümmung, so besitzt auch die nach dem Vertauschbarkeitssatz verknüpfte vierte Fläche eine konstante mittlere Krümmung. Derselbe Satz gilt natürlich auch für Minimalflächen. Auf die weiteren Spezialisierungen kann hier nicht eingegangen werden.

Re.

L. Bianchi. Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme. Annali di Mat. (3) **12**, 19-54.

Auch diese Arbeit schließt sich an die Darbouxschen Untersuchungen über die Enveloppen von Kugeln an. Man vergleiche das vorige Referat. Der Verf. zeigt, daß aus dem von Darboux aufgestellten System von Differentialgleichungen außer der Transformation D_m noch eine neue, T_m, folgt, die ebenfalls von einer willkürlichen Konstante m abhängt, und die er die „assoziierte" nennt. Für diese Transformation gilt in Verbindung mit den andern, C und D_m, eine Reihe von Sätzen, von

denen folgende hier angeführt seien: Ein Darbouxsches Flächenpaar (S, S_1) wird durch T_m in ein Christoffelsches $(\Sigma, \bar{\Sigma})$ verwandelt, dagegen ein Christoffelsches in ein Darbouxsches, das durch die Transformation D_{-m} verbunden ist. Daher bestehen die symbolischen Gleichungen

$$C = T_m^{-1}\, D_m\, T_m,\; D_m = T_m\, C\, T_m^{-1}.$$

Auf die zahlreichen Spezialuntersuchungen über die Anwendung der Transformation auf besondere isotherme Flächen kann hier nicht eingegangen werden. Die Resultate fallen fast alle in dasselbe Kapitel der Theorie wie die im vorigen Referat angegebenen. Re.

L. Bianchi. Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili. Torino Atti **40**, 714-731.

Eine unausdehnbare Fläche kann bekanntlich so verbogen werden, daß eine auf ihr gelegene Kurve starr bleibt, wofern diese nur eine Asymptotenlinie der Fläche ist. Diese Art der Verbiegung ist noch auf unendlich viele Weisen möglich. Die Beweise dieses Theorems und einiger sich daran anschließender beruhen, wie man weiß, auf der Existenz von Lösungen gewisser partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, einer Existenz, die man nur unter bestimmten Annahmen als bewiesen ansehen darf. Die hier vorhandene Lücke in der Theorie der Biegungen auszufüllen unternimmt der Verf. in der vorliegenden Arbeit; er bedient sich dabei der Picardschen Approximationsmethode, wie er es schon früher beim Beweise für die Existenz der Integrale der partiellen Differentialgleichung $\Delta z = \sin z$ getan hat. Auf diese Weise gibt er unter anderem einen strengen Beweis folgender Sätze:

Es seien C, C' zwei Kurven auf einer beliebigen Fläche negativer Krümmung, die von einem beliebigen regulären Punkt ausgehen und sich dort nicht berühren; dann gibt es unter gewissen Stetigkeitsbedingungen immer eine Biegung der Fläche von der Art, daß die beiden Kurven C, C' in zwei (in verschiedenen Scharen gelegene) Asymptotenlinien übergehen.

Wenn die Fläche und die Kurven analytisch sind, gibt es nur eine derartige (analytische) Biegung. — Daraus folgt: In der Umgebung einer starren Asymptotenlinie C einer Fläche kann man diese so verbiegen, daß eine beliebige andere Kurve, die C schneidet, Asymptotenkurve (der anderen Schar) wird. Im analytischen Fall ist die Biegung eindeutig. — Interessante Sätze ergeben sich bei weiterer Spezialisierung.

Aus dem analytischen Zusammenhang, den Servant (C. R. **137**, 112; F. d. M. **34**, 665, 1904) zwischen dem Tschebyschefschen Bekleidungsproblem und der Theorie der Asymptotenlinien bemerkt hat, leitet sich der folgende Satz her: Man ziehe auf einer Fläche zwei beliebige Kurven, die sich in einem Punkte schneiden; dann läßt sich stets auf der Fläche ein Tschebyschefsches Netz von der Art angeben, daß zwei seiner Fäden mit den willkürlich angenommenen Kurven zusammenfallen. Re.

L. Bianchi. Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni. Mem. della Soc. It. delle scienze (detta dei XL) (3) **13**, 65 S.

Die in einer früheren Note (Sulle equazioni di Moutard con gruppi di soluzioni quadratiche. Rom. Acc. L. Rend. (5) **13**$_2$, 283-294; F. d. M. **35**, 355, 1904) angekündigten, die Moutardschen Differentialgleichungen betreffenden Resultate werden hier entwickelt und auf die im Titel angegebene geometrische Frage angewandt. Diese Frage wurde von Schur (Über die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume. Math. Ann. **28**, 343-353; F. d. M. **19**, 839, 1887) auf die andere zurückgeführt, diejenigen Oberflächen des dreidimensionalen elliptischen Raumes anzugeben, welche derart deformierbar sind, daß zwei konjugierte Liniensysteme derselben in ebensolche übergehen. Die Lösung dieses Problems hängt, wie der Verf. nachweist, von der Bestimmung derjenigen Moutardschen Gleichungen:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=M\theta$$

ab, welche je vier durch die Identität $\theta_0^2+\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=U+V$ verbundene Integrale $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ besitzen, wobei U eine Funktion von u, V eine Funktion von v bezeichnet. Vi.

L. Bianchi. Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde. Mem. della Soc. It. delle scienze (detta dei XL) (3) **14**, 72 S.

Die Theorie der Deformation der Drehungsflächen zweiter Ordnung wurde bisher (vgl. die früheren Schriften des Verf.) nur für die Fälle entwickelt, in welchen die Drehungsachse die Fokalachse des erzeugenden Kegelschnittes ist (zweischaliges Hyperboloid, verlängertes Ellipsoid, Paraboloid). Bianchi dehnt die Theorie auf die übrigen Fälle (einschaliges Hyperboloid, verkürztes Ellipsoid, imaginäres Ellipsoid) aus. Das Hauptergebnis seiner Untersuchungen bilden die folgenden zwei Sätze, wo die letztgenannten Flächen als „Q-Flächen" bezeichnet werden mögen:

A. Jede auf eine Q-Fläche abwickelbare Fläche gehört als erste Brennschale ∞^2 reellen W-Kongruenzen an, deren zweite Brennschale auf dieselbe Q-Fläche abwickelbar ist.

B. Sind $B_{\tau'}$, $B_{\tau''}$ zwei Bäcklundsche Transformationen mit verschiedenen Konstanten τ', τ'', durch welche aus einer auf eine Q-Fläche abwickelbaren Fläche S_0 zwei Flächen S_0', S_0'' von derselben Beschaffenheit abgeleitet werden, so gibt es eine vierte, völlig bestimmte Fläche S_0''' von gleicher Art, aus welcher S_0', S_0'' durch die Transformation $B_{\tau''}$, bzw. $B_{\tau'}$ hervorgehen („Vertauschbarkeitssatz").

Der Verf. bemerkt, daß diese Sätze für alle Drehungsflächen zweiter Ordnung gültig sind, sobald man auf die Realität der W-Kongruenzen

verzichtet. Er hofft auch, nächstens beweisen zu können, daß dieselben für alle Flächen zweiter Ordnung gelten. Vi.

L. Bianchi. Sulle superficie deformate per flessione dell' iperboloide rotondo ad una falda. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 541-545.

Es wird zunächst der folgende, für die Theorie der Biegungen des einschaligen Rotationshyperboloids fundamentale Satz bewiesen: Jede auf das einschalige Rotationshyperboloid abwickelbare Fläche bildet die eine Brennfläche eines W-Strahlensystems, dessen zweite Brennfläche auf dasselbe Hyperboloid abwickelbar ist. Ein W-Strahlensystem ist bekanntlich ein solches, auf dessen zwei Brennflächen die Asymptotenkurven einander entsprechen. Aus dem genannten Satze ergibt sich dann weiter eine Transformation der in Rede stehenden Flächen, die der Bäcklundschen für die Flächen konstanten Krümmungsmaßes vollkommen entspricht. Endlich kann auch ein „Vertauschbarkeitssatz" ausgesprochen werden, wie er ebenfalls aus der Theorie der Flächen konstanter Krümmung bekannt ist. Re.

L. Bianchi. Sulla deformazione dei paraboloidi. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_2$, 359-366.

Die im vorhergehenden Referat angegebenen Sätze gelten auch für die Biegungsflächen des elliptischen oder hyperbolischen Paraboloids. Re.

G. Darboux. Sur les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution. Darb. Bull. (2) **29**, 109-119.

In seinen Leçons sur la théorie générale des surfaces hat Darboux bekanntlich alle Flächen in expliziter Form angegeben, die auf das Rotationsparaboloid $x^2+y^2=4aiz$ abwickelbar sind. Die wichtigen Formeln für die kartesischen Koordinaten dieser Flächen ergeben sich als Folgerungen der allgemeinen Sätze, die Weingarten über die geodätischen Ellipsen und Hyperbeln auf einer Kugel bewiesen hat.

In der vorliegenden Arbeit teilt der Verf. einen neuen, sich auch der Weingartenschen Resultate bedienenden Beweis mit, der die genannten Formeln kürzer und eleganter liefert.

Ohne ein genaueres Eingehen auf die Theorie dieser Flächen ist es nicht möglich, weitere Einzelheiten des Gedankenganges der Arbeit hier wiederzugeben. Zu ihrem Verständnis sei daher nur auf die Nummern 766 bis 769 der Darbouxschen Leçons verwiesen. Re.

G. Darboux. Des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution. C. R. **140**, 697-702.

Nachdem Darboux die allgemeinste Lösung des Problems angegeben hat, alle Biegungen des Rotationsparaboloids zu finden, drängt

sich den Mathematikern eine Anzahl spezieller Fragen auf, ähnlich wie es in der Theorie der Minimalflächen der Fall war, nachdem Weierstraß seine bekannten allgemeinen Formeln gegeben hatte. Dahin gehört z. B. die Frage nach allen algebraischen Flächen der erwähnten Beschaffenheit; dieses Problem ist noch keineswegs allgemein gelöst. In der vorliegenden Arbeit teilt Darboux zwei sehr einfache solcher Flächen mit; ihre kartesischen Koordinaten, als Funktionen zweier Parameter, lauten:

$$x = 4a\frac{u^3}{3},\ y = -2av\left(u^2 + \frac{v^2}{3} + 1 + a^2\right),$$
$$z = \frac{1}{2}(u^2+v^2)^2 + (1+a^2)\ (v^2-u^2) + \frac{1}{2}(1-a^4);$$
$$x = -2au\left(v^2 + \frac{u^2}{3} + a^2 - 1\right),\ y = 4a\frac{v^3}{3},$$
$$z = -\frac{1}{2}(u^2+v^2)^2 + (a^2-1)(v^2-u^2) - \frac{1}{2}(1-a^4).$$

Sie sind abwickelbar auf das Paraboloid

$$x^2 + y^2 = 8a^2z.$$

Beide Flächen sind Unikursalflächen von der Klasse 10. Weitere Betrachtungen über das allgemeine Problem schließen sich an. Re.

E. Estanave. Construction de surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution définies par M. G. Darboux. Darb. Bull. (2) **29**, 225-246.

Der Verf. hat zwei Modelle der beiden Flächen konstruiert, die Darboux (Referat vorstehend) entdeckt hat, und die zu den Biegungsflächen des Rotationsparaboloids $x^2 + y^2 = 8a^2z$ gehören.

Die vorliegende Veröffentlichung beschäftigt sich mit den zur Herstellung dieser Modelle erforderlich gewesenen Rechnungen. Eine Reihe von Schnittfiguren sowie zwei photographische Abbildungen sind beigefügt. Die Arbeit gewährt einen interessanten Einblick in die Art der Herstellung solcher schon recht verwickelten Gebilde. Die Modelle sind im Laboratorium für höhere Geometrie an der Sorbonne auf Veranlassung von Darboux hergestellt. Re.

A. Tagliaferri. Sulle superficie W applicabili sopra superficie di rotazione. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 684-687.

Beweis des Satzes: Die einzigen Weingartenschen Flächen, die sich auf Rotationsflächen abwickeln lassen, sind die Schraubenflächen und die Bonnetschen Flächen, die eine stetige Biegung mit Invarianz der Hauptkrümmungen zulassen. — Der Satz ist nicht neu. Re.

O. Chieffi. Sulle deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda e su alcune superficie che se ne deducono. Batt. G. **43** [(2) **12**], 9-28.

Die Untersuchungen gruppieren sich um folgenden Satz: Auf jeder Fläche, die sich in der Art verbiegen läßt, daß ihre geodätischen Linien Geraden werden, bilden die Tangenten an diese längs einer beliebigen Asymptotenlinie eine zweite Fläche, die auf die erste abwickelbar ist. Bei dieser Abwicklung entsprechen die Asymptotenlinien sich selbst. Die Anwendung auf das Rotationshyperboloid liefert eine Anzahl Sätze, die sich auf seine Biegungsflächen beziehen. Re.

C. Guichard. Sur la déformation des quadriques. C. R. **141**, 932-936.

Bemerkungen über den Zusammenhang der Biegungen einer Fläche zweiter Ordnung mit gewissen dreifach-unendlichen Systemen. Re.

P. Calapso. Alcune superficie di Guichard e le relative trasformazioni. Annali di Mat. (3) **11**, 201-251.

Guichardsche Fläche (N) nennt der Verf. eine Fläche von folgender Eigenschaft: Es existiert zu N eine zweite Fläche N' mit derselben sphärischen Abbildung ihrer Krümmungslinien, deren Hauptkrümmungsradien r_1', r_2' mit denen von $N(r_1, r_2)$ durch die Relation $r_1 r_2' + r_2 r_1' = \text{const.}$ verknüpft sind. Guichard hat gezeigt, daß zwischen den N-Flächen und den Isothermflächen ein gewisser Zusammenhang besteht.

Die ausführliche Untersuchung dieser Flächen, ihrer Transformationen, spezieller Fälle usw. erfordert einen großen Formelapparat, dessen Beherrschung nicht einfach ist. Re.

G. Darboux. Sur la sphère de rayon nul et sur la théorie du déplacement d'une figure invariable. Darb. Bull. (2) **29**, 34-55.

Stellt man den isotropen Kegel: $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ mit Hülfe zweier Parameter u, v dar:

$$X = u^2 - v^2,\ \ Y = i(u^2 + v^2),\ \ Z = 2uv,$$

so erscheint der Abstand zweier Punkte u, v, u_1, v_1 des Kegels in der einfachen Form $2(uv_1 - vu_1)$, woraus sich mit Leichtigkeit ergibt, daß die Kanten a, a', b, b', c, c' eines Tetraeders, deren umschriebene Kugel den Halbmesser Null besitzt, in der Beziehung stehen: $aa' \pm bb' \pm cc' = 0$. Der Verf. erinnert an einen älteren, minder einfachen Beweis, den er für diesen Satz gegeben hat, betrachtet dann das Bogenelement des Kegels und bemerkt, daß jede isotrope Developpable auf den Kegel abwickelbar ist — mit alleiniger Ausnahme der isotropen Ebene — und daß die allgemeinste Abwicklung sogar von einer willkürlichen Funktion abhängt. Er deutet dann u und v geometrisch: sie sind proportional

den Abständen, die der Punkt u, v von zwei festen Punkten des Kegels hat; er zeigt, wie jede Drehung um den Koordinatenumfang eine lineare homogene Transformation der Größen u, v mit der Determinante 1 bestimmt, und wie auf diese Weise umgekehrt die Drehungen sehr einfach und elegant analytisch dargestellt werden können; er geht auf die Zusammensetzung von Drehungen, auf den Zusammenhang mit den Quaternionen ein und betrachtet endlich die infinitesimalen Drehungen. Der Zweck der ganzen Arbeit ist, die zentrale Stellung, die der isotrope Kegel zweiten Grades (die Kugel vom Halbmesser Null) in allen diesen Theorien einnimmt, und auf die wohl F. Klein zuerst hingewiesen hat, möglichst deutlich hervortreten zu lassen. El.

A. Greul. Über Scharen von ∞^{2n} Kurven im R_{n+1}. Erster Teil: Der Fall $n = 2$. Diss. Greifswald. B. G. Teubner, Dresden. 32 S.

Der Verf. denkt sich eine Schar von ∞^4 Kurven des R_3 durch zwei Differentialgleichungen:

(1) $$y' = \alpha(x, y, z, y', z'),\ z' = \beta(x, y, z, y', z')$$

definiert und fragt, wann durch jede Kurve der Schar mindestens eine Fläche geht, auf der ∞^2 der Schar angehörige Kurven liegen. Sind:

(2) $$y = Y(x, c_1, \cdots, c_4),\ z = Z(x, c_1, \cdots, c_4)$$

die endlichen Gleichungen der Kurvenschar, so wird die Bedingung dafür, daß zwei unendlich benachbarte Kurven der Schar einander schneiden, durch eine Mongesche Gleichung:

(3) $$\Omega(c_1, \cdots c_4,\ dc_1, \cdots, dc_4) = 0$$

ausgedrückt, die in dem R_3 der dc_k eine geradlinige Fläche darstellt. Soll durch jede Kurve c der Schar eine Fläche von der verlangten Beschaffenheit gehen, so müssen bei beliebigen $c_1, \cdots, c_4$ die Erzeugenden der Fläche (3) sämtlich von einer Geraden geschnitten werden, und die Gleichungen:

(4) $$\sum_1^4{}_\nu\ a_{k\nu}(c_1, \ldots, c_4)dc_\nu = 0\ \ (k = 1, 2),$$

die diese Gerade darstellen, müssen ein unbeschränkt integrables System bilden. Diese notwendigen Bedingungen sind zugleich hinreichend, denn durch Integration von (4) erhält man dann zwei Gleichungen: $U_k(c_1, \ldots, c_4) = C_k$ $(k = 1, 2)$, die bei beliebigen C_k ∞^2 auf einer Fläche liegende Kurven der Schar definieren. Der Verf. zeigt nun, daß man, ohne (2) zu kennen, aus (1) allein die Gleichungen (4) jeder Geraden aufstellen kann, die alle Erzeugenden von (3) trifft, wenn man nur an Stelle der c_k die Anfangswerte von y, z, y', z' für $x = x_0$ einführt. Er stellt außerdem fest, unter welchen Bedingungen das Pfaffsche System (4), das eine solche Gerade darstellt, unbeschränkt integrabel wird. Unter den verschiedenen möglichen Fällen ist am interessantesten der, wo durch jede Kurve der Schar möglichst viele, nämlich ∞^1 Flächen von der verlangten Beschaffenheit gehen; denn dann ist die Kurvenschar (1) durch

Punkttransformation in die Schar der Geraden überführbar. Es tritt das ein, wenn die Bedingungen (75), S. 23 und (99), S. 30 erfüllt sind. Der Verf. hat diesen Fall auch für eine Schar von ∞^{2n} Kurven im R_{n+1} erledigt und wird die betreffenden Untersuchungen später veröffentlichen. El.

A. Demoulin. Sur les surfaces de Voss de la géométrie non-euclidienne. C. R. **140**, 1226-1229.

Im nichteuklidischen Raume sollen alle Paare von aufeinander abwickelbaren Flächen bestimmt werden, wo den Haupttangentenkurven der einen auf der andern ein Netz von konjugierten Kurven entspricht. Es stellt sich heraus, daß das sich selbst entsprechende Netz von konjugierten Kurven aus geodätischen Linien besteht, daß also die gesuchten Flächen Vosssche Flächen sind. Für die eine kann man eine beliebige Vosssche Fläche setzen, die andere ist zweideutig bestimmt. Es werden dann noch die Differentialgleichungen für die Vossschen Flächen im elliptischen Raume aufgestellt, und es wird auf einen Unterschied hingewiesen, der bei diesen Flächen gegenüber dem euklidischen Raume auftritt. El.

A. Demoulin. Principes de géométrie anallagmatique et de géométrie réglée intrinsèques. C. R. **140**, 1526-1529.

Anallagmatisch nennt der Verf. die Geometrie der konformen Gruppe. Er betrachtet ein festes und ein bewegliches System von je 5 paarweise orthogonalen Kugeln. Hängt die Beweglichkeit des zweiten von einem Parameter u ab, so kann man seine Lage in Bezug auf das erste durch 25 Funktionen von u charakterisieren, die durch 5 partikulare Lösungssysteme eines Systems von 5 linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen geliefert werden; darin kommen 10 Größen vor, die man die Geschwindigkeiten des bewegten Systems nennen kann. Ebenso kann man die relative Bewegung studieren. Analoge Entwicklungen sind im Raume der geraden Linien möglich. El.

A. Demoulin. Sur la théorie des surfaces et des enveloppes de sphères en géométrie anallagmatique. C. R. **141**, 302-304.

Der Verf. betrachtet eine Fläche, die in jedem ihrer Punkte von einer Kugel berührt wird, und untersucht das Umhüllungsgebilde dieser Kugelschar mit Hülfe der Methoden, die er in seiner Note über die anallagmatische Geometrie (Referat vorstehend) angedeutet hat. Er betrachtet insbesondere den Fall, wo die Krümmungslinien beider Mäntel des Umhüllungsgebildes einander entsprechen, und gelangt unter anderem zu sehr einfachen Beziehungen zwischen den Hauptkrümmungskugeln und den geodätischen Kugeln entsprechender Punkte beider Mäntel. Als die

geodätischen Kugeln eines Flächenpunktes bezeichnet er dabei die durch den Punkt gehenden Kugeln, deren Mittelpunkte in den Zentren der geodätischen Krümmung der hindurchgehenden Krümmungslinien liegen. El.

A. DEMOULIN. Sur les enveloppes de sphères dont les deux nappes se correspondent avec conservation des angles. C. R. **141**, 459-462.

Die Ergebnisse der vorstehend besprochenen Note werden auf das schon 1899 von Darboux gelöste Problem (F. d. M. **30**, 554) angewandt: Die allgemeinste Enveloppe von Kugeln zu bestimmen, deren beide Mäntel einander mit Erhaltung der Winkel entsprechen. Wie nämlich bereits Darboux gezeigt hat, entsprechen dann auch die Krümmungslinien beider Mäntel einander. El.

A. DEMOULIN. Sur deux systèmes cycliques particuliers. C. R. **141**, 496-499.

Es handelt sich um zwei zyklische Systeme, zu deren Untersuchung der Verf. durch die Betrachtung solcher Kugelscharen veranlaßt worden ist, wo auf den beiden Mänteln der Enveloppe die Krümmungslinien einander entsprechen (vgl. oben C. R. **141**, 302). In dem einen Falle kommt der Verf. auf ein Integrationsproblem, das auf ein früher von ihm erledigtes Problem der nichteuklidischen Geometrie zurückführbar ist. El.

A. DEMOULIN. Sur les surfaces isothermiques et sur une classe d'enveloppes de sphères. C. R. **141**, 1210-1212.

Der Verf. verallgemeinert ein von Christoffel herrührendes Problem folgendermaßen: Es ist ein Flächenpaar zu bestimmen, bei dem die Krümmungslinien dasselbe sphärische Bild haben, und zwar derart, daß auf beiden Flächen die isogonalen Trajektorien der Krümmungslinien einander entsprechen, und fragt dann nach allen Kugelscharen, auf deren Enveloppe die beiden Mäntel so auf einander bezogen sind, daß die Krümmungslinien und ihre isogonalen Trajektorien einander entsprechen. Die früher von ihm entwickelten Methoden (vgl. oben C. R. **141**, 302) werden auf diese Aufgabe angewandt, von der ein früher von Darboux gelöstes Problem (vgl. oben C. R. **141**, 459) ein besonderer Fall ist. Der Verf. erwähnt, daß sich der eine der beiden Mäntel der Enveloppe unter Umständen auf eine Kugel reduzieren kann. El.

G. PIRONDINI. Nota geometrica sulle superficie di Monge. Modena Mem. (3) **4**, XXI-XXXIII.

P. Serret (Th. nouv. géom. et méc. des lignes à double courbure. Paris 1860) hatte behauptet, daß bei den Mongeschen Flächen (surfaces

moulures) in jedem Punkt einer geodätischen Linie das Produkt aus dem Krümmungsradius derjenigen Krümmungslinie, welche zugleich geodätische Linie ist, und dem Sinus des Neigungswinkels der geodätischen Linie gegen die andere Krümmungslinie längs der ganzen geodätischen Linie konstant sei. Der Verf. zeigt, daß es hierzu nötig wäre, daß der Krümmungsradius der zweiten Krümmungslinie längs der ganzen geodätischen Linie konstant wäre, was nicht zutrifft. Der Verf. teilt noch einige Sätze über Mongesche Flächen mit kreiszylindrischer oder kreiskonischer Leitfläche mit. Wö.

V. Strazzeri. Le rullette storte e l'applicabilità delle rigate. Batt. G. **43**, 74-92.

Fortsetzung der früheren Arbeit, deren Sätze der Verf. zunächst auf ebene Kurven anwendet, wobei er zu Fußpunktkurven gelangt. Er betrachtet ferner das Rollen von Loxodromen elliptisch gekrümmter F_2 auf Geraden. Wenn ferner 2 Regelflächen zwar unter sich, aber nicht auf ein- und dieselbe F_2 abwickelbar sind, so legen sich bei der Abwicklung nach Bonnet die Erzeugenden der einen auf die der andern. Ist eine Kurve Geodätische und Striktionslinie einer Regelfläche, so trifft sie die Erzeugenden unter konstantem Winkel, und der reziproke Wert des Verteilungsparameters längs einer Erzeugenden ist eine lineare Kombination der Krümmung und Torsion der Striktionslinie im Schnittpunkt mit der Erzeugenden. Der Verf. betrachtet noch Schrauben- und Konoidflächen als Spezialfälle von Regelflächen. Wö.

J. Andrade. Détermination des mouvements μ de solides aux trajectoires sphériques. Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb., 366-372.

Sieht man von den permanenten Translationen und Rotationen ab, so ist jede Bewegung eines festen Körpers mit sphärischen Bahnen eine solche mit fester Schraubenachse, bestimmt durch die sphärische Bahn eines Körperpunktes, welche der Schnitt eines Kreiszylinders und einer Kugel ist. Wö.

K. Zorawski. Notiz über Translationsflächen. Leipz. Ber. **57**, 233-245.

Der Verf. gelangt zu den Translationsflächen durch folgende Problemstellung: Man suche eine Fläche von der Art, daß sich ihre kartesischen Koordinaten als Funktionen zweier Parameter darstellen lassen, deren zugehörige Koordinatenlinien zwei Scharen von kongruenten und gleichgestellten Kurven bilden. Die Aufgabe, alle Translationsflächen zu bestimmen, ist dadurch auf ein spezielles Transformationsproblem zurückgeführt. Es ist fraglich, ob diese Problemstellung besonders glücklich

zu nennen ist; denn die rechnerische Durchführung zeigt, nach Ansicht des Ref., daß sich bei dieser Fragestellung weder einfache, noch analytisch oder geometrisch besonders interessante Formeln ergeben. Re.

Burke Smith. On the deformation of surfaces of translation. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 187-191.

L. P. Eisenhart. On the deformation of surfaces of translation. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 486-494.

Der Satz, auf den die Entwicklungen abzielen, wird am Schlusse der Note ausgesprochen: „Die einzigen nicht abwickelbaren Translationsflächen, welche so deformiert werden können, daß ihre Erzeugenden während der ganzen Deformation Erzeugende bleiben, sind die Minimalflächen und diejenigen Translationsflächen, deren beide Systeme von Erzeugenden eben sind und in zu einander senkrechten Ebenen liegen."

Gemäß der Note von Eisenhart ist dieser Satz nicht richtig, wenn nicht darunter verstanden wird, daß die Deformation kontinuierlich ist, und nicht bloß, daß die vorhergehenden Arten von Translationsflächen die einzigen abwickelbaren auf Translationsflächen mit den Erzeugenden in Korrespondenz sind. Die näheren analytischen Entwicklungen von Eisenhart, die manche Beiträge zu dem Gegenstand liefern, eignen sich nicht zum Berichte. Lp.

C. Ruggeri. Le superficie modanate e le deformazioni infinitesime della elicoide. Batt. G. **43** [(2) **12**], 241-252.

Die im Titel genannten Gesimsflächen werden bekanntlich durch Bewegung einer ebenen Kurve („Profil") erzeugt, deren Ebene sich, ohne zu gleiten, an einer abwickelbaren Fläche (speziell Zylinder, „Richtungszylinder") tangential abwälzt. Hier werden die Beziehungen der Gesimsflächen zu den Ribaucourschen Kongruenzen und zu den unendlich kleinen Verbiegungen der Meusnierschen Schraubenfläche (Minimalregelhelikoid) untersucht; z. B. wird gezeigt: Die Ribaucourschen Kongruenzen, welche als erzeugende Fläche ein Minimalregelhelikoid besitzen, werden sämtlich und allein gebildet von den Normalen einer Gesimsfläche mit Richtungszylinder. — Jede Gesimsfläche, die als Profil eine Parabel hat, deren Achse den Erzeugenden des Richtungszylinders und der Achse des Helikoids parallel ist, entspricht einer unendlich kleinen Verbiegung, welche die Erzeugenden des Helikoids geradlinig läßt, und viele andere Sätze. Z.

M. de Montcheuil. Détermination des surfaces de révolution admettant une surface de révolution pour surface moyenne. S. M. F. Bull. **33**, 17-18.

Aufstellung der das Problem lösenden Quadraturen und Bestimmung der geometrischen Bedeutung der beiden auftretenden Integrationskonstanten. Sk.

Z. P. Bouman. Surfaces de révolution à courbure moyenne constante. Arch. Musée Teyler (2) **10**, 1-17.

Bestimmung der Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung, welche durch zwei gleiche, in parallelen Ebenen liegende koaxiale Kreise hindurchgehen. Die experimentellen Resultate Terquems werden bestätigt. Diskussion der möglichen Gestaltungen der Meridiankurve. Kl.

Weitere Literatur.

L. Bianchi. Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde. Roma: 74 S. 4⁰. (Vergl. Referat auf S. 677.)

Issaly. La cinématique dans les rapports, absolus avec les pseudo-surfaces, et conditionnels avec les surfaces. Étude servant d'application aux „Principes fondamentaux de la théorie des pseudo-surfaces" du même auteur et de son mémoire „La géométrie non-euclidienne et l'insuffisance de ses principes". Paris: Hermann. 59 S. 8⁰.

I. J. Nicolescu. Über die abwickelbaren Oberflächen. Gazeta mat. Bukarest **10**, 80-84. (Rumänisch.)

B. Smith. Conditions for the deformation of surfaces referred to a conjugate system of lines. Proc. Indiana Ac. of Sc. 1904, 241-243.

C. A. Waldo. A family of warped surfaces. Proc. Indiana Ac. of Sc. 1904, 245-253.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumkurven.

J. de Vries. Eenige Bemerkende getallen van een algebraisch oppervlak. Amst. Ak. Versl. **13**, 753-757.

Der Ort der Punkte, in denen eine F_n eine vierpunktige Tangente besitzt, ist eine Raumkurve $n(11n-24)$-ten Grades; die vierpunktigen Tangenten schneiden die Fläche noch in einer Kurve $2n(n-4)(3n^2+n-12)$-ter Ordnung und bilden selbst eine Regelfläche $2n(n-3)\times(3n-2)$-ter Ordnung. Die Zahl der fünfpunktigen Tangenten ist $5n(n-4)(7n-12)$. Die Berührungspunkte der nochmals berührenden Wendetangenten bilden eine Kurve $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$-ter Ordnung, die Oskulationspunkte derselben eine Kurve $n(n-4)(3n^2+5n-24)$-ter Ordnung; die genannten Wendetangenten bilden eine Regelfläche $n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$-ter Ordnung. Die Berührungspunkte der dreifachen Tangenten der Fläche bilden eine Kurve von der Ordnung $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+5n+12)$; die dreifachen Tangenten selbst eine Regelfläche von der Ordnung $\frac{1}{2}n(n-3)(n-4)\times(n-5)(n^2+3n-2)$. Wö.

W. A. Versluys. Over den rang der snijkromme van twee algebraische oppervlakken. Amst. Ak. Versl. **14**, 38-43.

Sind n_1 und n_2 die Ordnungen, m_1 und m_2 die Klassen zweier Flächen, die sich δ-mal einfach und χ-mal stationär berühren, ζ_1, ζ_2 die Ordnungen ihrer Doppel- und ν_1, ν_2 diejenigen ihrer Rückkehrkurven, endlich, wenn die Flächen abwickelbar sind, ω_1 und ω_2 die Zahl der Doppelerzeugenden v_1 und v_2 diejenige der stationären Erzeugenden, so ist der Rang der Schnittkurve: $r = m_1 n_2 + m_2 n_1 - 2\delta - 3\chi = n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2(n_1 [\zeta_2 + \omega_2] + n_2 [\zeta_1 + \omega_1] + \delta) - 3(n_1 [\nu_1 + v_2] + n_2 [\nu_2 + v_1] + \chi)$.

Nennt man abwickelbare Fokalfläche die der Fläche und dem unendlich fernen Kugelkreis umschriebene Abwickelbare, und berührt die Fläche diesen Kugelkreis δ-mal und oskuliert ihn χ-mal, so ist der Rang der Fokalfläche $r = 2m + 2n - 2\delta - 3\chi$.

Derselbe Satz gilt für eine ebene oder räumliche Kurve, die auf dem Kugelkreis δ gewöhnliche Punkte und χ Spitzen hat. Der Rang der Schnittpunkte zweier Flächen ist gleich dem Rang ihrer gemeinschaftlichen umschriebenen Abwickelbaren. Wö.

W. A. Versluys. Over het aantal gemeenschappellijke raaklijnen van een kromme en een oppervlak. Amst. Ak. Versl. **14**, 166-175.

Wenn die Ebene einer Kurve r_1-ter Klasse C_1 eine Fläche m_2-ter Klasse O_2 in δ Punkten gewöhnlich und in χ Punkten stationär berührt, so haben C_1 und O_2 $r_1(m_2 - 2\delta - 3\chi)$ gemeinsame Tangenten. Wenn eine abwickelbare Fläche eine Fläche $\begin{Bmatrix}\text{gewöhnlich}\\ \text{stationär}\end{Bmatrix}$ berührt, so berühren in diesem Punkt $\begin{Bmatrix}2\\3\end{Bmatrix}$ konsekutive Erzeugende der Abwickelbaren die Fläche. Berühren sie sich in $P \begin{Bmatrix}\text{gewöhnlich}\\ \text{stationär}\end{Bmatrix}$ derart, daß die Erzeugende l durch P keine Haupttangente der Fläche in P ist, so zählt l für $\begin{Bmatrix}2\\3\end{Bmatrix}$ gemeinsame Tangenten der Fläche und der Rückkehrkurve der Abwickelbaren; ist P ein parabolischer Punkt, so zählt l für 4 oder 2 gemeinsame Tangenten, je nachdem die Haupttangente der Fläche in P mit l zusammenfällt oder nicht. Ist P ein hyperbolischer Punkt, und fällt l mit einer der Haupttangenten der Fläche in P zusammen, so zählt l für 4 oder 2 gemeinsame Tangenten, je nachdem P mit dem Berührungspunkt von l mit der Rückkehrkurve der Abwickelbaren zusammenfällt oder nicht. Berührt diese Rückkehrkurve die Fläche so, daß ihre Schmiegungsebene Tangentialebene derselben ist, so zählt l für 4 oder 3 gemeinschaftliche Tangenten, je nachdem l Haupttangente der Fläche in P ist oder nicht. Wö.

W. A. Versluys. De Plücker'sche equivalenten van een cyclisch punt eener ruimtekromme. Amst. Ak. Versl. **14**, 482-484.

Eine höhere Raumkurvensingularität von der Ordnung n, dem Rang r und der Klasse m, wo r zu m und n, n zu $r+m$ und m zu $r+n$ relativ prim sind, ist äquivalent mit $n-1$ Spitzen, $\frac{1}{2}(n-1)(n+r-3)$ Doppelpunkten, $m-1$ stationären Ebenen, $\frac{1}{2}(m-1)(m+r-3)$ Doppelebenen, $r-1$ stationären Tangenten, $\frac{1}{2}(r-1)(r+m-3)$ Doppelerzeugenden der abwickelbaren Fläche und $\frac{1}{2}(r-1)(r+n-3)$ Doppeltangenten. Durch den singulären Punkt gehen $\frac{1}{2}n(n+2r+m-4)$ Zweige der Doppelkurve der zugehörigen Abwickelbaren, diese berühren die Raumkurve und haben mit der Tangente $\frac{1}{2}(n+r)(n+2r+m-4)$ Punkte gemein. Sie besitzen dieselbe Schmiegungsebene wie die Raumkurve und haben mit ihr $\frac{1}{2}(n+r+m)(n+2r+m-4)$ Punkte gemein. Der Verf. bestimmt noch den Einfluß der Singularität auf die Zahl der Spitzen der Doppelkurve der Abwickelbaren. Wö.

J. de Vries. Over bundels van algebraische oppervlakken. Amst. Ak. Versl. **14**, 50-54.

Ein Büschel von Flächen n-ter Ordnung F besitze die Basiskurve σ. Dann bilden die Haupttangenten von F in den Punkten von σ eine Kongruenz von der Ordnung $n^2(2n-3)$ und der Klasse $3n^2$, während der Komplex aller Haupttangenten von F vom Grade $3n(n-2)$ ist. Die vierpunktigen Tangenten, die ihre Berührungspunkte auf σ haben, bilden eine Regelfläche $2n^2(6n-11)$-ter Ordnung, mit σ als elffacher Kurve, während die Berührungspunkte aller vierpunktigen Tangenten von F eine Fläche $2n(11n-12)$-ter Ordnung erfüllen und diese Tangenten selbst eine Kongruenz $2(n-3)(2n^2-3n-2)$-ter Ordnung und $\frac{3}{2}(n-3)\times(n^3+n^2-8n+4)$-ter Klasse erzeugen. Die Kongruenz der zwei-dreipunktigen Tangenten der F ist von der Ordnung $(n-3)(n-4)(5n^2-6n+4)$ und von der Klasse $\frac{1}{2}(n-4)(n-3)^2(10n^4+35n^3-21n^2-80n+20)$; ihre Oskulationspunkte liegen auf einer Fläche von der Ordnung $6(n-1)(n-4)(n+4)$, ihre gewöhnlichen Berührungspunkte auf einer Fläche von der Ordnung $2(n-4)(n^3+2n^2+10n-12)$. Die parabolischen Punkte der Büschelflächen erfüllen eine Fläche $8(n-1)$-ter Ordnung. Wö.

G. Aguglia. Sulla superficie luogo di un punto in cui le superficie di tre fasci toccano una medesima retta. Palermo Rend. **20**, 304-330.

Die Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkt P an die Flächen eines Büschels F von Flächen n-ter Ordnung liegen auf einer Fläche $(2n-1)$-ter Ordnung durch P. Den Punkten einer Ebene π entsprechen so die Flächen eines Netzes. Sind 3 Büschel von Flächen der Ordnungen n, n', n'' gegeben, so kann man nach dem Ort der Punkte

fragen, welche den entsprechenden Flächen der 3 entstehenden Netze gemein sind, und erhält die Ebene π und eine Fläche $2(n+n'+n''-2)$-ter Ordnung, welche zugleich der Ort eines Punktes ist, in welchem die hindurchgehenden Flächen der 3 Büschel eine gemeinsame Tangente haben. Der Verf. untersucht die besonderen Fälle, welche durch das Auftreten mehrfacher Basispunkte in den Büscheln entstehen, und das Verhalten der genannten Fläche in einem solchen Punkt. Wö.

LANCELOT. Détermination d'une surface algébrique. Nouv. Ann. (4) **5**, 357-363.

Beweis der bekannten (in der Arbeit aber nicht als solche bezeichneten) Sätze: 1. Jede Fläche m-ter Ordnung, welche durch $\frac{1}{6}(m^3+6m^2+11m-12)$ Punkte hindurchgeht, geht auch noch durch $\frac{1}{6}(5m^3-6m^2-11m+12)$ andere Punkte. 2. Liegen von den m^3 Schnittpunkten dreier algebraischen Flächen m-ter Ordnung m^2p auf einer Fläche p-ter Ordnung ($p<m$), so liegen die $m^2(m-p)$ anderen Schnittpunkte auf einer Fläche $(m-p)$-ter Ordnung (Poncelet). Zu einem dritten Satze vergleiche man z. B. Salmon-Fiedlers Raumgeometrie Bd. 2, (2. Aufl.) No. 400, S. 511. Z.

LANCELOT. Détermination d'une courbe algébrique gauche. Nouv. Ann. (4) **5**, 399-410.

Der geringste Grad der Fläche, welche durch eine Raumkurve m-ter Ordnung geht, ist die größte in $\sqrt{2(3m-1)}-2$ enthaltene ganze Zahl. Eine unikursale ebene Kurve $(m-1)$-ter Ordnung hängt von $3m-4$, eine unikursale Raumkurve m-ter Ordnung von $4m$ Parametern ab.
Wö.

LANCELOT. Points multiples des surfaces algébriques. Nouv. Ann. (4) **5**, 53-66.

Fortsetzung der Untersuchungen des vorigen Jahrganges (F. d. M. **35**, 635). Eingehende Diskussion der Doppelpunkte, der Tangentialkegel in ihnen, der p-fachen Punkte. Einfache Beispiele. Sk.

B. LEVI. Punti doppi uniplanari delle superficie algebriche. Torino Atti **40**, 139-167.

Es sei A ein vielfacher Punkt einer Oberfläche F und γ ein von A ausgehender, auf F gezeichneter Kurvenzweig. Die Oberfläche F hat in den Folgepunkten von γ Punkte von angebbarer Vielfachheit; der Inbegriff solcher Vielfachheiten heißt das Gefüge (composizione) der Oberfläche längs des Zweiges. Die Frage nach diesem Gefüge ist hier auf erschöpfende Weise im Anschluß an frühere Arbeiten des Verf. (F. d. M.

28, 557, 1897, und **29**, 559, 1898) für die uniplanaren Knotenpunkte einer Fläche behandelt. Es wird bewiesen, daß die Zweige singulärer Gefüge in zwei verschiedene Arten zerfallen: Zweige, welche mehrere vielfache Punkte von F enthalten, gehörig zu einer Umgebung derselben Ordnung wie A, und Zweige, welche eine mehr oder weniger hohe Berührung mit der Doppelkurve von F haben oder mit der Berührungskurve zwischen F und dem Berührungskegel, den man aus einem nicht zur Berührungsebene an F im Punkte A gehörigen Punkte legen kann. Es wird eine Formel abgeleitet, welche die Gestaltung der Oberfläche längs eines vorgegebenen Zweiges bestimmt, sobald das Gefüge der erwähnten Berührungskurve und der Doppelkurve bekannt ist. Die Kurven des scheinbaren Umrisses von F in bezug auf die Punkte des Raumes außerhalb der Tangentialebene in A haben alle in A dieselben Tangenten, oder vielmehr haben alle ein gewisses System von Folgepunkten hinter A gemeinsam. Das Gefüge der Kurve des scheinbaren Umrisses und der Doppelkurve ist vollständig willkürlich. Die Untersuchung ist auf synthetischem Wege geführt, der nach Ansicht des Verf. sich für den Zweck besser eignet; doch ist in einem der letzten Paragraphen auch die allgemeine Gleichung der uniplanaren Knotenpunkte entwickelt. In der letzten Nummer wird anhangsweise die Gestalt der uniplanaren Knotenpunkte erörtert. Lp.

E. Geck. Über uniplanare Knotenpunkte. (Schluß.) Math. naturw. Mitt. (2) **7**, 1-8.

Der Verf. dehnt die Betrachtungen des ersten Teils seiner Arbeit (F. d. M. **35**, 635, 1904) auf den Fall aus, daß die durch den uniplanaren Knotenpunkt gehenden Mäntel eines der Fläche umschriebenen Tangentialkegels mehrpunktige Berührungen mit einander eingehen.

Wö.

P. G. Pfeiffer. Über algebraische Flächen. Kiew Univ. Nr. 12, 1-11. (Russisch.)

Zwei Aufsätze, deren erster über die singulären Punkte der algebraischen Flächen handelt und eine anschauliche Darstellung der bei den doppelten und dreifachen Punkten auftretenden Erscheinungen bietet. Im zweiten Aufsatz bespricht der Verf. die analytischen Bedingungen des Auftretens der doppelten und dreifachen (singulären) Kurven der algebraischen Flächen. Si.

L. Pilgrim. Binomische und trinomische Näherungsflächen algebraischer Flächen. Math. naturw. Mitt. (2) **7**, 19-46.

Die binomischen und trinomischen Näherungsflächen, welche das Verhalten der Fläche im Ursprung und im Unendlichen anzeigen und durch Vernachlässigung aller Glieder der Gleichung gegenüber von zweien oder

dreien derselben erhalten werden, leitet der Verf. auf rechnerischem Wege her und vergleicht seine Methode mit dem Verfahren des Referenten, das in einer Übertragung des Newtonschen Parallelogramms auf den Raum besteht. Die Typen (12) und Formen (40) der binomischen Flächen werden bildlich dargestellt und einer besondern Nomenklatur unterworfen. Die 12 Typen sind: Flächen $x^\alpha y^\beta - z^\gamma = 0$. I. $\beta = 0$ $\alpha = \gamma$: Ebenen; II. ein Exponent 0, die andern verschieden: Zylinder; III. α, β, γ ungerade: Sättel; IV. α oder β ungerade, γ ungerade: Wendeflächen; V. α und β gerade, γ ungerade: Kreuzungen; VI. α und β ungerade, γ gerade: Spitzen; VII. α oder β ungerade, γ gerade: Rücken ($\alpha \leqq \gamma$) und Schneiden ($\alpha > \gamma$); VIII. α, β, γ gerade: Achsenpaar. Flächen $x^\alpha y^\beta z^\gamma - 1 = 0$. IX. α, β, γ ungerade: Inverssättel; X. α oder β gerade, γ ungerade: Inverswendeflächen; XI. α und β gerade, γ ungerade: Inverskreuzungen; XII. α, β, γ gerade: imaginäre binomische Fläche. Wö.

C. F. Geiser. Die konjugierten Kernflächen des Pentaeders. Zürich, Naturf. Ges. **50**, 306-320.

„Zu einer algebraischen Fläche n-ten Grades Φ gehören zwei konjugierte Kernflächen, von denen die eine S (die Steineriana) vom Grade $4(n-2)^3$ als Ort der Punkte P auftritt, deren erste Polare nach Φ einen Doppelpunkt $\mathfrak{P}$ besitzt, während die andere $\mathfrak{H}$ (die Hessiana) vom Grade $4(n-2)$ der Ort dieser Punkte $\mathfrak{P}$ ist; die beiden Kernflächen sind, abgesehen von singulären Stellen, durch die sich entsprechenden Punkte P und $\mathfrak{P}$ eindeutig und reziprok auf einander bezogen. Aus der Gleichung von Φ läßt sich die Gleichung von $\mathfrak{H}$ sofort herstellen; hingegen ist die Gleichung von S das Resultat eines Eliminationsprozesses, der sich nur in den einfachsten Fällen durchführen läßt . . . . . Schließt man den Fall aus, wo Φ eine Kegelfläche oder Spezialfall einer solchen ist, so ist $\mathfrak{H}$ immer eine vollkommen bestimmte Fläche $4(n-2)$-ten Grades, die sich allerdings unter bestimmten Umständen in Teile niedrigerer Ordnung auflöst; hingegen kann es vorkommen, daß die gegebene Definition von S nicht mehr ausreicht und durch eine andere ersetzt werden muß. Hat Φ einen dreifachen Punkt Π, so erscheint derselbe in den ersten Polaren jedes beliebigen Punktes im Raum als Doppelpunkt, und $\mathfrak{H}$ wird zum Ort derjenigen Punkte $\mathfrak{P}$, welche als zweite Doppelpunkte in diesen Polaren möglich sind. Als Fläche S aber, der nach der ursprünglichen Definition jeder beliebige Punkt des Raumes angehören müßte, kann man jetzt den Ort der Punkte P auffassen, deren erste Polare neben Π noch einen zweiten Doppelpunkt $\mathfrak{P}$ besitzt. In gleicher Weise sind die ursprünglichen Festsetzungen zu modifizieren, wenn in Φ irgendwelche μ-fachen Punkte oder μ-fachen Kurven ($\mu > 2$) enthalten sind. Die Bezeichnungen: konjugierte Kernflächen, Hessiana, Steineriana, entsprechende Punkte können auch in allen derartigen Ausnahmefällen beibehalten werden". Diese Verhältnisse werden in der vorliegenden Arbeit zunächst an der Steinerschen Römerfläche kurz veranschaulicht.

„Ein anderes Beispiel, das in mannigfachen Beziehungen zu dem Sylvesterschen Pentaeder der Fläche dritten Grades, insbesondere der Clebschschen Diagonalfläche steht,“ wird im Hauptteil der Arbeit ausführlich untersucht. „Fünf Ebenen $E_k (k = 1, 2, 3, 4, 5)$, die von einander unabhängig sind, bilden ein Pentaeder, das als Spezialfall einer Fläche 5. Grades Φ_5 aufgefaßt werden kann. Die zehn Kanten $G_{\alpha\beta} = (E_\alpha, E_\beta)$ sind Doppelgeraden, die zehn Ecken $E_{\lambda\mu\nu} = (E_\lambda, E_\mu, E_\nu)$ sind dreifache Punkte von Φ_5. Die ersten Polaren φ_4 nach Φ_5 sind also für beliebige Punkte des Raumes Flächen 4. Grades, welche die Gerade $G_{\alpha\beta}$ einfach enthalten und die zehn Punkte $E_{\lambda\mu\nu}$ zu Doppelpunkten besitzen“, usw. Die Hessesche Fläche $\mathfrak{H}_{12}$ besteht aus den doppelt gedachten Pentaederebenen und einer Fläche 2. Grades $\mathfrak{H}_2$, der „eigentlichen Hessiana des Pentaeders“. Die „eigentliche Steineriana des Pentaeders“ ist eine Fläche 8. Grades (S_8). Diese hat mit den Pentaederkanten die vierfach zu zählenden 20 Punkte C der $\mathfrak{H}_2$ gemein; sie hat ferner 20 dreifache Punkte A, die zugleich dreifache Punkte in der aus 10 Kegelschnitten bestehenden Doppelkurve der Fläche sind. Ferner werden noch 15 Punkte B betrachtet: „in jeder Pentaederebene drei, die Diagonalpunkte des in ihr von den vier anderen ausgeschnittenen Vierseits“ . . . Durch 55 Punkte ist im allgemeinen eine Fläche 5. Grades unzweideutig bestimmt. Setzt man voraus, daß die Gruppe $20A + 15B + 20C$ zur Bestimmung der F_5 die notwendigen und hinreichenden Bedingungen liefern, so gilt der Satz: „Durch die Doppelkurve der Steineriana S_8 geht eine unzweideutig bestimmte Fläche 5. Grades; sie hat die 20 Punkte A zu Doppelpunkten“. S_8 ist ferner von der 12. Klasse. „Die eigentliche Wendekurve und die Berührungskurve der eigentlichen Doppeltangentialebenen der Fläche S_8 berühren sich in ihren gemeinsamen Punkten.“ Z.

F. Enriques. Sur les surfaces algébriques de genre zéro. C. R. **140**, 564-566.

Bezeichnet man das geometrische Geschlecht einer Fläche mit p_g, das numerische mit p_n, so gelten die Sätze: Eine Fläche von den Geschlechtern $p_g = 0$, $p_n < -1$ entspricht immer einem Zylinder (dessen ebener Schnitt vom Geschlecht $-p_n$ ist). Eine Fläche von den Geschlechtern $p_g = 0$, $p_n = -1$ läßt eine kontinuierliche Gruppe birationaler Transformationen in sich zu, wobei die Gruppe von einem Parameter elliptisch abhängt; die (elliptischen) Trajektorien der Gruppe bilden auf der Fläche einen rationalen Büschel. Die „elliptischen Flächen“ haben im allgemeinen nicht das Geschlecht $p_g = 0$, aber es genügt dazu, daß die Trajektorien der entsprechenden Gruppe einen rationalen Büschel bilden. — Ist eine Fläche m-ter Ordnung $f(x, y, z) = 0$ vom Geschlecht $p_g = 0$ gegeben, so betrachte man diejenigen Flächen $r(m-4)$-ter Ordnung $\varphi_{r(m-4)}$ [wo $r > 1$], welche sich längs der Doppelkurve von f so verhalten, als wäre diese für φ eine r-fache; bezeichnet man die

Anzahl der linear unabhängigen $\varphi_{r(m-4)}$ mit P_r, so hat man den schönen Satz: Eine Fläche $f(x,y,z)=0$ läßt sich birational in einen Zylinder $F(X,Y)=0$ transformieren, wenn $P_4=P_6=0$ ist. Z.

F. Enriques. Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse. Palermo Rend. **20**, 61-72.

Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß eine nicht rationale Fläche eine kontinuierliche Gruppe birationaler Transformationen in sich selbst gestattet, ist, daß ihr numerisches Geschlecht negativ ist. Ist dasselbe kleiner als -1, so haben die Flächen eine rationale Gruppe und können auf Regelflächen zurückgeführt werden. Ist das numerische Geschlecht gleich -1, so ist das geometrische Geschlecht entweder größer als 1, dann sind die Flächen elliptisch mit einem rationalen Büschel elliptischer Kurven und einem elliptischen Büschel von Kurven höheren Geschlechts; oder ist das geometrische Geschlecht gleich 1, so sind die Flächen elliptisch mit einer einfachen unendlichen Transformationsgruppe oder hyperelliptisch mit einer vertauschbaren, doppelt unendlichen Gruppe, je nachdem das „Viergeschlecht" größer oder gleich 1 ist.

Wö.

F. Enriques. Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero. Palermo Rend. **20**, 1-33.

Um nicht zu weitläufig zu sein, setzen wir voraus, daß der Leser die Begriffe und Benennungen kennt, welche der Verf. und Castelnuovo in die Theorie der algebraischen Flächen eingeführt haben, sowie auch die vornehmlichsten Resultate, welche dadurch erreicht worden sind.

Die in der vorliegenden Abhandlung gelöste Aufgabe besteht in der Bestimmung aller Flächen, für welche das geometrische Geschlecht $p_g=0$, das arithmetische $p_a<0$ ist. Ist $p_a<-1$, so kann man die in Rede stehenden Flächen auf Regelflächen abbilden; wenn aber $p_a=-1$ ist, so besitzen sie eine elliptische Gruppe birationaler Transformationen in sich, deren Trajektorien einen rationalen Büschel elliptischer Kurven bilden. Nun besitzt die Familie der Flächen („elliptische" Flächen), die eine elliptische Gruppe birationaler Transformationen in sich hat, eine Parameterdarstellung, welche man Painlevé verdankt (Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, Paris 1897, S. 282—286); für alle ist $p_g=0$; aber diejenigen, welche die Gleichung $p_a=-1$ befriedigen, bilden, außer den elliptischen Regelflächen, eine Menge, die der Verf. vollständig bestimmt und analytisch darstellt. Berechnet man für solche Flächen die r-Geschlechter P_r, so wird für die Regelflächen P_1 $(=p_g)=P_2=\ldots=0$ gefunden, während für die anderen elliptischen Flächen $P_4\geqq 1$, $P_6\geqq 1$. Infolgedessen sind $p_a<0$, $P_4=P_6=0$

die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Fläche auf einer Regelfläche (von Geschlecht $-p_a$), oder $P_4 = 0$, $P_6 = 0$ kennzeichnen die Flächen, welche man auf einer Regelfläche abbilden kann. Wegen anderer Resultate und der Ableitungsmethode müssen wir auf die inhaltreiche Originalarbeit verweisen. La.

FR. SEVERI. Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche. Annali di Mat. (3) **12**, 55-79.

Es handelt sich um zwei Theoreme über Kurvenscharen auf irregulären algebraischen Flächen ($p_g - p_n \neq 0$), welche der Verf. als Analoga des Abelschen Theorems auf Kurven ($p \neq 0$) auffaßt und in den C. R. 1905 ausführlich angezeigt hat; es ist darüber (S. 488ff. dieses Bandes) im Zusammenhang mit Arbeiten von Picard, Castelnuovo und einer anderen Arbeit von Severi eingehend berichtet. T.

FR. SEVERI. Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica. Torino Atti **40**, 766-776.

Der erste, der eine Übertragung des Riemann-Rochschen Satzes auf algebraische Flächen vorgenommen hat, ist Noether (C. R. 1886); er beschränkt sich auf reguläre Flächen ($p_g = p_a$). Der Verf., der eine lange Reihe von Arbeiten der Theorie der irregulären Flächen ($p_g > p_a$) widmet, dehnt hier auch dieses Theorem auf die irregulären Flächen aus, indem er den Satz beweist:

Auf einer Fläche von den Geschlechtern p_a, p_g ($p_g \geqq p_a$) gehört jede Kurve, ob reduzibel oder irreduzibel, vom Geschlecht und virtuellen Grade π und n, vom Grade der Spezialität i ($\geqq 0$), wobei

$$p_a - n + \pi + 1 - i \geqq 0,$$

immer 1. zu einem linearen System der Dimension $r \geqq p_a + n - \pi + 1 - i$, 2. zu einem kontinuierlichen System der Dimension $r \geqq p_g + n - \pi + 1 - i$, welches, für $p_g > p_a$, aus $\infty^{p_g - p_a}$ nicht äquivalenten linearen Systemen zusammengesetzt ist.

Die zweite Aussage des Satzes, die über die Analogie zum Riemann-Rochschen Satz hinausgeht, stammt von Enriques und ist vom Verf. nur im Beweise vereinfacht. T.

F. SEVERI. Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 859-865.

Wer die Arbeiten der italienischen Schule über die allgemeine Theorie der algebraischen Flächen verfolgt hat, weiß (vgl. F. d. M. **27**, 519, 1896), daß man aus zwei beliebigen linearen Kurvensystemen einer

solchen Fläche ein drittes ableiten kann, das als die „Summe“ der ersteren zu betrachten ist. Daraus kann man den Begriff „Differenz“ zweier Kurvensysteme ableiten. Als Differenz zweier Flächenkurven A, B betrachtet nun der Verf. ein beliebiges Element des linearen Kurvensystems, welches die Differenz zweier solcher Systeme ist, zu denen A und B gehören. Eine solche Kurve $A - B$ existiert nicht immer; und eben die Ermittelung der entsprechenden Existenzbedingung ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes. Um denselben zu erreichen, führt der Verf. einige neue Begriffe ein („virtuelle“ Kurven, Grad, Geschlecht, usw.), deren Erklärung uns zu weit führen würde; es sei nur bemerkt, daß mittels solcher Begriffe es möglich wird, die gesuchte hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung unter einer einfachen Form hinzuschreiben.

La.

F. Severi. Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare. Palermo Rend. **20**, 93-96.

Mit Hülfe des Prinzips, daß eine algebraische irreduzible Raumkurve, die sich stetig auf einer algebraischen Fläche ändert, nicht zerfallen kann, ohne neue Doppelpunkte zu gewinnen, beweist der Verf., daß jedes vollständige algebraische System die vollständige charakteristische Reihe besitzt.

Wö.

M. Pannelli. Sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve tracciati sopra una superficie algebrica. Palermo Rend. **20**, 34-48.

Vermittelst einer projektivischen Verwandtschaft zwischen den Kurven C einer dreifach unendlichen linearen Kurvenschar $|C|$ auf einer Fläche F und den Punkten des Raumes transformiert sich F birational in eine Fläche F', deren ebene Schnitte C' den Kurven C entsprechen. Die Jacobischen Kurven C_j aller Netze (C) in $|C|$ bilden ein lineares, dreifach unendliches System $|C_j|$. Die Jacobische Kurve eines Netzes der C_j besteht aus dem Ort der Spitzen der Kurven $|C|$ und einer Kurve C. Von der Fläche F'' werden sodann die Ordnung, die Klasse, der Rang, die Klasse der Abwickelbaren ihrer stationären Tangentialebenen, ihre vielfachen Linien und Punkte und ihre parabolische Kurve bestimmt und alsdann F'' polarreziprok auf eine Fläche F_1 abgebildet.

Wö.

M. Pannelli. Sulle reti di superficie algebriche. Palermo Rend. **20**, 160-172.

In diesem Aufsatze werden einige (projektive) anzahlgeometrische Aufgaben über ein beliebiges Netz algebraischer Flächen gelöst. Der Kunstgriff, dessen der Verf. sich bedient, ist eine eindeutige Abbildung der Flächen des Netzes auf die Punkte einer Ebene.

La.

M. de Franchis. Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve. Palermo Rend. **20**, 49-54.

Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß eine algebraische Fläche einen irrationalen Kurvenbüschel besitzt, d. h. ein solches unendliches, nicht lineares System algebraischer Kurven, von welchen durch einen beliebigen Flächenpunkt nur eine Systemkurve geht, ist die Existenz von wenigstens 2 Picardschen Integralen zweiter, oder in einem Spezialfall erster Gattung, die algebraisch unabhängig sind, und von denen das eine eine Funktion des andern ist. Dabei heißen die Integrale algebraisch unabhängig, wenn keine lineare Kombination derselben die Summe einer rationalen Funktion und des Logarithmus einer rationalen Funktion ist. Die Integrale können auch von dritter Gattung sein. Es zeigt sich, daß die Flächen, deren arithmetisches Geschlecht kleiner als -1 ist, irrationale Kurvenbüschel enthalten. Wö.

G. Castelnuovo. Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo. Palermo Rend. **20**, 55-60.

Zu den Resultaten von M. de Franchis (Referat vorstehend) ist auch der Verf. gekommen. Er zeigt weiter: ist p_g das geometrische, p_a das arithmetische Geschlecht einer Fläche, und ist $p_g \geqq 2(p_a + 2)$, so enthält die Fläche einen irrationalen Kurvenbüschel, dessen Geschlecht größer oder gleich 2 ist. Jede Fläche, für welche $p_a < -1$, kann in eine Regelfläche vom Geschlecht $-p_a$ birational transformiert werden. Alle Flächen von negativem arithmetischem Geschlecht gehören zu 3 Typen: Flächen mit $p_g = 0$, welche einen irrationalen Büschel rationaler Kurven vom Geschlecht $-p_a$ enthalten und sich birational in Regelflächen transformieren lassen; Flächen, die einen Büschel elliptischer Kurven enthalten ($p_a = -1$; $p_g \geqq 0$); einfache oder mehrfache hyperelliptische Flächen ($p_a = -1$; $p_g = 1$). Wö.

A. Dominioni. Su certe superficie di contatto e su una definizione sintetica delle superficie polari. Batt. G. [(2) **12**] **43**, 350-364.

Vorgelegt ist ein lineares System $\{F\}_n^k$ von Flächen der Ordnung n und der Dimension k: es handelt sich um den auf das System bezüglichen und einem Punkte P entsprechenden Ort φ_p^k, d. i. um den Ort der Punkte, für die die Verbindungsgeraden mit P $(k+1)$-punktige Berührungen mit Flächen des gegebenen Systems eingehen.

Zu dem Behuf stellt der Verf. eine synthetische Definition der Polarflächen einer gegebenen Fläche auf, die von der Lehre der harmonischen Mittelpunkte keinen Gebrauch macht und insofern als eine neue Behandlung der Geometrie der Polaren ein selbständiges Interesse beansprucht. Er knüpft hierbei an Untersuchungen von Guccia (F. d. M. **33**, 604, 1902) an, der in der Ebene den Begriff der Polarkurven auf

den Ort Φ_n^k stützt, der sich entsprechend auf ein lineares ∞^k-System von Kurven und einen Punkt P der Ebene bezieht; Guccia betrachtet auch bereits den obigen Raumort φ_p^k für den besonderen Fall eines Büschels $(k = 1)$.

Zunächst ist für den Ort φ_p^k die Ordnung μ_k und die Multiplizität ξ_{k-1} im Punkt P zu bestimmen, was nach zwei verschiedenen Methoden ausgeführt wird. Es werde die erstere Methode ausführlicher skizziert. Sei (I) $\{F\}_n^k \equiv \{F_0, F_1, \ldots, F_{k-2}, F_{k-1}, F_k\}$ das vorgelegte lineare ∞^k-System von allgemeinen Flächen der Ordnung n, durch die $k+1$ linear unabhängigen Flächen $F_0, F_1, \ldots, F_{k-1}, F_k$ repräsentiert, P ein beliebiger Raumpunkt, φ_p^k der in Rede stehende Ort der Punkte, für die die Verbindungsgerade mit P wenigstens mit einer Fläche des Systems eine Berührung von der Ordnung k hat. Es wird dann ein Rekursionsverfahren eingeschlagen, indem das System (I) auf ein solches geringerer Dimension zurückgeführt wird: (II) $\{F\}_n^{k-1} \equiv \{F_0, F_1, \ldots, F_{k-2}, F_{k-1}^*\}$, wo F_{k-1}^* den Büschel (F_{k-1}, F_k) durchläuft. Zu den ∞^1-Systemen (II) (und zum Punkte P) gehört dann entsprechend ein ∞^1-System (φ_p^{k-1}) von Flächen $\varphi_p^{*\,k-1}$, für die die fragliche Berührung von der Ordnung $k-1$ wird.

Es wird bewiesen, daß diese Schar (φ_p^{k-1}) selbst ein Büschel ist. Hierauf stützt sich der weitere Satz: Ist Q ein in endlicher Entfernung von P gelegener Punkt derart, daß die Gerade PQ die Fläche φ_p^k im Punkte Q berührt, so ist Q ein Berührungspunkt, wenigstens von der Ordnung $k+1$, der Geraden PQ für eine Fläche des Systems $\{F\}^k$, und umgekehrt.

Dies wird wiederum auf den Büschel (φ_p^{k-1}) angewandt, dessen zugehöriger Punktort mit ψ_p^{k-1} bezeichnet sei. Versteht man unter $\{F\}_p^{k-2}$ das System (III) $\{F_0, F_1, \ldots, F_{k-2}\}$, so ergibt sich: die Fläche ψ_p^{k-1} zerfällt in die Fläche φ_p^k, die zum System (I) gehört, und in die Fläche φ_p^{k-2}, die zum System (III) gehört; ferner, wenn man sich nunmehr den Index k variierend denkt und in diesem Sinne mit i bezeichnet, also mit μ_i die Ordnung von φ_p^i, so besitzt ψ_p^{i-1} die Ordnung $2\mu_{i-1} - 1$. Daraus geht die Rekursionsformel hervor (IV): $2\mu_{i-1} - 1 = \mu_{i-2} + \mu_i$, deren Lösung für die gesuchte Ordnung μ_k von φ_p^k die Anzahl liefert (V): $\mu_k = \frac{(k+1)(2n-k)}{2}$. Hiermit bestimmt sich auch ohne weiteres die gesuchte Multiplizität ξ_{k-1} der Fläche φ_p^k im Punkte P zu (VI): $\xi_{k-1} = \frac{(k+1)(2n-k)}{2} - (k-1)(n-k) = \frac{k(k+1)}{2}$.

Die zweite Methode stützt sich auf den Satz, daß, wenn K_p den Tangentenkegel von φ_p^k in P bedeutet, der Ort φ_p^{k-1}, der zu der durch P gehenden $(k-1)$-fachen Schar von Flächen F des Systems (I) gehört, in P ebenfalls einen ξ_{k-1}-fachen Punkt besitzt, dessen Tangentenkegel mit K_p zusammenfällt.

Dies führt zu der Rekursionsformel (VII): $\mu_k = (k+1)(n-k) + \xi_{k-1}$, und diese wiederum zu den Formeln (V) und (VI).

Die Fläche φ_p^k wird sodann in Beziehung gesetzt zu derjenigen Kongruenz von Geraden, die in Punkten einer gegebenen Geraden R des Raumes $(k+1)$-punktige Berührung mit Flächen des Systems (I) besitzen. Es stellt sich heraus, daß die Ordnung dieser Kongruenz mit der Ordnung μ_k von φ_p^k übereinstimmt; folglich ihre Klasse mit $\xi_{k-1} = \frac{k(k+1)}{2}$. Nunmehr wird die Formel (VI) über die Multiplizität von φ_p^k in P auf den Fall ausgedehnt, wo P ein gemeinsamer Punkt der Flächen $F_0, F_1, \ldots, F_k$ ist, in dem diese Flächen resp. einen r-fachen, $(r+\varrho_1)$-fachen, ..., $(r+\varrho_k)$-fachen Punkt besitzen $(1 \leqq \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_k \leqq n)$, mit den Tangentenkegeln $K_r^{(0)}, K_{r+\varrho_1}^{(1)}, \ldots, K_{r+\varrho_k}^{(k)}$ — die als allgemein und von einander unabhängig vorausgesetzt werden —; dann besitzt die zu P gehörige Fläche φ_p^k einen vielfachen Punkt von der Multiplizität (VIII) $\xi_{k-1} = (k+1)\,r + \sum_1^k \varrho_k$, und dessen Tangentenkegel schneidet die Flächen F längs der obigen Tangentenkegel K.

Für $r=1$ ergibt sich daraus der von Guccia in der eingangs erwähnten Abhandlung aufgestellte Satz für einen Flächenbüschel, wie denn überhaupt die vorliegende Arbeit die Verallgemeinerung der dort entwickelten Methoden und Sätze zum Ziele hat. Für die Ordnung der angeführten Geradenkongruenz resultiert unter den Voraussetzungen des letzten Satzes ebenfalls eine entsprechende Ausdehnung. Der Schluß ist einer genaueren Untersuchung des Tangentenkegels von φ_p^k in P gewidmet. Hierbei gelangt man zu einer abermaligen Erweiterung der Formel (VIII) für den Fall, daß der Punkt P nunmehr wieder ein beliebiger Raumpunkt ist. Bezeichnet man den dort auftretenden gemeinsamen Punkt der Flächen F jetzt mit O, so hat φ_p^k in O einen vielfachen Punkt der Multiplizität (IX): $\xi_{k-1} = \frac{(k+1)(2r-k)}{2} + \sum_1^k \varrho_k$, und der Tangentenkegel von φ_p^k in O läßt sich mit Hülfe der Kegel K genau bestimmen. Für $r=1$ kommt man wieder zu einem Satze von Guccia zurück.

My.

K. Rohn. Über algebraische Raumkurven. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 347-348.

Für das Studium der algebraischen Raumkurven R_n^p von der Ordnung n und dem Geschlecht p legt man die Punktgruppen auf einer solchen Kurve zugrunde. (Noether, Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven. Berliner Abh. 1882.) Der Verf. geht in dieser Richtung weiter und betrachtet auf der R_n^p alle Scharen von Gruppen von in Punkten, die auf ihr durch die Gesamtheit der Flächen i-er Ordnung ausgeschnitten werden. Der kurzen Note, die selbst nur als Referat über die Hauptzüge der Untersuchung anzusehen ist, soll eine ausführliche Behandlung des Gegenstandes folgen. Sk.

H. S. White. Linear systems of curves on algebraic surfaces. The Boston Colloquium, Septbr. 3-5, 1903, 1-30.

Über den Auszug aus diesen drei Vorlesungen, den der Verf. im Amer. M. S. Bull. (2) **10**, 120-124 veröffentlicht hat, ist in F. d. M. **34**, 677, 1903, kurz berichtet worden. Die jetzt vollständig vorliegenden Vorträge sind sehr gut geeignet, eine erste Übersicht über und Einsicht in dieses nicht einfache Gebiet zu geben, das noch nicht lange von der mathematischen Forschung erschlossen ist.

Die einzelnen Kapitel haben folgende Überschriften: I. Übergang von den ebenen Kurven auf die Oberflächen. II. Lineare Systeme von Kurven auf einer algebraischen Oberfläche. Die beiden geometrischen Definitionen stimmen zusammen. III. Oberflächen, deren ebene Schnitte hyperelliptische Kurven sind. IV. Lineare exakte Differentiale erster Gattung auf einer algebraischen Oberfläche. § 1. Die Existenz von Integralen auf gegebenen Oberflächen. § 2. Die Existenz von Oberflächen von gegebenem Charakter, insbesondere hyperelliptische Oberflächen. Lp.

G. Ascoli. Sopra la rappresentazione delle proiettività nello spazio a tre dimensioni. Periodico di Mat. (3) **2**, 219-226.

Bekanntlich existieren ∞^3 Projektivitäten zwischen zwei übereinander gelegten Formen erster Stufe. Dieselben bilden eine lineare Mannigfaltigkeit, welche daher mit dem gewöhnlichen Raume in Beziehung gesetzt werden kann. Der Verf. beschäftigt sich mit dieser Abbildung, indem er besonders die Mannigfaltigkeiten einer oder zweier Dimensionen beachtet (Linien oder Oberflächen), welche der Gesamtheit der Projektivitäten mit gegebenen Besonderheiten entsprechen. Lp.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

F. Meyer. Über Grundzüge einer Theorie des Tetraeders. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 322-346.

Der Verf. hat in einer Anzahl früherer Arbeiten (vgl. F. d. M. **32**, 574, 1901; **34**, 682f., 1903; **35**, 641, 1904) dargetan, daß es eine

der neueren Dreiecksgeometrie analoge „Geometrie des Tetraeders“ gibt. In der Einleitung zur vorliegenden Arbeit sagt er: „Bei zunehmender Fülle der Einzelergebnisse (der Dreiecksgeometrie) macht sich aber auch das Bedürfnis geltend, das Gebiet nach sachgemäßen Klassifikationsprinzipien zu ordnen und so zu einer Wissenschaft zu gestalten. Als zwei hervorragende Prinzipien dieser Art seien hier genannt einmal die systematische Einführung der beiden imaginären Kreispunkte (bzw. eines absoluten Kegelschnitts), andererseits die der quadratischen Verwandtschaft, insbesondere der eineindeutigen, der sich wiederum als Spezialfall die Inversion unterordnet. — Für eine entsprechende Geometrie des Tetraeders sind zwar jene beiden Prinzipien unmittelbar verallgemeinerungsfähig vermöge Einführung des Kugelkreises, sowie einer gewissen eineindeutigen kubischen Verwandtschaft, dagegen ist bisher, wenn man von speziellen Tetraedern oder mehreren Tetraedern in spezieller Lage absieht, noch wenig Material vorhanden. — Der Verf. hält es daher für nützlich, seine bislang in dieser Richtung angestellten Untersuchungen hier in den Hauptzügen zusammenzufassen und in einigen Punkten zu ergänzen. Wenn auch das Tetraeder, besonders in metrischer Hinsicht, eine vielfach verwickeltere Konfiguration darbietet als das Dreieck, so erfreut es sich doch andererseits eines gewissen Vorzuges. Von der verwirrenden Mannigfaltigkeit der „merkwürdigen“ Punkte (resp. Geraden) des Dreiecks bleibt bei der Ausdehnung auf das Tetraeder, wie es scheint, nur eine verhältnismäßig kleine Anzahl bestehen; die Mehrzahl geht über in gewisse ausgezeichnete Flächen zweiter Ordnung, resp. Klasse. — Damit ordnet sich von vornherein die Theorie des Tetraeders der Theorie der allgemeinen quadratischen Formen in höherem Maße unter, als die Theorie des Dreiecks. Auch der Umstand, daß die Anzahl der Dimensionen des Raumes ungerade ist, erweist sich als vorteilhaft.“ Z.

F. Castellano. Il birapporto di quattro punti nello spazio con applicazioni alla geometria del tetraedro. Torino Atti **40**, 579-601.

Die eleganten Anwendungen, welche von der Theorie der Vektoren (in der Ebene) auf die neuere Dreiecksgeometrie gemacht worden sind, ließen voraussehen, daß die Quaternionentheorie eine ähnliche Anwendung auf die Geometrie des Tetraeders zulassen würde. Die vorliegende Arbeit bestätigt diese Vermutung.

Der Verf. beginnt mit der Erklärung des „einfachen Verhältnisses“ (ABC) dreier Punkte A, B, C als Quaternion der Vektoren AB und AC; in Formel: $(ABC) = A - C/B - C$. Dadurch wird ihm die Definition des Doppelverhältnisses von vier beliebigen Raumpunkten ermöglicht: als solches betrachtet er das Produkt $(ABCD)$ von (ABC) mit den inversen $1/(ABD) = (ADB)$. Sieht man von der Ordnung ab, so kann man mit vier Punkten 24 Doppelverhältnisse bilden, die im allgemeinen alle ungleich sind; man kann sie von den Winkeln eines Dreiecks und von

vier Einheitsvektoren abhängig machen. Durch eine geschickte Verbindung solcher Begriffe gelangt der Verf. zu einigen bemerkenswerten Tetraedereigenschaften, von denen wir die folgenden anführen wollen: „In einem beliebigen Tetraeder ist das Produkt der Cosinus der entgegengesetzten ebenen Winkel plus dem Produkt der Sinus derselben in den Cosinus der entsprechenden Dieder bei zwei entgegengesetzen Kanten konstant. Zieht man durch eine Ecke A eines Tetraeders $ABCD$ die Antiparallelen zu den Kanten CD, DB, BA, so erhält man drei in einer Ebene α liegende Geraden; α ist die Berührungsebene der Umkugel des Tetraeders in A, usw.“ Nimmt das Doppelverhältnis $(ABCD)$ spezielle Werte an, so wird das Tetraeder $ABCD$ auch speziell; daraus folgt eine Methode zur Bestimmung spezieller Tetraeder und zur Erforschung ihrer Eigenschaften. So gelangt der Verf. zu einem sehr bemerkenswerten, von ihm „äquianharmonisch“ genannten Tetraeder, das durch die folgenden Gleichungen: $BC \times AD = CA \times BD = AB \times CD$ gekennzeichnet wird und viele weitere schöne Eigenschaften besitzt, welche der Verf. zum Schluß seines Aufsatzes auseinandersetzt. La.

E. Jahnke. Zu 122 (G. Loria) Lösung einer Aufgabe. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 305-306.

Die Plückerschen Koordinaten einer Geraden, die zwei gegebene windschiefe Geraden rechtwinklig schneiden, werden unter Benutzung Graßmannscher Methoden bestimmt.

Anhangsweise wird eine zweite Lösung von E. Rath mitgeteilt. Die Koordinaten sind den sechs Determinanten proportional, die sich aus einer Matrix von sechs mal fünf Elementen ergeben. Lwt.

M. Grossmann. Metrische Eigenschaften reziproker Bündel. Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 143-150.

Sind zwei korrelative Bündel durch die kanonischen Formeln $\varepsilon' = x\alpha_2/\alpha_1$, $\eta' = y\alpha_3/\alpha_1$ gegeben, und ist x ein beliebiger Strahl des einen Bündels, P seine Verbindungsebene mit dem Fokalstrahl f_1, so bildet der entsprechende Strahl p' in der zyklischen Ebene F_1' mit der Tripelkante a_1' den nämlichen Winkel, den P mit der Tripelebene A_1 bildet. Die Lage der Ebene X' ist gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{\sin(F_1' X')}{\sin([\sigma_1' p'] X')} = \triangle \cdot \frac{\sin(f_1 x)}{\sin([C_1 P] x)},$$

so daß $\triangle = \alpha_1^2/\alpha_2\alpha_3$ als die „Charakteristik“ der Bündel bezeichnet werden kann. R. M.

T. J. I'A. Bromwich. The classification of quadrics. American M. S. Trans. 6, 275-285.

J. L. Coolidge (F. d. M. **34**, 684, 1903) hat die Flächen zweiter Ordnung in einem dreidimensionalen, negativ gekrümmten Raume nach der Methode von Clebsch klassifiziert. Hier wird dieselbe Frage (auch für den positiv gekrümmten und den gewöhnlichen Raum) identifiziert mit dem algebraischen Problem der Reduktion zweier quaternären quadratischen Formen auf kanonische Typen (natürlich unter Anwendung der Weierstraßschen Elementarteilertheorie). Die in Betracht kommenden quadratischen Formen von vier Variablen haben, je nachdem man die Flächen zweiter Ordnung im hyperbolischen, elliptischen und parabolischen (euklidischen) Raum untersucht, die „Signatur" (nach Frobenius) 2, 4 oder 3. Bei der Besprechung des ersten Falles ergibt sich, daß in der eingangs zitierten Coolidgeschen Arbeit bei der Klassifikation des dort mit IV bezeichneten Typus drei Koeffizienten überflüssig sind, die ohne Schaden für die Allgemeinheit der Untersuchung durch 1, 0, 2 ersetzt werden können. In einer Schlußnote bemerkt der Verf., daß Barbarin bei seiner Klassifikation der Flächen zweiter Odnung im negativ gekrümmten Raum (vgl. F. d. M. **32**, 481, 1901) eine Flächenklasse (IV) übersehen habe. Z.

C. Runge. Numerische Berechnung der Hauptachsen einer Fläche zweiter Ordnung. Zs. für Math. u. Phys. 52, 103-106.

Man drehe das Koordinatensystem mehrmals, und zwar „jedesmal um eine solche unter den Koordinatenachsen, daß der größte von den Koeffizienten der Produkte der Veränderlichen zum Verschwinden gebracht wird"; dadurch „vermindert sich fortgesetzt die Summe der Quadrate dieser Koeffizienten, und zwar, da von dem zweiten Schritt an immer einer der Koeffizienten Null ist, so vermindert sich die Summe der Quadrate bei jedem Schritt mindestens auf die Hälfte. — Auf diese Weise bringt man es in kurzer Zeit dahin, daß die Glieder, welche die Produkte der Veränderlichen enthalten, gegen die quadratischen Glieder vernachlässigt werden können. Nach einem geeigneten Schema rechnend, kann man die Rechnung bequem und rasch ausführen ... Nachdem man die Koeffizienten der quadratischen Glieder auf diese Weise gefunden hat, werden die Richtungen der neuen Koordinatenachsen am besten aus den bekannten linearen Gleichungen gefunden ... Zur Ausführung der Rechnung sind nur zwei von den drei Gleichungen erforderlich. Die dritte kann zur Kontrolle dienen." — Die vorliegende Behandlung des Hauptachsenproblems hat zwei Vorzüge: „Erstens ist die Rechnung einfacher als die direkte Auflösung der Gleichung dritten Grades, von der die orthogonale Transformation auf eine Summe von Quadraten algebraisch abhängt. Zweitens ist das Verfahren aber auch theoretisch von Interesse. Denn da es die drei Wurzeln der Gleichung liefert, so enthält es zugleich

einen neuen Beweis dafür, daß die Wurzeln reell sind. — Wie man ohne weiteres erkennt, ist das Verfahren auch auf quadratische Formen von beliebig vielen Veränderlichen anwendbar." Z.

O. Staude. Das Hauptachsenproblem der Flächen zweiter Ordnung.
Math. Ann. **61**, 392-396.

Die üblichen Beweise für die Realität der Wurzeln der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$, die das Hauptachsenproblem der Flächen zweiter Ordnung löst, beruhen auf der Darstellung ihrer Diskriminante D als Summe von Quadraten. Hier wird das Produkt von D mit der Diskriminante D' der Gleichung $\Delta'(\lambda) = 0$ durch Quadrate der Minoren von D und D' als Quadrate der Elemente von D ausgedrückt. Der Beweis hat den Vorzug, daß die Quadratdarstellungen sich direkt ergeben, und daß die Bedingungen für zweifache und dreifache Wurzeln unmittelbar hervortreten. Sk.

O. Staude. Über die Erzeugenden der Fläche zweiter Ordnung.
Arch. der Math. u. Phys. (3) **9**, 230-245.

„Die analytische Bestimmung der Erzeugenden einer durch ihre Gleichung gegebenen Fläche zweiter Ordnung wird gewöhnlich an eine Normalform dieser Gleichung angeknüpft. Dabei erledigt sich das Problem zwar einfacher, aber sein Charakter tritt weniger deutlich hervor, als bei der Zugrundelegung der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiter Ordnung. — Der Kernpunkt des Problems ist nämlich die Bestimmung der Wurzeln und Elementarteiler einer Determinante sechsten Grades. Die Determinanten dieser Art sind ganz allgemein von Voss untersucht worden. Aber seine Bezeichnungsweise paßt sich nicht unmittelbar an die übliche Benennung der Plückerschen Linienkoordinaten an. Bei der Wichtigkeit des Problems dürfte es daher angemessen sein, demselben eine unabhängige Darstellung zu widmen, welche, ohne allgemeine Sätze vorauszusetzen, doch die analytischen Grundlagen des Problems in allgemeiner Fassung hervortreten läßt. Dies ist in der vorliegenden Abhandlung geschehen, indem die Gleichungen von zweimal sechs linearen Komplexen hergeleitet sind, von denen je drei eine Schar von Erzeugenden der allgemein gegebenen Fläche bestimmen. — Im Anschluß hieran ist die bisher noch nicht behandelte Frage nach den analytischen Kriterien für die Unabhängigkeit irgend dreier von den genannten Komplexen erledigt. Den Mittelpunkt dieser Betrachtungen bilden gewisse Identitäten, welche die Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse durch drei lineare Komplexe unmittelbar zum Ausdruck bringen." Z.

E. Meyer. Eine Eigenschaft der sogenannten Gaußschen Bildpunkte der imaginären Schnittpunkte einer Geraden mit einer Fläche zweiter Ordnung. Arch. der Math. u. Phys. (3) 9, 210-212.

Die Mittelpunktfläche zweiter Ordnung $f(x, y, z) = 0$ habe den Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0); ferner sei (x_1, y_1, z_1) ein nicht auf der Fläche gelegener Punkt D. Es wird gezeigt, daß für eine durch D gehende, die Fläche nicht schneidende Gerade $\varphi(x_1, y_1, z_1) = p^2/\varrho^2$ ist, wenn p die Entfernung des Punktes D von einem der Gaußschen Bildpunkte der beiden konjugiert-imaginären Schnittpunkte der Geraden L mit F^2 in der durch L und O gehenden Ebene bezeichnet. Dabei ist noch

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) \cdot \varphi(x, y, z)$$

gesetzt, und ϱ bedeutet den zu L parallelen Radius der F^2. Lwt.

K. Bollert. Über konzentrische Flächen zweiter Ordnung. Diss. Rostock. G. Bernstein, Berlin. 60 S.

„Die Lagebeziehungen zweier Kegelschnitte im allgemeinen, sowie die zweier Oberflächen zweiter Ordnung sind bekanntlich sehr genau und systematisch untersucht. Aus diesen Lagebeziehungen lassen sich diejenigen von zwei konzentrischen Kegelschnitten und Flächen zweiter Ordnung ableiten. Für zwei konzentrische Kegelschnitte befindet sich eine solche Ableitung in den Vorlesungen über Geometrie von Clebsch-Lindemann I, S. 141. Doch ist diese, wie Staude bemerkt hat, nicht ganz erschöpfend. Von den Lagebeziehungen zweier konzentrischen Oberflächen zweiter Ordnung sind aber nur einige interessante Spezialfälle bekannt.“ § 2 der vorliegenden Arbeit ergänzt zunächst die Lindemannsche Bemerkung über die Ausnahmefälle, in welchen bei zwei Kegelschnitten die Punkte gleicher Polaren mit ihren Polaren sämtlich zusammenfallen können. Dies kann bei konzentrischen Kegelschnitten nicht eintreten; vielmehr kommen hierbei nur diejenigen Fälle in Betracht, bei denen mindestens ein Punkt gleicher Polaren (nämlich der gemeinsame Mittelpunkt) von seiner Polare getrennt liegt. Daß dies außer in den von Lindemann angeführten beiden Fällen auch noch dann möglich ist, wenn die beiden konzentrischen Kegelschnitte im Unendlichen eine dreipunktige Berührung haben, wird hier nachgewiesen. § 3 enthält die Voraussetzungen aus der Theorie der Lagebeziehungen zweier Flächen zweiter Ordnung; die Klassifikation der 13 möglichen Lagebeziehungen — im allgemeinen Falle der nichtkonzentrischen Flächen — wird auf die bekannte, aus der Weierstraßschen Elementarteiler-Theorie folgenden Weise tabellarisch — vgl. z. B. O. Staude, Enzykl. d. math. Wiss. 3, C2, Nr. 73, S. 216 — veranschaulicht. In § 4 („Unterschied unseres Problems und des allgemeinen und die dadurch bedingte nochmalige Teilung einiger Fälle“) bemerkt der Verf. zunächst, daß, während im allgemeinen Falle zwischen dem Endlichen und Unendlichen kein Unterschied

gemacht werde, hier die unendlich ferne Ebene als Polarebene des gemeinsamen Mittelpunktes von vornherein ausgezeichnet erscheine. Demgemäß besteht in der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ (wo $\Delta(\lambda)$ die Determinante des Büschels ist) zwischen der Wurzel $\lambda = -1$ und der unendlich fernen Ebene einerseits, zwischen den Wurzeln $\lambda \neq -1$ und dem Mittelpunkt andererseits ein ganz bestimmter Zusammenhang, welcher nach der in § 5 vorgenommenen „Ausscheidung der bei konzentrischen Oberflächen unmöglichen Fälle" im § 6 noch klarer hervortritt; dort werden unmittelbar aus der Verteilung der Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ Schlüsse auf die spezielle Gestalt der zerfallenden Flächen in den bei konzentrischen Flächen zweiter Ordnung möglichen Fällen gezogen. § 7 bringt die Transformation auf die kanonischen Formen und damit eine andere Art der Klassifikationsmethode, bei welcher jeder einzelne der 13 Fälle durch die Multiplizität der Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ einerseits und durch die Lagebeziehungen der unendlich fernen Kegelschnitte andererseits charakterisiert wird. § 8 enthält interessante „allgemeine Bemerkungen über sämtliche Fälle", auf die wir an dieser Stelle nicht näher eingehen können. In § 9 ist das Transformationsproblem für den ersten „Normalfall" (die Kegelschnitte auf der unendlich fernen Ebene schneiden sich in vier getrennten Punkten) gelöst — was übrigens schon Chasles geleistet hat. § 10 beschreibt die übrigen 12 möglichen Lagebeziehungen zweier konzentrischen Flächen zweiter Ordnung. — Der letzte Paragraph der wertvollen Arbeit enthält eine „Vergleichung der Resultate mit denen der allgemeinen Theorie". Während nämlich in den ersten zehn Paragraphen nirgendwo die Lagebeziehungen zweier allgemeinen (nichtkonzentrischen) Flächen zweiter Ordnung als bekannt vorausgesetzt wurden, wird hier noch gezeigt, daß auch die allgemeine Theorie (bei Betrachtung der Raumkurven vierter Ordnung erster Species, die sich als Schnitte zweier Flächen zweiter Ordnung ergeben) in ihrer Spezialisierung zu derselben Ausscheidung, bzw. Teilung gewisser Fälle führt wie der Hauptteil der vorliegenden Arbeit, wodurch die Berechtigung des hier angewandten Klassifikationsprinzips noch besonders gesichert erscheint. Z.

J. J. Bielankin. Die allgemeine Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, die mit einer gegebenen konfokal ist. Kiew Polyt. Institut. Nr. 3, 1-18. (Russisch.)

Ausrechnung der genannten Gleichung in einem schiefwinkligen Koordinatensystem mit Hülfe der Invariantentheorie. Si.

Cl. Servais. Sur les faisceaux de surfaces du second ordre. Belg. Mém. cour. in 8° (2) 1, 53 S.

Die relativen Lagen zweier Quadriken entsprechen den verschiedenen Fällen der Realität bei den Doppelelementen zweier projektiven Räume.

Die Arbeit will die verschiedenen Fälle zur Anschauung bringen und in den allgemeinen Fällen sowie in den zugehörigen Grenzfällen die Mannigfaltigkeiten der Quadriken erforschen. Der letzte Paragraph ist den kubischen Raumkurven gewidmet. Lp.

J. Cardinaal. De vergelijkingen waardoor de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken bepaald wordt. Amst. Ak. Versl. **13**, 537-541.

Analytischer Beweis des früher schon auf geometrischem Wege gefundenen Satzes, daß die Hauptachsen eines F_2-büschels eine Regelfläche neunten Grades erfüllen, welche sich im Fall einer zirkularen Basiskurve in eine F_3 und eine F_6 spaltet (siehe auch die nachfolgend besprochene Arbeit von R. Bes aus Amst. Ak. Versl. **13**, 730). Wö.

K. Bes. De vergelijking van den negenden graad voorstellende de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken. Amst. Ak. Versl. **13**, 730-732.

Cardinaal hatte in seiner Arbeit über den geometrischen Ort der Hauptachsen eines F_2-büschels (Referat vorstehend) zwar geometrisch erkannt, daß dieser Ort vom neunten Grad ist, hatte aber analytisch eine Gleichung 12-ten Grades erhalten. Der Verf. klärt diesen Widerspruch dahin auf, daß die Cardinaalsche Gleichung eine Identität ist, und entwickelt an ihrer Stelle die richtige Flächengleichung neunten Grades. Wö.

G. Fontené. Polygones gauches de Poncelet, extension du théorème de Cayley à l'espace. Nouv. Ann. (4) **5**, 114-122.

Der betreffende Satz von Cayley findet sich in dessen Werken **4**, 292. Verf. hat den Satz auf den Raum ausgedehnt und die Erweiterung nebst einem Zusatz bewiesen. Der Satz von Fontené besagt:

Sind zwei quadratische Regelflächen S und S' gegeben, so ist es im allgemeinen nicht möglich, ein windschiefes Vieleck von $2p$ Seiten zu zeichnen, dessen Seiten auf S und dessen Ecken auf S' liegen; auch nicht ein solches, dessen Seiten auf S' liegen, und dessen durch je zwei Nachbarseiten bestimmte Ebenen S berühren. Gibt es aber ein Vieleck der einen oder der anderen Art, so gibt es unzählig viele von beiden Arten. — Ist die Diskriminante der Form $S + kS'$ gleich $\delta + \vartheta k + \varphi k^2 + \vartheta' k^3 + \delta' k^4$ und die Quadratwurzel aus dem letzteren Ausdruck $A + Bk + Ck^2 + Dk^3 + \cdots$, so tritt jene Möglichkeit für die Fälle $2p = 4, 6, 8, \ldots$ ein, wenn bzw.:

$$D = 0, \quad \begin{vmatrix} D & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} D & E & F \\ E & F & G \\ F & G & H \end{vmatrix} = 0, \ldots$$

Ist aber diese Bedingung erfüllt, so bleibt sie auch noch dann erfüllt, wenn man S' durch irgendeine Fläche des Flächenbüschels (SS') oder S durch irgendeine Fläche der Flächenschar (SS') ersetzt. E. M.

B. Hepke. Über kürzeste Transversalen zwischen Erzeugenden einer hyperboloidischen Regelschar. Diss. Breslau. H. Fleischmann. 76 S.

Die Geraden, welche je zwei Gerade einer hyperboloidischen Regelschar senkrecht schneiden (kürzeste Transversalen), bilden nach Waelsch (Wien. Ber. **95**, 781) eine Kongruenz dritter Ordnung. Durch jeden Punkt einer Erzeugenden gehen zwei Gerade der Kongruenz; es gibt auf jeder Erzeugenden zwei Punkte (Kuspidalpunkte), für welche diese Gerade in eine (Kuspidaltransversale) zusammenfallen. Der Ort der Fußpunkte der kürzesten Transversalen zwischen einer Erzeugenden und allen übrigen ist eine Ellipse, die die Erzeugende im Zentralpunkt, d. h. in dem dem Mittelpunkt der Fläche am nächsten gelegenen Punkt trifft, und deren Mittelpunkt mit dem der Fläche zusammenfällt. Die kürzesten Transversalen zwischen einer Erzeugenden und allen übrigen ist eine Regelfläche dritter Ordnung mit der Erzeugenden als Doppelgerade. Da von jedem Punkt einer Erzeugenden kürzeste Transversalen an zwei andere Erzeugende gehen, so werden die Erzeugenden hierdurch involutorisch gepaart. Die Kuspidalpunkte bilden eine sphärische Kurve vierter Ordnung, die Kuspidaltransversalen ein zum gegebenen konzentrisches und koaxiales Hyperboloid. Der Verf. erörtert zuletzt noch den beim orthogonalen Hyperboloid auftretenden Ausnahmefall. Wö.

H. Keefer. Eine Aufgabe aus der Professoratsprüfung. Math. naturw. Mitt. (2) **7**, 71-74.

Bestimmung des Inhalts der zwischen den Ebenen $x + a = 0$ und $x - a = 0$ enthaltenen Mantelfläche des horizontalprojizierenden Zylinders der Raumkurve $x^2 + y^2 = a^2, xz = a(z - c)$. Wö.

H. Piccioli. Sur l'équation intrinsèque des lignes qui appartiennent à certaines surfaces de révolution et du second degré. Nouv. Ann. (4) **5**, 307-310.

Die Methoden, die der Verf. in einer früheren Arbeit (vgl. F. d. M. **35**, 643, 1904) zur Darstellung von Kurven auf Rotationszylindern benutzt hatte, werden auf die im Titel genannten Kurven angewandt. Sk.

C. A. Noble. Note on loxodromes. Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 116-119.

„Eine Loxodrome ist eine Kurve auf einer Umdrehungsfläche, welche die Meridiane unter konstantem Winkel schneidet. Wenn die Meridiane und die Parallelkreise der Breite auf einer solchen Fläche derartig ausgewählt werden können, daß sie ein Netz aus ähnlichen unendlich kleinen Rechtecken bilden, so werden die Diagonalen dieser Rechtecke Loxodromen geben.“ Auf Grund dieser Bemerkung wird die Bedingung für die Loxodromie zuerst allgemein entwickelt, dann auf das abgeplattete Rotationsellipsoid angewandt. „Der Fall des abgeplatteten Rotationsellipsoids ist darin interessant, daß die Loxodromen auf ihm sich stereographisch in dieselben Spiralen projizieren wie die Loxodromen auf der Kugel, die das Sphäroid längs des Äquators berührt.“ Lp.

W. H. Blythe. On models of cubic surfaces. Cambridge: University Press. New York: Macmillan. XII u. 104 S.

Kurz zusammengestellt werden zunächst diejenigen Untersuchungen aus der Theorie der kubischen Flächen, welche den Verf. angeregt haben, Modelle solcher Flächen zu konstruieren. Insbesondere wird bei der allgemeinen kubischen Fläche auf die Theorie ihrer 27 Geraden und bei den Flächen mit Doppelpunkten auf die Theorie dieser Doppelpunkte eingegangen. Der Verf. entnimmt seinen Stoff hauptsächlich den Arbeiten Cayleys, Schläflis und der Geometrie der Lage Reyes. Leider muß er die Einleitung dieses Werkes nicht gelesen haben; sonst würde er z. B. nicht die bekannte Graßmannsche Erzeugung der allgemeinen kubischen Fläche Reye zuschreiben und ferner auch nicht die grundlegenden Arbeiten eines Steiner, Cremona und Clebsch übergehen. Wer sich mit den kubischen Flächen und ihrer Abbildung auf einer Ebene beschäftigt, muß mit den elementarsten Sätzen aus der Theorie der kubischen Raumkurven vertraut sein; die Ableitung dieser Sätze hätte also wohl füglich in einem Werke über kubische Flächen unterbleiben können. Die letzten Kapitel enthalten manchen beherzigenswerten Rat zur Herstellung von Modellen kubischer Kegel und Flächen. Js.

H. W. Blythe. Notes on the geometry of cubic surfaces. Messenger (2) **34**, 139-141.

Analytische Behandlung der Erzeugung einer kubischen Oberfläche als Ort des Schnittpunktes dreier korrespondierenden Ebenen von drei projektiven Ebenenbündeln; — dem Anscheine nach ohne Kenntnis der bezüglichen ersten Untersuchungen, z. B. von August „Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis“, Berlin 1862. Hieran ist angeschlossen die Erzeugung des einschaligen Hyperboloids durch eine Gerade, welche drei gegebene windschiefe Geraden schneidet. Lp.

A. B. Basset. On the class of cubic surfaces. Nature 72, 484.

In Salmons „Analytischer Geometrie des Raumes" werden 23 verschiedene Arten kubischer Oberflächen unterschieden. Basset skizziert, von dem Begriffe der Klasse einer algebraischen Oberfläche ausgehend, ein leichtes Verfahren, um jenes Resultat herzuleiten. Lp.

H. Hilton. Curves on a conicoid. Messenger (2) 34, 136-139.

Eine algebraische Kurve n-ter Ordnung, die auf einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung liegt, treffe jede Gerade der einen Schar in h Punkten, jede der anderen in $k (h+k=n)$. Durch Projektion auf eine Ebene werden Beziehungen für die Kurve hergeleitet. Wenn die Kurve, bezeichnet als $(h+k)$-ic, δ Doppelpunkte und $\varkappa$ Spitzen besitzt, ferner m Tangentialebenen durch zwei beliebige Punkte, τ doppeltberührende Ebenen und ι oskulierende Ebenen durch einen gegebenen Punkt, so finden die Gleichungen statt:

$$m = 2hk - 2\delta - 3\varkappa,\ h+k = m(m-1) - 2\tau - 3\iota,$$
$$\iota = 3(2hk - h - k) - 6\delta - 8\varkappa,\ \varkappa = 3m(m-2) - 6\tau - 8\iota,$$

Geschlecht (deficiency)

$$= (h-1)(k-1) - (\delta + \varkappa) = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - (\tau + \iota) < 0.$$

Eine solche Kurve ist durch $hk + h + k - \delta - 2\varkappa$ gegebene Punkte bestimmt. Lp.

D. Andere spezielle Raumgebilde.

R. W. H. T. Hudson. Kummer's quartic surface. Cambridge: University Press. XI u. 219 S. 8° u. 1 Taf.

Dem Verf. war es nicht beschieden, das Erscheinen seines Hauptwerkes, der vorliegenden Monographie über die von Kummer zuerst erforschte Fläche vierter Ordnung zu erleben; während des Druckes ereilte ihn, den Achtundzwanzigjährigen, in den Bergen von Wales der Tod. Bromwich, Bateman und Baker haben das Verdienst, durch sorgfältige Überwachung des Druckes das Werk der mathematischen Welt erhalten zu haben. Die von H. F. Baker abgefaßte Vorrede charakterisiert nach einer kurzen Lebensskizze des vielversprechenden Talents Hudsons das Werk mit folgenden sympathischen Worten: „Aufmerksame Leser werden beurteilen können, welche Hingebung, welcher Scharfsinn dazu gehörte, ein solches Buch zu schreiben, dessen Schwierigkeiten immer größer werden, je tiefer man in den Stoff eindringt. Diejenigen, die den Verf. kannten, wird es an seine Begeisterung und glänzende Darstellungsgabe erinnern, die ihre Bewunderung ebenso erzwang, wie die Rechtlichkeit seines Charakters ihre Hochachtung. Eine so vielseitige Theorie wie die in diesem Bande dargestellte wird im allgemeinen nur durch das Werk vieler Menschenalter gewonnen."

Das Werk, das in der Tat das umfangreiche vorliegende Material von den verschiedenen möglichen Gesichtspunkten aus betrachtet, stellt nicht eine Monographie des Gegenstandes in dem Sinne dar, daß etwa enzyklopädisch über alle Ergebnisse der Einzelforschung berichtet wird, und mancher, der aus ihm eine Orientierung betreffs einer Spezialfrage entnehmen will, wird den Mangel an Literaturangaben, die nur recht spärlich eingestreut sind, bedauern. Vielmehr wird der übersichtlich gruppierte Stoff in eleganter, aber knapper Form zusammenhängend dargestellt, doch nur selten werden Quellen, und immer nur die allerbekanntesten angegeben. Die Disposition des Buches ergibt sich aus dem Inhaltsverzeichnis, dessen 18 Kapitelüberschriften zur Orientierung genannt seien. I. Kummers Konfiguration. II. Die Fläche vierter Ordnung. III. Die orthogonale Matrix linearer Formen. IV. Liniengeometrie. V. Quadratischer Komplex und quadratische Kongruenz. VI. Plückers Komplexfläche. VII. Knotengruppen. VIII. Gleichungen der Kummerschen Fläche. IX. Spezielle Formen der Kummerschen Fläche. X. Die Wellenfläche. XI. Realität und Topologie. XII. Vierdimensionale Geometrie. XIII. Algebraische Kurven auf der Fläche. XIV. Kurven der verschiedenen Ordnungen. XV. Die Weddlesche Fläche. XVI. Thetafunktionen. XVII. Anwendungen des Abelschen Theorems. XVIII. Singuläre Kummersche Flächen. Angefügt ist ein Register, während die beigegebene Tafel die Abbildung eines Modells einer Kummerschen Fläche bietet. Sk.

A. Maroni. Sulle superficie del 4° ordine con soli punti doppi. Lomb. Ist. Rend. (2) 38, 193-200.

Wenn F im dreidimensionalen Raum eine von singulären Linien freie Fläche vierter Ordnung ist, die also keine anderen als isolierte Doppelpunkte enthält, so ist auf F jedes kanonische System eine Kurve von der Ordnung $0 (p_g = p_a = 1)$ und jedes System daher sich selbst adjungiert. Wenn $|C|$ auf F ein lineares, vollständiges, irreduzibles, mindestens einfach unendliches, von den bezeichneten Punktsingularitäten freies Kurvensystem bedeutet, und wenn man ferner mit $m_{ik} = (C_i C_k)$ die Anzahl der Schnittpunkte einer C_i mit einer C_k bezeichnet, so gilt der Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine gewisse Anzahl (h) auf F gelegener Systeme $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_h|$ abhängig sind, ist das Verschwinden der Determinante

$$M = \begin{vmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1h} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{h1} & \ldots & m_{hh} \end{vmatrix}.$$

Es ist dies (abgesehen vom Zeichen) dieselbe Determinante, die von Severi mit dem Namen „discriminante dell' aggruppamento" belegt worden ist. — Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Kurve C auf F der vollständige Schnitt von F mit einer anderen Fläche sei, ist die, daß zwischen der Ordnung und dem Geschlechte von C die Beziehung $m^2 = 8(p-1)$ besteht. Z.

E. TRAYNARD. Sur une surface hyperelliptique. C. R. **140**, 218-219.

„Jede Fläche vierter Ordnung mit 14 Doppelpunkten, von denen zwei Gruppen von je drei in gerader Linie liegen, ist eine hyperelliptische Fläche.“ Wenn eine Fläche vierter Ordnung 14 Doppelpunkte hat, so finden sich unter diesen bekanntlich (Kummer) sechs von der Eigenschaft, daß der umschriebene Kegel, der einen von ihnen zum Mittelpunkt hat, in zwei Kegel zweiter Ordnung und zwei Ebenen zerfällt. Nur diese sechs Punkte kommen für die eingangs erwähnten zwei Gruppen zu je dreien in Betracht. Z.

H. BATEMAN. The Weddle quartic surface. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 225-238.

Die von Weddle (Camb. and Dubl. Math. Journal **5**, 69) entdeckte Fläche ist der Ort der Spitzen der Kegel zweiter Ordnung, die durch sechs Punkte gehen, oder die Jacobische Fläche von vier Flächen F_2, die sechs Punkte gemein haben. Ihr Symmetroid ist eine Kummersche Fläche. Die Polarebenen eines Punktes P der Weddleschen Fläche in bezug auf die vier F_2 treffen sich in einem korrespondierenden Punkt P_1 der Weddleschen Fläche, PP_1 ist Sehne der Raumkurve dritter Ordnung durch die sechs Punkte und wird von ihr harmonisch geteilt (Darboux, S. M. F. Bull. **1**, 356). Eine dem Verf. von Richmond mitgeteilte Parameterdarstellung ist:

$$x:y:z:t = \frac{\vartheta^3}{\sqrt{f(\vartheta)}} \pm \frac{\varphi^3}{\sqrt{f(\varphi)}} : \frac{\vartheta^2}{\sqrt{f(\vartheta)}} \pm \frac{\varphi^2}{\sqrt{f(\varphi)}} : \frac{\vartheta}{\sqrt{f(\vartheta)}} \pm \frac{\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}} : \frac{1}{\sqrt{f(\vartheta)}} \pm \frac{1}{\sqrt{f(\varphi)}},$$

wo $f(\alpha) = (\alpha - \vartheta_1)(\alpha - \vartheta_2)\dots(\alpha - \vartheta_6)$; $\vartheta_1, \dots, \vartheta_6$ die Parameter der sechs Punkte. ϑ und φ sind Parameter von Punkten der Raumkurve dritter Ordnung durch diese Punkte mit der Gleichung $x:y:z:t = \vartheta^3 : \vartheta^2 : \vartheta : 1$. Also liefert ein Paar von Punkten dieser Raumkurve ein Paar von Punkten der Fläche. Die drei Paare eines Tripels von Raumkurvenpunkten liefern die sechs Ecken eines ebenen vollständigen Vierseits auf der Fläche. Zu vier Punkten der Raumkurve erhält man drei Tetraeder auf der Fläche, die ein desmisches System bilden. Die Tangentialebene eines Punktes P der Fläche ist die Polarebene des entsprechenden Punktes in bezug auf den Kegel mit Spitze P durch die sechs Punkte. Eine spezielle Haupttangentenkurve der Weddleschen Fläche zerfällt in die Raumkurve dritter Ordnung und eine rationale Raumkurve siebenter Ordnung. Der Verf. betrachtet noch auf der Weddleschen Fläche Kurven sechster Ordnung, Kurven achter Ordnung als Schnitte mit F_2 durch die sechs Punkte; Kurven zehnter Ordnung als Schnitte mit Weddleschen Flächen, deren sechs Punkte auf derselben Raumkurve dritter Ordnung liegen. Wö.

E. Weinnoldt. Über kinematische Erzeugung von Regelflächen vierter Ordnung. Zs. für Math. u. Phys. **52**, 299-330.

Die von Burmester und Blake zur Erzeugung einer Regelfläche vierter Ordnung benutzten Bewegungsmechanismen „ergaben nur verhältnismäßig wenige Arten von Regelflächen vierter Ordnung". Der Verf. hat sich „vorgenommen, mit einer allgemeineren Bewegung den großen Formenreichtum dieser Flächen zur Anschauung zu bringen und dadurch, daß er Polkurven von höherer als der zweiten Ordnung benutzte, Flächen mit einer Doppelkurve und vier Zwickpunkten zu erzeugen. Die Bewegungsmechanismen, bei denen die Bahnkurven von der vierten Ordnung sind, geben jedoch im allgemeinen zu Regelflächen höherer Ordnung Veranlassung. Von allen Mechanismen, die Dingeldey untersucht hat, geben außer den erwähnten, von Burmester und Blake verwendeten Bewegungen, die ja Spezialfälle des Kurbelgetriebes sind, nur noch zwei andere Bewegungen, die auch Spezialfälle des allgemeinen Kurbelgetriebes sind, Regelflächen vierter Ordnung. Dies sind: 1. das gleichschenklige Doppelkurbelgetriebe oder seine Umkehrung, das gleichschenklige Schwingkurbelgetriebe, und 2. die allgemeine Konchoidenbewegung, hervorgebracht durch das Schleifschiebergetriebe oder die doppeltgeschränkte Winkelschleifenkette. Da diese beiden ebenen Bewegungen in bezug auf ihre Bahnkurven und deren Doppelpunkte ziemlich vollständig bekannt sind, so genügt es, die Ergebnisse der Untersuchungen früherer Autoren zusammenzustellen und ihnen einige wenige Ergänzungen hinzuzufügen, um Aufschluß über die Art der mit diesen Getrieben erzeugbaren Regelflächen zu erhalten. — Es zeigt sich, daß man mit ihnen von drei Hauptklassen der Regelflächen vierter Ordnung Beispiele erzeugen kann, und daß nur Regelflächen mit einer dreifachen Geraden nicht darstellbar sind. Die drei anderen Hauptklassen kommen aber in ihren verschiedenen Unterarten ziemlich vollständig zur Anschauung." Z.

Ch. Bioche. Sur les courbes gauches de 4e ordre et de 4e classe. S. M. F. Bull. **33**, 18-25.

Alle Raumkurven vierter Ordnung und vierter Klasse gehen durch projektive Transformationen aus zweien hervor, deren Gleichungen aufgestellt werden. Die erste Art ist der Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung, die zweite der partielle Schnitt einer Fläche zweiter mit einer Fläche dritter Ordnung. Die erste Art hat einen Rückkehrpunkt, die zweite zwei. Die Tangentenfläche der ersten Kurve ist vom fünften, die der zweiten vom sechsten Grade. Aus den Halphenschen Untersuchungen über anharmonische Kurven (Acta math. **3**), zu denen die betrachteten gehören, ergibt sich, daß die Kurve erster Art die einzige anharmonische algebraische Kurve ist, die auf eine nicht abwickelbare Fläche zweiten Grades gelegt werden kann, und deren Tangenten keinem linearen Komplex angehören. Sk.

A. Berry. On certain quintic surfaces which admit of integrals of the first kind of total differentials. Cambr. Trans. **20**, 74-112.

Vgl. F. d. M. **33**, 671, 1902. Flächen fünfter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt und einem dreifachen Punkte; mit einem nicht ausgearteten Doppelkegelschnitt, aber mit keinem anderen vielfachen Punkte; mit zwei verschiedenen sich schneidenden Doppelgeraden, aber mit keinem anderen vielfachen Punkte; mit zwei zusammenfallenden Doppelgeraden, aber mit keinem anderen vielfachen Punkte. Lp.

E. Ciani. Sopra le curve gobbe razionali di quinto ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 442-445.

Der Verf. verteidigt sich gegen Einwände, welche gegen eine seiner früheren Arbeiten (Lomb. Ist. Rend. (2) **37**, 341) von Marletta (Palermo Rend. **19**, 93-119; Referat vgl. unten S. 720 erhoben wurden. Die Behauptung, daß eine rationale Raumkurve fünfter Ordnung: $x_1 = (a\lambda + b\mu)^5$, $x_2 = (a\lambda - b\mu)^5$, $x_3 = (b\lambda + a\mu)^5$, $x_4 = (b\lambda - a\mu)^5$ nur eine einzige Quadrisekante besitzt, hält der Verf. aufrecht und gibt einen neuen einfacheren Beweis. Der Satz, daß solche Kurven keine Doppelpunkte besitzen, ist dagegen nur für allgemeine Kurven richtig, während spezielle wohl Doppelpunkte besitzen können. Wö.

L. Berzolari. Osservazioni alla nota del Prof. E. Ciani „Sopra le curve gobbe razionali di quinto ordine“. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 446-448.

Der Verf. macht darauf aufmerksam, daß die Sätze Cianis in seiner früheren, im vorstehenden Referat erwähnten Arbeit, insbesondere auch der erste von Marletta angefochtene Satz sich aus Resultaten des Verf. in einer schon älteren Arbeit (Rom. Acc. L. Mem. (4) **7**) herleiten lassen. Wö.

V. Snyder. On the quintic scroll having a tacnodal or oscnodal conic. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 182-186.

„Außer den geradlinigen Flächen fünften Grades mit drei Doppelkegelschnitten, die im Bull. **9**, 236-242 (F. d. M. **34**, 691, 1903) diskutiert wurden, gibt es noch andere besondere Typen. Zwei der Doppelkegelschnitte können zusammenrücken und einen Kegelschnitt mit Selbstberührung (tacnodal conic) bilden; oder alle drei können zusammenrücken und einen Kegelschnitt mit Oskulation (oscnodal conic) bilden. Die notwendige Bedingung dafür, daß eine Knotenlinie auf einer Regelfläche für zwei zusammenfallende Knotenlinien zu rechnen ist, besteht darin, daß die beiden Erzeugenden, welche in einem beliebigen Punkte der Kurve sich schneiden, in einer die Tangente der Kurve in jenem

Punkte enthaltenden Ebene liegen." Diese Bestimmung wird analytisch ausgedrückt. Die Erörterung des anderen Falles, bei dem alle drei Kegelschnitte zusammenrücken, geschieht im Anschlusse an die Dissertation des Verf. (Über die linearen Komplexe der Lieschen Kugelgeometrie. Göttingen 1895). „Eine Ebene durch eine beliebige Tangente des osknodalen Kegelschnitts schneidet aus der Oberfläche eine Kurve fünfter Ordnung aus, die sechs aufeinanderfolgende Doppelpunkte hat. Eine Ebene durch zwei Erzeugende enthält eine kubische Kurve mit Doppelpunkt, der die Erzeugenden als Doppelpunktstangenten besitzt." Lp.

E. Pascal. Sulla classificazione delle superficie di Kummer. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 688-699.

E. Pascal. La classificazione delle superficie di 5° ordine con quintica doppia. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 663-669.

Der Verf. benutzt zur Klassifikation der Kummerschen Flächen und der Flächen fünfter Ordnung mit einer Doppelkurve fünfter Ordnung ein rein formales, überaus einfaches Prinzip. Er bemerkt z. B., daß keine der zahlreichen Untersuchungen über die Klassifikation der bezeichneten Flächen fünfter Ordnung von der Frage nach der Realität oder dem Imaginärwerden der zehn auf der Fläche gelegenen Geraden ihren Ausgangspunkt nimmt, während der analoge Gedanke bei Flächen dritter Ordnung (Schläfli, Sturm, Cremona) und denjenigen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt (Zeuthen, Segre) längst verfolgt worden ist. Der Zusammenhang zwischen den in Rede stehenden Flächen fünfter Ordnung und den von den genannten Autoren behandelten Flächen dritter und vierter Ordnung ist folgender: Die Konfiguration der Geraden auf einer Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt ist dieselbe, wie die der 16 Geraden, welche übrig bleiben, wenn man von den 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung eine und die zehn, die von ihr geschnitten werden, fortläßt; analog ist die Konfiguration der zehn Geraden einer Fläche fünfter Ordnung mit Doppelkurve fünfter Ordnung dieselbe wie die, welche man erhält, wenn man von den 16 vorher genannten Geraden eine und die fünf von ihr geschnittenen fortläßt. Ähnliches gilt von der Kummerschen Fläche. — Die Methode des Verf. ist rein formal-kombinatorisch und stützt sich nur auf die Untersuchung der Konfiguration der auf den Flächen gelegenen Geraden. Im übrigen ist das Untersuchungsprinzip genau dasselbe wie das von dem Verf. in einer unmittelbar vorher veröffentlichten Arbeit (Referat nachstehend) benutzte. Z.

E. Pascal. Le varie forme delle curve storte di 6° ordine intersezioni complete di quadriche e cubiche. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 579-598.

Die Gruppe der 120 Tritangentialebenen einer allgemeinen Raumkurve sechster Ordnung ist mit der Gruppe der 120 Verbindungsebenen

von je dreien unter zehn Punkten isomorph. Der Verf. untersucht nun die speziellen Fälle: *a*) 64 reelle Tritangentialebenen (Trit.), vier reelle Zweige, Kurve diasymmetrisch; zwei Punkte komplex; *b*) 32 reelle Trit., drei reelle Zweige, Kurve diasymmetrisch; zwei Punktepaare komplex; *c*) 24 reelle Trit., drei reelle Zweige, Kurve orthosymmetrisch; die Ebenen verbinden die Seiten eines Vierecks mit sechs Punkten; *d*) 16 reelle Trit., zwei reelle Zweige, Kurve diasymmetrisch, drei Punktepaare komplex; *e*) acht reelle Trit., ein reeller Zweig, Kurve diasymmetrisch, vier Punktepaare komplex. Der Verf. untersucht noch den Fall des Auftretens von Doppelpunkten der Kurve. Wö.

V. Snyder. On the forms of sextic scrolls having a rectilinear directrix. American J. **27**, 77-102.

Der Verf. ergänzt und verbessert hier seine früheren Arbeiten über Regelflächen sechster Ordnung (American J. **25**, 59-84, 85-96, 216-268; F. d. M. **34**, 692, 1903) unter Beschränkung auf Flächen mit einer Leitgeraden. Die Einteilung ist folgende: A. Geschlecht 0: 1. einfache Leitgerade, 2. doppelte Leitgerade mit 0, 1, 2, 3 Doppelerzeugenden, 3. dreifache Leitgerade mit 0, 1, 2, 3, 4 Doppelerzeugenden, 4. vierfache Leitgerade, 5. fünffache Leitgerade. B. Geschlecht 1. C. Geschlecht > 1. Wö.

V. Snyder. On the forms of sextic scrolls having no rectilinear directrix. American J. **27**, 173-188.

Die Arbeit enthält Ergänzungen zu den früheren Abhandlungen des Verf., welche sich auf Regelflächen sechster Ordnung beziehen (siehe das vorhergehende Referat); sie betreffen Flächen mit zwei verschiedenen Doppelkegelschnitten, mit zwei ebenen Doppelkurven dritter Ordnung, mit dreifacher Raumkurve dritter Ordnung, mit Doppelkurve vierter Ordnung, endlich mit Selbstberührungsleitlinie. Wö.

P. Stäckel. Bestimmung aller Kurven, durch deren Translation Minimalflächen entstehen. Gött. Nachr. 1905, 343-357.

G. Scheffers. Bestimmung aller Kurven, durch deren Translation Minimalflächen entstehen. Gött. Nachr. 1905, 472-477.

S. Lie hat gezeigt, daß die Minimalflächen, die nicht nur durch Translation von Minimalkurven, sondern auch durch Translation eigentlicher Raumkurven mit nicht verschwindendem Bogenelement erzeugt werden können, aus den Scherkschen Minimalflächen und deren Ausartungen (Meusniers Schraubenfläche und Ebene) bestehen. — Der Verf. der ersten Arbeit beweist dies auf eine neue und einfache Weise, gelangt

aber schließlich zu dem (unrichtigen) Ergebnis, daß Lie eine Klasse von Minimalflächen übersehen haben müsse, da es unendlich viele Minimalflächen gäbe, die durch Translation erzeugt werden könnten und nicht zu den Scherkschen gehörten. In der an zweiter Stelle genannten Arbeit wird dieses Ergebnis berichtigt. Die Behauptung Lies, daß die Scherkschen Minimalflächen und deren Ausartungen die einzigen Minimalflächen sind, die sich durch Translation eigentlicher Raumkurven erzeugen assen, besteht zu Recht. Der in der ersten Arbeit gemachten Angabe, daß Lie nur den Nachweis der Existenz der Erzeugungen geführt habe, während dort die wirkliche Darstellung geliefert sei, wird in der zweiten Arbeit die Tatsache gegenübergestellt, daß in einer Arbeit von R. Kummer: „Die Flächen mit unendlich vielen Erzeugungen durch Translation von Kurven“ (Diss. Leipzig 1894, im Jahrbuch nicht angezeigt) nicht nur die Darstellung, sondern auch die Herstellung erzeugender Kurven allgemeinster Art (am Modell) geleistet worden ist. Es wird aber anerkannt, daß die erste Arbeit den speziellen Fall eines von Lie gelösten Problems „auf einem von Lie unabhängigen Wege in Angriff genommen hat; und darin liegt der bleibende Wert der Stäckelschen Arbeit, wenn man von den bezeichneten Irrtümern absieht“. Z.

S. Bernstein. Sur les surfaces minima. C. R. **141**, 558-559.

Der Verf. behandelt das Plateausche oder Dirichletsche Problem durch die „Parametermethode“, welche „die Lösung des Problems in Form einer Mittag-Lefflerschen Reihe in bezug auf einen Parameter α und in Form einer normalen Reihe in bezug auf x und y liefert. Diese Methode hat gezeigt, daß in den meisten Fällen die Möglichkeit des Dirichletschen Problems charakterisiert wird durch die Tatsache, daß die Lösung der fraglichen Gleichung keine singuläre analytische Linie haben kann (das soll heißen: wenn eine Lösung auf einer Seite einer analytischen Linie $x=f(\theta), y=\varphi(\theta), z=\psi(\theta)$ existiert, so läßt sie sich nach der anderen Seite der Kurve hin analytisch fortsetzen). Insbesondere kann man sich leicht überzeugen, daß im Falle der Minimalflächen das Plateausche Problem lösbar ist, wenn (vom Ref. gesperrt) der Satz richtig ist, daß eine Minimalfläche keine singuläre analytische Linie haben kann.“ Z.

G. R. Dick. Question 15516. Ed. Times (2) 7, 65.

Die Koordinaten

$$x=\varrho\cos\varphi,\ y=\varrho\sin\varphi,\ z=b\varphi+c\int[(\varrho^2+b^2)/(\varrho^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}\,d\varrho/\varrho$$

stellen Punkte einer Minimalfläche dar. Lp.

A. SÝKORA. Parallele Projektion der Schraubenlinie. Časopis. **34**, 91-92. (Böhmisch.)

Es wird ein elementarer Beweis dafür gegeben, daß die parallele Projektion der Schraubenlinie eine Zykloide ist. Pe.

G. GÉRARD. Sur l'hélicoïde développable. Mathesis (3) **5**, 241-244.

B. MÖLLERS. Über Normalsysteme, die mit der Rotations- und Schraubenfläche der Tractrix zusammenhängen. Münster. 85 S. 8°.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

C. GUICHARD. Sur les propriétés infinitésimales de l'espace non-euclidien. C. R. **141**, 170-175.

Bekanntlich ist die elliptische nichteuklidische Geometrie identisch mit der metrischen Geometrie der Richtungen im Raume von vier Dimensionen. Der Verf. führt das näher aus, indem er angibt, welche Gebilde des R_4 gewissen Kongruenzen und Kurvennetzen des elliptischen Raumes entsprechen, und zeigt dann an einer Reihe von Beispielen, wie infolgedessen seine früheren Untersuchungen über Orthogonalsysteme (F. d. M. **34**, 712, 1903) benutzt werden können, um eine Reihe von Problemen der nichteuklidischen Geometrie zu behandeln. z. B. die von Demoulin (oben S. 682) betrachtete Frage nach den Voßschen Flächen des nichteuklidischen Raums. El.

K. KOMMERELL. Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen. Progr. (Nr. 707) Karlsgymn. Heilbronn. 49 S. 8°.

Ist $z + it$ eine Funktion von $x + iy$, so führt die Auffassung von x, y, z, t als Koordinaten im vierdimensionalen Raum zu der im Titel erwähnten geometrischen Vorstellung.

„Das erste Kapitel behandelt die Krümmungsverhältnisse allgemeiner zweidimensionaler Flächen des R_4; . . .“ „Im zweiten Kapitel werden speziell die R-Flächen (d. h. die vom Verf. als Riemannsche Flächen bezeichneten) untersucht: dieselben sind geometrisch und funktionentheoretisch interessant.“ Die Krümmungsverhältnisse sind hier besonders einfach. „Weiter zeigt sich, daß die R-Flächen Minimalflächen des R_4 sind; man erhält so eine geometrische Deutung für das Dirichletsche Prinzip und den Greenschen Satz. Durch Projektion einer R-Fläche in eine Schar dreidimensionaler Räume erhält man eine Schar gewöhnlicher Flächen, die wir assoziierte Projektionsflächen genannt haben, weil sie in naher Beziehung zu einer Schar assoziierter Minimalflächen stehen.

Die Projektionsflächen sind alle auf einander flächentreu bezogen, haben in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß und besitzen quadrierbare Asymptotenlinien" (vgl. dazu Flächen von Dini, v. Lilienthal und einige Modelle von Dyck).

„.... Die R-Fläche vermittelt so in einfacher Weise die konforme Abbildung der XY-Ebene auf die ZT-Ebene. Die Tangential- und Normalebenen der R-Flächen sind eigentümlich im R_4 orientierte Ebenen und bilden einen Komplex. Die Gültigkeit des Cauchyschen Integralsatzes ist eine Folge dieser Orientierung der Tangentialebenen der R-Flächen."

Das Produkt zweier komplexen Größen wird schließlich als Rechteck im R_4 gedeutet, wodurch auch eine geometrische Interpretation des Integrals

$$\int F(x+iy)\,(dx+idy)$$

ermöglicht wird. — Soweit die in der Vorrede gegebene Übersicht.

Lwt.

P. H. Schoute. Over een gewrongen oppervlak van den zesden graad en het nulde geslacht in de ruimte R_4 van vier afmetingen. Amst. Ak. Versl. **14**, 485-494.

Nimmt man in zwei Ebenen x_1 und x_2 zwei projektivisch verwandte rationale C_3 an, bestimmt in den Ebenen die Mittelpunkte Q_1 und Q_2 der korrespondierenden zentralen Tripelinvolutionen auf den C_3 und bringt dann die Ebenen so im R_4 an, daß Q_1 und Q_2 in den Schnittpunkt P_{12} der Ebenen zusammenfallen, so ist der geometrische Ort der Verbindungslinien der Paare korrespondierender Punkte eine gekrümmte Fläche, die aus P_{12} durch einen quadratischen Kegelraum projiziert wird. In diesem liegen zwei Systeme von Ebenen, von denen jede des einen die Fläche in einer C_3' mit Doppelpunkt, jede des andern dieselbe in 3 Erzeugenden schneidet, wobei jede Erzeugende jede C_3 mit Doppelpunkt schneidet. Die Erzeugenden bringen alle C_3 und die C_3 alle Erzeugenden in projektive Verwandtschaft.

Wö.

F. Nicoli. Intorno agli spazii lineari a tre dimensioni considerati nel nostro spazio. Parte terza. Distanze ed angoli. Parte quarta. Soluzione grafica dei problemi fondamentali dello spazio lineare, a 4 dimensioni, di punti. Modena Mem. (3) **5**, 283-301.

Die darstellende Geometrie für den vierdimensionalen Raum ist verschiedentlich behandelt worden. Verf. bedient sich kotierter Projektionen. Ein Punkt A_a im R_4 wird bestimmt durch seine senkrechte Projektion A auf unsern Raum R_3 und seinen Abstand a vom R_3. A selbst wiederum wird durch seine beiden Projektionen A', A'' im Grund- und

Aufrißverfahren bestimmt. In den vorliegenden Teilen der Arbeit behandelt der Verf. die Konstruktionen von Strecken, Winkeln, die Aufgaben, welche sich auf das Schneiden und Verbinden der Grundelemente (Punkte, Geraden, Ebenen, lineare R_3) beziehen, und dergl. Die Untersuchungen sind einfachster Art und bedürfen keiner weiteren Auseinandersetzung. Stz.

F. Chizzoni. Numero dei punti doppii di una rigata dello spazio a quattro dimensioni. Modena Mem. (3) 5, 273-277.

Es bezeichne φ eine Regelfläche im Raum von 4 Dimensionen, n die Ordnung, p das Geschlecht von φ, v_q die Anzahl derjenigen Erzeugenden, welche q-fach auftreten; es enthalte φ ferner r mehrfache Kurven, deren Ordnungen durch die Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_r$, deren Vielfachheit durch die Zahlen $k_1, \ldots, k_r$ dargestellt werden. Dann enthält φ noch

$$\frac{1}{2}(n-2)\ (n-3) - 2\sum_1^r \mu_i k_i(k_i-1) - \frac{3}{2}\sum_q v_q \cdot q\,(q-1) - 3p$$

Doppelpunkte, die im allgemeinen nicht auf den mehrfachen Linien gelegen sind. Stz.

E. Veneroni. Intorno ad un fascio di varietà cubiche dello spazio a cinque dimensioni. Lomb. Ist. Rend. (2) 38, 523-537.

In einem linearen Raum von fünf Dimensionen [5] seien drei projektive Netze von [4] gegeben, welche als Träger drei beliebige Ebenen haben; drei beliebige entsprechende [4] schneiden sich dann in einer Ebene, und die so entstehenden ∞^2 Ebenen bilden eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit dritter Ordnung F_4^3, von der Veronese (vgl. F. d. M. **16**, 733, 1884) und Perazzo (F. d. M. **32**, 651, 1901) einige besondere Fälle studiert haben. In der vorliegenden Arbeit wird sie auf Grund ihrer Erzeugung methodisch untersucht.

Der Verf. beweist, daß die F_4^3 zwei gleichberechtigte rationale Scharen, jede von ∞^2 Ebenen enthält; zwei Ebenen derselben Schar schneiden sich im allgemeinen nicht, während zwei Ebenen verschiedener Scharen immer einen gemeinschaftlichen Punkt haben. Die F_4^3 ist mit einer elliptischen Doppelkurve 6-ter Ordnung C_6 versehen, welche der Ort der Schnittpunkte dreier entsprechenden [3] der gegebenen Netze ist. Alle F_4^3, welche jene C_6 als Doppelkurve haben, bilden einen Büschel, in welchem vier Veronesesche Flächen enthalten sind. Im allgemeinen Fall ist die F_4^3 6-ter Klasse; durch jeden Punkt des gegebenen [5] gehen acht ihrer bitangentialen [4], und ihre Berührungspunkte mit den tritangentialen [4] erfüllen eine Fläche 9-ter Ordnung. Die Berührungspunkte von F_4^3 mit einem quadritangentialen [4] gehören einer festen Ebene ω an; umgekehrt erschöpfen die [4], welche durch ω gehen, alle die quadritangentialen [4] von F_4^3; usw. La.

G. Marletta. Sulle curve razionali del quinto ordine. Palermo Rend. **19**, 94-119.

Die rationalen ebenen und räumlichen Kurven 5-ter Ordnung können bekanntlich als die Projektionen der (rationalen) Normalkurve C des Raumes [5] angesehen werden; eben dies ist der vom Verf. gewählte Gesichtspunkt. Daher fängt er (§ 1) mit einem Abriß (nicht ohne Zusätze) der Haupteigenschaften der Kurve C an, welche er als besondere Fälle der Normalkurven des Raumes $[n]$ ansieht. Eine erste Projektion der Kurve C (§ 2) führt auf die rationalen Kurven 5-ter Ordnung in [4], welche in der bekannten Klasse der Kurven $(n-1)$-ter Ordnung in $[n]$ enthalten sind. Eine zweite Projektion (§ 3) gibt die Raumkurven der genannten Ordnung und eine dritte (§ 4) die ebenen. Unter den vom Verf. aufgestellten Sätzen führen wir als Beispiel nur den folgenden an: „In jeder ebenen Kurve 5-ter Ordnung, welche keinen vierfachen Punkt besitzt, existiert eine bestimmte g_4^1, welche die Eigenschaft besitzt, daß ihre Punktquadrupel auf den Geraden eines Büschels zweiter Ordnung liegen.“ Bildet man nun nach bekannter Weise die Geraden des gewöhnlichen Raumes auf einer Quadrifläche des [5] ab, so entspricht einer Regelfläche 5-ter Ordnung und nullten Geschlechtes eine rationale Kurve 5-ter Ordnung. Daraus ergibt sich eine neue Methode zur Begründung der Eigenschaften jener Regelflächen, insbesondere zur Wiederauffindung der Klassifikation derselben, wie Schwarz sie zuerst in seinem allgemein bekannten Aufsatze: „Über die geradlinigen Flächen fünften Grades“ (J. für Math. **67**) aufgestellt hat.

Die Arbeit Marlettas gehört zur synthetischen Geometrie; sie bietet lehrreiche Anwendungen bekannter Verfahren auf die methodische Begründung von meist schon bekannten Sätzen. La.

L. Berzolari. Sui sistemi di $n+1$ rette dello spazio ad n dimensioni, situate in posizione di Schläfli. Palermo Rend. **20**, 229-247.

$n+1$ Geraden im R_n werden als „in Schläflischer Lage“ bezeichnet, wenn jeder lineare R_{n-2}, welcher n dieser Geraden schneidet, auch die $(n+1)$-te schneidet (also im R_3 4 Erzeugende eines Hyperboloids), ebenso heißen $n+1$ lineare R_{n-2} in Schläflischer Lage, wenn jede Gerade, welche n von ihnen trifft, auch den $(n+1)$-ten schneidet. Es gilt der Satz: Wenn die Verbindungsgeraden homologer Ecken zweier Pyramiden (von je $n+1$ Ecken) im R_n Schläflische Lage haben, so gilt dasselbe von den R_{n-2}, in denen sich die homologen Ebenen (= linearen R_{n-1}) der beiden Pyramiden schneiden; und umgekehrt. (Für $n=2$ ist dies der Desarguessche Satz). Eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine solche (Schläflische) Lage der Pyramiden ist die Existenz einer Fläche ($=n-1$ dimensionale Mannigf.) zweiter Ordnung, in bezug auf welche die beiden Pyramiden polarreziprok sind. — Diese zuerst von Schläfli gefundenen Sätze

werden hier durch einfache analytische Rechnungen hergeleitet. Wird eine Pyramide als Koordinatenpyramide angenommen, so erhält man die Koordinaten $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\,n+1}$ der Ecken P_i einer beliebigen zu ihr in Schläflischer Lage befindlichen, indem man $a_{ik} = a_{ki}$ annimmt. Diese Darstellung gestattet es, auch diejenigen Fälle in einfacher Weise zu diskutieren, in welchen die Fläche zweiter Ordnung nicht mehr allgemein ist, ferner solche Fälle, in denen zwei Pyramiden in mehrfacher Weise Schläflische Lage haben. Insbesondere werden Fälle behandelt, in denen man aus einer solchen Lage durch eine oder zwei zyklische Permutationen eines Teils der Ecken der einen Pyramide zu neuen Schläflischen Lagen geführt wird. Für $n = 3$ stellt die Figur zweier Möbiusschen Tetraeder einen solchen Fall dar. Stz.

L. Brusotti. Teoremi sulle piramidi di $n+1$ vertici dello spazio ad n dimensioni. Palermo Rend. **20**, 248-255.

Die Arbeit knüpft an die Dissertation von Guradze (Breslau, 1900) an, indem sie die daselbst für den R_3 geführten Untersuchungen auf den R_n ausdehnt. Die folgenden Sätze werden nachgewiesen:

1. Sind $A_1, \ldots, A_{n+1}$ die Ecken, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ die ihnen gegenüberliegenden R_{n-1} einer Pyramide, bezeichnet g eine Gerade, γ einen linearen R_{n-2}, so stellt

$$\gamma(A_1\, A_2 \ldots . A_{n+1}) \,\overline{\wedge}\, g(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots . \alpha_{n+1})$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Polarsystems dar, für welches A_i und α_i, g und γ reziprokpolar sind.

2. Hat man zwei Pyramiden mit den Ecken A_i, B_i und den gegenüberliegenden R_{n-1} α_i, β_i, und bezeichnet γ einen R_{n-2}, so gibt es eine und im allgemeinen nur eine Gerade g, für welche die Beziehung

$$g(\alpha_1 \ldots \alpha_{n+1}\, \beta_1 \ldots \beta_{n+1}) \,\overline{\wedge}\, \gamma(A_1 \ldots A_{n+1}\, B_1 \ldots B_{n+1})$$

besteht. Eine Ausnahme findet statt, wenn es quadratische Mannigfaltigkeiten $(n-1)$-ter Dimension gibt, welche durch alle Ecken A_i, B_i und zugleich durch γ hindurchgehen. Gibt es deren ∞^h, so gibt es ∞^{h+1} Geraden g, welche die angegebene Beziehung erfüllen.

3. Wenn die beiden Pyramiden in bezug auf eine quadratische Mannigfaltigkeit polarreziprok sind, so sind die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken und ebenso die R_{n-2}, in denen sich die entsprechenden R_{n-1} schneiden, in Schläflischer Lage (vgl. Ref. S. 720).

4. Sind im R_n $2n+1$ beliebige Punkte $A_1, \ldots, A_{2n+1}$, ferner auf einer Geraden $2n+1$ Punkte $H_1, \ldots, H_{2n+1}$ gegeben, so gibt es im allgemeinen einen R_{n-2} γ, welcher der Bedingung genügt:

$$\gamma(A_1 \ldots A_{2n+1}) \,\overline{\wedge}\, (H_1 \ldots H_{2n+1}).$$

Stz.

F. Chizzoni. Sugli spazi lineari contenuti in una varietà algebrica a più dimensioni. Modena Mem. (3) 5, 279-281.

Wir beschränken uns auf die Angabe des allgemeinsten der abgeleiteten Sätze, da derselbe alle andern als Spezialfälle umfaßt.

In einem n-dimensionalen linearen Raum S_n liege eine algebraische Mannigfaltigkeit r-ter Dimension Φ_r; sie stelle den Durchschnitt von $n-r$ $(n-1)$-dimensionalen (in S_n gelegenen) Mannigfaltigkeiten Φ_{n-1} dar, deren Ordnungen bzw. $m_1, \ldots, m_{n-r}$ seien. Wird alsdann

$$\nu_k = (k+1)(n-k) - \sum_{q=1}^{n-r} \binom{m_q + k}{k} \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

gesetzt, so enthält Φ_r ∞^{ν_k} lineare Mannigfaltigkeiten k-ter Dimension, falls $\nu_k > 0$ ist; sie enthält nur eine endliche Anzahl oder keine, wenn $\nu_k = 0$, bzw. < 0 ist. Stz.

L. Autonne. Sur les substitutions crémoniennes dans l'espace à plusieurs dimensions. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 379-382.

Es seien $x_1, \ldots, x_N$ Punkt- und $u_1, \ldots, u_N$ Ebenenkoordinaten im R_N. Es sei $\sum xu = 0$, so daß also die Ebene durch den Punkt geht und mit ihm ein Element bildet. Eine Gleichung, homogen in den x und homogen in den u, repräsentiert eine Mannigfaltigkeit, welche als integral bezeichnet wird, wenn je 2 Nachbarelemente in vereinigter Lage sind. Eine Transformation zwischen Elementen heiße cremonisch, wenn sie gleichzeitig birational und eine Berührungstransformation ist. Eine Mannigfaltigkeit heiße primordial, wenn sie durch eine cremonische Transformation aus einer solchen Mannigfaltigkeit hervorgeht, deren Elemente alle den Punkt gemein haben. Eine solche Mannigfaltigkeit ist immer integral. Die Dimensionen der Punkt- und Ebenenmannigfaltigkeiten, die sie zusammensetzen, hängen von zwischen 3 und N gelegenen Zahlen ab, die der Verf. charakteristische Ganze nennt. Eine gegebene integrale Mannigfaltigkeit ist primordial für eine oder keine cremonische Transformation. Wö.

G. Fubini. Sulla teoria delle ipersfere e dei gruppi conformi in una metrica qualunque. Lomb. Ist. Rend. (2) 38, 178-192.

Mit der vorliegenden Arbeit setzt der Verf. seine Untersuchungen fort (vgl. F. d. M. 34, 658 und 722, 1903) über die Gruppentheorie in dem n-dimensionalen durch seine Linearelemente $ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ definierten Raume. Die von ihm behandelte Frage besteht in der Bestimmung aller Räume, welche eine Gruppe besitzen, die eine Hypersphäre in eine Hypersphäre transformieren (mit dem Namen „Hypersphäre“ bezeichnet man bekanntlich den Ort der Raumpunkte,

welche von einem gegebenen Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ eine gegebene Entfernung x_{n+1} haben). Das Hauptresultat des Verf. ist in dem folgenden Satz enthalten: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die infinitesimale Transformation $X_0 = \Sigma \xi_\varrho \frac{\partial}{\partial x_\varrho} \left(\varrho = 1, \ldots, n, n+1\right)$ unter den Hypersphären des gegebenen Raumes in demselben eine Punkt- oder allgemeiner eine Berührungstransformation sei, besteht darin, daß X_0 eine konforme Transformation in einem Raume ist, welcher durch das folgende Linearelement definiert ist: $ds_0^2 = -dx_{n+1}^2 + \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$“. Wegen der Ableitung dieses schönen Satzes und seiner Folgerungen müssen wir auf die Originalarbeit verweisen. La.

P. Lorenzola. Sul luogo dei punti di contatto degli iperpiani passanti per un dato spazio lineare e tangenti alle forme di un dato sistema lineare. Batt. G. **43** [(2) **12**], 213-240.

Von Guccia (vgl. F. d. M. **25**, 1097, 1893 u. 1895) stammt die Betrachtung des Ortes der Berührungspunkte der Tangenten, die man an die Kurven oder Flächen eines Büschels von einem Punkte oder einer Geraden aus ziehen kann. Will man diesen Begriff auf den p-dimensionalen Raum $[p]$ ausdehnen, so muß man ein lineares System von ∞^k Hyperflächen der Ordnung m betrachten und den Ort der Punkte bestimmen, in denen die Hyperflächen des Systems von Hyperebenen des $[p]$ berührt werden, welche durch einen gegebenen $[k-1]$ gehen. Der Verf. findet, daß dieser Ort eine Hyperfläche von der Ordnung $(k+1) \times (m-1) + 1$ ist, welche durch den gegebenen $[k-1]$ geht, und deren Verhalten in den Grundpunkten des gegebenen Systems von ihm sorgfältig untersucht wird. Allgemeiner: ist noch immer jenes Hyperflächensystem gegeben und ferner ein $[k-h]$, so ist der Ort der Berührungspunkte von Hyperflächen des Systems mit Hyperebenen, welche durch diesen gehen, eine $(p-h-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Ordnung

$$(m-1)^{h+1}\left[\binom{k+h+2}{h+2} m - \binom{k+h+1}{h+2}\right],$$

deren Eigenschaften der Verf. beweist. Die so erhaltenen Lehrsätze geben, gehörig spezialisiert, eben so viele (zum Teil bekannte) Eigenschaften der Jacobiana eines linearen Hyperflächensystems.

Um zu solchen Schlüssen zu gelangen, bedient sich der Verf. wechselweise der Gleichungen und der direkten Überlegungen, je nachdem jene oder diese schneller zum Ziele führen. La.

U. Sbrana. I sistemi ciclici nello spazio euclideo ad n dimensioni. Palermo Rend. **19**, 258-290.

In einem euklidischen n-dimensionalen Raum bilden Kreise ein „zyklisches System“, wenn Hyperflächen existieren, welche zu allen jenen

Kreisen normal sind. Solche Systeme wurden schon von Darboux betrachtet (Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes **1**, 181). In der vorliegenden Arbeit werden sie einer eingehenden methodischen Untersuchung unterworfen. Der Verf. beschäftigt sich mit der Aufstellung eines Systems partieller Differentialgleichungen, von dem die Bestimmung aller zyklischen Systeme abhängt, die zu einer gegebenen Hyperfläche normal sind. Durch eine geschickte Ausdehnung der Resultate, welche für unseren Raum längst bekannt sind, werden die in Rede stehenden Systeme mit n-fachen Orthogonalsystemen und mit der sphärischen Abbildung in Verbindung gesetzt. Auch andere Sätze der gewöhnlichen Geometrie werden vom Verf., meist durch Anwendung von Formeln Bianchis, auf höhere Räume ausgedehnt. Dieselben anzuführen würde aber zu viel Platz einnehmen. La.

G. Z. GIAMBELLI. Le varietà rappresentate per mezzo di una matrice generica di forme e le varietà generate da sistemi lineari projettivi di forme. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_2$, 570-577, 660-667.

Die Ergebnisse der Abhandlung des Verf. „Ordine di una varietà più generale di quella rappresentata coll' annullare tutti i minori di dato ordine estratti da una data matrice generica di forme“ (Mem. Ist. Lomb. (3) **19**, 1904) sind zahlreicher Anwendungen oder Deutungen fähig. Einige werden im vorliegenden Aufsatze auseinandergesetzt, den der Verf. mit Recht als eine Fortsetzung der Richtung ansieht, welche Cremona in den fünf letzten Kapiteln seiner „Preliminari di una teoria geometrica delle superficie“ gekennzeichnet hat. Die Allgemeinheit der Giambellischen Untersuchungen erfordert den Gebrauch verwickelter (aber wahrscheinlich nicht zu vereinfachender) Symbole; daher rührt die Unmöglichkeit, ihre Resultate in wenige Zeilen zu verdichten. Bemerkt sei nur, daß in denselben eine Fülle schon bekannter geometrischer Sätze enthalten ist, und daß diese nicht nur die Geometer, sondern auch die Algebraiker interessieren werden wegen der Anwendungen, welche sie in der Eliminationstheorie erhalten können. La.

G. BOCCHETTA. Principi di geometria metrica differenziale negli iperspazi. Melfi: Grico. 26 S. 8°.

Kapitel 4.

Liniengeometrie (Komplexe, Strahlensysteme).

F. HAUSDORFF. Eine neue Strahlengeometrie. Zs. für math. u. naturw. Unterr. **35**, 470-483.

Eine umfangreiche Analyse von E. Studys Werk: Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, wobei besonders auf die neue, systematische

und erschöpfende Behandlung des Stoffes hingewiesen und nur bedauert wird, daß die Entwicklung sich im wesentlichen auf den euklidischen Raum beschränkt, während die nichteuklidische Geometrie als der innere Grund der meisten Analogien zwar viel genannt, aber nicht wirklich aufgedeckt wird. Wö.

J. Knoblauch. Grundformeln der Theorie der Strahlensysteme. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 373-374.

Der Verf. teilt mit, daß man in der Differentialgeometrie der Strahlensysteme gewisse, von den Parametern abhängige Größen vermeiden kann, indem man an Stelle der Ableitungen nach den Parametern Thetaoperationen, d. h. Differentiationen längs Kurven, einführt. Wö.

K. Zindler. Zur Differentialgeometrie der Linienkomplexe. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 358-360.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine Gerade (Achse), O ein fester Punkt auf ihr (Ursprung), ε eine feste Ebene durch sie (Ausgangsebene); ferner NG (wo N auf der Achse liegt) der kürzeste Abstand einer Geraden g von der Achse. Dann nimmt der Verf. als Koordinaten von g an: $NG=a$, $ON=z$, den Winkel α, den NG mit ε bildet, den Winkel ω, den g mit $\mathfrak{A}$ bildet. Die Fortschreitungsrichtung im Linienraum definiert der Verf., indem er sagt: alle Regelflächen, die sich längs einer geraden Erzeugenden berühren, haben in ihr dieselbe Richtung. Als Koordinaten der Fortschreitungsrichtung nimmt der Verf. z, α und den Verteilungsparameter $P=\lim(a/\omega)$. Ist nun die Achse ein Komplexstrahl, so besteht für die benachbarten Strahlen die Koordinatenrelation $P=2 \operatorname{tang} \alpha - m$, aus der sich die „Eigenschaften erster Ordnung“ ergeben. Für $P=0$ findet man hieraus die bekannte Relation, die den Punkten der Achse die Berührungsebenen ihrer Komplexkegel zuordnet. Die die Achse nicht schneidenden Nachbarstrahlen, welche Tangenten eines Zylinders mit Radius a und Achse $\mathfrak{A}$ sind und konstanten Verteilungsparameter P haben, berühren den Zylinder in einer C_4 und bilden mit $\mathfrak{A}$ den konstanten Winkel $\omega=\frac{a}{P}$. Bei einer Kongruenz sind z und P Funktionen von α; die erstere wird durch die Hamiltonsche Gleichung gegeben, während die letztere neu zu sein scheint. Wö.

A. L. Zaalberg. Differentiaal-meetkundige eigenschappen van stralenstelsels. (Differentialgeometrische Eigenschaften von geradlinigen Strahlensystemen.) Diss. Leiden: S. C. van Doesburgh, 113 S. 8°.

Das erste Kapitel enthält die übliche Ableitung der allgemeinen Eigenschaften der Strahlenkongruenzen, insbesondere die der isotropen Systeme. Sodann werden Strahlensysteme untersucht, welche von den

Tangenten eines auf einer gegebenen Fläche bestimmten Kurvensystems gebildet werden. Die allgemeinen Resultate finden Anwendung bei der Betrachtung der pseudosphärischen und anderer speziellen Strahlenkongruenzen. Kl.

C. Baffi. Sulle generazioni dei complessi tetraedrali. Bologna: Cuppini. 9 S. 8°.

Ist eine Raumprojektivität gegeben, von der A_1, A_2, A_3, A_4 die Ordnungspunkte sind, so bilden die ∞^3 Verbindungslinien der entsprechenden Punkte (oder die ∞^3 Schnittlinien der entsprechenden Ebenen) einen tetraedralen Linienkomplex Θ^2, welcher auch als die Gesamtheit der Geraden aufgefaßt werden kann, welche in den Flächen des Tetraeders A_1, A_2, A_3, A_4 liegen oder seine Ecken in Gruppen von gegebenem Doppelverhältnis projizieren. Jede Polarität π, von der A_1, A_2, A_3, A_4 ein selbstpolares Tetraeder ist, transformiert Θ^2 in sich selbst. Betrachtet man zwei π', π' solcher Polaritäten, so kann man Θ^2 als Inbegriff der Geraden betrachten, deren Polaren in bezug auf π' und π' sich schneiden. Diese Definition des tetraedralen Komplexes führt sogleich auf seine eindeutige Abbildung auf den Punktraum, wenn man dem Punkte P die Schnittlinie seiner Polarebenen in bezug auf π' und π' entsprechen läßt. La.

Z. P. Bouman. Bijdrage tot de kennis van den tetraedralen complex. Amst. Ak. Versl. 14, 294-299.

Der Verf. bestimmt die Doppelschar von Flächen vierter Ordnung derart, daß die Normalen aller durch einen Punkt gehenden Flächen in diesem Punkt Strahlen eines tetraedralen Komplexes sind. Als Spezialfälle ergeben sich Zylinder und Flächen zweiter Ordnung. Schließlich werden die Komplexkurven betrachtet, sowie die Kurven auf einer gegebenen Fläche derart, daß in jedem ihrer Punkte der Komplexkegel die Fläche berührt. Wö.

J. de Vries. Over een bijzonderen tetraedralen complex. Amst. Ak. Versl. 13, 600-605.

Die Normalen des Büschels ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsoide bilden einen tetraedralen Komplex, dessen Hauptpunkte der Mittelpunkt und die unendlich fernen Punkte der Achsen sind. Die Fußpunkte P_1 der von einem Punkt P_0 ausgehenden Normalen liegen auf einer Raumkurve dritter Ordnung ω, welche eine orthogonale kubische Hyperbel ist und durch P_0 und die Hauptpunkte geht. Die Kurven ω, die durch einen Punkt P_1 gehen, erfüllen den Komplexkegel von P_1. Die Polargerade einer Normale n_1 mit dem Fußpunkt P_1 ist wieder eine n_2 mit dem Fußpunkt P_2. Hierdurch entsteht eine involutorische Verwandtschaft zwischen den Fußpunkten der Normalen, durch welche eine beliebige Gerade in eine Raumkurve dritter Ordnung übergeht, der Komplex

selbst in einen Komplex von Raumkurven dritter Ordnung durch die vier Hauptpunkte. Der geometrische Ort der Komplexkegelschnitte, welche eine Gerade l als Sehne haben, ist eine F_4 mit acht Doppelpunkten und l als Doppelgerade. Wö.

J. DE VRIES. Over een groep van stralencomplexen met rationale complexkegels. Amst. Ak. Versl. **13**, 605-608.

Ein Komplex werde gebildet von den Transversalen der zusammengehörigen Strahlen eines Strahlenbüschels in einer Ebene σ mit dem Scheitel S und eines Strahlenbüschels n-ten Grades τ_n in einer Ebene τ, der zum ersten projektivisch ist. Der Komplexkegel P ist dann von der Ordnung $n+1$ und der Klasse $2n$ und hat PS als n-fache Erzeugende. Der Ort der Punkte P, für welche zwei Tangentialebenen des Komplexkegels durch PS zusammenfallen, ist ein Kegel von der Ordnung $2(n-1)$, der die Strahlenkurve τ_n aus S projiziert. Die Ebenen, welche Komplexkurven enthalten, für welche zwei Berührungspunkte mit der Schnittlinie von σ und τ zusammenfallen, bilden $2(n-1)$ Büschel mit Spitzen auf dieser Schnittlinie. Der Komplex besitzt einen n-fachen Hauptpunkt S und $(n+1)$ einfache Hauptpunkte (Schnittpunkte von zusammengehörigen Strahlen in σ und τ). Die Komplexfläche Λ einer Geraden l, d. h. die Umhüllung der Komplexstrahlen, die l treffen, ist vom vierten Grad mit l als $2n$-facher Geraden; sie besitzt noch eine $2n$-fache torsale Gerade und $6n$ einfache Geraden. Wö.

J. DE VRIES. Een groep van algebraische stralencomplexen. Amst. Ak. Versl. **13**, 703-708.

Die Strahlen a eines Strahlenbüschels mit Mittelpunkt A in der Ebene α sind projektiv zu den Kurven eines Kurvenbüschels n-ten Grades in der Ebene β, welche durch n^2 feste Punkte B gehen. Dann erzeugen die Geraden, welche je einen Strahl und die zugehörige Kurve treffen, einen Komplex $(n+1)$-ten Grades. Der geometrische Ort der Spitzen der Komplexkegel, die eine Doppelerzeugende besitzen, ist ein Kegel Δ mit Spitze A von der Ordnung $n(3n-1)$, der durch jede Gerade AB zweimal geht. α ist eine einfache, β eine n-fache Hauptebene des Komplexes. Der geometrische Ort der Doppelerzeugenden von Komplexkegeln ist ein Kegel $(3n-1)$-ter Ordnung mit Spitze A, der die AB zu Doppelerzeugenden hat. Der geometrische Ort der Spitzen von Komplexkegeln mit Rückkehrerzeugenden besteht aus $4(n-1)(3n-1)$ Erzeugenden des Kegels Δ. Die Komplexkurve einer Ebene hat deren Schnittlinie mit β als n-fache Tangente, ist also rational. Die Ebenen, deren Komplexkurven die n-fache Tangente zur Wendetangente haben, umhüllen eine ebene Kurve $(n-1)(n+2)$-ter Klasse. Zuletzt wird eine analytische Darstellung des Komplexes gegeben. Wö.

J. DE VRIES. Sur quelques complexes rectilignes du troisième degré. Arch. Musée Teyler (2) **9**, 553-572.

Wenn man die Strahlen eines Büschels den Strahlen eines ebenen Büschels zweiter Ordnung, oder auch den Strahlenpaaren oder Strahlentripeln eines involutorischen Strahlenbüschels eindeutig zuweist, erzeugen die Schnittgeraden homologer Strahlen unter Umständen einen Strahlenkomplex dritter Ordnung. Es werden im ganzen fünf derartige spezielle Komplexe untersucht. Kl.

S. S. BÜSCHGENS. Die Kongruenzen der Geraden und ihre Anwendung auf die Flächen konstanter Krümmung. Moskau Math. Samml. **25**, 490-500. (Russisch.)

Zuerst beweist der Verf. die Formeln: $\frac{1}{\varrho_v} = \frac{\cos\theta}{R_v}$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho_u} + \frac{\cos H}{T_{gr}}$,

wo θ den Winkel zweier Fokalebenen bedeutet, $\frac{1}{R_v}$ Normalkrümmung der Fläche S [Fokalfläche der Kongruenz der Tangenten zu den Kurven $v =$ konst. von S] für ihren Schnitt durch die Tangente zu $v =$ konst., $\frac{1}{\varrho_v}$ geodätische Krümmung derselben Linie, $\frac{1}{\varrho_u}$ dasselbe für $u =$ konst., $\frac{1}{T_{gr}}$ die zweite geodätische Krümmung von $v =$ konst. Er beweist weiter: Wenn bei der Biegung einer der Fokalflächen konstanter Krümmung die zweite sich auch biegt, so wird die entsprechende Kongruenz die Kongruenz der Normalen von konstanter Fokaldistanz. Umgekehrt, wenn beide Fokalflächen der Kongruenz der Normalen von konstanter Krümmung sind, so wird auch die Fokaldistanz konstant (Umformung und die Umkehrung des Bianchi-Ribaucourschen Satzes). Si.

C. L. E. MOORE. Classification of the surfaces of singularities of the quadratic spherical complex. American J. **27**, 248-279.

Von der Singularitätenfläche des quadratischen Kugelkomplexes, deren allgemeine Form, eine Fläche 24-ster Ordnung und Klasse, P. F. Smith (Amer. M. S. Trans. **1**, 371-390; F. d. M. **31**, 650, 1900) untersucht hatte, diskutiert der Verf. alle möglichen Spezialfälle nach den Methoden, die Weiler für die Singularitätenflächen des quadratischen Strahlenkomplexes in Anwendung gebracht hatte (Math. Ann. **7**, 145). Dieselben klassifizieren sich in: Nichtringflächen, Flächen mit einer Minimallinie als Bestandteil der Enveloppe, Ringflächen, abwickelbare Flächen, Flächen, zerfallend in Ringflächen und abwickelbare Flächen, Flächen, zerfallend in Minimallinien. Wö.

M. Stuyvaert. Sur les congruences de cubiques gauches. C. R. **141**, 750-752.

Mit Hülfe von (2, 3)-reihigen Matrizen, welche als Elemente lineare Formen enthalten, gelangt der Verf. zu einer Einteilung der Kongruenzen von kubischen Raumkurven in sechs Typen. Wö.

K. Petri. Über die in der Theorie der ternären kubischen Formen auftretenden Konnexe. Diss. München. 44 S. 8° (1903).

J. L. Coolidge. Les congruences isotropes qui servent à représenter les fonctions d'une variable complexe. II. Note. Torino Atti **40**, 202-218.

Der vorangehende Band der Atti di Torini enthält eine gleichbetitelte Abhandlung desselben Verf. sowie eine von Bianchi: „Sulla rappresentazione di Clifford delle congruenze rettilinee nello spazio ellittico", in der einige Bemerkungen gegen die erstere gemacht werden (vgl. F. d. M. **35**, 669, 1904). Bianchi bemerkt nämlich, daß der Coolidgesche Hauptsatz in einem Falle unrichtig ist. Coolidge hält jedoch sein Resultat für völlig richtig, indem er den Widerspuch auf den Mangel einer strengen Definition der „isotropen Kongruenzen" bei ihm wie bei Bianchi zurückführt. Er schlägt jetzt folgende Definition vor: „Eine isotrope Kongruenz im elliptischen Raum ist eine solche, für die der Ort der Grenzlagen aller Geraden, welche eine beliebige Kongruenzgerade und ihre unendlich nahen rechtwinklig schneiden, ohne Ausnahme aus zwei Strahlenbüscheln besteht, die untereinander in bezug auf die „absolute" Fläche polar sind; die Fokalfläche einer isotropen Kongruenz ist eine dieser Fläche umschriebene Developpable." Unter diese Definition fällt der Bianchische Ausnahmefall nicht; dagegen erkennt der Verf. an, daß einer seiner Sätze nicht richtig ist, und gibt die entsprechende Verbesserung. Ferner macht er auf die sphärische Darstellung der imaginären Geraden aufmerksam und wendet auf einige besondere Fälle die in Abh. I vorgeschlagene Darstellung einer monogenen Funktion einer komplexen Veränderlichen auf einer isotropen Kongruenz des elliptischen Raumes an. La.

C. J. Keyser. Concerning certain 4-space quintic configurations of point ranges and congruences and their sphere analogues in ordinary space. American J. **27**, 303-314.

Ordnet man resp. dem Kugelkomplex, der Kugelkongruenz und der Kugelreihe den Punktkomplex oder das Lineoid (d. h. den Inbegriff aller Punkte eines R_3 im R_4), die Punktkongruenz und die Punktreihe zu, so läßt sich der Doppelsatz: „Im R_4 bestimmen je vier unabhängige

Kugelreihen (Kugelkongruenzen) eine fünfte assoziierte Kugelreihe (Kugelkongruenz); die fünf Reihen (Kongruenzen) bilden eine Fünf-Konfiguration, wobei jede durch die vier andern als ihre assoziierte bestimmt ist", in den R_4 übertragen. Wö.

H. Beck. Die Strahlenketten im hyperbolischen Raum. Diss. Bonn. Hannover. 55 S.

Strahl ist in der hyperbolischen Geometrie der innerhalb der absoluten Fläche liegende Teil einer Geraden oder ihrer Polare, Punktstrahl der Berührungspunkt einer die absolute Fläche berührenden Geraden. Auf die ∞^4 reellen Strahlen des hyperbolischen Raumes lassen sich nach Study die reellen und imaginären Punkte der Ebene eindeutig abbilden. Das Bild einer Staudtschen Kette der Ebene nennt der Verf. Strahlenkette. Drei Strahlen eines Strahlennetzes (Gesamtheit der Normalen eines Strahls) bestimmen eine und nur eine Strahlenkette. Zur Kette reziprok ist der Kettenkomplex. Der Verf. bespricht weiter die verschiedenen Klassen der Strahlenketten und stellt die Ketten und Kettenkomplexe durch binäre Hermitesche Formen dar. Im letzten Abschnitt wird eine Strahlengeometrie im euklidischen Raume angedeutet. Wö.

Kapitel 5.

Verwandtschaft, Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

D. Montesano. Su le reti omaloidiche di curve. Napoli Rend. (3) **11**, 259-303.

Mit Recht hat der Verf. diese Arbeit dem verehrten Andenken Cremonas gewidmet, da sie in einem wichtigen Punkt eine Theorie vervollständigt, die mit dem Namen jenes Geometers beständig verbunden bleiben wird. Wir meinen die Lehre der eindeutigen Ebenentransformationen und die Fundamentalaufgabe, alle diejenigen zu bestimmen, welche eine vorgeschriebene Ordnung besitzen. S. Roberts, F. P. Ruffini und E. de Jonquières haben wohl versucht, diese Frage zu beantworten; aber ihre Methode (welche im Grunde eine Diskussion des berühmten diophantischen Systems

$$\sum i\,\alpha_i = 3\,(n-1),\quad \sum i^2 \alpha_i = n^2 - 1,$$

für gegebenes n ist) gibt kein Mittel, um die nicht-geometrischen (nur arithmetischen) Lösungen a priori auszuschließen. Um diesen Übelstand zu vermeiden, stellt der Verf. feine Untersuchungen über die gegenseitige Größe der Zahlen α_i an und führt eine Menge neuer Begriffe und Benennungen ein. Der Weg, den er eröffnet, wird wohl in Zukunft ver-

kürzt oder geebnet werden; doch ist er um so viel schöner und besser im Vergleich zu dem vorigen, daß er den wichtigsten Fortschritt bildet, den die in Rede stehende Theorie seit einigen Jahren gemacht hat.

Die Grenzen eines Berichtes gestatten nicht die Beschreibung der Montesanoschen Methoden; um aber eine oberflächliche Vorstellung seiner Resultate zu geben, führen wir die folgenden Theoreme an: „Hat ein homaloidisches Netz n-ter Ordnung p Fundamentalpunkte der Ordnungen $r_1, \dots, r_p$, so besteht die folgende Gleichung:

$$(n-1)\{p(n+1)-9(n-1)\} = \sum (r_i - r_k)^2.$$

In einem homaloidischen Netz n-ter Ordnung ist die Zahl der Fundamentalpunkte > 3, wenn $n > 2$, > 6, wenn $n > 5$, > 7, wenn $n > 8$, und > 8 wenn, $n > 17$ ist; hat das Netz p Fundamentalpunkte gleicher Multiplizität r, so nennt man es „symmetrisch"; von solchen Netzen gibt es nur 4, usw." La.

G. Biasi. Intorno alle trasformazioni cremoniane e ad una geometria analitica di grado superiore che ne deriva. Sassari: Gallizi. 27 S. 8°.

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung und weitere Entwicklung der Abhandlung: Coordinate triangolari di grado 2°, welche der Verf. im September 1903 dem dritten Kongreß der Professoren der Mathematik an den italienischen Mittelschulen vorgelegt hat. In ihr werden die ebenen Verwandtschaften untersucht, die durch Gleichungen dargestellt werden, welche aus denen einer Cremonaschen Transformation entstehen, wenn in ihnen die Veränderlichen nicht gewöhnliche projektive (homogene) Koordinaten sind, sondern zu der Klasse gehören, welche Biasi a. a. O. erforscht hat. Da in solchen Koordinaten eine Gerade nicht durch eine Gleichung ersten Grades dargestellt wird, so verlangen die von Cremona aufgestellten Sätze gründliche Modifikationen, welche der Verf. auch angibt; dadurch kommt er in die Lage, einige Begriffe und Theoreme zu verallgemeinern. Die so entstehenden Resultate sind nicht einfach genug, um hier einen Platz zu finden. Es sei nur mit dem Verf. bemerkt, daß die durch Cremona entdeckten Eigenschaften der Fundamentalkurven einer eindeutigen ebenen Verwandtschaft ihre Gültigkeit verlieren in den (möglichen) Fällen, daß die Fundamentalpunkte nicht unabhängig sind (d. h. drei auf einer Geraden, sechs auf einem Kegelschnitt, usf. liegen). La.

K. Zahradnik. Über eine birationale kubische Verwandtschaft und deren Anwendung. Wien. Ber. **114**, 669-691.

Es handelt sich um die Verwandtschaft, die in kartesischen Koordinaten am einfachsten in der Gleichung $(x_1 + iy_1)(x + iy) = ixy$ zusammengefaßt werden kann. Verf. hatte sie schon in einer früheren Arbeit (Wien, Ber. **113**, 973; F. d. M. **35**, 601, 1904) verwertet. Ist

$M(x, y)$ ein Punkt einer Kurve (M), so fälle man von ihm auf die Koordinatenachsen die Lote und verbinde deren Fußpunkte. Die Verbindungsgerade Π umhüllt eine Kurve (Π). Der Fußpunkt des Lotes vom Koordinatenanfangspunkt O auf Π ist der transformierte Punkt $M_1(x_1, y_1)$ von M und beschreibt die Kurve (M_1).

Ist O ein k-facher Punkt, der unendlich ferne Punkt der X-Achse ein l-facher, derjenige der Y-Achse ein m-facher Punkt von (M), so ist (M_1) von der Ordnung $3n - 2k - l - m$ und hat in O einen $(2n - k - l - m)$-fachen Punkt. Sind die Minimalgeraden durch O Tangenten der Kurve in diesem Punkte, so erniedrigt sich die Ordnung von (M_1) um weitere zwei Einheiten.

Es werden die Bildkurven der verschiedenen Kegelschnitte bei verschiedenen Lagen der letzteren zu den Koordinatenachsen untersucht; unter den Bildkurven treten auf: Rhodonee, gerades Zweiblatt, Lemniskate, Zissoide usw.

Aus M und dem Berührungspunkt der zugehörigen Tangente Π von (Π) oder aus M und der Tangente an (M) in M kann man die Tangente von (M_1) in M_1 leicht finden.

Es werden noch die umgekehrte Transformation und die zugehörige Tangentenkonstruktion betrachtet, sowie die Kurven (M) und (M_1), welche zu einer gegebenen (Π) gehören, allgemein und für einige besondere Fälle bestimmt, und schließlich wird die Änderung von (M) und (M_1), wenn bei fester (Π) die Lage des Punktes O zu ihr wechselt, an einem Beispiel erörtert. E. M.

R. Bricard. Sur la transformation d'Ernest Duporcq et sur celle de Lie. Nouv. Ann. (4) 5, 221-226.

E. Duporcq hatte (S. M. F. Bull. **27**, 146, 1899; F. d. M. **30**, 603) die bekannte Berührungstransformation von Lie, durch die den Punkten der Geraden des einen Raumes die Erzeugenden (der einen Schar) der Kugeln des andern zugeordnet werden, projektiv verallgemeinert derart, daß an die Stelle der Kugeln die Flächen zweiter Ordnung, die einer absoluten Fläche zweiter Ordnung umbeschrieben sind, treten. Jene Entwicklung Duporcqs war synthetisch; hier werden die expliziten analytischen Transformationsgleichungen hinzugefügt. E. M.

F. J. Dohmen. Darstellung der Berührungstransformationen in Konnexkoordinaten. Diss. Greifswald. Druck v. B. G. Teubner in Leipzig. 41 S. 8°.

Die in dieser Arbeit behandelte Frage hat Lindemann in seiner Bearbeitung der Vorlesungen von Clebsch (Bd. I, S. 1023ff.) unrichtig beantwortet; auch Lie hat sie nicht vollständig erledigt, denn er ist

nicht darauf eingegangen, in wie mannigfaltiger Weise die betreffende Darstellung möglich ist. Der Verf. untersucht zunächst, wann eine Transformation:

$$(1)\quad \begin{cases} x_i' = X_i(x_1, \ldots, u_{n+1}, u_1, \ldots, u_{n+1}), \\ u_i' = U_i(x_1, \ldots, u_{n+1}, u_1, \ldots, u_{n+1}) \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n+1)$$

in homogenen Punkt- und Ebenenkoordinaten x, u des R_n eine Berührungstransformation darstellt. Die X und die U müssen dazu in den x und u homogen sein von den Graden α, β und γ, δ, wo $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, und es muß das Gleichungssystem: $\sum u_i x_i = 0$, $\sum u_i dx_i = 0$, $\sum x_i du_i = 0$ bei (1) invariant bleiben. Man kann aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß vermöge (1) eine Relation von der Form: $\sum u_i' x_i' = \varrho \sum u_i x_i$ besteht, wo ϱ konstant ist, und dann ergibt sich: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 1$, während überdies:

$$(2)\quad \begin{cases} \sum u_i' du_i' = L \sum u_i dx_i + M \sum x_i du_i, \\ \sum x_i' du_i' = N \sum x_i du_i + P \sum u_i dx_i, \end{cases}$$

wo $L + P = M + N = \varrho$ und L, M, N, P Konstanten. Es stellt sich heraus, daß hierzu außer den Homogeneitätsbedingungen das Bestehen gewisser Differentialgleichungen:

$$(3)\quad (X_i X_k) = (U_i U_k) = 0, \ (U_i X_k) = \varepsilon_{ik} A$$

notwendig und hinreichend ist. Hier bedeutet:

$$(\varphi\chi) = \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} \frac{\partial\chi}{\partial x_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\chi}{\partial u_i} \right),$$

und A ist eine Konstante; ϱ, L, M, N, P sind durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und A bestimmt. Der Verf. zeigt jetzt, welche Form eine in bihomogenen Koordinaten x, u gegebene Berührungstransformation des R_n in gewöhnlichen Elementkoordinaten $y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_{n-1}$ bekommt, und gelangt nun auch umgekehrt dazu, jede in nicht homogenen Koordinaten gegebene Berührungstransformation in bihomogenen Koordinaten zu schreiben. Da jedoch der Übergang von nichthomogenen zu bihomogenen Koordinaten nicht vollständig bestimmt ist, so entwickelt er noch eine zweite Methode, die diesen Übergang ermöglicht. Diese beruht auf der Betrachtung der aequationes directrices, d. h. der Relationen zwischen den x und x' allein, die aus den Gleichungen der Berührungstransformation folgen, und die an sich schon die Berührungstransformation vollständig bestimmen. Schließlich untersucht der Verf. noch die infinitesimalen Berührungstransformationen und ihre Darstellung in bihomogenen Koordinaten. El.

H. B. Newson. Trasformazioni proiettive ad un parametro e loro gruppi continui. Batt. G. 43 [(2) 12], 33-62.

Der erste Teil der Arbeit enthält eine sehr ausführliche Theorie der allgemeinen projektiven Gruppe auf der Geraden, der zweite Teil behandelt ebenso die sechsgliedrige reelle Gruppe, die man erhält, wenn

man die reellen und komplexen Punkte der Geraden durch die Punkte der komplexen Zahlenebene repräsentiert. Das über eine frühere Arbeit des Verf. Gesagte (F. d. M. **34**, 722, 1903) gilt auch für die gegenwärtige.

El.

A. Süss. Die Gruppen, die mit der allgemeinen projektiven Gruppe der Ebene gleiche Zusammensetzung haben. Diss. Greifswald. B. G. Teubner, Dresden. 32 S.

Der Verf. bestimmt zunächst nach der von Lie angegebenen allgemeinen Methode alle transitiven Gruppen von Punkttransformationen, die mit der allgemeinen projektiven Gruppe der Ebene gleich zusammgesetzt sind, indem er für jeden Typus derartiger Gruppen einen oder mehrere Vertreter von möglichst einfacher Form aufstellt. Die meisten dieser Vertreter lassen sich in sehr einfacher Weise charakterisieren, namentlich werden gewisse dadurch erhalten, daß man die projektive Gruppe durch Hinzunahme von Differentialquotienten erweitert. Der Verf. stellt fest, bei welchen Typen dieser Fall eintritt. Um jetzt auch alle Gruppen von (homogenen) Berührungstransformationen von der betreffenden Zusammensetzung zu bestimmen, erledigt der Verf. den Fall, wo die acht charakteristischen Funktionen eine achtgliedrige Funktionengruppe bilden, nach der allgemeinen Methode von Lie. Da jedoch die praktische Anwendung dieser Methode ziemlich umständliche Rechnungen erfordert und überdies nicht auf einfache Gruppenformen führt, so untersucht der Verf. erst, welche der vorhandenen Gruppentypen durch die früher gefundenen Gruppen von Punkttransformationen repräsentiert werden. Dabei stellt sich heraus, daß alle die gesuchten Gruppen von Berührungstransformationen reduzibel sind; denn unter den früher gefundenen Gruppen ist schon für jeden Typus ein Repräsentant mit der geringsten möglichen Zahl von Veränderlichen vorhanden. Den Schluß der Arbeit bildet ein naheliegender, aber bisher noch nicht ausgesprochener Satz, mit dessen Hülfe man für jeden Typus von transitiven Gruppen von Punkttransformationen von gegebener Zusammensetzung ermitteln kann, welchen Typus von Gruppen von Berührungstransformationen er repräsentiert.

El.

P. Franck. Über die imaginäre Berührungstransformation von Lie, welche gerade Linien in Kugeln überführt. Hamb. Mitt. **4**, 177-203.

Der Verf. entwickelt zunächst die Formeln, durch die die Transformation dargestellt wird, wenn man die Ebene eines Flächenelementes durch ihre Richtungskosinus bestimmt, und stellt ferner alle Formeln auf, die nötig sind, um vollständig zu übersehen, wie zwei unendlich benachbarte Punkte einer Fläche des Geradenraumes durch zwei unendlich benachbarte Punkte der entsprechenden Fläche des Kugelraumes abgebildet werden, und umgekehrt. Der Liesche Satz, daß Haupttangentenkurven

des einen Raumes in Krümmungslinien des andern übergehen, ergibt sich so direkt durch Rechnung und wird vom Verf. in einer allerdings naheliegenden Weise verallgemeinert: Konjugierten Richtungen des ersten Raumes entsprechen im andern Raume solche, die zu den Hauptkrümmungsrichtungen harmonisch liegen. Der Verf. nennt solche Richtungen adjungiert und führt auch den Begriff adjungierte Kurvenscharen ein. Dem vom Verf. früher aufgestellten Satze über den Quotienten aus der normalen Krümmung und der geodätischen Torsion zweier konjugierten Kurven (s. F. d. M. **35**, 620, 1904) entspricht nun der Satz, daß zwei adjungierte Kurven einer Fläche in ihrem Schnittpunkte gleiche normale Krümmung, aber entgegengesetzt gleiche geodätische Torsion haben. Endlich werden noch die Kugeln des Kugelraumes untersucht, die den Tangenten einer Fläche des Geradenraumes entsprechen. El.

E. Study. **Über mehrere Probleme der Geometrie, die dem Problem der konformen Abbildung analog sind.** Sitz.-Ber. d. Niederrhein. Ges. f. Natur- u. Heilkunde, Bonn 1904, 50-60.

Führt man auf die Gruppe aller konformen Transformationen einer Kugelfläche die Berührungstransformation aus, die jedem Punkte den größten Kreis zuordnet, dessen Pol er ist, so erhält man eine Gruppe von Berührungstransformationen. Der Verf. bemerkt, daß auf jeder Fläche eine solche Gruppe von „äquidistanten" Berührungstransformationen existiert, die dadurch charakterisiert ist, daß die Schar der geodätischen Linien invariant bleibt, und daß sich der geodätische Abstand zwischen den Punkten zweier einer geodätischen Linie angehörigen Linienelemente nicht ändert. Er zeigt, daß diese Gruppe auf allen Flächen konstanter Krümmung durch eine Gleichung $z_1 = f(z)$ dargestellt werden kann, wo f eine willkürliche analytische Funktion ist und z eine komplexe Zahl von der Form: $z = \xi + \varepsilon\eta$; dabei ist $\varepsilon^2 = -1, +1, 0$, je nachdem das Krümmungsmaß positiv, negativ oder Null ist. Den dritten Fall hat übrigens Scheffers schon in einem Vortrage auf dem Heidelberger Kongresse ähnlich behandelt (vgl. Math. Ann. **60**, 525 ff. Referat oben S. 619-621). Der Verf. bespricht kurz eine Reihe von Sätzen, die sich auf diesem Standpunkte aus der Theorie der konformen Abbildung ergeben. Endlich erwähnt er, daß im nichteuklidischen Raume die Gruppe der äquidistanten Berührungstransformationen zehngliedrig ist wie die konforme Gruppe des betreffenden Raumes, daß aber die entsprechenden Fragestellungen im euklidischen Raume auf unendliche Gruppen von Berührungstransformationen führen. Erwähnt sei noch, daß der Verf. auf ein neues Problem aufmerksam macht, das er auch erledigen kann, nämlich alle Berührungstransformationen der Ebene zu bestimmen, die aus geschlossenen Kurven ebensolche von derselben Bogenlänge hervorgehen lassen. El.

U. Amaldi. I gruppi continui reali di trasformazioni conformi dello spazio. Torino Mem. (2) 55, 311-341.

Der Verf. bestimmt zunächst die größten Untergruppen der projektiven Gruppe einer Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung im R_4 und dann die größten reellen Untergruppen der reellen projektiven Gruppe einer reellen Kugel im R_4. Hieraus ergibt sich, daß jede reelle konforme Gruppe des R_3 innerhalb der ganzen konformen Gruppe mit einer reellen Gruppe von euklidischen Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen oder mit einer reellen Gruppe von nichteuklidischen Bewegungen gleichberechtigt ist; eine Ausnahme bildet nur die viergliedrige Gruppe, der im R_4 eine projektive Gruppe entspricht, die die Kugel und eine nicht schneidende Gerade invariant läßt. Nunmehr werden die reellen Gruppen von nichteuklidischen Bewegungen des R_3 und die reellen Gruppen von euklidischen und Ähnlichkeitstransformationen bestimmt, und schließlich wird eine Tabelle der reellen konformen Gruppen des R_3 gegeben, die nicht auf Gruppen von euklidischen Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen zurückführbar sind. Schließlich bespricht der Verf. noch gewisse eingliedrige konforme Gruppen und die imaginäre dreigliedrige Gruppe, bei der eine Minimalkurve dritter Ordnung invariant bleibt. Die Bestimmung der reellen konformen Gruppen des R_3 ist auch schon in der Dissertation von Hugo Stender, „Invariante Flächen und Kurven bei konformen Gruppen des Raumes" (Leipz. 1899) durchgeführt. Die Stendersche Tabelle, die übrigens infolge Anwendung zweckmäßiger Abkürzungen übersichtlicher ist als die Amaldische, enthält zum Teil einfachere Normalformen als die letztere, die leider nicht nach der Gliederzahl der Gruppen geordnet ist. Dagegen enthält die Stendersche Tabelle weniger dreigliedrige Gruppen als die Amaldische es ist daher wohl möglich, daß die erstere nicht ganz vollständig ist. El.

W. Ludwig. Über die Berührungstransformationen der Kreise auf einer Kugel. Deutsche Math. Ver. 14, 102-113.

Der Verf. fragt nach allen auf einer Kugelfläche existierenden algebraischen Berührungstransformationen, die jeden Punkt in einen einzigen Kreis, zwei verschiedene Punkte in zwei verschiedene Kreise und jeden Kreis in eine Kurve überführen, die aus zwei möglicherweise zusammenfallenden Kreisen besteht. Indem er die durch eine solche Transformation bestimmte algebraische Verwandtschaft zwischen den Ebenen des Raumes betrachtet — jeder Punkt kann ja als ein Kreis aufgefaßt werden, dessen Ebene die zugehörige Tangentialebene der Kugel ist —, kann er auf rein geometrischem Wege zeigen, daß es ∞^{10} derartige Transformationen gibt, und daß diese eine Gruppe bilden, daß also Lies zehngliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, bei der die Schar der Kreise invariant bleibt, durch die im Eingange angegebenen Voraussetzungen definiert ist. El.

S. Lattès. Sur les substitutions à trois variables et les courbes invariantes par une transformation de contact. C. R. **140**, 29-32.

Läßt eine Transformation des Raumes x, y, z den Koordinatenanfang invariant, und werden über die linearen Glieder gewisse Voraussetzungen gemacht, so gehen durch den Koordinatenanfang drei invariante analytische Kurven und auch drei invariante analytische Flächen, in einem besonderen Falle aber nur eine Fläche. Kann die Transformation als eine Berührungstransformation der Ebene aufgefaßt werden, so stellen nur zwei jener drei invarianten Kurven invariante Kurven der Ebene dar. Alle diese Sätze werden ohne Beweis mitgeteilt, ebenso die allgemeine Form der Kurven, die bei der Transformation durch reziproke Polaren in bezug auf die Parabel $2y - x^2 = 0$ invariant bleiben. El.

V. Retali. Sobre una trasformación plana doble de segundo orden. Rev. trim. de Mat. **5**, 199-221.

B. Konforme Abbildungen und dergleichen.

J. Thomae. Winkeltreue Abbildung einer durch zwei aufeinander senkrecht stehende geradlinige Schlitze begrenzten Ebene auf ein Rechteck. Leipz. Ber. **57**, 79-86.

Die Funktion $z = \mu$ ca w da w (Bezeichnungsweise nach der Sammlung des Verf.; vgl. S. 503 dieses Bandes) ist geeignet, das in der w-Ebene gelegene Rechteck $K \dots K + 2iK' \dots 2iK' \dots 0 \dots K$ zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich so auf die z-Ebene abzubilden, „daß den beiden der imaginären Achse parallelen Seiten bzw. die Linien von $-i:\lambda$ bis $i:\lambda$ (Schlitz I) auf der imaginären Achse und von μ bis ∞ (Schlitz II) auf der positiv reellen Achse der z-Ebene entsprechen. Die beiden anderen Rechteckseiten aber entsprechen der geraden Strecke von 0 bis μ so, daß gegenüberliegenden Punkten der Rechteckseiten gegenüberliegende Punkte auf den beiden Ufern dieser Linie entsprechen“. Dieses Rechteck, und damit die durch I und II begrenzte z-Ebene, wird auf einen Kreisring in einer neuen (ζ-)Ebene eindeutig winkeltreu abgebildet durch die Beziehung $w = \frac{1}{\pi} K' \lg \zeta$. (Vgl. hierzu die Arbeit von Bähr, S. 739 dieses Bandes.) „Durch die Beziehung $z = 1 : \mu$ sa$'$ w bildet sich das besprochene Rechteck in analoger Weise auf die geradlinig zwischen 0 und μ und zwischen $i:\lambda \dots \infty \dots -i:\lambda$ aufgeschlitzte z-Ebene ab.“ Ein anderer Fall, „in dem die z-Ebene durch einen Schlitz I längs der positiv imaginären Achse von 0 bis ∞, und durch den Schlitz II längs der positiv reellen Achse zwischen den Punkten μ und ν aufgerissen ist“, und der Fall, daß die beiden Schlitze, statt senkrecht auf einander zu stehen, in gerader Linie liegen, werden

im zweiten Teil behandelt. Die zuletzt genannte Aufgabe, die von Bennecke in Weierstraßschen Funktionen schon erledigt worden ist, wird hier nur deswegen noch einmal gelöst, weil dem Verf. die Lösung in den Jacobischen Funktionen durchsichtiger zu sein scheint. Z.

L. Wayland Dowling. On the conformal representation of certain isosceles triangles upon the upper half plane. Annals of Math. (2) **6**, 69-85.

Die Arbeit enthält bemerkenswerte geometrische Interpretationen eines Systems linearer unabhängiger Abelscher Integrale. Den Ausgangspunkt bildet das Integral, durch das die Abbildung der positiven Halbebene auf ein Dreieck mit rationalen Winkelverhältnissen vermittelt wird. Aus ihm leitet sich leicht ein vollständiges System linear unabhängiger Integrale der zugehörigen Riemannschen Fläche her. Es zeigt sich, daß diese Integrale die positive Halbebene auf andere Dreiecke abbilden, die demselben regulären Polygon einbeschrieben sind wie das erste (oder auch auf dasselbe Dreieck mit anderer Anordnung der Ecken).

Für gleichschenklige Dreiecke wird dann umgekehrt bewiesen: Ist t durch die Gleichung

$$t^n = \frac{z^2 - 1}{z^2}$$

definiert, so wird die Halbebene $R\left(\frac{z}{i}\right) > 0$ durch das vollständige System linear unabhängiger hyperelliptischer Integrale

$$\int \frac{t^{r-1}dt}{\sqrt{1-t^n}}$$

auf die Gesamtheit aller verschiedenen, einem regulären n-Eck einbeschriebenen gleichschenkligen Dreiecke mit den Winkeln $\frac{r\pi}{n}, \frac{r\pi}{n}, \frac{(n-2r)\pi}{n}$ konform abgebildet.

Die Erörterung der Fälle $n = 3, 4, 5, \ldots, 12$ bildet den Schluß.

Lwt.

J. Frischauf. Die Abbildungslehre und deren Anwendung auf Kartographie und Geodäsie. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 393-402, 477-497.

Der Verf. gibt eine Übersicht über die Grundgedanken dieser Theorie, die hauptsächlich zur Verwendung kommenden Methoden und die Geschichte ihrer Entwicklung. Lp.

G. HOLZMÜLLER. Bemerkung über Dupinsche Zykliden und logarithmische Spiralröhrenflächen und ihre quadratischen Einteilungen. Konforme Abbildung der Minimalschraubenregelfläche auf der Ebene. Arch. der Math. u. Phys. (3) 8, 333-342.

Die quadratischen Einteilungen bieten dem darstellenden Geometer ein Mittel, die Zykliden zu zeichnen. Die erste Figur wird so zu einem guten Übungsbeispiel, an dem die bekannten Eigenschaften der Fläche studiert werden können. Die zweite Figur bezieht sich auf logarithmische Spiralröhrenflächen, deren Krümmungszykliden Dupinsche Zykliden sind. Man findet in der Arbeit, anschließend an die Einteilung der Flächen in Quadrate, Abbildungsaufgaben behandelt.

Zum Schluß wird noch „die quadratische Einteilung der Minimalschraubenregelfläche, die jetzt über die Achse hinaus erweitert zu denken ist, zur einen Hälfte auf das Äußere, zur anderen auf das Innere des Einheitskreises konform abgebildet." Lwt.

E. BÄHR. Abbildung einer unendlichen Ebene, die durch Aufschlitzen längs zweier senkrecht zueinander stehenden Strecken zu einem zweifach zusammenhängenden Bereiche gemacht wird, auf ein Rechteck und einen Kreisring. Diss. Jena. 40 S. 8°.

J. THOMAE. Über eine Abbildungsaufgabe. Unterrichtsbl. f. Math. 11, 106.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Kapitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

R. MARCOLONGO. Meccanica razionale. I. Cinematica. — Statica. II. Dinamica. Principii di idromeccanica. Milano: Ulrico Hoepli. XII u. 271, VI u. 324 S. 12mo (Manuali Hoepli Nr. 352/3, 354/5).

Der erste Band dieses neuen und vortrefflichen Lehrbuchs der Mechanik enthält: A. Kinematik. 1. Operationen mit Vektoren. Systeme von Vektoren. 2. Geschwindigkeit und Beschleunigung. 3. Analyse der endlichen Bewegung eines starren Systems. Zusammensetzung endlicher Bewegungen. 4. Analyse der instantanen Bewegung eines starren Systems. 5. Stetige Bewegung eines starren Systems. B. Statik. 1. Zusammensetzung der Kräfte. 2. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten. 3. Gleichgewicht der Fadenkurven.

Der zweite Band behandelt: C. Dynamik. Prinzipien der Hydromechanik. 1. Die drei Grundgesetze der Bewegung. 2. Besondere Probleme über die Bewegung eines Punktes. 3. Das d'Alembertsche Prinzip und die allgemeinen Gleichungen der Dynamik. 4. Allgemeine Theoreme über die Bewegung eines Systems. 5. Dynamik der starren Systeme. 6. Anziehung der Ellipsoide und allgemeine Gesetze über die Newtonsche Potentialfunktion. 7. Prinzipien der Mechanik der Flüssigkeiten oder Hydromechanik.

Durch Knappheit in der Darstellung hat der Verf. es erreicht, in den beiden Bänden von der bekannten Ausstattung der Manuali Hoepli alles zu bringen, was für einen ersten Lehrgang der theoretischen Mechanik nötig ist. Aber er hat sich nicht auf einen abstrakten Lehrgang beschränkt, sondern eine große Zahl von Übungsbeispielen hinzugefügt, im ganzen etwa 230, und hat die Lösungen kurz skizziert. Der zweite Band enthält ein nach Stichwörtern geordnetes alphabetisches Sachregister. Das Werk reiht sich den übrigen Veröffentlichungen des verdienten Autors würdig an. Vergl. einen Bericht von Levi-Civita in Loria Boll. bibl. 8, 67-69, 1905. Lp.

P. Appell. Cours de mécanique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales conforme au programme du 27 juillet 1904. Deuxième édition entièrement refondue. Paris: Gauthier-Villars. 493 S. 8°.

Da der Titel dieses Buch als eine zweite Auflage ankündigt, hat man es wohl als Bearbeitung des Cours de mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale des arts et manufactures anzusehen, den wir F. d. M. **33**, 710, 1902, angezeigt haben, und mit dem es in vielen Partien wörtlich übereinstimmt. Aus den 271 Seiten jenes Buches sind allerdings jetzt 493 geworden; die Umarbeitung ist danach eine gründliche. Unter Bezugnahme auf das angeführte Referat begnügen wir uns jetzt mit einer summarischen Inhaltsangabe.

Vorbegriffe über die geometrischen Größen (Vektoren u. dgl.). Teil I. Kinematik. Kap. 1. Kinematik des Punktes. I. Geschwindigkeit. II. Beschleunigung. III. Bewegung, bezogen auf rechtwinklige oder schiefwinklige Koordinaten. IV. Diagramme einer Bewegung. Kap. 2. Elementare Bewegungen eines unveränderlichen Systems oder starren Körpers. Kap. 3. Änderung des Bezugssystems.

Teil II. Mechanik. Kap. 4. Freier Massenpunkt. Kap. 5. Arbeit, Kräftefunktionen, lebendige Kraft. I. Arbeit. II. Satz von der lebendigen Kraft. III. Punkt, angezogen von einem festen Zentrum im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung. Kap. 6. Nicht freier Massenpunkt.

Teil III. Statik. Kap. 7. Theorie der Momente. Kap. 8. Gleichgewicht eines Punktes, eines Systems. I. Massenpunkt. II. Gleichgewicht eines Punktes mit Reibung. III. Systeme von Massenpunkten. Kap. 9. Statik der starren Körper. I. Gleichgewichtsbedingungen eines freien Körpers. II. Äquivalente Kräftesysteme an einem starren Körper. III. Gleichgewicht der nicht freien Körper. Kap. 10. Maschinen. I. Gleichgewichtsbedingungen. Anwendung des Arbeitsbegriffs. — Den meisten Kapiteln sind Übungsaufgaben beigegeben.

Den Anforderungen an die Classes de mathématiques spéciales entsprechend, hat der Verf. von den Elementen der Differential- und der Integralrechnung Gebrauch gemacht. Der Schüler, der den Inhalt dieses Werkes verdaut hat, für dessen Tüchtigkeit der Name des Verf. bürgt, ist ausgezeichnet vorbereitet für jeden höheren Vortrag über analytische oder technische Mechanik. Lp.

P. Appell, J. Chappuis. Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de mathématiques A et B. Conformément aux programmes du 31 mai 1902. Paris: Gauthier-Villars. 306 S. 12mo.

Die jüngst in Kraft getretenen Lehrordnungen für die französischen Mittelschulen haben eine Flut neuer Lehrbücher hervorgerufen; charakteristisch für diese literarische Bewegung ist die Teilnahme der besten Gelehrten an der Abfassung dieser Schriften. Wir konnten in F. d. M. **34**,

728, 1903, ein von denselben beiden Autoren herausgegebenes elementares Lehrbuch von geringerem Umfange für gewisse Klassen anzeigen; das vorliegende Werk ist zur Vorbereitung für diejenigen Schüler bestimmt, welche sich später mathematischen Studien widmen wollen, und ist daher fast doppelt so stark. Während im allgemeinen die Kenntnis der Elementarmathematik zum Verständnis genügt, ist in der Dynamik des materiellen Punktes vom Begriffe des Differentialquotienten Gebrauch gemacht. Wir geben nur die folgende kurze Übersicht über den Inhalt.

Kap. I. Kinematik. § 1. Zylindrische Verzahnungen. § 2. Ebene Gelenksysteme. Kap. II. Mechanik. Kräfte an einem Massenpunkte. § 1. Grundlegende Prinzipien. § 2. Gleichgewicht eines freien Punktes. § 3. Gleichgewicht eines nicht freien Massenpunktes. Kap. III. Statik der starren freien Körper. § 1. Gleichgewichtsbedingungen. § 2. Äquivalenz zweier an einem starren Körper angebrachten Kräftesysteme. Kap. IV. Gleichgewicht der nicht freien starren Körper. Einfache Maschinen. § 1. Gleichgewichtsbedingungen. § 2. Einfache Maschinen. Kap. V. Dynamik. § 1. Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes. § 2. Arbeit. § 3. Satz von den lebendigen Kräften. § 4. Begriffe über die Maschinen. — Den einzelnen Kapiteln sind Übungsbeispiele zugefügt. Lp.

P. Appell. Sur quelques questions de mécanique rationnelle. Bull. mens. de l'Assoc. Franç. 1905, 267-278.

Bei der Eröffnung der Sitzungen der ersten Hauptabteilung der Association Française pour l'avancement des sciences zu Cherbourg gab Appell als Vorsitzender einen interessanten Überblick über diejenigen Fragen, welche in letzter Zeit Anlaß zur Prüfung der Prinzipien gegeben haben: Das Prinzip der Flächen bei seiner Anwendung auf den freien Fall einer Katze, die immer dabei auf ihre Füße zu stehen kommt. Die auf nicht holonome Systeme unanwendbaren Lagrangeschen Gleichungen und ihr Ersatz durch andere, besonders die von Appell angegebenen. Das Dreikörperproblem mit seinen durch Poincarés Untersuchungen gegebenen Fortschritten. Das Problem der Rotation eines Körpers um einen festen Punkt in der Arbeit der Frau von Kowalewski und in der Reihe sich anschließender Untersuchungen. Die Frage nach der Natur der Reibungskräfte, die von Painlevé in Fluß gebracht ist und einer experimentellen Forschung bedarf. Die von Hugoniot unter neuen Gesichtspunkten in Angriff genommene Frage der Fortpflanzung einer Bewegung innerhalb einer andern, in neuester Zeit besonders von Hadamard mit Erfolg behandelt. Die Bewegung der unterirdischen Gewässer nach Boussinesq und Maillet. Lp.

G. Jaumann. Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem modernen Standpunkte aus dargestellt. Mit 124 Abbildungen. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. VI u. 421 S. 8°.

Die „starre und dogmatische Form der heutigen Mechanik“ führt der Verf. darauf zurück, daß Newton dieselbe auf ein sehr spezielles

Erscheinungsgebiet, die Bewegungen diskreter starrer Körper in Luft, gegründet hat. In tunlichst vorurteilsloser Weise sei dagegen dieses grundlegende Gebiet nach dem Vorgange von Mach, Kirchhoff, Helmholtz darzustellen. Um möglichste Bewegungsfreiheit in mathematischen Formen zu haben, die zur Zusammenfassung physikalischer Beobachtungen geeignet sind, hat der Verf. auf die Vektorenanalysis nicht verzichten können, sie daher in kurzer Darstellung über das Buch passend verteilt. Diese Neuerung, die von Föppl in seinen Vorlesungen über technische Mechanik bereits vorsichtig angebahnt ist, bildet einen der augenfälligsten Züge der Schrift.

Das Gebiet, über welches sich die Darstellung erstreckt, ist ziemlich weit genommen. Der erste Teil handelt von der Bewegung starrer Körper in Luft, nämlich: I. von den Beschleunigungen, II. von den Gegenbeschleunigungen, III. von den starren Medien. Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Akustik auf 30 Seiten. Der dritte Teil ist der Bewegung der deformierten Medien gewidmet und bespricht in IV. die idealen Flüssigkeiten, in V. die elastischen und zähen Medien. Im vierten Teile ist die Kraftlehre auf acht Seiten zusammengedrängt. Ein sorgfältiges alphabetisches Sachregister macht den Beschluß.

Eine Eigentümlichkeit des Werkes, das doch mechanische Vorgänge erörtert, ist eine Geringschätzung der Mechanik. „Mit dem Fortschritte der Kenntnis der anderen Erscheinungsgebiete und der Kunst, dieselben treffsicher zu beschreiben, scheint die Mechanik ihren Vorrang immer mehr zu verlieren. Schon jetzt kann man vermuten, daß die neuen Gebiete der Physik, insbesondere die Elektrizitätslehre, mehr zum Verständnisse der mechanischen Vorgänge beitragen werden, als die Mechanik je zum Verständnis der übrigen physikalischen Vorgänge beigetragen hat.... Die Kraftlehre oder Dynamik nimmt in der Physik keinen anderen Rang ein, als die Akustik einnimmt, und als die Optik einnehmen würde, wenn die Lichterscheinungen völlig auf elektromagnetische Vorgänge zurückgeführt werden könnten. Jedoch ist der experimentelle und heuristische Wert der Akustik und mehr noch der Optik weit höher als jener der Dynamik, deren große Leistungen hinter uns liegen."

Wir wollen nur noch bemerken, daß, entgegen der Bezeichnung im ersten Teil, der Widerstand der Luft bei Bewegungen in der Luft nicht berücksichtigt ist. Lp.

J. W. Gibbs. Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik entwickelt besonders im Hinblick auf eine rationelle Begründung der Thermodynamik. Deutsch bearbeitet von E. Zermelo. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. XVI u. 216 S. 8°.

Das Original ist F. d. M. **33**, 708, 1902, angezeigt worden. Die Übersetzung schließt sich so eng an das Original an, wie es der Unterschied der Sprachen gestattet. Auch die Terminologie ist möglichst beibehalten. Die „Momente" des Originals sind durch „Impulse", der „Index of probability" durch „Wahrscheinlichkeitsexponent" wiedergegeben. Die

partiellen Differentialquotienten sind nach deutschem Gebrauche mit rundem ∂ gedruckt. Am Schlusse ist ein kurzes Sachregister für die verwendeten Kunstausdrücke hinzugefügt. „Möge das Werk in seiner neuen Form dazu beitragen, das Interesse und Verständnis für statistisch-mechanische Probleme bei deutschen Physikern und Mathematikern zu fördern."

Lp.

Aug. Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik. Erster Band. Einführung in die Mechanik. Dritte Auflage. XVI u. 428 S. Dritter Band. Festigkeitslehre. Dritte Auflage. XVI u. 434 S. Leipzig: B. G. Teubner.

Wenn wir hier die neue Auflage zweier Bände der weitverbreiteten Vorlesungen Föppls über technische Mechanik besonders erwähnen, so hat dies seinen Grund in einer Änderung des Planes des Werkes. Zur Entlastung des dritten und des vierten Bandes sind diejenigen Betrachtungen, welche der erste Vortrag doch nicht berücksichtigen kann, aus diesen beiden Bänden fortgelassen und sollen neben anderen Ergänzungen in einem fünften Bande vereinigt werden. Dadurch wird der Umfang jedes einzelnen Bandes ermäßigt, der zuerst zu erledigende Stoff wird übersichtlicher dargestellt, und der Techniker, der sich weitere Belehrung holen will, findet den geeigneten Stoff im letzten Bande vereinigt. — Die übrigen Änderungen sind nur solche, welche gewissenhafte Autoren mit bessernder Hand bei neuen Auflagen vorzunehmen pflegen. Lp.

E. Blau. Die Mechanik fester Körper. Lehrbuch in elementarer Darstellung für höhere technische Fachschulen und zum Selbstunterricht nebst einer Sammlung von 250 aufgelösten Beispielen. Mit 210 Abbildungen im Texte. Hannover: Max Jänecke. VII u. 263 S. 8°.

Das Buch gehört zu den Werken, welche die Mechanik ohne Anwendung der Infinitesimalrechnung zur Darstellung bringen, wie dies A. Ritter in seinem vortrefflichen Lehrbuche der technischen Mechanik vorbildlich geleistet hat. Die neueren Schriften, wie das vorliegende Buch, benutzen neben den elementar zugestutzten analytischen Methoden die den Ingenieuren auch sonst nötigen graphischen Hülfsmittel und erreichen dadurch gleichzeitig eine sofortige Veranschaulichung der Resultate. In der Zuspitzung auf die unmittelbare Verwendung in der Praxis liegt das charakteristische Merkmal dieser Literatur; begriffliche Vertiefung darf man in ihr nicht suchen. Für die im Titel genannten Bildungsanstalten, mit Auswahl auch für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen, ist das sauber durchgearbeitete Werk ganz brauchbar.

Lp.

P. ZECH. Aufgabensammlung zur theoretischen Mechanik nebst Auflösungen in dritter Auflage herausgegeben von C. Cranz unter Mithilfe von Ritter von Eberhard. Mit 206 Figuren im Text. Stuttgart: J. B. Metzlersche Buchhdl. (1906). IV u. 220 S. gr. 8°.

Schon die zweite Auflage dieser nützlichen Sammlung (F. d. M. **23**, 899, 1891) war unter der Mitwirkung von C. Cranz veröffentlicht worden. Nachdem der Verf. am 16. Jan. 1893 gestorben war, mußte für die jetzt nötig gewordene dritte Auflage der inzwischen aus Württemberg an die Militärtechnische Akademie berufene Professor Cranz als leitender Herausgeber eintreten, hat aber an einem seiner Zuhörer eine kräftige Stütze gefunden. Letzterer hat die nicht gerade schönen Figuren der zweiten Auflage durch neu gezeichnete ersetzt, die Lösungen zur Kontrolle durchgerechnet und Ergänzungen hinzugefügt. Im ganzen ist aber der ursprüngliche Charakter der Sammlung, die sich auf Aufgaben aus der ganzen Mechanik, einschließlich der Festigkeitslehre und der Hydrostatik erstreckt, gewahrt worden, und damit ist die Brauchbarkeit der neuen Ausgabe verbürgt und erhöht. Lp.

E. ANDING. Über Koordinaten und Zeit. Enzyklop. d. math. Wissensch. VI_2, 3-15.

„Die neuere Physik hat die Frage nach dem Bezugssysteme des Trägheitsgesetzes aufgeworfen. Nach der historischen Seite hin ist dieses Thema bereits in dem Artikel von A. Voss, Enzyklopädie IV_1, eingehend behandelt worden (F. d. M. **32**, 688, 1901). Dagegen ist hier der Ort, den astronomischen Standpunkt aufzusuchen, von welchem sich die Frage formell zur Entscheidung bringen läßt. Formuliert man den Inhalt der Himmelsmechanik so, daß sie die Bewegungen der Himmelskörper durch das Newtonsche Gesetz darstellen soll, so fehlt hier eine Angabe über das Koordinatensystem und die Zeitskala. Man schloß sich eben stillschweigend an diejenigen Systeme an, welche sich empirisch darboten: den Fixsternkomplex und die Drehung der Erde. Es liegt jedoch keine Notwendigkeit vor, innerhalb der Empirie in einem bestimmten Sinn eine bevorzugende Wahl zu treffen. Vielmehr ist es konsequent, wenn man die Definition mit den Worten fortsetzt: indem man neben den Konstanten der Darstellung gleichzeitig eben dasjenige Koordinatensystem und diejenige Zeitskala aus den Beobachtungen mitbestimmt, für welche diese Darstellung möglich ist. Dies ist der Gedanke, welcher im nachstehenden ausgeführt werden soll.“

1. Prinzip einer mechanischen Bestimmung des Bezugssystems. 2. Rein empirische Systeme. 3. Rein mechanische Systeme. Konstruktion derselben. 4. Das gemischte System der Planeten-Astronomie. 5. Ergänzung der dritten Komponente. Mechanische Bestimmung der Präzessionskonstante. Lp.

J. Richard. Sur le mouvement relatif et le mouvement de la Terre. Ens. math. 7, 450-457.

Der Verf. erblickt in den aus der Zentrifugalkraft folgenden Erscheinungen Erkennungsmittel für die Rotation als absolute Bewegung. Lp.

G. Monnet. Sur les théorèmes généraux de la mécanique et le calcul vectoriel. Ens. math. 7, 457-459.

Wie man in der Statik jetzt meistens mit den Grundbegriffen der Vektoren den Unterricht beginnt, so solle man, meint der Verf., auch in der Dynamik ähnlich verfahren, um die rein geometrische Natur mancher Sätze frei zu zeigen. Dies wird an einzelnen Formeln durchgeführt. Lp.

R. de Saussure. Les bases physiques et logiques de la mécanique. Revue scientif. (5) 3, 577-584.

I. Untersuchung der drei Grundbegriffe (vgl. F. d. M. **35**, 689, 1904). II. Über die physikalische Natur dieser Größen. III. Physikalische Aktion zwischen zwei Atomen. IV. Über das Wort „Kraft." Lp.

O. Linders. Zur Klarstellung der Begriffe Masse, Gewicht, Schwere und Kraft. Leipzig: Jäh & Schunke (Roßbergsche Buchhdl.). 22 S. gr. 8°.

Die „Klarstellung" enthält nur allbekannte Dinge, vom Standpunkte eines Technikers aus besprochen. Als für die Praxis geeignet empfiehlt der Verf. ein technophysikalisches oder technisches Maßsystem, das Dezimeter-Kilogramm-Sekunden-System (DKS-System). Lp.

F. Siacci. Sul principio dei lavori virtuali. Napoli Rend. (3) **11**, 46-55.

Wie der Verf. in der Einleitung hervorhebt, verfolgt dieser Aufsatz ein didaktisches Ziel, nämlich einen Beweis des Prinzips der virtuellen Arbeiten zu geben, der einerseits weder zu lang, noch zu kompliziert ist, andererseits aber auch der Strenge nicht ermangelt. Der Beweis stützt sich auf den als Prinzip angenommenen Satz: Wenn ein Punkt (zufolge einer zwischen den Koordinaten gegebenen analytischen Relation) sich nicht von einer Oberfläche entfernen kann, oder nur nach einer Seite derselben, so ist die Kraft, welche die Abtrennung verhindert, zur Oberfläche senkrecht. Der in der Tat recht einfache Beweis, der immerfort mit dem Begriffe der mechanischen Arbeit operiert, nimmt einige Hülfssätze auf, die der Verf. schon in einer lithographierten Vorlesung allgemeiner zugänglich gemacht hatte. Lp.

F. Siacci. Sul principio dei lavori virtuali. Nota II. Napoli Rend. (3) **11**, 466-470.

Der Beweis auf S. 46-55 desselben Jahrganges der Rendiconti ist, wie der Verf. jetzt bemerkt, nicht streng. Statt nun Verbesserungen anzubringen, verweist Siacci auf einen wenig bekannten Beweis des Prinzips der virtuellen Arbeit, den Lagrange auf S. 350-357 seiner Théorie des fonctions (1813) gegeben hat (Œuvres, T. **9**, 377-385). Dieser Beweis wird auf einem halb so großen Raume wiedergegeben, und außerdem wird er noch auf den Fall nicht umkehrbarer Verrückungen ausgedehnt.

Lp.

M. Réthy. Über das Prinzip der Aktion und über die Klasse mechanischer Prinzipien, der es angehört. Ungar. Ber. **20**, 289-291.

Selbstanzeige der Abhandlung, über welche in F. d. M. **34**, 760, 1903, berichtet ist. Lp.

Weitere Literatur.

A. Badoureau. Qu'est-ce que la mécanique? Revue scient. (5) **4**, 97-102 134-137.

W. M. Baker. Elementary dynamics. Second edition, revised. London: George Bell and Sons. X u. 318 S. [Nature **73**, 245.]

J. Boulvin. Cours de mécanique appliquée aux machines, professé à l'École spéciale du génie civil de Gand. 4e fascicule: Générateurs de vapeur. 2e édition. Paris: Bernard. VIII u. 320 S. 8°.

A. Bourgonnier et P. Rollet. Cours de mécanique élémentaire. Vol. I: Cinématique à l'usage des élèves des classes de première *C* et *D*. VII u. 201 S. Vol. II: Statique et dynamique (classes de mathématiques *A* et *B*. Préparation aux écoles navales de Saint-Cyr). Paris: Paulin. 288 S. 8°.

P. Bourguignon. Cours de cinématique théorique et appliquée. Vol. I: Cinématique théorique. à l'usage des élèves des écoles des arts et métiers. Paris: Paulin. 185 S. 8°.

S. Cappa. Corso di meccanica applicata alle macchine. Torino. 658 S. 8°.

O. D. Chwolson. Traité de physique. Traduit sur la deuxième édition russe et sur la version allemande par E. Davaux. Avec notes de E. et F. Cosserat. Vol. I, Part 1: Introduction; mécanique; méthodes et instruments de mesures. Paris: Hermann. 420 S. 8°.

G. Demeny. Mécanisme et éducation des mouvements. Paris: Félix Alcan. II u. 523 S. [Nature **72**, Suppl. V.]

A. DONADT. Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung für technische Mittelschulen und höhere Lehranstalten, insbesondere zum Selbstunterrichte, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Als fünfte Auflage der Einleitung in die Mechanik von H. B. Lübsen bearbeitet. Leipzig: F. Brandstetter. VIII u. 615 S. 8°.

A. W. DUFF. Elementary experimental mechanics: Kinematics, dynamics, elastic solids and fluids. New York: Macmillan. VII u. 267 S. 12mo.

S. DUNKERLEY. Mechanism. London: Longmans, Green and Co. VI u. 408 S. [Nature **72**, 4-5.]

W. D. EGGAR. Mechanics, a school course. London: Edward Arnold. VIII u. 288 S. [Nature **72**, 601.]

L. FREDEY. Les théories générales du changement. Revue scient. (5) **3**, 673-676.

R. GEIGENMÜLLER. Leitfaden und Aufgabensammlung zur Mechanik. Für technische Fachschulen und den Selbstunterricht. Erster Teil Elementarmechanik. Fünfte Auflage. Mittweida: Polytechnische Buchhandlung. VIII u. 303 S. 8°.

C. GUICHARD. Traité de mécanique. Ire partie. Cinématique, à l'usage des élèves des classes de première C et D. 3e édition. Paris: Vuibert et Nony. VIII u. 108 S. 8°.

C. GUICHARD. Traité de mécanique. IIe partie: Cinématique, statique, dynamique, à l'usage des classes de mathématiques A et B. Paris: Vuibert et Nony. VIII u. 196 S. 8°.

G. O. JAMES. Elements of the kinematics of a point and the rational mechanics of a particle. New York: Wiley. XII u. 176 S. 8°.

A. JAMIESON. Textbook of applied mechanics and mechanical engineering Vol. 2. 4th edition, enlarged. London: Griffin. 810 S. 8°.

G. KOENIGS. Introduction à une nouvelle théorie des mécanismes. Paris: Hermann. 56 S. 8°.

G. MANOUVRIER. Traité élémentaire de mécanique. Nouvelle édition. entièrement refondue. Paris: Hachette. 367 S. 16mo.

J. E. MAYER. Das mathematische Pensum des Primaners. Heft 19-20. Elemente des Mechanik. Leipzig: M. Schäfer. 86 S. 8°.

G. A. MERRILL. An elementary textbook of theoretical mechanics. New York: American Book Co. III u. 267 S. 12mo.

M. MERRIMAN. Elements of mechanics. Forty lessons for beginners in engineering. New York: John Wiley and Sons; London: Chapman and Hall. 172 S. 12mo. [Nature **72**, 601.]

M. MERRIMAN. Mechanics of materials. 10th edition, rewritten and enlarged. New York: Wiley. XI u. 507 S. 8°.

A. MORLEY. Mechanics for engineers, a textbook of intermediate standard. London: Longmans, Green and Co. XI u. 282 S. [Nature **73**, 1-2.]

A. W. PORTER. An intermediate course of mechanics. London: John Murray. VIII u. 422 S. 12mo. [Nature **72**, 601.]

F. ROSENBERG. First stage mechanics of solids. 5th edition. London: Clive. 288 S. 12mo. (Organic science series.)

E. J. ROUTH. Elementary part of a treatise on dynamics of a system of rigid bodies. Part I of a treatise on the whole subject. With examples. 7th edition. London and New York: Macmillan. 460 S. 8^{0}.

R. DE SAUSSURE. La géométrie physique. Revue scient. (5) **4**, 385-393, 481-489.

CH. STURM. Cours de mécanique de l'École polytechnique. Revu et corrigé par E. Prouhet. 5e édition, suivie de notes et énoncés de problèmes par A. de Saint-Germain. Nouveau tirage. 2 Volumes. Paris: Gauthier-Villars. XIV u. 279, XI u. 436 S. 8^{0}.

FR. WALTHER. Mechanik und Turnen. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 1-6.

E. WICKERSHEIMER. Les principes de la mécanique. Paris: Dunod. 132 S. 8^{0}.

Kapitel 2.

Kinematik.

A. GRÜNWALD. Darstellung aller Elementarbewegungen eines starren Körpers von beliebigem Freiheitsgrad. Untersuchungen, ausgeführt mit Unterstützung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen. Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 229-275.

Der Verf. gibt für jeden Freiheitsgrad eines starren Körpers Modelle einfacher Mechanismen an, welche, in geeigneter Weise angebracht, dazu dienen können, die oft höchst unübersichtlichen, die Bewegungsfreiheit des Körpers einschränkenden Bedingungen zu ersetzen. Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt im engen Anschluß an die Ballsche Theorie der linearen Schraubengebiete, über welche der Verf. in derselben Zeitschrift **48**, 49-108 (F. d. M. **33**, 690, 1902) eine ausführliche Studie veröffentlicht hat; außerdem wird aber auch eine stetige Beziehung auf Study: „Geometrie der Dynamen" (Leipzig, 1903) angestrebt. Für jeden Grad der Bewegungsfreiheit wird ein vollständiges Inventar aller Typen von instantanen Bewegungsmöglichkeiten zusammengestellt, wobei jeder Typus durch einen einfachen, genau beschriebenen Bewegungsmechanismus (Kombination von Schrauben) sich verwirklichen läßt. Die Typen werden nach der Zahl der dem beweglichen Körper gestatteten, voneinander unabhängigen Translationen geordnet, da dieser Einteilungsgrund sich bei der praktischen Ausführung als der zweckmäßigste erweist. Die aufgezeichneten typischen Mechanismen gestatten es, einen Apparat, allerdings mit auswechselbaren Bestandteilen, aufzubauen, welcher alle

(an einen starren Körper zulässigen und in einem bestimmten Augenblick die Bewegung bis auf einen beliebigen Freiheitsgrad) beschränkenden Bedingungen zu ersetzen imstande ist. Die Ergebnisse der Untersuchung sind am Schlusse der Abhandlung tabellarisch zusammengestellt. Lp.

F. Schur. Über die Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. Wüllner-Festschr. 69-76.

Koenigs hat in seinen „Leçons de cinématique“ (F. d. M. **28**, 615, 1897) für den Satz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten einen strengen analytischen Beweis gegeben, dem die Auffassung zugrunde liegt, daß der betrachtete Punkt sich einmal relativ innerhalb eines starren Körpers und dann mit diesem im absoluten Raume bewegt. Der Aufsatz bezweckt, diesen Beweis, der allen Ansprüchen an Strenge gerecht wird, in elementar-synthetischer Form zu entwickeln. Lp.

E. Rath. Zur Theorie der Schraubenbewegungen. Math. naturw. Mitt. (2) **7**, 9-19.

Fortsetzung der im Vorjahre begonnenen Veröffentlichung (F. d. M. **35**, 697, 1904). In dem jetzt vorliegenden Schlusse der Arbeit werden behandelt: Die Bewegung einer Geraden und die Bewegung eines Dreiecks. In dem letzten Paragraphen wird der Zusammenhang der Betrachtungen mit der Theorie der linearen Komplexe besprochen. Wir wiederholen aus dem vorjährigen Referate, daß nur die Methode der Behandlung mit Hülfe der Graßmannschen Methoden neu ist. Die Resultate der Arbeit sind bekannt. Lp.

F. J. Vaes. Krukbeweging. Nieuw Archief (2) **6**, 387-388.

Bei der Behandlung der Bewegung der Treibstange hat H. Lorenz in seiner „Dynamik der Kurbelgetriebe“ (F. d. M. **32**, 741, 1901) sich mit Annäherungen begnügt. Vaes bedauert dies, weil er selbst die vollständige Theorie der Bewegung ohne Annäherung in früheren Veröffentlichungen gegeben hat. Außer den in F. d. M. **28**, 626, 1897, besprochenen Artikeln zitiert er noch: „Beschouwingen over de overbrenging van rechtlijnige in renddraaiende beweging door drijfstang en kruk“ Tijdschr. v. h. Kon. Inst. v. Ing 1890/91, bl. 63-80, en 1891/92, bl. 52-58. — „Studie over de theorie van Radinger.“ Ebenda 1894/95, bl. 215-226. Lp.

J. CARDINAAL. Meetkundige plaatsen, die met de krukbeweging samenhangen. (Geometrische Örter, welche mit der Kurbelbewegung zusammenhängen.) Handel. Nederl. Nat. en Geneesk. Congr. **10**, 174-176.

Geometrische Konstruktion des Ortes der Beschleunigungsmittelpunkte und seiner Polarkurve bei der Kurbelbewegung. Kl.

I. THORNTON OSMOND. Treatment of simple harmonic motion. Science (N. S.) **22**, 311-312.

Eine Erläuterung der Behandlung für Anfänger ohne Benutzung der Infinitesimalrechnung. Lp.

J. J. TAUDIN CHABOT. Simple diagram connecting the various motions in the so-called Bohnenberger's machine. Phil. Mag. (6) **9**, 722-724.

Der Verf. meint, das Bohnenbergersche Maschinchen werde mit Unrecht vernachlässigt; es sei beim Unterrichte für die Lehre der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten ein wertvoller Apparat, falls man die Bewegung in einfacher Weise erläutere. Seine eigene Art der Behandlung mit Hülfe einer stereometrischen Figur wird dann dargelegt. Lp.

V. NOBILE. Sullo studio intrinseco delle curve di caccia. Palermo Rend. **20**, 73-82.

Die bekannte Frage der Verfolgungskurven wird hier in etwas allgemeinerer Form gestellt, als es gewöhnlich in den Werken über Kinematik und in den Anwendungen der Infinitesimalrechnung geschieht; außerdem werden die Methoden der natürlichen Geometrie benutzt, welche sich zu dieser Untersuchung besonders gut eignen. Die Fassung der Aufgabe ist die folgende: „Ein Punkt M durchläuft eine ebene Kurve C mit der Geschwindigkeit v; die von einem Punkte M' beschriebene Bahn zu finden, der sich in der Ebene von C bewegt, falls die Geschwindigkeit w von M' stets nach M gerichtet ist, und wenn das Verhältnis p der Geschwindigkeiten $v:w$ als Funktion der unabhängigen Veränderlichen bekannt ist, die man gewählt hat, und der Parameter, welche zur Bestimmung der relativen Lage von M und M' dienen." Zuerst werden die allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung aufgestellt; danach werden diese Gleichungen für eine Reihe von Fällen integriert. Lp.

R. SCHIMMACK. Ein kinematisches Prinzip und seine Anwendung zu einem Katenographen. Zs. für Math. u. Phys. **52**, 341-347.

Verf. beschreibt einen Apparat zur Erzeugung von Kettenlinien und gibt allgemein die Grundzüge zur mechanischen Konstruktion von Kurven,

deren natürliche Gleichung hinreichend einfach ist. Alle Apparate beruhen auf der Benutzung zweier scharfrandigen Rollen, deren Achsen senkrecht zueinander stehen, und die wegen dieser Eigenschaft Kurven durchlaufen, die sich wie Evolute und Evolvente verhalten. Le.

E. Bernardi. Soluzione del problema generale dello sterzo corretto con sole aste articolate per un sistema rotolante comunque complesso. Ven. Ist. Atti [(8) 7] **64**, 1331-1345.

Der Verf. verallgemeinert das im Vorjahre behandelte Problem (F. d. M. **35**, 701, 1904) und spricht es in folgender Form aus: „Gegeben sind zwei zu einer und derselben Ebene senkrechte Achsen; mit jeder von ihnen ist direkt und unveränderlich eine unbegrenzte in dieser Ebene liegende Gerade verbunden. Man soll sie mittels einfacher Gelenkstäbe so verbinden, daß die an sie gefesselten Geraden, während sie sich mit ihnen drehen, sich immer in einem Punkte einer beliebig gegebenen festen Geraden treffen, die in der Ebene derselben liegt." Der Lösung dieser Aufgabe ist der größere Teil der Arbeit gewidmet. Weder auf diese Lösung noch auf das zur Erläuterung angefertigte Modell können wir hier eingehen, weil eine verständliche Beschreibung ungebührlich lang werden würde. Lp.

Weitere Literatur.

A. Portuondo. Leyes de composición de movimientos helizoidales. Rev. Real Acad. Madrid **1**, 461-538 (1904).

M. J. Réveille. Étude synthétique et analytique du déplacement d'un système qui reste semblable à lui même. Thèse. Paris: Challamel. 157 S. 4°.

L. Vidal. Manuel pratique de cinématique navale et maritime, à l'usage de la marine de guerre et de la marine de commerce. Paris: Gauthier-Villars. XVII u. 222 S. 8°.

Kapitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

G. Lazzeri. Sulla composizione delle forze nello spazio. Periodico di Mat. (3) **3**, 97-103.

In diesem Aufsatze wird von den verschiedenen üblichen Methoden zur Lösung der Aufgabe die einer Transversalebene und eines Reduktionszentrums für den Fall genauer durchgeführt, daß die Transversalebene eine der Projektionsebenen ist und das Reduktionszentrum der unendlich

ferne Punkt der Normale zu dieser Ebene. „Da diese Konstruktion in den verbreitetsten Lehrbüchern der graphischen Statik kaum gestreift wird, habe ich diese Note für nicht ganz unnütz erachtet, um dieselbe mit einigen Einzelheiten nebst der zugehörigen Diskussion darzulegen."

Lp.

A. Tresse. Sur l'équilibre du corps solide. Nouv. Ann. (4) **5**, 153-160.

A. Tresse. Sur le mouvement d'un corps solide. Nouv. Ann. (4) **5** 220-221.

Mit Rücksicht auf die neuen Vorschriften für die Classes de mathématiques spéciales in Frankreich gibt der erste Artikel einen neuen und einfachen Beweis für die sechs Bedingungsgleichungen, die für das Gleichgewicht eines starren Körpers notwendig und hinreichend sind. Der Fall ebener Punktsysteme und der Fall geradliniger Punktsysteme ergeben sich dabei als merkwürdige Ausnahmefälle. In der zweiten Note wird die Betrachtung durch die Einführung der Trägheitskräfte auf die Bewegungslehre ausgedehnt. Lp.

P. Stäckel. Mindings Beweis für die Stabilität des Gleichgewichtes bei einem Maximum der Kräftefunktion. Deutsche Math.-Ver. **14**, 504-506.

In dem „Handbuche der theoretischen Mechanik" hat Minding 1838 einen Beweis für das Lagrangesche Theorem von der Stabilität des Gleichgewichtes veröffentlicht, der auf demselben Grundgedanken beruht wie der Dirichletsche Beweis von 1846. Dieser offenbar nicht beachtete ältere Beweis wird wörtlich mitgeteilt, und dann werden die Unterschiede beider Beweise kurz erläutert. Am Schlusse weist Stäckel auf den intimen wissenschaftlichen Verkehr hin, der zwischen Minding und Dirichlet in den Jahren 1831 bis 1843 bestanden hat. Lp.

A. Del Re. Sulle focali di Minding. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{14}_2$, 386-389.

Als Zusatz zu dem Mindingschen Theorem haben Darboux (1877) und Segre (1884) bewiesen, daß die beiden Mindingschen Fokalkegelschnitte den Ort eines Punktes bilden, mit dem man einen einem astatischen Kräftesystem unterworfenen Körper verbinden muß, damit dieser Körper unendlich viele Gleichgewichtslagen annehmen kann. Im Anschluß an seine frühere Note „Sulle quattro rotazioni che sovrappongono un triedro trirettangolo etc." (Napoli Rend. (3) **11**, 215; Referat S. 571 dieses Bandes) suchte der Verf. die vier Gleichgewichtslagen auf, welche ein derartiger Körper annehmen kann, sobald er an einen im Raume gewählten Punkt gebunden wird. Hierbei kam er nicht

nur auf eine anschauliche Weise zu dem gewünschten Resultate, sondern gelangte auch zur Konstruktion der Rotationen, welche den Körper aus einer allgemeinen Lage in eine jener unendlich vielen Gleichgewichtslagen überführen, und somit zur Erforschung der Verteilung jener Gleichgewichtslagen. Das wird in der Note durchgeführt. Lp.

F. Rogel. Über die graphische Zusammensetzung von Kräften. Prag. Ber. 1905, Nr. 20, 26 S.

Die Arbeit gibt eine Lösung der alten Aufgabe, Kräfte graphisch zusammenzusetzen. Die Kräfte werden durch ihnen proportionale Strecken auf den Wirkungslinien selbst dargestellt. Die Anfangspunkte einerseits, die Endpunkte andererseits werden als gleich schwere Massenpunkte aufgefaßt, und von diesen sowohl, wie von jenen wird der Schwerpunkt aufgesucht. Die Verbindungsstrecke des Schwerpunktes aller Anfänge mit demjenigen aller Enden (Schwerstrecke) gibt bei Kräften, die durch einen Punkt gehen, direkt Richtung und Lage sowie einen bestimmten und bekannten Bruchteil der Größe der Resultierenden an. Bei Kräften, die in einer Ebene liegen, ohne durch einen Punkt zu gehen, kann man aus der Schwerstrecke direkt nur auf Größe und Richtung der Resultierenden schließen, die Lage oder ein etwa sich ergebendes Kräftepaar muß durch Hülfskonstruktionen ermittelt werden. Auch bei Kräften im Raum wird die Schwerstrecke zur Auffindung der Zusammensetzungsresultate (Kraftkreuz, Zentralachse etc.) benutzt.

Der Verf. scheint nicht zufrieden mit der allgemein verbreiteten Methode der Kräftezusammensetzung durch Krafteck und Seileck. Ref. kann aber nicht finden, daß er Besseres an ihre Stelle gesetzt hätte. „Reichliche Kontrollbehelfe“, die der Verf. mit Recht bei seiner Methode hervorhebt, bietet auch das Seileck, und der Verzicht auf eine „seitwärts zu zeichnende Hülfsfigur“ sowie die „minimale Inanspruchnahme der Zeichenfläche“ geschieht beim Verf. auf Kosten der Übersichtlichkeit, wie seine Abbildungen 6, 7 und 9 zeigen. Die bei der Seileckmethode durchgeführte Trennung der Größen- von den Lagenbeziehungen und die Behandlung jener in einer „Hülfs“figur ist doch gerade der große Fortschritt, dem die Zeichnungen der graphischen Statik ihre leichte Kontrollierbarkeit durch einen Dritten und damit ihre Einführung in die Praxis verdanken. Auch bei der Seileckmethode kommt man über die Schwierigkeiten, die aus ungünstigen Lageverhältnissen (unzugängliche Schnittpunkte, spitze Schnitte) entstehen, mit einiger geometrischer Gewandtheit leicht hinweg. — Wäre die Arbeit vor Culmann erschienen, so hätte sie wahrscheinlich Einfluß ausgeübt. — Der Zugang zu den geistreichen Gedanken wird durch allzu knappe Darstellung und Mangel an Übersichtlichkeit erschwert. Ldt.

D. De Francesco. Sul moto di un filo e sull' equilibrio di una superficie flessibile ed inestensibile. Napoli Atti (2) **12**, Nr. 5, 5 S., Nr. 6, 9 S.

Ein Satz von Morera (F. d. M. **15**, 796, 1883) über das Gleichgewicht der biegsamen und unausdehnbahren Oberflächen hat den Verf. auf den Gedanken gebracht, eine derartige Oberfläche als durch die Bewegung eines Fadens entstanden sich vorzustellen und die Beziehungen zwischen den Kräften aufzusuchen, welche die Bewegung des Fadens hervorrufen, und denjenigen, welche die Oberfläche im Gleichgewicht halten. Die Untersuchung solcher Beziehungen bildet den Gegenstand des ersten Teils der Arbeit. In dem zweiten Teile werden solche Bewegungen erforscht, bei denen die Folgelagen des Fadens eine Familie Geodätischer der Oberfläche bilden, oder bei denen der auf sich selbst gleitende Faden eine konstante Gestalt zeigt. Von bemerkenswerten Sätzen seien die folgenden erwähnt: Die gesamte Spannung, welche auf der in Gleichgewicht befindlichen Oberfläche über ein Element vdt der Bahn hinweg stattfindet, ist gleich dem Impuls der Spannung T des Fadens in demselben Punkte während der Bewegung, und die gesamte Spannung über ein Element ds einer Erzeugenden hinweg ist gleich der Bewegungsgröße desselben Fadenelementes, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Die Totalkraft, welche auf das Oberflächenelement $d\sigma$ wirkt, ist gleich dem Impulse der bewegenden Kraft, die auf das Fadenelement ds wirkt. — „Gleitgeschwindigkeit" heiße die Projektion der Geschwindigkeit v eines Fadenelements ds am Punkte $M(s, t)$ auf die Tangente in M an s. Wenn der Faden bei seiner Bewegung eine Oberfläche erzeugt, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß er sich in jedem Augenblicke längs einer Geodätischen der Oberfläche verschiebt, darin, daß alle seine Punkte in demselben Augenblicke dieselbe Gleitgeschwindigkeit besitzen. — Der Fall, daß die äußeren Kräfte ein Potential haben, wird besonders untersucht. Lp.

H. Müller-Breslau. Beiträge zur Lehre vom Gleichgewicht sandförmiger Massen. Berl. Ber. 1905, 301.

„Es wird ein einfaches Näherungsverfahren zur Bestimmung des Drucks an gekrümmten Gleitflächen angegeben und zur Berechnung des Erddrucks auf Stützmauern verwertet. Daran schließen sich Mitteilungen über Versuche, die Gestalt der Gleitfläche photographisch zu bestimmen."
Lp.

E. Almansi. Sull' equilibrio dei sistemi disgregati. Torino Atti **40**, 939-966.

Als solche zerkörnten Systeme soll man sich etwa vorstellen vollkommen trockenen Sand, kiesartige Massen, einen Körper, der aus einer

sehr großen Zahl sehr kleiner Metallteilchen gebildet ist. Wir berichten über die vom Verf. angestellten Betrachtungen mit seinen Worten.

Im Gleichgewichtszustande besitzen derartige Systeme hauptsächlich zwei Eigenschaften:

a) Die inneren Drucke genügen denselben Bedingungen, welche für die gewöhnlichen elastischen Körper gelten.

b) Bei einem beliebigen Oberflächenelemente, welches in dem vom Systeme eingenommenen Raume liegt, kann der Winkel θ, den die von der einen Seite des Elementes ausgehende Normale mit dem auf die entgegengesetzte Seite einwirkenden Druck bildet, nie einen gewissen Wert Θ übersteigen, der von der Natur des Systems abhängt.

Was die erste Eigenschaft anlangt, so betrachte man beispielsweise eine aus ganz feinem und dichtem Metallstaub gebildete Kugel, die von Drucken, welche auf ihre Oberfläche wirken, im Gleichgewicht gehalten wird. Es wird nicht nötig sein, daß derartige Drucke zu der Oberfläche selbst normal sind; allein der von dem Drucke mit der inneren Normale gebildete Winkel darf in keinem Punkte den Winkel Θ übertreffen. Besteht das Gleichgewicht, so dürfen wir festhalten (und darin besteht die Eigenschaft a), daß die Verteilung der Drucke im Innern der Kugel dieselbe ist, welche stattfände, wenn sie aus einem Metallstücke gebildet wäre, wenn nämlich alle Teilchen der zerkörnten, im Gleichgewicht befindlichen Kugel in den Punkten, wo sie sich berühren, zusammengelötet wären.

In der Arbeit sind die beiden Eigenschaften a) und b) nicht a priori zugelassen, sondern aus anderen Hypothesen hergeleitet, von denen zwei fundamental sind. Mit der ersten werden die Deformationen ermittelt, welche ein zerkörntes System erfahren kann; mit der zweiten wird unter Annahme der Berührung eines solchen Systems mit anderen Körpern die für das Gleichgewicht nötige und hinreichende Bedingung festgestellt.

Die Formel, in der diese zweite Bedingung niedergelegt ist, kann als der Ausdruck des Prinzips der virtuellen Arbeiten in seiner allgemeinsten Form angesehen werden.

Das ganze erste Kapitel der Arbeit dient zur Feststellung der Eigenschaften a) und b). In den folgenden Kapiteln und in einer in Aussicht genommenen zweiten Abhandlung werden die Folgerungen gezogen, die sich aus den erwiesenen Eigenschaften ableiten lassen.

Als Vorläufer in der Anstellung ähnlicher Betrachtungen wird Boussinesq genannt mit einer langen Reihe von Veröffentlichungen aus den Jahren 1873-1885, wo aber wesentlich andere Voraussetzungen gemacht seien. Ref. gestattet sich, auf das Buch von Reynolds hinzuweisen: „The sub-mechanics of the universe" (F. d. M. **34**, 37, 1903).

Lp.

P. Pizzetti. Relazioni fra i momenti di inerzia di un corpo del quale la funzione potenziale è simmetrica intorno ad un asse. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 357-364.

Für die sphäroidische Gestalt der Erde, bei der die Oberfläche als eine des äußeren Gleichgewichts angenommen wird, zeigt man, daß die innere Verteilungsart der Masse derartig sein muß, daß die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind: 1. Das Massenzentrum fällt mit dem Mittelpunkt des Ellipsoids zusammen. 2. Die Rotationsachse der Planeten ist eine Hauptträgheitsachse, und die beiden anderen Hauptträgheitsachsen sind einander gleich. Die üblichen Beweise dieser Sätze gehen von angenäherten Abschätzungen der äußeren Potentialfunktion aus. Pizzetti zeigt, daß jene Eigenschaften genaue und notwendige Folgen der Annahme sind, daß die bezeichnete Gleichgewichtsfläche eine Drehfläche um die Achse der täglichen Rotation und symmetrisch in bezug auf eine zur Achse senkrechte Ebene (Äquator) ist. Allgemeiner werden die Beziehungen aufgesucht, die aus der angeführten Annahme für die Trägheitsmomente höherer Ordnung fließen. Lp.

C. Spelta. Sulla determinazione della massa totale e dei momenti principali centrali d' inerzia. Batt. G. 43, 297-304.

Ein Massensystem habe den Schwerpunkt O, die Masse M und als eine Hauptträgheitsachse die Gerade s. Die Punkte $O_1, O_2, O_3, \dots$ liegen auf s in den Abständen bzw. $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ von O. Man betrachte die Trägheitsellipsoide für $O, O_1, O_2, O_3, \dots$ und ihre zu s senkrechten Hauptschnitte $\xi, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ Die Halbachsen derselben seien (a, b). $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$, wo stets $a_i > b_i$. Das vom Verf. gelöste Problem ist dieses: Zwei Punkte O_1 und O_2 sind willkürlich auf s angenommen; von den sechs Verhältnissen

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}; \frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1} \qquad \left(\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}\right)$$

sind zwei beliebige bekannt. Man soll M berechnen und außerdem die Achsen von ξ nach Größe und Lage bestimmen. Am Ende des Artikels wird die Lösung eines viel allgemeineren Problems angedeutet. Lp.

C. Heumann. Über Trägheitsmomente von Punktsystemen und über eine fundamentale Aufgabe in der Theorie der axonometrischen Abbildung. Ark. för mat., astr. och fys. 2, Nr. 16, 18 S.

Zu dem kurzen Referat über diese Abhandlung auf S. 574 dieses Bandes fügen wir noch folgendes hinzu. Gegeben sei ein ebenes Punktsystem Σ von n diskreten Punkten $P_1, P_2, \dots, P_n$, jeder von der Masse 1. Das Trägheitsmoment J_x dieses Systems bezüglich einer Achse x ist dann $\Sigma y_k^2 = p^2 (k = 1, 2, \dots, n)$, wo y_k das Lot von P_k auf x bezeichnet. Das Trägheitsmoment werde durch eine Gerade dargestellt, die im Abstande p von x parallel zu x (beiderseitig) gezogen ist. Dreht sich x um O, so umhüllen die repräsentierenden Geraden bekanntlich

eine Ellipse mit O als Mittelpunkt. Ist b die kleine Halbachse, C ein Brennpunkt (der „Resultantpunkt“) dieser Ellipse, so gilt der Satz: Das Trägheitsmoment des Systems Σ hinsichtlich irgend einer Achse durch O ist gleich der Momentkonstante b^2, vermehrt um das Trägheitsmoment des Resultantpunktes hinsichtlich derselben Achse. Nach Herleitung mehrerer Sätze über diese Ellipse wird dieselbe zu den auf S. 574 dieses Bandes angedeuteten Zwecken weiter benutzt. Lp.

P. H. Schoute. Le moment d'inertie d'un simplex $S(n+1)$ de l'espace E_n par rapport à un E_{n-1} de cet E_n. Palermo Rend. **19**, 156-160.

A. Berry. Note sur une formule de M. Schoute. Palermo Rend. **19**, 314-315.

R. Mehmke. Über Trägheitsmomente und Momente beliebiger Ordnung in Räumen beliebig hoher Stufe. Amst. Ak. Versl. **13**, 630-634.

Schoute beweist folgenden Satz: Das Trägheitsmoment M eines Simplex $S(n+1)$ des Raumes R_n von n Dimensionen in bezug auf einen beliebigen Raum R_{n-1} dieses R_n wird durch das Volumen V des Simplex und die Abstände $y_k (k=1, 2, \ldots, n+1)$ der Ecken des Simplex von diesem Raume durch die Formel ausgedrückt:

$$M = \frac{V}{2(n+2)_2}[\Sigma y_k^2 + (\Sigma y_k)^2].$$

Da der Beweis dieser Formel durch direkte Berechnung Schoute zu mühsam vorkam, hat er die Herleitung vermittelst dreier Hülfssätze bewirkt.

Berry führt in der zweiten Note diese direkte Berechnung, die er ziemlich einfach findet, mit Hülfe homogener Koordinaten aus. Die betreffende Formel für $n=3$ befindet sich schon bei Routh (1868), nicht erst, wie Schoute glaubte, bei G. Cesàro (1900).

Mehmke hat die Formel von Schoute auf anderem Wege in Math. Ann. **23**, 143-151 gefunden (F. d. M. **16**. 791, 1884). Gegenwärtig zeigt er, wie man auf demselben Wege Momente von höherer Ordnung ν als der zweiten finden kann. Die Ersetzbarkeit des Simplex durch ein System von $n+1$ oder n einzelnen Massenpunkten, die a. a. O. gelehrt war, scheint für $\nu > 2$ weniger leicht ausführbar zu sein. Lp.

Weitere Literatur.

T. Alexander and A. W. Thompson. Graphic statics. Graduated series of problems and practical examples. Diagrams drawn to scale. London: Macmillan and Co. VIII u. 50 S. (1904). [Nature **71**, 507.]

W. H. Blythe. Elementary graphic statics and use of tables of sines and tangents to four places of decimals. London: Simpkin. 4°.

C. Krediet. Over het middelpunt van evenwijdige krachten, gelegen in een vlak. Wisk. Tijdschr. **1**, 38-43.

M. Manna. Attrito e rigidezza delle funi e catene. Bari: Laterza. 18 S. 8°.

H. Meuth. Kinetik und Kinetostatik des Schubkurbelgetriebes. Diss. Karlsruhe. 75 S. 8°.

R. Nettel. An introduction to elementary statics (Treated graphically). London: Edward Arnold. 64 S. [Nature **72**, 126.]

W. W. F. Pullen. Application of graphic and other methods to the design of structures. 2d edition. London: Technical Pub. Co. 35 S. 12mo.

F. Ruff. Reference book for statical calculations; rapid statics. London: Spon. 8°.

F. J. Vaes. Over zwaartepunten. Wisk. Tijdschr. **1**, 79-86.

J. Vonderlinn. Statik für Hoch- und Tiefbautechniker. Lehrbuch für techn. Unterrichtsanstalten und zum Selbstunterricht. Dritte Auflage. Bremerhaven: L. v. Vangerow. XI u. 377 S. gr. 8°.

B. Hydrostatik.

G. A. Crocco. Su un modo di ottenere la verticale a bordo delle navi. Nuovo Cimento (5) **9**, 224-226.

Wenn zwischen den Konstanten, von denen die Bewegung eines physischen Pendels an Bord eines Schiffes mit Rollbewegung abhängt, eine gewisse Bedingungsgleichung stattfindet, so nähern sich die Schwingungen mit abnehmender Amplitude der Grenze, bei welcher das Pendel die Vertikalstellung einnimmt. Lp.

W. Meinecke. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen bei Anziehung durch einen Zentralkörper. Diss. Halle a. S. 36 S. 8°.

Nach einem kurzen Rückblick auf die Geschichte dieses für die Theorie des Saturnringes wichtigen Problems wird am Schlusse des ersten Paragraphen die zu behandelnde Frage so formuliert: „Welchen Meridianquerschnitt hat die Rotationsfläche, die eine ringförmige, im Gleichgewicht befindliche Flüssigkeitsmasse begrenzt, wenn die Flüssigkeit 1. der Anziehung der Ringmasse selbst, 2. der Anziehung eines Rotationsellipsoids im Zentrum, 3. der Zentrifugalkraft unterworfen ist?" Bei der Besprechung der Gleichgewichtsbedingung in § 2 wird das Potential V des Ringes als Fouriersche Reihe mit den Bezeichnungen der Frau v. Kowalewski gegeben, die unter Voraussetzung eines kugelförmigen Zentralkörpers die Rechnung durchgeführt hat, bei der gewählten

Annäherung aber nicht korrekt verfahren ist. Der § 3 dient zur Entwicklung des Potentials V_1 des Zentralkörpers ebenfalls in eine Fouriersche Reihe. Nun können in § 4 mit Hülfe der gefundenen Ausdrücke für V und V_1 die Bestimmungsgleichungen für die Parameter aufgestellt werden. Die Anwendung dieser Formeln auf eine Kugel als Zentralkörper in § 5 liefert Zahlen, welche mit dem von Herschel gefundenen Wert der Umdrehungszeit des Ringes gut stimmen. Nimmt man jedoch den Zentralkörper als Rotationsellipsoid an, so stellen sich sowohl bei der ersten Annäherung (§ 6), als auch bei der zweiten, die bis zur dritten Ordnung reicht (§ 7), so starke Abweichungen heraus, daß „nach der entwickelten Theorie eine Gleichgewichtsfigur von den Dimensionen des Saturnringes, die den gemachten Bedingungen genügt, nicht bestehen kann. . . . Die rohe Annahme, daß der Ring ein einziger zusammenhängender Körper sei, muß man zunächst fallen lassen". Lp.

Weitere Literatur.

E. Correale. Meccanica dei fluidi. Parte I: idrostatica. Napoli. 55 S. 8°.

G. Dariès. Calcul des conduites d'eau. 2e édition. Paris: Gauthier-Villars. 192 S. 8°.

Fölzer und Kraus. Hydromechanik oder die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung des Wassers. Strelitz. 62 S. 8°.

Jouquet. Mécanique des fluides. Saint-Etienne: Thomas. 239 S. 4° (1904).

Kapitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

H. von Helmholtz. Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung. Aus den hinterlassenen Papieren bearbeitet von Leo Koenigsberger. Berl. Ber. 1905, 863-883.

Die Arbeit ist eine zusammenfassende Darstellung einiger kurzer Notizen, die sich in dem wissenschaftlichen Nachlasse von Helmholtz gefunden haben und ursprünglich einen besonderen Paragraphen in seiner berühmten, ebenso betitelten Arbeit bilden sollten. Das hier behandelte Problem, welches identisch ist mit der Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz des kinetischen Potentials erster Ordnung mit einer unabhängigen Variable, ist in größerer Allgemeinheit, nämlich für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung mit einer unbeschränkten Anzahl unabhängiger und abhängiger Variabeln, mit Hülfe der Variationsrechnung inzwischen seiner Lösung zugeführt worden, und

zwar für die einfacheren Fälle durch Adolph Mayer, A. Hirsch und C. Boehm, für den allgemeinen Fall durch Koenigsberger. Helmholtz löst die Frage für drei abhängige Parameter mit Hülfe bekannter Sätze der Potentialtheorie und dehnt, um die Frage für kinetische Potentiale erster Ordnung und einer beliebigen Anzahl abhängiger Variabeln zu beantworten, mit Hülfe des erweiterten Greenschen Theorems jene Sätze auf den mehrdimensionalen Raum aus. Mit der vorliegenden Abhandlung wird daher der Sinn der Stelle in der früheren gleichbetitelten Arbeit von Helmholtz klar, wo er verspricht, den „genannten Beweis bei einer anderen Gelegenheit zu geben". Lp.

L. Koenigsberger. **Über die aus der Variation der mehrfachen Integrale entspringenden partiellen Differentialgleichungen der allgemeinen Mechanik.** Berl. Ber. 1905, 250-278.

„Die Frage, welche partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik eine mechanische Deutung in dem Sinne gestatten, daß sie als erweiterte Lagrangesche partielle Differentialgleichungen oder als Lösungen des erweiterten Hamiltonschen Prinzips sich darstellen lassen, findet ihre Erledigung in der Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines kinetischen Potentials für einen oder mehrere gegebene, aus einer beliebigen Anzahl von Parametern und deren partiellen Differentialquotienten irgend welcher Ordnung zusammengesetzte Ausdrücke." Die Existenzfrage des kinetischen Potentials, die in der neueren Zeit mehrfach in Angriff genommen worden ist, wird in der vorliegenden Abhandlung für die einfachsten Fälle in unmittelbar anwendbarer Form behandelt. Lp.

L. Maurer. **Über die Differentialgleichungen der Mechanik.** Gött. Nachr. 1905, 91-116.

Daß die wirklich stattfindende Bewegung eines Massenpunktes auf einer „geradesten Bahn" und nicht auf einer geodätischen erfolgt, muß als Erfahrungstatsache betrachtet werden. Dagegen gehen darüber die Ansichten auseinander, ob diese Tatsache mit dem Hamiltonschen Prinzip in Einklang zu bringen sei, oder ob die Geltung dieses Prinzips sich auf den Fall holonomer Bedingungsgleichungen beschränke. Hertz vertritt die letztere Ansicht, Hölder stellt sich auf den entgegengesetzten Standpunkt („Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis. Gött. Nachr. 1896). Er unterscheidet zwei Arten von Variationen, die mit der „nicht-holonomen" Bedingungsgleichung verträglich sind: die zulässigen werden von ihm gekennzeichnet.

Ob man sich auf den Standpunkt von Hertz oder den von Hölder stellen will, steht frei; denn was man in einem gegebenen Falle unter „zulässiger" Variation verstehen will, ist Sache der Definition. Es muß aber verlangt werden, daß von einem prinzipiellen Gesichtspunkt aus

festgesetzt wird, welche Arten von Variation als zulässig angesehen werden sollen, und es muß ferner verlangt werden, daß die Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen, zu denen die verschiedenen Arten von Variation führen, nachgewiesen werden.

Diesen Forderungen genügt der Verf., indem er von einer zunächst eingeführten Verallgemeinerung des Begriffs der singulären Lösung einer Differentialgleichung in Beziehung auf ein System von Differentialgleichungen ausgeht. Hierauf gestützt, stellt er dann auch die dynamischen Gleichungen für unfreie Systeme auf, ohne von dem Prinzip der virtuellen Verrückungen Gebrauch zu machen. Die Einzelheiten der Untersuchung sind zu einer kurzen Wiedergabe nicht geeignet. Lp.

PH. E. B. JOURDAIN. Alternative forms of the equations of mechanics. Quarterly J. **36**, 284-296.

In den Lagrangeschen Gleichungen kann man statt

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\nu'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}$$

einsetzen (2) $\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_\nu''}$, wo $\mathfrak{T}=\frac{1}{2}\sum_r m_r(x_r''^2+y_r''^2+z_r''^2)$, und der Gebrauch von $\mathfrak{T}$ ermöglicht die Bildung von Bewegungsgleichungen in der kleinsten Anzahl verallgemeinerter Koordinaten für nicht holonome Systeme. Die gegenwärtige Untersuchung bezweckt die Auffindung anderer Verbindungen als (1) und (2), nämlich solcher Funktionen, die in der allgemeinen Form enthalten sind:

$$(3)\quad W=\sum_r\{(a_{1r}x_r+a_{2r}x_r^2+a_{3r}x_rx_r'+a_{4r}x_rx_r''+a_{5r}x_rx_r^{(3)}$$
$$+a_{6r}x_r'+a_{7r}x_r'^2+\cdots+a_{14r}x^{(3,2)})+(b_{1r}y_r+b_{2r}y_r^2+\cdots)+\cdots\},$$

also im allgemeinen nicht homogen und vom zweiten Grade in x_r, x_r', x_r'', $x_3^{(3)}$, $y_r, \ldots$; es wird der Versuch gemacht, ob an Stelle von (1) und (2) irgend eine Kombination der partiellen Differentialquotienten von W in bezug auf q_ν, q_ν', ... und der totalen, nach t genommenen Ableitungen dieser partiellen Ableitungen gesetzt werden kann. Die Resultate, die erst durch eine Tabelle verständlich werden, entziehen sich einem kurzen Referate. Lp.

L. FEJÉR. Das Ostwaldsche Prinzip in der Mechanik. Math. Ann. **61**, 422-436, 560; Math. és termész. értesitö **23**, 155-176.

Es sei A_0 die Anfangslage eines in der Ebene des rechtwinkligen Koordinatensystems XOY beweglichen Punktes, A_0V der Vektor, der vom Punkte A_0 ausgeht und die Anfangsgeschwindigkeit nach Größe und Richtung darstellt. Es soll diejenige Kurve A_0g bestimmt werden, die durch den Punkt A_0 geht, dort den Halbstrahl A_0V berührt, und für

die in dem ihr entsprechenden Punkte A_t die größtmögliche Potentialdifferenz (der größtmögliche Energieumsatz) $U(x,y) - U(x_0,y_0)$ auftritt. Bei der Behandlung dieser „Ostwaldschen Aufgabe" werden zwei Fälle unterschieden: 1. Der Vektor $A_0 V$ ist nur der Größe nach gegeben, bleibt der Richtung nach frei. 2. Der Vektor $A_0 V$ ist der Größe und der Richtung nach gegeben.

Im Falle 1 ist die Kurve, längs deren der Punkt A des größtmöglichen Potentialwertes erreicht wird, eine durch die Gleichung der lebendigen Kraft und durch die Punkte A_0, A bestimmte Brachistochrone; diese steht in A senkrecht zu der durch A gehenden Niveaulinie. Ist die Anfangsgeschwindigkeit Null, und ist die durch die Anfangslinie gehende Kraftlinie eine Gerade, dann und nur dann existiert eine der Ostwaldschen Maximumseigenschaft zu jeder Zeit eines Zeitintervalls $(0 \ldots t)$ genügende Bewegung. Die Bewegung erfolgt eben dieser Kraftlinie entlang und befriedigt die Gleichungen der Mechanik. Der Zusammenhang dieses Resultates mit dem 1892 von C. Neumann gefundenen wird dargelegt. Die Aufgabe 2. hat keine Lösung. Eine Bewegung, die in jedem Zeitpunkte die Ostwaldsche Maximumseigenschaft besitzt, existiert nicht. Der einzige Fall, wo sie existiert, ist der, wenn die Kraftlinie, welche durch A_0 geht, eine Gerade ist, deren Richtung in $A_0 V$ fällt. Zuletzt wird die Ostwaldsche Aufgabe mit einer Darbouxschen Aufgabe aus der Theorie der Flächenabbildung verglichen. Lp.

V. Amato. Sugl' integrali primi comuni a più problemi del moto d'un sistema. Mem. dell'Acc. degli Gelanti di Acireale (3) **4**, 15-20.

Ausdehnung einer früher (Atti Acc. Gioenia (4) **17**; F. d. M. **34**, 766, 1903) entwickelten Methode auf die Bewegung eines Systems mit μ unabhängigen Veränderlichen, wobei die Anzahl der zu bildenden Integrale $2\mu - 2$ ist. Vi.

V. Amato. Sul sistema di due integrali primi comuni ad una classe di problemi. Palermo Rend. **19**, 57-61.

Der Aufsatz bringt einen Nachtrag zu den Untersuchungen des Verf. über die Bewegungsgleichungen eines Punktes auf einer Oberfläche (vgl. F. d. M. **32**, 359 u. 726, 1901; **34**, 766, 1903). Die Frage, welche er jetzt beantwortet, lautet für zwei gegebene Kräfte U, V: „Gegeben sei eine Aufgabe (U, V); falls es angeht, ist eine Klasse von Aufgaben zu bestimmen, welche mit der gegebenen zwei Erstintegrale gemeinschaftlich haben, und außerdem sind diese Integrale zu bestimmen." Diese Frage war schon in der zweiten oben angeführten Abhandlung betrachtet worden; „aber das Verfahren, das eine Verallgemeinerung des von Korkine benutzten ist, dürfte sich in der Anwendung sehr schwierig gestalten". Ferner war auch noch eine Berichtigung anzubringen. Lp.

E. et F. Cosserat. Sur la dynamique du point et du corps invariable, dans le système énergétique. C. R. **140**, 932-935.

Der Artikel ist ein kurzer Auszug aus der ersten Note, welche die beiden Verf. der französischen Übersetzung des Handbuchs der Physik von Chwolson hinzugefügt haben, und ist in seiner aphoristischen Kürze für ein Referat wenig geeignet. „Ein Ausdruck, der, wie die Aktion W in einem gegebenen Augenblicke, von den Koordinaten des Punktes und ihren ersten Ableitungen abhängt, und der ferner in der Gruppe der euklidischen Bewegungen invariant ist, muß notwendig eine Funktion der Geschwindigkeit v des Punktes sein.“ Durch Anwendung der Methode der variablen Aktion auf das Integral $\int_{t_0}^{t_1} W dt$ wird man dann dazu geführt, dem Ausdrucke

$$v\frac{dW}{dv} - W$$

den Namen der „kinetischen Energie“ beizulegen. Der Begriff der unveränderlichen Masse bleibt nicht mehr bestehen: man muß mehrere Ausdrücke betrachten: die kinetische oder Leibnizsche Masse $\frac{1}{v}\frac{dW}{dv} - \frac{W}{v^2}$, die Hamiltonsche Masse $\frac{W}{v^2}$, die Maupertuissche Masse $\frac{1}{v}\frac{dW}{dv}$. Die klassische Mechanik ist schlechthin die Erforschung des dem Ruhezustande unendlich benachbarten Bewegungszustandes. Beim Studium der Bewegung des starren Körpers adjungiert man dem Körper eine gewisse Funktion der sechs Argumente $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$, welche die Bewegung eines unveränderlich mit ihm verbundenen Dreikants bestimmen. Den Trägheitsmittelpunkt und die Trägheitsachsen definiert man für einen gegebenen Zeitpunkt. „Wenn ein unveränderlicher Körper, der von keiner äußeren Kraft angegriffen wird, mit einer Schraubenbewegung um eine Hauptachse des Zentralträgheitsellipsoids zu Anfang der Bewegung behaftet ist, so verharrt er unbegrenzt lange in derselben Schraubenbewegung um dieselbe Achse.“ Lp.

F. Wittenbauer. Die Bewegungsgesetze der veränderlichen Masse. Zs. für Math. u. Phys. **52**, 150-164.

Zwei Arten der Veränderung werden unterschieden: 1. Wirkliche Zu- oder Abnahme der bewegten Masse. 2. Gedachte Veränderung der bewegten Masse.

Ist im ersten Falle M die in Translation begriffene Masse, v ihre Geschwindigkeit, P die in der Bewegungsrichtung wirkende Kraft, dt das Zeitelement, so ergibt sich die Beschleunigung

$$\gamma = \frac{1}{M}\left\{P - (v - v')\, v\frac{dM}{dt}\right\},$$

wo v die Geschwindigkeit ist, mit der die Masse dM hinzutritt. An

der Hand dieser Formel werden mehrere Aufgaben durchgerechnet, insbesondere eine bei Resal (Traité de mécanique **1**, 239); eine andere bei Piarron de Mondésir (Sur la force, Mém. Soc. ing. civ. 1887) wird berichtigt.

Die „gedachte Veränderung der Masse" kommt bei Maschinengetrieben vor, deren bewegte Masse nach einem ausgezeichneten Punkte der Maschine reduziert und eben durch diese Reduktion veränderlich, d. h. von der Stellung des Getriebes abhängig gemacht wird. Auch hier folgen nach Aufstellung allgemeiner Formeln Betrachtungen über einzelne besondere Fälle. „Diese beiden Arten weisen, so verschieden sie auch sonst sind, gewisse Beziehungen auf, die den Einblick in diese eigentümlichen Bewegungsgesetze erleichtern." — Die früheren Untersuchungen von Mestschersky über den Gegenstand sind nicht erwähnt (vgl. F. d. M. **28**, 645-649, 1897; **33**, 948, 1902). Lp.

Ed. Kasner. A geometric property of the trajectories of dynamics. Amer. M. S. Bull. (2) **12**, 71-74.

Die Bewegungsgleichungen eines Punktes mögen von der Form sein:

$$(1)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \psi(x, y, z), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \chi(x, y, z).$$

Dann gilt der Satz: „Ein willkürliches Kraftfeld (1) erzeugt ∞^5 Bahnlinien, von denen ∞^1 durch einen gegebenen Punkt in einer gegebenen Richtung gehen. Diese ∞^1 Bahnlinien haben in dem gegebenen Punkte eine gemeinschaftliche oskulierende Ebene und eine gemeinschaftliche Torsion. Der Ort der Mittelpunkte ihrer oskulierenden Kugeln ist eine Gerade. So gibt jedes Kraftfeld Anlaß zu einer Korrespondenz zwischen den Richtungselementen und den Geraden des Raumes." Lp.

E. Cesàro. Sopra alcune proprietà delle trajettorie in un dato campo di forze. Napoli Rend. (3) **11**, 424-427.

Die Eigenschaften der Bahnlinien, welche E. Kasner in der vorstehend angezeigten Note nachweist, werden nach einem kürzeren Verfahren durch die Hülfsmittel der Geometria intrinseca hergeleitet. Lp.

P. J. Suchar. Sur une transformation réciproque en mécanique. S. M. F. Bull. **33**, 210-224.

Reziprok heißen die Bewegungen zweier Punkte, wenn für zwei entsprechende Punkte ihrer Bahnen die Koordinaten des einen Funktionen der Projektionen der Geschwindigkeit des anderen sind und umgekehrt

die Koordinaten des zweiten die nämlichen Funktionen der Projektionen der Geschwindigkeit des ersten. Hauptsächlich wird der besondere Fall der Zentralkräfte betrachtet. Lp.

G. Bardelli. Sul movimento di un punto in un piano. Lomb. Ist. Rend. (2) **38**, 663-668.

Die Koordinaten des beweglichen Punktes seien x, y, z; die Ableitungen der Koordinaten nach der Zeit mögen durch Akzente bezeichnet werden. Man setze

$$\triangle = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Dann ist $\triangle = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Bahnlinie in einer durch den Nullpunkt gehenden Ebene liegt; $D = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Bahnlinie überhaupt eine ebene Kurve ist. Lp.

C. Stéphanos. Sur les forces donnant lieu à des trajectoires coniques. C. R. **140**, 1318-1320.

Der Verf. verallgemeinert die von Bertrand (C. R. **84**, 671-674; F. d. M. **9**, 638, 1877) gestellte und seitdem öfter behandelte Frage nach der Bestimmung einer Kraft, unter deren Einwirkung ein Massenpunkt einen Kegelschnitt beschreibt; er will jetzt nicht bloß solche Kräfte zulassen, die in einem gegebenen Punkte eine einzige Richtung haben, sondern auch solche, die in einem Punkte verschiedene Richtungen haben, im übrigen aber einzeln sich nach der Stetigkeit ändern. Das Ergebnis der analytischen Untersuchung ist, daß außer den in den Bertrandschen Fall einbegriffenen Lösungen diese neue Frage keine anderen Lösungen zuläßt, d. h. die gesuchte Kraft muß entweder eine Zentralkraft sein oder zu einer festen Richtung parallel gehen. Lp.

---

de Sparre. Au sujet de la déviation des corps dans la chute libre. C. R. **140**, 33-35.

M. Fouché. Sur la déviation des graves vers le sud et sur la courbure des lignes de forces. C. R. **140**, 226-229, 427-428.

de Sparre. Sur la déviation des corps dans la chute libre. C. R. **140**, 363-365.

Unter Berücksichtigung der Änderung der Zentrifugalkraft und der Änderung der Schwere nach Größe und Richtung während der Dauer des Falles findet de Sparre auf der kugelförmig angenommenen Erde eine südliche Abweichung $\frac{1}{8}\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda g t^4$ (ω = Rotationsgeschwindigkeit,

λ = geographische Breite), innerhalb eines Brunnens dagegen eine nördliche Abweichung $-\frac{1}{8}\omega^4 \sin^3\lambda \cos\lambda R t^4$ (Anziehung proportional der Entfernung vom Erdmittelpunkte gesetzt). Wird die Erde als Sphäroid genommen ($c^2 = a^2 - b^2$, $k = c/b$), so werden die Abweichungen, durch die Fallhöhe h ausgedrückt:

$$\frac{h^2k^2}{10b}\sin\lambda\cos\lambda \text{ und } \frac{1}{2}\frac{\omega^2h^2}{g}\sin\lambda\cos\lambda\left(1-\frac{gk^2}{5b\omega^2}\right).$$

Alle Formeln sind ohne Beweise gegeben. Fouché erhält auf einem Wege, den er skizziert, $\frac{1}{6}\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda g t^4$, wie seine früheren Vorgänger. In der letzten Note erklärt de Sparre diese Verschiedenheit dadurch, daß Fouché bei der Ableitung Größen vernachlässigt habe, die in Rechnung gestellt werden müssen. Für den Versuch haben die gefundenen Werte keine Bedeutung, da sie zu klein sind, um gemessen werden zu können. Lp.

de Sparre. Note au sujet de la déviation des graves dans la chute libre. S. M. F. Bull. **33**, 65-72, 146-149.

M. Fouché. Sur la déviation des graves et les champs de force. S. M. F. Bull. **33**, 150-156.

In dem ersten Artikel werden die Ableitungen der Formeln gegeben, die der Verf. in den C. R. **140**, 33-35, veröffentlicht hat und bei denen nur Potenzen der Rotationsgeschwindigkeit ω höher als ω^3 vernachlässigt sind. Die zweite Note desselben Verf. wendet sich gegen eine Aussage von Fouché über den Sinn der Krümmung der Kraftlinien in der Mitteilung C. R. **140**, 226-229. Fouché erkennt in seinem Aufsatze die Richtigkeit der Bemerkung von de Sparre an. „Die Konkavität der Kraftlinien ist, im Widerspruch mit dem, was ich gesagt habe, nach der Seite gewandt, wo die Kraft wächst. In dem Schwerefelde macht das eine Ablenkung nach Norden. Außerdem hatte ich in dem Differentialquotienten der Clairautschen Formel den Faktor 2 ausgelassen; dies bewirkt, daß der von der Krümmung der Kraftlinie herrührende Wert doppelt so groß ist, wie ich angegeben hatte.“ Dem Bekenntnis des begangenen Fehlers werden ganz interessante Bemerkungen über das Problem der Ablenkung frei fallender Körper hinzugefügt, „das zahlreiche Mathematiker beschäftigt hat, und das, wenn ich nicht irre, nun vollständig aufgeklärt ist“. Lp.

F. Ricci. Un teorema di meccanica che fa seguito ad uno ben noto di Galileo. Riv. di fis., mat. e sc. nat. **6**$_2$, 220-222.

Fällt ein schwerer, elastischer Punkt von der höchsten Stelle eines vertikalen Kreises längs einer Sehne, und stößt er am Endpunkt dieser Sehne gegen eine zu derselben senkrechte Ebene, so beschreibt er eine

Parabel, welche den Kreis in einem einzigen Punkte weiter schneidet, und geht von dem Kreis nach einer Zeit aus, welche der Fallzeit längs der Sehne gleich ist. Vi.

E. Gericke. Die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß einer durch eine variable Strecke dargestellten Kraft. Progr. Gymn. Fürstenwalde a. d. Spree. 36 S.

Die etwas künstlich konstruierte Strecke, welche der einwirkenden Kraft proportional ist, soll hier nicht näher beschrieben werden. Man kommt leicht, von ihr ausgehend, zu den Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{ax}{z-a}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{ay}{z}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = a.$$

Die durch Figuren erläuterte Behandlung der Aufgabe bietet nichts Bemerkenswertes. Lp.

C. V. L. Charlier. Über die Attraktion zweier festen Zentren auf einen beweglichen Punkt und die Beziehungen dieses Problems zum Problem der zwei Körper. Arkiv for mat., astr. och fys. 2, Nr. 29, 10 S.

Verf. untersucht die Bewegung eines masselosen Körpers, der von zwei festen Zentren angezogen wird, von denen das eine eine Masse gleich K, das andere eine Masse 0 besitzt. Msn.

A. M. Hiltebeitel. Note on a problem in mechanics. Amer. M. S. Bull. (2) **11**, 432-436.

Bonacini will in einem Aufsatze (Batt. G. **28**, 132-137; F. d. M. **22**, 904, 1890 beweisen, daß, wenn zwei feste Zentren auf einen Massenpunkt einwirken, die Trennung der Variabeln nur möglich ist, falls die beiden Zentralkräfte umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung wirken. Nun hat aber schon Lagrange gezeigt (Oeuvres **2**, 94-121), daß die Variabeln trennbar sind, wenn das Kraftgesetz eine gewisse lineare Kombination des umgekehrten Quadrates und der direkten Entfernung ist, und es sind seitdem verschiedene bezügliche Abhandlungen erschienen, die in einer Anmerkung der gegenwärtigen Note aufgezählt werden. Hiltebeitel weist nach, welchen Fehlschluß Bonacini gemacht hat, und zeigt, daß die Lagrangesche Form der Kräfte den allgemeinsten Fall bildet, in welchem eine Trennung der Variabeln geschehen kann, falls die Kräfte nur Funktionen der bezüglichen Entfernungen sind. Lp.

F. Wöller. Die Bewegung eines Punktes, der von einem festen Zentrum angezogen, von einem andern festen Zentrum abgestoßen wird. Inaug.-Diss. Kiel 55 S. 8°.

Das Anziehungsgesetz ist das Newtonsche; ebenso ist das Abstoßungsgesetz umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes angenommen. Im ersten Kapitel werden die Gleichungen für die Bewegung in der Ebene entwickelt und für die verschiedenen möglichen Annahmen diskutiert. Im zweiten Kapitel ist die Bewegung im Raume behandelt; hierbei ist, wie seit Lagrange und Jacobi für den Fall zweier anziehenden Zentren üblich, die Drehung der Ebene, welche der bewegliche Punkt mit den beiden festen Punkten bestimmt, um die Verbindungsgerade der festen Punkte für sich betrachtet; außerdem wird die Bewegung des beweglichen Punktes in dieser Ebene untersucht. Von den Behandlungen des entsprechenden Problems zweier anziehenden Zentren ist nur die von Charlier in der „Mechanik des Himmels", Leipzig 1902, erwähnt worden. Die größeren Arbeiten von Morera, Bonacini, Haußner (vgl. F. d. M. **12**, 676, 1880 und **21**, 908-912, 1889) dürften manche Analogien mit den vom Verf. erreichten Resultaten aufweisen. Im dritten, kurzen Kapitel (S. 51-55) wird die Anwendung der gewonnenen Ergebnisse auf das folgende elektrische Problem gemacht: „Ein elektrisches Quantum wird von der Kathode fortgeschleudert; es wird von dem positiven Kraftzentrum einer Dynamide angezogen, von dem negativen abgestoßen. Wie gestaltet sich die Bewegung, wenn das elektrische Quantum aus unendlich großer Entfernung kommt?" Für die Bewegung in der Ebene wird sowohl die Diffusion, als auch die Absorption der Kathodenstrahlen bestätigt. Für die Bewegung im Raume wird nur die Diffusion, aber nicht die Absorption bestätigt gefunden. Den Grund hierfür sucht der Verf. in den von ihm getroffenen vereinfachenden Annahmen. Lp.

E. Silbernagel. Bewegung eines Punktes innerhalb einer nicht homogenen Staubmasse mit zylindrischen Flächen gleicher Dichtigkeit. Inaug.-Diss. München. 48 S. 4°.

Eine von einem Kreiszylinder begrenzte kosmische Staubmasse sei so angeordnet, daß ihre Dichtigkeit von der Mitte nach außen in der Richtung des Radiusvektors abnimmt. Die Achse dieses Zylinders sei klein im Verhältnis zum Radiusvektor. Bei der Bewegung eines Punktes im Innern dieser Masse treten Anziehungs- und Widerstandskräfte auf. Wenn, wie weiter angenommen wird, die Dichtigkeit der Staubmasse so gering ist, daß die Widerstandskräfte vernachlässigt werden können, so bleibt nur die Gesamtanziehung des Zylinders oder sein Potential zu berechnen. Hierbei wird die diskontinuierliche Massenverteilung durch eine kontinuierliche ersetzt.

Im ersten Paragraphen wird das Potential eines mit Masse erfüllten Kreiszylinders berechnet, dessen Dichtigkeit in der radialen Richtung mit

der Entfernung vom Mittelpunkt abnimmt, und zwar in bezug auf einen in seinem Innern gelegenen Punkt. Das Resultat ist zuletzt in der Gestalt einer unendlichen Reihe gegeben, deren Glieder bis zur sechsten Potenz berechnet sind.

Der zweite Paragraph erörtert die gestellte Bewegungsaufgabe. Der angezogene Punkt sei ein planetarischer Körper mit der Masse m; im Mittelpunkte O des Zylinders stehe die Sonne, und die Achse h sei zunächst senkrecht auf der Ebene der Ekliptik. Zufolge der Sonnenanziehung beschreibt der planetarische Körper eine Keplersche Ellipse; außerdem ist er aber der störenden Einwirkung der Masse des Zylinders unterworfen, zu deren Berücksichtigung ja das Potential berechnet worden ist. Speziell werden die säkularen Störungen behandelt, welche der planetarische Körper im Knoten und im Perihel seiner Bahn erleidet.

Im dritten Paragraphen wird eine Anwendung der vorangehenden Entwicklungen auf das Zodiakallicht gemacht, das näherungsweise durch den vorher betrachteten Zylinder dargestellt werden kann. Näher durchgeführt werden die Rechnungen für den Planeten Merkur, der sich innerhalb des Bereiches des Zodiakallichtes bewegt. Aus den gefundenen Resultaten ersieht man, daß die Perihelstörung des Merkur zu ihrer Erklärung durch die Einwirkung des Zodiakallichtes nach den gemachten Voraussetzungen eine Masse des letzteren verlangt, die ungefähr ein Milliontel der Sonnenmasse beträgt. Wenn die Achse des Zodiakallichtes senkrecht auf der Ebene der Ekliptik stehend angenommen wird, so ergeben sich Zahlen für die Änderungen des Perihels und des Knotens des Merkur, welche direkt mit der Beobachtung in Widerspruch stehen. Nimmt man dagegen die Achse des Zodiakallichtes senkrecht auf der Ebene des Sonnenäquators, so ergeben sich Werte, aus denen die Möglichkeit erhellt, auf diesem Wege die Bewegung des Merkurperihels zu erklären. Lp.

J. Horn. Weitere Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen.
Zs. für Math. u. Phys. **52**, 1-43.

Fortsetzung der Reihe von Aufsätzen, über die zuletzt F. d. M. **34**, 764-765. 1903, referiert ist. In der vorliegenden Arbeit, welche direkt die Untersuchungen aus Bd. 48 derselben Zeitschrift weiter führt, werden zunächst die Differentialgleichungen für einige konkrete Beispiele ohne Vernachlässigung aufgestellt und umgeformt, damit die mathematische Aufgabe, deren Lösung gefordert wird, sich zweckmäßig formulieren läßt. Die betreffenden Aufgaben lauten: 1. Ein schwerer Punkt, welcher an eine Rotationsfläche mit lotrechter Achse gebunden ist, kann unter geeigneten Bedingungen einen Parallelkreis mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen. Die wenig davon abweichenden Bewegungen zu untersuchen. 2. Periodische Bewegungen eines um einen festen Punkt O drehbaren schweren starren Körpers in der Nähe einer Gleichgewichtslage (Benutzung der Eulerschen Gleichungen). 3. Dieselbe Aufgabe wie unter 2. mit Benutzung der Lagrangeschen Gleichungen. 4. Der Schwerpunkt eines

schweren starren Körpers mit dem festen Punkte O liege auf einer Hauptachse von O. Der Körper kann sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit n um diese vertikal gerichtete Hauptachse drehen. Die benachbarten periodischen Bewegungen zu untersuchen.

Es stellt sich heraus, daß die erhaltenen Differentialgleichungen unter Benutzung bekannter Integrale auf diejenigen zurückgeführt werden können, deren periodische Lösungen in §§ 3 und 4 der Abhandlung in Bd. 48 derselben Zeitschrift vom Verf. bestimmt sind. In den §§ 5-8 der gegenwärtigen Arbeit werden einige Ergänzungen jener älteren Untersuchung mit dem speziellen Ziel der Anwendung auf die jetzt behandelten Aufgaben geliefert, und die gewonnenen Hülfsmittel werden dann in den §§ 9-12 auf diese Aufgaben angewandt. Lp.

O. Schütt. **Über das Verschwinden der Reaktion bei der Bewegung eines materiellen Punktes auf Rotationsflächen.** Diss. Kiel. 56 S. 8°.

Bei den Aufgaben über die Bewegung eines Punktes, der genötigt wird, sich auf einer Oberfläche zu bewegen, wird gewöhnlich vorausgesetzt, daß der Punkt die Fläche weder nach der einen, noch nach der anderen Seite verlassen kann. In diesem Sinne sind die Untersuchungen von Stäckel (1885), Staude (1887/8), Hadamard (1897) u. a. m. durchgeführt worden. Der Verf. hat die Forschung nach der Richtung erweitert, daß er annimmt, die Oberfläche leiste nur einseitigen Widerstand, der Punkt könne daher nach der anderen Seite sich von der Oberfläche entfernen.

Im ersten Abschnitt wird die Bewegung eines schweren Massenpunktes auf der Innenseite einer Kugelfläche erörtert. Doch ist der Verf. im Irrtum, wenn er meint, er habe dies zum ersten Male getan. Wir verweisen auf die Arbeiten von Nouvel (1886), Chailan und Hoßfeld (1889). Die Abschnitte II, III und IV der Schrift beschäftigen sich mit der Bewegung eines schweren Massenpunktes auf einer Rotationsfläche $r = \varphi(z)$, deren z-Achse vertikal ist. Im Abschnitte V werden die gewonnenen Sätze auf solche Bewegungen ausgedehnt, die unter der Einwirkung einer Kräftefunktion U von z erfolgen. Die erhaltenen Sätze lehnen sich an die Ergebnisse der von den oben genannten Forschern geführten Untersuchungen an, in denen ja die qualitative Diskussion der Bewegungsgleichungen den eigentlichen Gegenstand bildete. Beispielsweise sei angeführt: „Sobald bei der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche mit vertikaler Achse die Reaktion der Fläche verschwindet, steht die Schmiegungsebene der Bahn vertikal." — „Bewegt sich unter dem Einfluß einer Kräftefunktion U von z, deren Differentialquotient positiv ist, ein Punkt auf einer Rotationsfläche zwischen zwei Parallelkreisen, d. h. erreicht U zwischen $t = -\infty$ und $t = +\infty$ eine beliebige Anzahl von extremen Werten, so kann in der anziehenden Region der Fläche (wo die Maxima von U liegen) die Reaktion der Fläche nie verschwinden." Lp.

W. Lorey. Das Gesetz des mathematischen Pendels auf dem Gymnasium. Zs. für math. u. naturw. Unterr. 36, 24-25.

Benutzt nach Riecke, „Experimentalphysik", den Versuch und eine einfache Überlegung statt eines Beweises. Lp.

F. Slate. The range of adjustment for the conical pendulum. Phys. Rev. 21, 166-168.

Von der Formel ausgehend, welche zwischen den Konstanten des physischen konischen Pendels, der Rotationsgeschwindigkeit ω und dem Ablenkungswinkel besteht, diskutiert der Verf. die Wurzeln der Gleichung für den letzteren Winkel, wenn ω von Null an stetig zunimmt, und macht auf solche Fälle besonders aufmerksam, in denen zwei Wurzeln existieren, oder gar keine. Lp.

H. Padé. Sur un point de la théorie classique du pendule sphérique. Bordeaux Proc.-verb. 1905, 31-33.

Bekanntlich schwingt der Massenpunkt des sphärischen Pendels zwischen zwei Parallelkreisen. Padé liefert den in den gewöhnlichen Darstellungen fehlenden Nachweis, daß der Punkt nicht auf einem dieser Parallelkreise seine Bewegung fortsetzt. Lp.

F. W. Lanchester. The pendulum accelerometer, an instrument for the direct measurement and recording of acceleration. Phil. Mag. (6) 10, 260-268; Proc. Phys. Soc. London 19, 691-701.

Auf einem Wagen sei ein Pendel aufgestellt, dessen Schneide senkrecht zur Bewegungsrichtung des Wagens steht. Wenn der Wagen eine Beschleunigung erfährt, so wirken auf das Pendel im ganzen zwei Beschleunigungen: die der Schwere g und die der ziehenden Kraft f. Das Pendel erfahre die Ablenkung θ, so ist bei horizontaler Bewegung $f = g \operatorname{tang} \theta$. Diese Überlegung liegt dem Instrumente zugrunde, dessen erstes Modell Lanchester 1889 konstruiert hat, dessen zweites erst 1904 vollendet ist. Damit die Eigenschwingungen des Pendels bei der Registrierung einen möglichst geringen Einfluß ausüben, wird das Pendel ganz kurz genommen, im ersten Modell 3 Zoll, im zweiten $1\frac{1}{4}$ Zoll. Ein längerer Zeiger dient zum Messen und Registrieren des Ablenkungswinkels θ. Die genauere Beschreibung der Einzelheiten ist im Original nachzulesen. Die Wiedergabe einer Anzahl von Kurven, die der Apparat selbst aufgezeichnet hat, bezeugt seine Brauchbarkeit. Lp.

N. Delaunay. Sur le problème des trois corps. Verh. d 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb. 398-401, 1905.

Bei der Bewegung dreier Körper, die sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, existiert ein (bewegliches) Kräftezentrum. Sind α, β, γ die Seiten des Dreiecks, das in einem gegebenen Momente die drei Massenpunkte m_1, m_2, m_3 zu Ecken hat, und zwar die bezüglichen Gegenseiten zu m_1, m_2, m_3, so befindet sich das Anziehungszentrum im Schwerpunkte der fiktiven und veränderlichen Massen $m_1\alpha^3$, $m_2\beta^3$, $m_3\gamma^3$, die man anstelle der Massen m_1, m_2, m_3 zu setzen hat. Hiernach läßt sich eine besondere Form für die Differentialgleichungen des Problems aufstellen. Lp.

N. Delaunay. Über einige elementare Sätze betreffend das Problem der drei Körper. Moskau, Physikalische Sect. 13, 34-36. (Russisch.)

Der Autor bezeichnet mit m_1, m_2, m_3 die Massen der Körper und mit α, β, γ die Seiten des Dreiecks, wobei die Seite α der Masse m_1, die Seite β der Masse m_2 und die Seite γ der Masse m_3 gegenüberliegt. Sodann beweist er folgende Sätze:

1. Die Resultierenden der auf jede dieser Massen wirkenden Kräfte schneiden sich in einem Punkte.

2. Dieser Durchschnittspunkt liegt in dem Schwerpunkte der fiktiven Massen $m_1\alpha^3$, $m_2\beta^3$, $m_3\gamma^3$, die in den entsprechenden Spitzen des Dreiecks liegen.

3. Die Kräfte, die zu diesem Zentrum der betrachteten Massen m_1, m_2, m_3 hinziehen, werden durch folgende Formeln ausgedrückt:

$$P_1 = \frac{Am_1 r_1}{\beta^3\gamma^3}, \quad P_2 = \frac{Am_2 r_2}{\gamma^3\alpha^3}, \quad P_3 = \frac{Am_3 r_3}{\alpha^3\beta^3},$$

wo r_1, r_2, r_3 die Entfernung der Massen vom anziehenden Zentrum und $A = m_1\alpha^3 + m_2\beta^3 + m_3\gamma^3$. Jk.

G. Bisconcini. Sur le problème des trois corps. Trajectoires le long desquelles deux au moins des trois corps se choquent. Conditions qui entrainent un choc. Acta Math. 30, 49-92.

Die Arbeit nimmt eine von Painlevé in seinen Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles (S. 583. 1897) angeregte Frage wieder auf, nachdem dieselbe 1903 von Levi-Civita und vom Verf. in Angriff genommen worden war (vgl. F. d. M. **34**, 768-769, 1903). Insbesondere hatte Levi-Civita bei der Beschränkung auf den Fall der ebenen Bewegung die Existenz einer eindeutigen analytischen Relation bewiesen und einen Ausdruck gegeben, der in eine Reihe nach Potenzen des Abstandes der zum Stoße kommenden beiden Punkte entwickelt ist.

„Der Weg war gewiesen; man hatte ihn nur zu verfolgen, um das Problem im allgemeinen Falle zu lösen.“ Der Verf. ist jetzt zu folgenden Ergebnissen gelangt.

Die drei Körper seien P_0, P_1, P_2. Man setze $\varrho_1 = P_0P_1$. $\varrho_2 = P_0P_2$, und nehme an $\lim \varrho_1 = 0$, $\lim \varrho_2 \neq 0$ für $t = t_1$. Es handelt sich darum, die Beziehungen aufzufinden, denen die anfänglichen Zustände genügen müssen, damit dies eintritt. Die beiden Annahmen, die der Verf. gemacht hat, müssen offenbar erfüllt werden, um die Zusammenstöße von P_0 und P_1 zu kennzeichnen sowie die Anfangszustände, von denen sie abhängen. Trotzdem ist zur Lösung des Problems noch eine dritte Hypothese eingeführt, deren Ableitung aus den beiden ersten dem Verf. nicht geglückt ist. Er hat nämlich angenommen, in der Umgebung von P_0 sei die Winkelgeschwindigkeit von P_0P_1 bei der Relativbewegung in bezug auf P_0 endlich.

Die verschiedenen Staffeln des Beweises lassen sich folgendermaßen zusammenfassen. Zuerst wird die Relativbewegung der Punkte P_1 und P_2 in bezug auf P_0 betrachtet; eine passende Wahl der Variabeln führt auf die Bewegungsgleichungen vom Typus derer von Levi-Civita. Darauf wird bewiesen, daß die singulären Bahnlinien des Systems, längs denen die beiden Punkte P_0 und P_1 sich treffen müssen, eindeutig den Lösungen entsprechen, welche in der Umgebung der Stoßlage holomorph sind. Gemäß den Vermutungen von Painlevé ergeben sich zwei verschiedene analytische Relationen zwischen den Anfangsbedingungen, welche die Entscheidung ermöglichen, ob die Bewegung längs einer der ∞^8 singulären Bahnkurven stattfindet.

Bezeichnet man diese beiden Relationen durch $u_1^{(1)} = 0$ und $u_2^{(1)} = 0$, so leuchtet es ein, daß ein zweites, dem ersten analoges Paar $u_1^{(2)} = 0$, $u_2^{(2)} = 0$ für die Zusammenstöße von P_0 und P_2 charakteristisch ist und ein drittes $u_3^{(1)} = 0$ und $u_3^{(2)} = 0$ für die Zusammenstöße von P_1 und P_2. Mithin ermöglichen allgemein die beiden Gleichungen $u_1^{(1)}u_1^{(2)}u_1^{(3)} = 0$, $u_2^{(1)}u_2^{(2)}u_2^{(3)} = 0$ die Kennzeichnung aller singulären Bewegungen des Systems, bei denen zwei beliebige der Punkte zusammenstoßen.

In dem letzten Paragraphen beschäftigt sich der Verf. mit der wirklichen Bestimmung der analytischen Form der Gleichungen $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, indem er die linken Seiten in Reihen nach Potenzen des Abstandes P_0P_1 entwickelt. Lp.

T. Levi-Civita. Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps. Verh. des 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb. 402-408.

Der Artikel enthält eine Übersicht über eine gleichbetitelte Abhandlung, die in Acta Math. veröffentlicht werden soll. Das behandelte Problem ist aus früheren Veröffentlichungen des Verf. bekannt (F. d. M. **34**,

768-769, 1903). Aus den funktionentheoretischen Untersuchungen von Mittag-Leffler folgt, daß bei dem Dreikörperproblem die Koordinaten in jedem Falle und während der ganzen Dauer der Bewegung durch Reihen ausdrückbar sind, welche die Grundeigenschaften der Taylorschen Reihe besitzen. Ein besonderer Teil der Entwicklungen ist der Erforschung der Bahnlinien des Punktes P von verschwindender Masse in einem das Zentrum S umgebenden hinreichend kleinen Gebiete gewidmet. Ein Integral der Bewegung ist in der Form darstellbar:

$$W = \sqrt{8}\,\nu\,(\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha) + \cdots,$$

wo die nicht hingesetzten Glieder von höherer Ordnung in ξ, η sind. Dann ist die Gleichung $\partial W/\partial\alpha = \beta$, wo β eine Konstante, dazu geeignet, alle möglichen Bogen von Bahnlinien in der Nachbarschaft von S darzustellen. Lp.

E. O. Lovett. On a problem including that of several bodies and admitting of an additional integral. American M. S. Trans. **6**, 491-495.

In dem „Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique" (Journ. de Math. (1) **17**, 393-436, 1852) führt Bertrand in das Dreikörperproblem gewisse quadratische Funktionen der Koordinaten der Körper und von Größen ein, welche den Projektionen der Geschwindigkeien auf die Koordinatenachsen proportional sind. Bour zeigte dann in dem „Mémoire sur le problème des trois corps" (J. de l'Éc. Pol. **21**, 35-58, 1856), daß die Bertrandschen Variabeln ein gewisses System (S) gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung befriedigen, und wies nach, daß das Dreikörperproblem als eine partikulare Lösung eines allgemeineren Problems betrachtet werden kann, dessen Gleichungen die von (S) sind, und von dem ein gewisses Integral D bekannt ist. Der Zweck der vorliegenden Note besteht in der Erweiterung dieser Ergebnisse auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Körpern. Lp.

G. Cantor. Ein Brief von Carl Weierstraß über das Dreikörperproblem. Palermo Rend. **19**, 305-308.

In diesem an Cantor gerichteten Briefe aus dem Jahre 1891 wendet sich Weierstraß wider den gegen ihn erhobenen Vorwurf, als hätte er die auf das Dreikörperproblem bezügliche bekannte Preisfrage so gestellt, daß sie in der verlangten Form Unmögliches fordere. Weierstraß berichtet, daß er einen direkten Beweis für die Lösbarkeit in dem von ihm fixierten Sinne an Ch. Hermite und G. Mittag-Leffler mitgeteilt habe. Lp.

R. Skutsch. Anwendungen der Massenreduktionen nach Reye und nach Poinsot. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **4**, 54-59.

Zwei Massensysteme heißen nach Reye äquivalent hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente, wenn die letzteren bei beiden für jede Ebene des Raumes den gleichen Wert haben. Die Massensysteme haben dann auch gleiche Schwerpunktslage und gleiche Masse. Unter dem Einflusse gleicher oder statisch äquivalenter Kräftesysteme und gleichen Bedingungen unterworfen, führen sie die gleichen Bewegungen aus, und für die Bestimmungen etwaiger Reaktionen haben die nämlichen Gleichungen Geltung. Solche Reyeschen Äquivalenzen lassen sich mit Vorteil anwenden, den gegebenen Körper mit einem anderen zu vertauschen, dessen Bewegung sich leichter finden läßt. Für diese von Routh in seiner Dynamik der starren Systeme gemachte Bemerkung finden sich kaum Anwendungen in der Literatur, obgleich schon Poinsot in der Abhandlung Sur la percussion des corps (Liouville J. (2) **2**, 294f., 1857) den Ersatz einer Scheibe durch zwei Massenpunkte für die ebene Bewegung angewandt hat. In der vorliegenden Note werden nach diesen Überlegungen folgende Aufgaben behandelt: Bestimmung der Länge des physischen Pendels (schon bei Poinsot) und der Auflagerkraft desselben, das Problem von Glocke und Klöppel, Bewegung einer ebenen Scheibe durch Momentankräfte, Koppelung zweier komplanar bewegten ebenen Scheiben. Lp.

D. J. Korteweg. Huygens' sympathische uurwerken en verwante verschijnselen, in verband met de principale en de samengestelde slingeringen die zich voordoen wanneer aan een mechanisme met één enkelen vrijheidsgraad twee slingers bevestigd worden. Amst. Ak. Versl. **14**, 413-432.

D. J. Korteweg. Huygens' sympathetic clocks and related phenomena in connection with the principal and the compound oscillations presenting themselves when two pendulums are suspended to a mechanism with one degree of freedom. Proc. Amsterdam **8**, 436-455.

D. J. Korteweg. Les horloges sympathiques de Huygens, les phénomènes connexes, et les oscillations principales et composées que présentent deux pendules fixés à un mécanisme à un seul degré de liberté. Arch. Néerl. (2) **11**, 273-295.

In der Einleitung wird eine historische Übersicht über die von Huygens zuerst beobachtete Erscheinung gegeben, daß zwei Pendeluhren von geringem Gangunterschiede, deren Aufhängepunkte eine geeignete Verbindung haben, sich gegenseitig im Gange beeinflussen. „Wir sehen, daß die neueren Forschungen, mit Ausnahme der Arbeiten von W. Dumas (Über Schwingungen verbundener Pendel. F. d. M. **6**, 606, 1874), sich auf Mechanismen beziehen, bei denen die Elastizität eine Rolle spielt;

wahrscheinlich war dies jedoch nicht der Fall, oder wenigstens nur in geringem Maße, bei den Experimenten von Huygens und Ellicott. Daher schien es sich zu verlohnen, die Frage von einer anderen Seite anzuschauen und das Verhalten eines recht allgemein gewählten Mechanismus mit einem einzigen Grade der Freiheit und mit zwei daran befestigten zusammengesetzten Pendeln zu untersuchen; hierbei ist besonders der Fall bemerkenswert, daß beide Pendel ungefähr gleiche Schwingungsperioden haben, während zugleich zum Zwecke der Anwendung auf die Erscheinungen der sympathetischen Uhren der Einfluß der Triebwerke zu beachten ist. Außerdem ist zu erwähnen, daß die auf diese Weise erhaltenen Resultate auch auf den Fall anwendbar sind, daß die Verbindung zwischen den beiden Pendeln durch einen elastischen Mechanismus verwirklicht wird, immer wenn, um praktisch zu reden, nur eine von den unendlich vielen Bewegungsarten einwirkt, die solch ein Mechanismus haben kann. Eine solche Bewegungsart hat an sich eine bestimmte Schwingungszeit, welche dieselbe Rolle in den Resultaten spielt, als ob sie einem nicht elastischen Mechanismus mit einem Grade der Freiheit angehört."

Die mathematische Behandlung des so definierten Mechanismus führt zunächst zu dem folgenden Ergebnis. Die beiden gegebenen Pendel mögen die reduzierten Längen l_1 und l_2 haben, $l_1 > l_2$. Dann besitzt der Mechanismus drei Hauptschwingungen, die langsame (langsamer als l_1), die mittlere (zwischen l_1 und l_2), die schnelle (schneller als l_2). Der genauen Diskussion dieser Verhältnisse bei Berücksichtigung der Konstanten des „Mechanismus" ist der Hauptteil der Arbeit gewidmet. Hierbei werden die früher beobachteten Erscheinungen, insbesondere die von Huygens und Ellicott, aufgeklärt. Lp.

A. Prey. Über eine Vorrichtung zur Vermeidung des Mitschwingens des Statives beim Doppelpendel. Wien. Ber. **114**, 993-1000.

Wenn nach dem Vorschlage von Faye zwei Pendel von gleicher Schwingungsdauer auf demselben Stativ nebeneinander so in Bewegung versetzt werden, daß sie nach entgegengesetzten Richtungen schwingen, so stellt sich nach kürzerer oder längerer Zeit zufolge der unvermeidlichen sehr geringen Differenzen der Schwingungsdauern der Zustand her, daß beide Pendel nach derselben Richtung schwingen, wie Cellérier 1880 gezeigt hat, und dann wird das Stativ zu kräftigem Mitschwingen veranlaßt. Zur Abhülfe dieses Übelstandes schlägt Prey eine eigentümliche Regulierung der Schwingungen des einen Pendels vor, die ganz geistvoll ersonnen, aber noch nicht praktisch erprobt ist. Dieses zweite Pendel soll in dem unteren Ende einen Schlitz erhalten; durch den Schlitz soll der Arm einer rotierenden Kurbel gehen, deren Umdrehungszeit gleich der Zeit einer Doppelschwingung des Pendels ist. Es wird nachgewiesen, daß für kleine Amplituden die so erzeugte erzwungene Bewegung des

Pendels dieselbe ist wie die Pendelbewegung. Die durch ein Uhrwerk unterhaltene Rotationsbewegung der Kurbel kann also der Bewegung des ersten Pendels durch alle Phasen angepaßt werden. Lp.

HORACE C. RICHARDS. The proper distribution of mass in the Kater pendulum. Abstract of a paper presented at the Philadelphia meeting of the Physical Society, December 30, 1904. Phys. Rev. **20**, 125.

Bemerkungen über den Einfluß der Gleitmasse. Lp.

C. E. MENDELHALL. A study of the ring-pendulum method for the absolute determination of „g". Abstract of a paper presented at the Philadelphia meeting of the Physical Society, December 30, 1904. Phys. Rev. **20**, 126-127.

Mit zwei verschiedenen Ringen als Pendeln, äußerer Durchmesser 28,8 cm, innerer 16,6 cm, Dicke 1,5 cm, wurde zu Madisce, Wisconsin, g zu 980,526 und 980,511 cm gefunden. Lp.

A. DENIZOT. Theorie der relativen Bewegung mit einer Anwendung auf das Problem der Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der rotierenden Erde, sowie auf den Foucaultschen Pendelversuch. Krak. Anz. 1904, 449-484.

A. DENIZOT. Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuches. Physik. Zs. **6**, 342-345.

M. P. RUDZKI. Bemerkung zum Aufsatz von Denizot unter dem Titel: „Theorie der relativen Bewegung etc." Krakau. Anz. 1905, 253-254.

L. TESAŘ. Die Theorie der relativen Bewegung und ihre Anwendung auf Bewegungen auf der Erdoberfläche. Physik. Zs. **6**, 556-559.

A. DENIZOT. Erwiderung auf eine von Rudzki bezüglich meines Aufsatzes: „Theorie der relativen Bewegung" veröffentlichte Bemerkung. Physik. Zs. **6**, 559.

A. DENIZOT. Die Theorie der relativen Bewegung und ihre Anwendung auf Bewegungen auf der Erdoberfläche. Physik. Zs. **6**, 677-678.

M. P. RUDZKI. Theorie der relativen Bewegung (Bemerkung zu Denizots Erwiderung auf meine Kritik seines Aufsatzes unter obigem Titel). Physik. Zs. **6**, 679-680.

A. Denizot. Über die Theorie der relativen Bewegung. Erwiderung zu Rudzkis wiederholter Kritik meines Aufsatzes. Physik. Zs. **6**, 745.

A. Denizot. Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuches. Ann. der Phys. (4) **18**, 299-322.

M. P. Rudzki. Bemerkung zur Abhandlung von A. Denizot unter dem Titel: „Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuches." Ann. der Phys. (4) **18**, 1070-1073.

Ref. verzichtet auf eine Wiedergabe des Gedankenganges der ersten Abhandlung Denizots und der durch sie hervorgerufenen Entgegnungen. Die Ansichten, denen Ref. zuneigt, sind am besten vertreten durch die Ausführungen von Tesař; die bezüglichen Sätze dieses Autors mögen daher die Stelle eines Referates vertreten.

„In seinen Ausführungen gelangt Denizot zu dem Ergebnis, daß die gleichmäßige Drehung der Schwingungsebene beim Foucaultschen Pendel nicht der Coriolisschen Kraft, sondern den Zentrifugalkräften des Massenmittelpunktes in bezug auf die augenblickliche Rotationsachse des Bezugsachsensystems zugeschrieben werden müsse, und daß erstere Kraft nur gewisse störende Nebenerscheinungen, also Größen zweiter Annäherung, hervorrufen könnte. In der bisher größtenteils festgehaltenen Betrachtungsweise wird aber beiden Kräften gerade die entgegengesetzte Wirkung zugewiesen, und zwar — wie mich dünkt — mit Recht. Im nachfolgenden möchte ich mir daher erlauben, einiges zur Bekräftigung dieser bisherigen Ansicht vorzubringen. Ich will mich, wie Denizot, auf die Anwendung der Sätze der relativen Bewegung auf die Erddrehung beschränken." Lp.

O. Olsson. Integration af rörelse-ekvationerna hos en grupp dynamiska problem. Arkiv för mat., astr. och fys. **2**, Nr. 18, 32 S.

Es wird gezeigt, daß man mit Anwendung doppeltperiodischer Funktionen zweiter Art solche Bewegungsgleichungen integrieren kann, bei welchen die lebendige Kraft und das Flächenintegral folgende Gestalt haben:

$$p^2 + q^2 + C_1 r^2 = D + E\gamma_3,$$
$$p\gamma_1 + q\gamma_2 + C_1 r\gamma_3 = F,$$

wenn zu gleicher Zeit die Bedingung $\frac{dr}{dt} = 0$ erfüllt ist. Die Bedeutung von $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ist die gewöhnliche; C_1, D, E und F sind Konstanten.

Die Auseinandersetzungen des Verf. werden auf das Problem, die Bewegung eines „symmetrischen schraubenförmigen" Körpers um einen festen Punkt der Achse zu bestimmen, angewandt. (Vgl. das Referat über eine Abh. des Verf. in der Hydrodynamik, S. 802.) Msn.

ÉD. HUSSON. Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. C. R. **141**, 100-102.

ÉD. HUSSON. Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe. Thèse. Paris: Gauthier-Villars. 85 S. 4°.

Beweis des Satzes: „Wenn die Anfangsbedingungen beliebig sind, ist jedes algebraische Integral der Differentialgleichungen für die Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt eine algebraische Kombination aus den klassischen Integralen, mit Ausnahme der Fälle von Euler, Lagrange und der Frau von Kowalewski." Lp.

ÉD. HUSSON. Sur un théorème de M. Poincaré, relativement au mouvement d'un solide pesant. C. R. **141**, 821-823.

„Damit bei der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt ein algebraisches Erstintegral existiere, das nicht auf eine Kombination der klassischen Integrale zurückkommt, ist es notwendig, daß das auf den Aufhängepunkt bezügliche Trägheitsellipsoid ein Drehellipsoid ist." Dieser Satz, dessen Beweis bei Poincaré in mehreren Stufen gewonnen wird, erhält jetzt vom Verf. eine kurze Herleitung auf einem anderen und direkten Wege. Lp.

P. BURGATTI. Sugl' integrali primi dell' equazioni del moto d' un corpo pesante intorno a un punto fisso. Annali di Mat. (3) **12**, 81-100.

Die Untersuchung der Erstintegrale $f(p, q, r, a, b, c) =$ konst. (wo p, q, r die Komponenten der Rotation in bezug auf die im Körper festen Achsen sind, ferner a, b, c die Kosinus der Winkel dieser Achsen mit der Vertikale) für das fragliche Problem hängt von einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit sechs unabhängigen Variabeln ab, deren Integration unübersteigliche Schwierigkeiten bietet. Um etwas vorwärts zu kommen, muß man daher Hypothesen zur Vereinfachung der Aufgabe bezüglich der Form von f einführen. R. Liouville hat in Acta Math. **20**, (F. d. M. **28**, 663, 1897) einige Untersuchungen über die Bestimmung der Fälle veröffentlicht, in denen ein viertes algebraisches Erstintegral existiert. Indem er zufolge eines Poincaréschen Satzes annimmt, daß das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, findet er, daß das in Rede stehende Integral existiert, wenn der Schwerpunkt in der Äquatorialebene liegt und $A = B = 2C/n$ ist (n eine ganze Zahl), und zwar nur in diesen Fällen. Doch ist ein solches Integral außer für $n = 1$ und $n = 2$ noch nicht gefunden worden.

Burgattis Untersuchung ist in ihren Zielen von der Liouvilleschen nicht sehr verschieden. Einerseits ist sie jedoch spezieller, insofern nur Integrale betrachtet werden, die nicht alle sechs Argumente p, q, r, a, b, c enthalten; andererseits allgemeiner, weil die Betrachtung nicht auf algebraische Integrale beschränkt wird, sondern sich auf beliebige Integrale erstreckt, und weil die Lage des Schwerpunkts und die Konstanten A, B, C des Trägheitsellipsoids willkürlich bleiben. Zwar hat diese Untersuchung nicht zur Auffindung neuer integrabler Fälle geführt; doch hat Burgatti seine Veröffentlichung gleichwohl für nützlich erachtet. Erstens umfaßt sie in einer einheitlichen, systematischen und der Eleganz nicht ermangelnden Analyse die bis jetzt bekannten Fälle vollständiger Integration. Sodann aber sind unter allen Erstintegralen diejenigen, welche höchstens von fünf der Elemente p, q, r, a, b, c abhängen, nach den algebraischen die einzigen, welche ein Mittel bieten, den bedeutendsten Schwierigkeiten zu entgehen, die der allgemeinen Untersuchung anhaften. Lp.

G. Kolossoff. Über Behandlung zyklischer Systeme mit Variationsprinzipien, mit Anwendung auf die Mechanik starrer Körper. Math. Ann. **60**, 232-241.

In der Abhandlung (Berl. Ber. 1888, 1095-1110) „Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit“ hat Minkowski unter anderem den Satz ausgesprochen: „Man fixiere einen beliebigen Punkt und eine beliebige Richtung im Körper. In einem Zeitelement dt sei $d\sigma$ der Weg des Punktes längs der unveränderlichen Achse des Impulses, $d\sigma_1$ der Weg der Richtung um diese Achse ... Die Größen e_1 und e_2 sind innerhalb einer beliebigen Zeitperiode solche Funktionen ..., daß $\delta\Phi = 0$, wo

$$\Phi = \int (T dt - J d\sigma - J_1 d\sigma_1)$$

ist.“ Das Verschwinden von $\delta\Phi$ entspricht einer neuen und sehr anschaulichen Minimaleigenschaft des Problems der Rotation für den Fall, daß keine Kräfte wirken. Diese Eigenschaft ist jedoch nichts anderes, als der Larmorsche Satz (Lond. M. S. Proc. **15**, 178-184, 1884), und die Funktion $T - J d\sigma/dt - J_1 d\sigma_1/dt$ ist (nach E. J. Routh, Dynamik II, § 450, S. 331) die „modifizierte Lagrangesche Funktion“, wie der Verf. durch kurze Rechnung zeigt. Es wird also dadurch nach dem Verfahren von Larmor eine Minimaleigenschaft abgeleitet, welche mit der von Minkowski gefundenen identisch ist.

Mit Hülfe dieser „Theorie der Modifikation“ beweist der Verf. einen ähnlichen Satz nicht nur für den Fall der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt, sondern für jeden Fall der Rotation um einen festen Punkt, bei welchem in einer Ebene der Flächensatz besteht. Die Betrachtung dreht sich um Modifikationen des Hamiltonschen Prinzips, mittels deren die Lösungen verschiedener Probleme der Mechanik

sich einfacher gestalten. Hiernach wird auch die Anwendung einiger anderer Methoden zum Übergang von einem kanonischen System von Differentialgleichungen zu einem anderen gegeben zum Zwecke der Lösung von Problemen aus der Mechanik starrer Körper. Lp.

W. H. Pickering. A little known property of the gyroscope. Nature **71**, 608-609.

E. W. Rowntree. Properties of rotating bodies. Nature **72**, 8.

Die Eigenschaft, von der Pickering meint, sie sei wenig bekannt, ist nach dem Eingesandt von Rowntree in aller Vollständigkeit beschrieben in dem Buche „Spinning tops" von Perry (vgl. F. d. M. **35**, 733, 1904). Lp.

C. Prang. Untersuchung der Bewegung eines schweren Rotationskörpers, besonders unter der Voraussetzung, daß ein Punkt der Achse gezwungen ist, sich auf einer festen horizontalen Ebene zu bewegen, und daß die Rotationsgeschwindigkeit sehr groß ist. Progr. städtische Oberrealschule Charlottenburg. 15 S.

Man kann die Aufgabe offenbar kurz als die der Bewegung eines gewöhnlichen Kreisels bezeichnen, dessen Spitze auf der horizontalen Ebene reibungslos gleitet. Nachdem ohne Bezug auf frühere Arbeiten, insbesondere ohne Berücksichtigung der neuesten Darstellung von Sommerfeld im Heft III des Werkes „Über die Theorie des Kreisels" S. 513-531 (1903), die allgemeinen Gleichungen aufgestellt sind, wird die Aufgabe durch die Annahme einer sehr großen Rotationsgeschwindigkeit vereinfacht, indem ein Faktor unter der in den Integralen vorkommenden Quadratwurzel der Einheit gleich gesetzt wird. Durch diese Annahme verwandeln sich die Integrale in elliptische. Die Bearbeitung der Formeln nach den Jacobischen Funktionen bildet dann den Hauptteil der Abhandlung. Lp.

C. Alasia. Sul movimento di una sfera che rotola in un piano mobile non orizzontale. Riv. di fis., mat. e sc. nat. **6**$_1$, 18-33.

Bewegt sich eine Ebene derart, daß sie einen geraden Kegel beständig berührt, und daß die Berührungserzeugende eine konstante Geschwindigkeit hat, so ist die Bewegung einer schweren Kugel auf dieser Ebene zu untersuchen. Das Problem wurde, nach des Verf. Angabe, vor einigen Jahren von A. Lefèbvre auf verschiedene Weise behandelt. Vi.

M. Gebbia. Sulla integrabilità delle condizioni di rotolamento di un corpo solido sopra un altro, e su qualche questione geometrica che vi è connessa. Palermo Rend. **20**, 265-303.

Die Arbeit ist der Frage gewidmet, unter welchen Bedingungen die Differentialgleichungen der rollenden Bewegung, welche im allgemeinen nicht integrabel sind, zu integrablen Gleichungen werden.

Zuerst wird von neuem der Nachweis geführt, daß, wenn man diese Differentialgleichungen an sich, d. h. ohne irgend welche Beschränkungen nimmt, ihre Integration nicht angeht. Nun werden bekanntlich die möglichen Lösungen der Gleichungssysteme mit totalen Differentialen, welche die Integrabilitätsbedingungen nicht befriedigen, dadurch gefunden, daß man das System durch andere Gleichungen ergänzt, die entweder ebenfalls Differentialgleichungen sind, oder Gleichungen in endlichen Gliedern. Dies bedeutet in dem mechanischen Problem aber die Hinzufügung anderer Verbindungen neben denen des Rollens. Wenn eine hinzugefügte Bedingung die Integrabilität zur Folge haben soll, so muß der dadurch ausgeübte Zwang darin bestehen, daß die Gyration (das Pivotement) ausgeschlossen wird, jedoch mit einem wichtigen Unterschied in bezug auf die Oberflächen. Will man die unbeschränkte Integrabilität erreichen, so müssen die beiden Oberflächen dieselbe konstante Krümmung besitzen, und zwar ist dies der von Hadamard schon untersuchte Fall. Wenn jedoch verlangt wird, daß die Integrabilitätsbedingungen nicht identisch erfüllt werden, sondern als Folge des Integralsystems, dessen Existenz vorausgesetzt wird, so wird durch Erörterung der hierzu notwendigen und hinreichenden Bedingungen gefunden, daß diese darin bestehen, daß die beiden Oberflächen überhaupt aufeinander abwickelbar sind, oder daß es sich um die von Ribaucour erforschte Bewegung handelt. Dieser Fall scheint Hadamard entgangen zu sein. Nebenbei wird der Verf. durch die eigenartige analytische Behandlung des Problems zu einem neuen Satze über die krummen Oberflächen geführt, von dem er nützliche Anwendungen für die Differentialgeometrie erhofft.

Mit der Hinzufügung zweier Verbindungen wird das System totaler Differentialgleichungen ein solches mit gewöhnlichen Ableitungen; daher ist die Integrabilität nun unbeschränkt, so daß keine andere Bedingung hinzugefügt zu werden braucht. Nichtsdestoweniger ist eine Untersuchung über den Fall angestellt, bei welchem die Verbindungen in einer punktweisen Beziehung der Flächen aufeinander bestehen. Denn dieser Fall ist bisher noch nicht untersucht worden, wahrscheinlich weil er für die angewandte Mechanik keine Bedeutung hat, also nur eine Aufgabe der theoretischen Mechanik bildet. Der wesentliche Umstand hierbei ist, daß dann das Rollen nur zustande kommt auf Kurven, von denen sich die nämliche Bogenlänge auf den beiden Oberflächen abwickelt. Diese Kurven sind in der Kartographie als „isoperimetrische Kurven“ benannt worden, ihre Behandlung findet sich aber nicht in den vom Verf. verglichenen Werken (Tissot, Mémoire sur la représentation des surfaces,

Paris 1881; Fiorini, Le proiezioni delle carte geografiche, Bologna 1881). Deshalb ist ihnen der letzte Paragraph der Abhandlung gewidmet.

Lp.

A. G. Kerkhoven-Wijthoff. On the small oscillations of a system of two hemispheres of which one is resting with its spherical surface on the plane face of the other, both rotating with finite velocity about their vertical axes. Nieuw Archief (2) 7, 48-63.

Die Arbeit ist die Antwort auf die Preisfrage Nr. 13 für das Jahr 1904. Dieselbe Frage ist für den Fall, daß die Rotationsgeschwindigkeit der beiden Halbkugeln um die Normale des Berührungspunkts Null oder sehr klein ist, von der Verfasserin im Nieuw Archief (2) **4**, 205-225 behandelt worden (F. d. M. **30**, 667, 1899). Jetzt ist diese Beschränkung aufgehoben. § 1. Ableitung der Bewegungsgleichungen. § 2. Integrale der Bewegungsgleichungen. § 3. Bedingungen für die Stabilität der Bewegung. § 4. Über den Einfluß kleiner endlicher Drehungen auf die Stabilität. § 5. Über den Einfluß großer Winkelgeschwindigkeiten um die Achsen der Figur. Die Einzelheiten sind im Original nachzulesen.

Lp.

E. Daniele. L'attrito nel movimento di un solido in contatto con un piano. Nuovo Cimento (5) **9**, 174-203.

Die Arbeit dient zur Erläuterung der allgemeinen Betrachtungen über Reibung, die in der vorjährigen Abhandlung des Verf. entwickelt sind (F. d. M. **35**, 739, 1904). Zu diesem Behufe wird das Beispiel behandelt, bei einem starren mit einer Ebene sich berührenden Körper, der sich nach einem als bekannt angenommenen Gesetze bewegt, diejenigen Koeffizienten auszurechnen, welche für die Reibungskräfte charakteristisch sind. Über die äußeren, den Körper angreifenden Kräfte werden keine Voraussetzungen gemacht, weil die gestellte Aufgabe nicht darin besteht, die Beschaffenheit der eintretenden Bewegung zu erforschen, sondern bloß vorläufig anzugeben, wie die endgültigen Ausdrücke der in die Bewegungsgleichungen einzuführenden Reibungskräfte erhalten werden. Die hierzu nötigen Rechnungen und ihre Ergebnisse können hier nicht im Auszuge wiedergegeben werden. Danach werden die Entwicklungen an dem Beispiele der Bewegung einer homogenen Kugel auf einer Ebene vollständig durchgeführt. Zuletzt werden die Modifikationen angedeutet, die bei beschränkter Bewegungsfreiheit des Körpers in der Behandlung der Aufgabe vorzunehmen sind.

Lp.

E. Daniele. Forze d'attrito ed equazioni del movimento nei sistemi liberi. Nuovo Cimento (5) **9**, 266-280.

Man denke sich gegeben ein holonomes System (X) von N Koordinaten $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Mit Hülfe der Gleichungen, welche die Zwangsbedingungen ausdrücken, seien die X_i als Funktionen von $n\ (< N)$

unabhängigen Parametern $x_1, x_2, \ldots, x_n$ berechnet. Man betrachte nun das System (x), das sich als durch diese n Koordinaten bestimmt ergibt. Unter diesen Umständen bleiben, wenn auch nicht mehr von Widerständen der Zwänge geredet werden kann, doch immer die von der Reibung herrührenden Widerstände übrig, und es muß möglich sein, sie in Betracht zu ziehen. Von ihren im vorjährigen Artikel des Verf. ausgesprochenen beiden Grundeigenschaften hört nun aber die erste auf, wegen des Mangels der Zwangswiderstände eine Bedeutung zu haben; die zweite ihrerseits fügt nichts Neues hinzu. Die ϱ_i mittels linearer Formen der μ auszudrücken, was die Zurückführung eines Systems unbekannter Elemente auf ein anderes mit einer kleineren Anzahl von Elementen ausmacht, hat also bei einem keinen Verbindungen unterliegenden Systeme nur noch eine formale Bedeutung.

„Das Aussehen, das man den Reibungskräften und folglich den Bewegungsgleichungen geben kann, ist also merkwürdig genug, um die Betrachtung des erwähnten mechanischen Falles als nicht unnütz erscheinen zu lassen. Er unterscheidet sich außerdem wesentlich in Anbetracht der endgültig in die Gleichungen einzuführenden Ausdrücke der Reibungskräfte von den Fällen, in denen die Fesseln explizit ihre Beiträge hinzufügen, wie man am Schlusse bewiesen sieht." Lp.

E. Daniele. Sulla rappresentazione parametrica delle forze d' attrito. Nuovo Cimento (5) 9, 289-296.

In der Abhandlung „L' attrito nel movimento d' un solido in contatto con un piano" wird vom Verf. die Bemerkung gemacht: Wenn zwei mechanische Systeme mit Reibung vorliegen, von denen das zweite aus dem ersten einfach durch Vermehrung der Zwänge entsteht, so werden beim Übergange vom ersten Systeme zum zweiten die Ausdrücke der Zwangskräfte und der Reibungskräfte insofern geändert, als die Zahl der Parameter λ, mit denen die Zwangskräfte zusammengesetzt werden, zunimmt, dagegen die der Parameter μ, mit denen die Reibungskräfte ausgedrückt werden, um ebensoviel abnimmt. Demnach wurde angemerkt und an einem speziellen Falle bestätigt, daß die Ausdrücke der Zwangskräfte des ersten Systems aus denen des zweiten sich ableiten lassen müssen, indem die λ bezüglich dieses letzteren Systems passenden linearen Verbindungen der λ bezüglich des ersteren gleichgesetzt werden; umgekehrt, wenn man die μ des ersten Systems geeigneten linearen Verbindungen der μ des zweiten gleichsetzt, müssen die Reibungskräfte jenes Systems in die entsprechenden dieses Systems übergehen. Dies wird in der gegenwärtigen Note nachgewiesen und an dem freien Systeme erläutert. Lp.

G. A. Maggi. Sulla teoria dell' attrito in relazione colla cinetostatica. Nuovo Cimento (5) 10, 240-254.

Die Abhandlung schließt sich an die Betrachtungen von Daniele in den vorstehend besprochenen Artikeln an; die neue, auf Painlevés

Arbeiten beruhende Theorie wird gegenüber der bisherigen unter dem zwiefachen Gesichtspunkte der Postulate und der Folgerungen erörtert. Maggi beschränkt sich hierbei auf die Systeme starrer Körper und bedient sich bei der Darstellung der Bewegung der Eulerschen Gleichungen, und zwar weil sie in ihrer expliziten Form sich besser für den gewollten Zweck eignen. Trotzdem besitzen die Schlußfolgerungen einen genügenden Grad von Allgemeinheit. Übrigens können die nämlichen Überlegungen ohne Schwierigkeit auf den allgemeineren, von Daniele behandelten Fall ausgedehnt werden, wie dies in der Note II am Ende des Aufsatzes angedeutet ist. Die Natur der abwägenden Betrachtung bringt es mit sich, daß auf den Gedankengang hier nicht näher eingegangen werden kann. Lp.

L. Lecornu. Sur le frottement de glissement. C. R. **140**, 635-637.

P. Painlevé. Sur les lois du frottement de glissement. C. R. **140**, 702-707.

L. Lecornu. Sur la loi de Coulomb. C. R. **140**, 847-848.

Wie Painlevé gezeigt hat, führt in gewissen Fällen das Coulombsche Reibungsgesetz zu der widersinnigen Folgerung, daß zwei sich berührende Körper einen negativen Druck aufeinander ausüben. Die Körper sind dabei als absolut starr angenommen. In der ersten Note will Lecornu diese Schwierigkeit heben, indem er in dem Painlevéschen Beispiele die Elastizität der sich berührenden Körper berücksichtigt. Aus dieser Erklärungsweise entspringen aber, wie Painlevé in seiner Erwiderung nachweist, neue Widersprüche. Daher verharrt er auf seiner früher ausgesprochenen Meinung: Für einen gegebenen Wert der Gleitgeschwindigkeit und des normalen Druckes hängt die Reibungskraft nicht ausschließlich von der Natur der sich berührenden Oberflächen ab; sie ist auch noch von der Verteilung der Drucke in den festen Körpern nahe bei den Berührungspunkten abhängig. Hierauf sucht Lecornu in der letzten Note abzuschätzen, wie weit seine Resultate gültig bleiben. Im Schlußworte weist er darauf hin, daß es sich nicht um das Coulombsche Gesetz in der Statik handelt, sondern in der Dynamik, bei der die Trägheitskräfte zu berücksichtigen sind; „physikalisch ist das Coulombsche Gesetz falsch." Lp.

---

de Sparre. Sur le frottement de glissement. C. R. **141**, 310-312.

Painlevé hat eine Anzahl von Beispielen angeführt, in denen die Coulombschen Gesetze der gleitenden Reibung, wenn sie ohne Übergang von einem anfänglichen Zeitpunkte an angewandt werden, zu einer Unmöglichkeit oder einer Unbestimmtheit führen. Wie Lecornu in seinen Mitteilungen an die Akademie bemerkt hat, verschwindet die Unmöglichkeit, wenn man annimmt, daß, wenn die beiden Körper bei der relativen Bewegung in Berührung kommen, der Reibungskoeffizient, der

anfänglich Null ist, sehr rasch bis zu dem auf die Bewegung bezüglichen Grenzwert f anwächst, wofern nicht ein Wert $f' \gtreqless f$ sich findet, der die gegenseitige Einwirkung der beiden Körper unendlich groß macht; in diesem Falle tritt eine Versteifung (arc-boutement) ein, die einen Stoß veranlaßt. Was die von Painlevé angedeutete Unbestimmtheit anlangt, so ist dieselbe nur scheinbar. Um diese beiden Tatsachen augenscheinlich zu machen, behandelt de Sparre ein Beispiel aus dem Traité de Mécanique von Appell (**2**, 120ff.). Lp.

P. Painlevé. Sur les lois du frottement de glissement. C. R. **141**, 401-405.

Mit Bezug auf die wiederholte Erörterung des Gegenstandes, insbesondere auf die Note von de Sparre in C. R. **141**, 310-312 (Ref. vorstehend) setzt Painlevé seine Ansichten noch einmal auseinander. Die Beispiele, welche ihn zu seiner Bemängelung der Coulombschen Gesetze geführt haben, beziehen sich auf solche Fälle, in denen nach jenen Gesetzen mehrere Bewegungen möglich sind, die er daher Fälle der Zweideutigkeit nennt. In bezug auf sie gilt die von ihm früher aufgestellte Regel: Die wahre Bewegung ist ohne Zweideutigkeit definiert, wenn man zugibt, daß zwei feste Körper, die zu einem Zeitpunkte t unter gegebenen Bedingungen nicht aufeinander drücken würden, wenn sie vollkommen glatt wären, auch nicht aufeinander reagieren, wenn sie rauh sind. Damit ferner das klassische Gesetz der Reibung in der Ruhe nicht zu unzulässigen Folgerungen führe, muß man es durch das gleiche Prinzip ergänzen. Diese Anschauungen stimmen wesentlich mit denen von de Sparre überein, da dieser implizite jene allgemeine Regel anwendet. Auf den Fall der Unmöglichkeit will der Verf. noch zurückkommen. Lp.

P. Painlevé. Sur les lois du frottement de glissement. C. R. **141**, 546-552.

In dieser Note beschäftigt sich Painlevé mit den Fällen der Unmöglichkeit, welche durch die Anwendung der Coulombschen Gesetze entstehen. Wir können hier nicht die zu diesem Behufe ersonnenen Beispiele wiedergeben. Durch sie begegnet der Verf. allen Einwänden von Lecornu, de Sparre und Chaumat und kommt dann auf seinen früheren Ausspruch zurück: „Es besteht unter zu verwirklichenden Bedingungen ein logischer Widerspruch zwischen den Coulombschen Gesetzen und der Dynamik der starren Körper.“ Jetzt fügt er hinzu: „Die Bedingungen, unter denen dieser Widerspruch sich bekundet, können während einer so großen Zeitdauer, wie man will, verwirklicht werden.“ Lp.

N. Joukowsky. Theorie des Apparates des Ingenieurs Romeyko-Gurko. Moskau. Phys. Sekt. **13**, 39-41. (Russisch.)

Auf Grund eines Apparates, welchen obengenannter Ingenieur zur Erklärung einiger Erscheinungen im Gebiet der Friktionskräfte konstruiert hat, beweist N. Joukowsky folgendes Theorem:

Wenn zwei Räder von verschiedenem Diameter auf einer Walze starr befestigt sind, so wird bei der Bewegung des Fuhrwerks durch von außen wirkende Kräfte das Rad von größerem Diameter nur rollende, das Rad von geringerem Diameter eine rollende und zugleich gleitende Bewegung haben. Wenn aber die Bewegung des Fuhrwerks infolge innerer, die Walze drehender Kräfte vor sich geht, dann wird umgekehrt das Rad mit geringerem Diameter nur rollende, das mit größerem rollende und gleitende Bewegung haben. Der letzte Umstand findet so lange statt, als das Moment der Kräftepaare nicht eine gegebene Größe übersteigt. Jk.

J. W. Sharpe. The boomerang. Phil. Mag. (6) **10**, 60-67.

Während G. T. Walker in seiner Abhandlung über den Bumerang in Phil. Trans. **190** (1897) die Erscheinungen rechnerisch verfolgt und erläutert hat, begnügt sich Sharpe mit einer qualitativen Erklärung der Bewegungsart; der Einfluß des Luftwiderstandes auf rotierende Körper wird vornehmlich herbeigezogen. Zuletzt wird auf die bekannten Erscheinungen bei rotierenden Geschossen hingewiesen, wobei dieselbe Erklärungsweise Platz greift. Lp.

F. Gilman. The ballistic problem. Annals of Math. (2) **6**, 79-89.

Es wird gezeigt, daß vermittelst der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Entwicklung der Funktionen die Differentialgleichungen für die Bahnlinie, wenn der Luftwiderstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, ohne übermäßige Mühe integriert werden können, so daß sie Resultate von ganz beträchtlicher Genauigkeit geben. Zuerst wird eine Methode von recht großer Genauigkeit gelehrt, die aber bei der Anwendung viel Arbeit macht; danach werden viel einfachere Methoden entwickelt, die für praktische Zwecke hinreichend genaue Ergebnisse liefern. Lp.

P. Charbonnier. Sur les méthodes de la balistique extérieure. Rev. d'Artillerie **65**, 333-363.

Nach einer Anmerkung der Redaktion könnte dieser Aufsatz als ausführliche Einleitung zu dem Buche angesehen werden: P. Charbonnier, Traité de balistique extérieure, 2e édition (Paris: Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1904). Nach einer kurzen literarhistorischen Einleitung, in welcher die Hauptwerke über äußere Ballistik aus den

letzten 25 Jahren kurz besprochen werden, erörtert der Verf. (§ 2) den Gegenstand und die Einteilung der äußeren Ballistik, danach ferner (§ 3) das Gesetz des Luftwiderstandes. Die allgemeinen Fragen in bezug auf das ballistische Hauptproblem werden nun (§ 4) aufgestellt. Es folgt sofort (§ 5) die Eulersche Theorie nebst den sich anschließenden mathematischen Arbeiten bis in die Jetztzeit, die „nur den Charakter von Übungen in der reinen Analysis tragen". Als praktisch wichtiger und mathematisch unschwer zu bewältigender Fall wird (§ 6) der des flachen Bogenschusses besprochen, danach (§ 7) die anderen der Integration zugänglichen Fälle. Die Einflüsse sekundärer Art (Änderung der Größe g mit der Höhe, mit der geographischen Breite, Einfluß der Erddrehung, Einfluß des Windes, der Rotation der Geschosse) werden (§ 8) kurz erörtert. Endlich (§ 10) wird auf die Schießtafeln noch eingegangen. Schlußwort: „Wir haben den Versuch gemacht, auf wenigen Seiten eine allgemeine Übersicht über das jetzige Gebiet der äußeren Ballistik zu geben, die Methoden zu umschreiben, welche diese Wissenschaft anwendet, und gewissermaßen ihre Philosophie zu schaffen." Lp.

R. Liouville. Sur les pressions développées, à chaque instant, en vase clos par des poudres colloïdales de diverses formes. C. R. **140** 708-710.

Durch die Arbeiten von Vieille ist festgestellt, daß die kolloidalen Pulver nach parallelen Oberflächen abbrennen, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die einer Potenz des Druckes proportional ist. Bei den Pulversorten mit reiner Schießbaumwolle liegt der Exponent nahe bei $^2/_3$. Dieses experimentelle Ergebnis wird von Liouville durch eine theoretische Betrachtung bestätigt. Hierbei wird die aus diesem Exponenten gefolgerte theoretische Beziehung zwischen dem Drucke und der Zeit mit der experimentell ermittelten Kurve der Drucke als Funktion der Zeit verglichen. Diese Kurve zeigt je nach der Gestalt der Pulverkörner Eigentümlichkeiten, welche die Theorie voraussieht, und welche mit Genauigkeit bestätigt werden. Lp.

Gossor et R. Liouville. Sur les effets balistiques des poudres sans fumée dans les bouches à feu. Paris: Imprimerie nationale [Rev. d'Artillerie **67**, XXV-XXVI].

Nach der Anzeige in der Revue d'Artillerie stellen die Verf. die Differentialgleichung der Bewegung des Geschosses im Innern der Kanone auf, indem sie das Äquivalenzprinzip anwenden. Durch sinnreiche Vertauschung der Variabeln und verschiedene Homogeneitäts-Betrachtungen führen sie dann die Erforschung der Geschwindigkeiten auf die Bestimmung einer Oberfläche zurück und die der Druckkräfte auf die Bestimmung einer Kurve, während das Problem stets in seiner vollen Allgemeinheit

betrachtet wird. Mit Benutzung der zahlreichen Schießergebnisse, die unter ungemein mannigfachen Bedingungen ausgeführt wurden, konstruieren sie die Geschwindigkeitsfläche punktweise und bestimmen hierauf eine analytische Darstellung dieser Oberfläche. Auf die nämliche Weise stellen sie die Formel für die Druckkräfte auf und leiten aus den ballistischen Experimenten die Charaktere der verschiedenen Pulversorten ab. Danach untersuchen sie die Anwendung der Formeln auf die Bestimmung der ballistischen Wirkungen bei einer gegebenen Kanone und auf die Erforschung der inneren Anlagen eines Geschützes in bezug auf eine bestimmte artilleristische Wirkung. Nachdem sie Tafeln zur Erleichterung beim Gebrauche der Formeln entworfen haben, definieren und prüfen sie verschiedene artilleristische Typen und Modelle. Schließlich geben sie einige Zahlenbeispiele als Anwendungen der Methode auf die Lösung der Hauptprobleme der Artillerie. Lp.

W. Wolff. Über die Geschoßgeschwindigkeit nahe vor der Gewehrmündung. Kriegstechn. Zs. 8, 481-498.

Um die Frage abschließend zu beantworten, ob ein abgefeuertes Geschoß außerhalb der Mündung der Waffe durch die nachströmenden Pulvergase noch eine Vergrößerung seiner Geschwindigkeit erfahre, oder ob die Annahme zutreffend sei, welche allen praktischen ballistischen Berechnungen zugrunde gelegt wird, daß das Maximum der Geschoßgeschwindigkeit mit dem Moment zusammenfalle, in dem der Geschoßboden die Mündung verläßt, hat der Verf. die vorliegende Arbeit unternommen, in der sowohl die bisher zur Aufklärung dieses Punktes unternommenen Versuche noch einmal einer theoretischen Erörterung unterzogen, als auch neue Versuche beschrieben und diskutiert werden. Wir können hier nicht eine Beschreibung dieser neuen Experimente geben, die mit allen Mitteln der Präzisionsphysik ausgeführt sind, sondern müssen uns begnügen, die aus ihnen gefolgerten Ergebnisse herzusetzen.

1. Die mitgeteilten Versuche lassen es als wahrscheinlich erscheinen, daß die Geschoßgeschwindigkeit an der Mündung des Gewehres ihren höchsten Wert hat. 2. Von 0.5 m vor der Mündung nimmt die durchschnittliche Geschoßgeschwindigkeit von Meter zu Meter beständig ab. Geringe Abweichungen von diesem regelmäßigen Verlauf in nächster Nähe der Gewehrmündung sind möglich, aus den bisherigen Versuchen des Militärversuchamtes aber nicht erkennbar, für die Praxis jedenfalls ohne Bedeutung. 3. Die fehlerfreie, z. B. mit Gitterrahmen auf der Strecke 0 bis 50 m gemessene durchschnittliche Geschoßgeschwindigkeit stimmt mit der wahren V_{25} bis auf einige Zehntelmeter überein. 4. Die in üblicher Weise mit der Stahlscheibe ermittelte V_{25} wird um einige Meter kleiner gemessen, als der Wirklichkeit entspricht. Lp.

EDM. RÖGGLA. Über die theoretische Beurteilung des Einschießens. Mitt. üb. Art. u. Genie **36**, 1062-1075.

„Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für die Lage der Einschießlinie innerhalb bestimmter Grenzen bildet ein Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dessen Lösung auf rein mathematischem Wege auf Schwierigkeiten stößt. Es soll nun hier ein zum Teil auf geometrischer Grundlage beruhender Vorgang erläutert werden, der nicht nur die Lösung der in Rede stehenden Aufgabe auf verhältnismäßig einfache Weise gestattet, sondern auch als Ausgangspunkt für die zahlenmäßige Berechnung anderer Aufgaben über Treffwahrscheinlichkeitsverhältnisse beim feldmäßigen Schießen dienen kann.“ Lp.

G. FORBES. Exterior ballistics. Error of the day and other corrections to naval range-tables. Lond. Roy. Soc Proc. **74**, 392-395.

Gibt eine Anleitung, wie man zu den für eine normale Luftdichte berechneten Schußtafeln die aus Änderungen der Dichte folgenden Korrektionen berechnen kann. Br.

D. SEILIGER. Studii sulla dinamica dei sistemi. Batt. G. [(2) **12**] **43**, 329-349.

Übersetzung einer russischen Arbeit, die in den Denkschriften der Universität Kasan, Jahrgang 68, Buch VII u. VIII, S. 83-142, Buch IX, S. 51-78 (1901) erschienen ist. Von der italienischen Übersetzung liegt erst der Anfang vor. Der Verf. leitet die Abhandlung mit den Worten ein: „Sehr wenige Probleme über die Bewegung eines einigermaßen allgemeinen Systems von Punkten und von Körpern lassen sich vollständig lösen. Dies veranlaßt mich, meine Untersuchungen über die folgenden Systeme zu veröffentlichen: I. Das lineare System, gebildet aus n schweren, unendlich kleinen Ringen, die auf einer geradlinigen, starren und schweren (unendlich dünnen) Stange aufgereiht sind. II. Das Röhrensystem, gebildet aus n schweren zylindrischen Röhren, die ineinander stecken. Die Bewegung dieser Systeme liefert ein neues und einfaches Beispiel für die Anwendung der Weierstraßschen elliptischen Funktionen.“ In dem vorliegenden Bruchstücke ist erst die Betrachtung der Bewegung des Systems I begonnen. Lp.

O. FISCHER. Über die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme. Leipz. Abh. **29**, 267-354.

Mit dieser Arbeit nimmt der Verf. die rein mathematischen Untersuchungen wieder auf, die er in seiner Habilitationsschrift begonnen hatte (vgl. F. d. M. **25**, 1455, 1893), die aber durch die Reihe von Arbeiten mehr beobachtender oder experimenteller Art unterbrochen wurden. Nach einer Übersicht über die bisher gewonnenen Ergebnisse in der Einleitung

werden im ersten Abschnitte Eigenschaften der reduzierten Systeme und Hauptpunkte des allgemeinen räumlichen Gelenksystems abgeleitet. Danach behandelt der zweite Abschnitt in ausführlicher Weise die Bewegungsgleichungen für das zweigliedrige räumliche Gelenksystem, der dritte summarisch das allgemeine räumliche Gelenksystem. Zuletzt werden in einem Rückblicke die Resultate noch einmal vorgeführt.

Die Haupteigenschaft der reduzierten Systeme und Hauptpunkte beruht darin, daß sie die Zurückführung der Kinetik der Gelenksysteme auf die Kinetik eines einzigen starren Körpers ermöglichen. Zur Erläuterung diene die folgende Betrachtung.

Wenn man die sämtlichen an einem Gliede des Gelenksystems befindlichen Gelenke durchtrennt, so fällt an jedem Gelenk ein im allgemeinen noch aus mehreren Gliedern bestehendes Teilsystem ab, so daß das betreffende Glied allein übrig bleibt. Verlegt man die Masse eines jeden Teilsystems und die an ihm angreifenden Kräfte nach dem Mittelpunkte des dasselbe mit dem Gliede verbindenden Gelenks und fügt sie der Masse des Gliedes und den schon an ihm angreifenden Kräften hinzu, so entsteht ein „reduziertes System" mit seinen Kräften.

Denkt man weiter an jedem dieser Gelenkmittelpunkte noch eine Kraft hinzugefügt, welche entgegengesetzt gleich der Effektivkraft des Schwerpunktes des anhängenden Teilsystems für seine zum Mittelpunkte des Verbindungsgelenks relative Bewegung ist, so bewegt sich das reduzierte System unter dem Einfluß dieser Effektivkräfte und der anderen an ihm angreifenden Kräfte genau so wie ein einziger starrer Körper. Man kann also zur Untersuchung der Bewegung desselben die bekannten Gleichungen für die Bewegung eines starren Körpers verwenden. Mit der Bewegung eines reduzierten Systems ist nun auch die Bewegung des demselben zugrunde liegenden Gliedes ohne weiteres gegeben. Durch die Verlegung der Masse eines Teilsystems nach dem Mittelpunkte des Verbindungsgelenks wird der Einfluß der Translation, durch die Anbringung der negativen Effektivkraft der Einfluß der Rotation des Teilsystems relativ zum Gelenkmittelpunkt in Rechnung gezogen.

Auf diese Weise kann man bei jedem noch so komplizierten räumlichen Gelenksysteme die Bewegungsgleichungen, welche zu den einzelnen Gliedern desselben gehören, anschreiben, ohne auf die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen zurückzugreifen. Es ist nur nötig, die zur Bestimmung der angegebenen relativen Effektivkräfte führenden relativen Beschleunigungen der Schwerpunkte der Teilsysteme abzuleiten. Dies gelingt ohne große Mühe und auf die einfachste Weise unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen den Hauptpunkten der Glieder des Gelenksystems und den Schwerpunkten der Teilsysteme. Lp.

F. Gossart. Étude chronophotographique et mathématique des allures du cheval. Rev. d'Artillerie **65**, 392-416, 460-492; **66**, 5-28, 126-149, 188-204.

Die Studien von Gossart über die Gangarten des Pferdes begegnen sich mit den Arbeiten von Fischer über den Gang des Menschen, von denen jedoch der französische Oberstleutnant der Artillerie nichts erfahren zu haben scheint. Wir begnügen uns damit, die von ihm verfolgten Ziele in seinen Worten wiederzugeben: „Meine Absicht ist die, zu zeigen, wie das Pferd unter allen Umständen, die eintreten können, läuft, indem ich alle sich folgenden Stellungen der Glieder während der Ausführung eines vollständigen Schrittes vorweise, ohne jedoch in irgend einer Weise die dabei spielenden Kräfte zu untersuchen. Ich werde mich also nur mit der Lage der Glieder in den verschiedenen Zeitpunkten beschäftigen unter Ausschluß jeder mechanischen Betrachtung. Anders ausgedrückt, ich werde mich nur mit der Kinematik und in keiner Weise mit der Dynamik des Ganges beschäftigen, weil diese letztere noch ganz in ihren Anfängen steckt.“ Lp.

A. Petot. Sur le mode de fonctionnement du différentiel des automobiles. C. R. **140**, 497-499.

Eine theoretische Behandlung der Aufgabe, deren Wiedergabe aber ein zu weit führendes Eingehen auf technische Einzelheiten nötig machen würde. Die Note nimmt einer Veröffentlichung von Arnoux gegenüber (in „La vie automobile“, 11. février 1905, p. 92) gewisse Prioritätsrechte des Verf. in Anspruch; in autographierten Blättern seines Cours de l'Université de Lille hat Petot seine theoretischen Betrachtungen über die Automobile vor Arnoux veröffentlicht. Lp.

A. Ferrus. Roulements à billes et à galets au dix-huitième siècle, sous la Révolution et de nos jours. Rev. d'Artillerie **66**, 265-303, 424-440.

Die Kugellager der Zweiräder gelten als eine Erfindung der jüngsten Zeit. Ferrus zeigt in der vorliegenden historischen Arbeit, daß Kugellager schon 1711 erwähnt werden, und will ihre Anwendungen in Frankreich von diesem Termine an bis in die Jetztzeit verfolgen. Besonders in der Zeit der großen Revolution hat man sich in Frankreich eingehend mit dieser Einrichtung beschäftigt. Über diese Periode kommt die Darstellung noch nicht hinaus. Die Artikelreihe soll fortgesetzt werden. Lp.

E. Solvay. Sur le problème dit du travail statique; essai de dissociation des énergies mises en jeu. C. R. **140**, 1362-1364.

In einer früheren Note (F. d. M. **35**, 705, 1904) sagte der Verf., daß, wenn ein Muskel eine Masse hebt oder trägt, keine allgemeine

Beziehung a priori zwischen der sogenannten statischen Arbeit der Physiologen und der ins Spiel tretenden Energie besteht. In der gegenwärtigen Note erforscht er den besonderen Fall eines Muskels, der eine Masse langsam hebt, und macht den Versuch, die beiden Elemente des energetischen Verbrauchs zu trennen, die er Stützenergie und Hubarbeit genannt hat. Lp.

J. ANDRADE. Recherches chronométriques. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 451-458.

Der Vortrag berichtet über die Entwickelung der neueren Untersuchungen der Chronometrie in den Abschnitten: I. Einige Worte über die Begründer der Chronometrie. Untersuchungen über einige Grundprobleme der chronometrischen Theorien. II. Trägheitswirkung der zylindrischen Spirale von Phillips. III. Die eigenen Untersuchungen des Vortragenden über die Theorie der Synchronisation. IV. Zweck eines Laboratoriums für experimentelle Chronometrie. Lp.

Weitere Literatur.

AMICO. Nozioni varie di artiglieria e soluzioni di esercizi di tiro colle bocche da fuoco d'assedio. Torino: Artale (1904).

A. G. GREENHILL. The mathematical theory of the top considered historically. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 100-108. Referat F. d. M. **35**, 731, 1904.

Le duc DE GUICHE et H. GILARDONI. Sur un nouvel embrayage. C. R. **140**, 1132-1134.

Nur von technischem Interesse. Lp.

G. W. HEMMING. Billiards mathematically treated. Second edition. London: Macmillan and Co. 61 S. (1904). [Nature **71**, 362.]

CH. HENRY. Sur la mesure de l'énergie disponible par un dynamomètre totaliseur-enregistreur. C. R. **140**, 809-811.

D. GERMAN HERMIDA Y ALVAREZ, D. JOSÉ M. RISTORI Y CASTAÑEDA. Curso de artilleria. 2ª edición. 2 Vol. Madrid: Perlado y Paez (1903).

J. KÜRSCHÁK. Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials. Math. és termész. értesitö **23**, 401-409.

MOREL. La balistique graphique et son application dans le calcul des tables à tir. Paris: Gauthier-Villars (1904).

R. PEESKOT. Die näherungsweise Berechnung der Kompensationspendel. Leipzig. 29 S. 8°.

J. PERRY. On winding ropes in mines. Brit. Ass. Rep. South Africa, 339.

A. Souchon. Sur l'intégration des équations générales de la dynamique analytique et sur les principales propriétés de leurs intégrales canoniques. Tours: Deslis. 23 S. 8°.

M. Tolle. Die Regelung der Kraftmaschinen. Berechnung und Konstruktion der Schwungräder, des Massenausgleiches und der Kraftmaschinenregler in elementarer Behandlung. Berlin: Springer. XI u. 461 S. 8° (1905).

B. Hydrodynamik.

E. Jouguet. Sur la similitude dans le mouvement des fluides. J. de l'Éc. Pol. (2) **10**, 79-115.

Gerade zur Beurteilung mancher Flüssigkeitsbewegungen hat Newton sein berühmtes Theorem über die Ähnlichkeit in der Mechanik ersonnen. Wegen gewisser Bedenken, die von Bertrand und Reech gegen diese Anwendungen erhoben, aber nicht vollständig erledigt sind, hat Jouguet die Frage nach der Ähnlichkeit bei der Bewegung von Flüssigkeiten wieder aufgenommen und sich bei der erneuten Behandlung auf die Prinzipien der Thermodynamik gestützt. Auf diesem Wege hat er an einigen wichtigen Stellen die Newtonsche Theorie vervollkommnet.

Der erste Teil der Untersuchung ist der allgemeinen Gleichung der Thermodynamik gewidmet, die dann besonders auf den Fall der Flüssigkeiten angewandt wird. Bei der Behandlung kleiner Bewegungen ergibt sich ein von Bertrand bereits aufgestelltes Theorem nebst den zu seiner Ableitung notwendigen Hypothesen.

Nachdem sodann eine scharfe Definition physisch-ähnlicher Flüssigkeiten aufgestellt ist, werden die vollkommenen Gase als Beispiele solcher Flüssigkeiten näher betrachtet, und es ergibt sich, daß der Newtonsche Satz anwendbar ist auf die adiabatischen Bewegungen der vollkommenen Gase, die dasselbe Verhältnis der spezifischen Wärmen haben. Nimmt man noch auf die Wärmeleitung in solchen Gasen Rücksicht, so findet man als Bedingung für die Ähnlichkeit der Bewegungen, daß die Koeffizienten der Wärmeleitung in demselben Verhältnis stehen müssen wie die linearen Dimensionen der Körper; also: die in einer und derselben Flüssigkeit durch ungleiche Körper hervorgerufenen Bewegungen können nur ähnlich sein, wenn sie adiabatisch und isotherm sind.

Hiernach wird der Einfluß der Zähigkeit erforscht. Allgemein findet man, daß die adiabatischen Bewegungen zweier Flüssigkeiten nicht ähnlich sind. Ein näheres Eingehen auf die Probleme der praktischen Hydraulik führt jedoch zu dem Ergebnisse: „Bei den Bewegungen, in denen die Zähigkeit eine Rolle spielt, kann man angenähert alles berechnen, dessen Kenntnis von Bedeutung ist, ohne etwas über die Form dieser Zähigkeit zu wissen, indem man Sätze anwendet, welche sie eliminiert, und indem man diese durch gewisse einfache Hypothesen ergänzt, die mit der Ähnlichkeit, so wie man sie definieren würde, wenn die Zähigkeit nicht vorhanden wäre, verträglich sind."

Endlich wird auch noch die Reibung an den Wänden und der Stoß berücksichtigt. Wenn man bei einer gewissen Annäherung stehen bleibt, stören die Reibungskräfte die Ähnlichkeit nicht; ebenso verhält es sich mit den Stoßerscheinungen.

Für die Aufgaben der praktischen Hydraulik, die dann noch besprochen werden, ist folgender Satz interessant: „Wenn zwei ähnliche Turbinen sich mit Winkelgeschwindigkeiten bewegen, die der Quadratwurzel aus ihren linearen Dimensionen proportional sind, während die Fallhöhen diesen nämlichen Dimensionen proportional sind, so nutzen sie denselben Bruchteil der verbrauchten Arbeit aus.“ Bezüglich des Widerstandes der Flüssigkeiten wird das Gesetz des Quadrates der Geschwindigkeit als angenähert richtig erkannt. Lp.

E. Jouguet. Sur la similitude dans le mouvement des fluides. C. R. **141**, 346-348.

Auszug aus der größeren Abhandlung, über welche vorstehend referiert ist. Lp.

G. Zemplén. Kriterien für die physikalische Bedeutung der unstetigen Lösungen der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen. Math. Ann. **61**, 437-449.

In allen Punkten, wo die Geschwindigkeit oder eine ihrer Ableitungen nach der Zeit unstetig wird, sind entweder die hydrodynamischen Gleichungen selbst oder gewisse, aus denselben durch Differentiation nach der Zeit gewonnene Gleichungen nicht erfüllt. Die Bewegungsgleichungen allein reichen daher zur Beschreibung der Erscheinungen nicht aus. Entweder müssen nach dem Vorgange von Riemann und Christoffel besondere Hypothesen für die Unstetigkeitsstellen postuliert werden, oder solche allgemeine Hypothesen aufgestellt werden, aus welchen für die stetigen Stellen die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen folgen, für die unstetigen Stellen andere Bedingungen sich ergeben. Auf den Vorschlag von Hilbert hat Zemplén den zweiten Weg eingeschlagen, der darin besteht, daß auf ein Prinzip der Mechanik zurückgegriffen wird. Es ist zu erwarten, daß für den Fall einer sich fortpflanzenden Unstetigkeitsfläche aus einem geeignet formulierten mechanischen Prinzip für die stetigen Stellen die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen und für die Unstetigkeitsstellen als sogenannte dynamische Kompatibilitätsbedingungen sich die Impulsgleichungen ergeben. In der vorliegenden Abhandlung wird nun in der Tat gezeigt, wie aus dem Hamiltonschen Prinzip der stationären Wirkung, ohne andere Annahme als die des Auftretens einer Welle, die Bewegungsgleichungen mit den Kompatibilitätsbedingungen folgen. Der Durchsichtigkeit halber wird nur der Fall der eindimensionalen Bewegung ausführlich behandelt; für den allgemeinen Fall wird das Verfahren skizziert und werden die Resultate mitgeteilt. Lp.

V. Bjerknes. Sur la formation des tourbillons dans un fluide sans frottement avec une application à l'analogie des phénomènes hydrodynamiques et électrostatiques. Arch. sc. phys. et nat. (4) **20**, 268-284.

Aus den hydrodynamischen Versuchen von C. A. Bjerknes ergibt sich, daß die hydrodynamische Fernkraft in zwei zerlegt werden kann: die induktive Kraft, welche nicht der Gleichheit der Aktion und Reaktion gehorcht, und die Energiekraft, welche jenem Prinzipe gemäß wirkt. Von diesen Versuchen seines Vaters ausgehend, geht jetzt V. Bjerknes zu der Frage über, ob man statt der festen pulsierenden Körper nicht auch Kugeln nehmen kann, die aus Teilen der Flüssigkeit selbst gebildet sind. „Der wesentliche Punkt dieses Entwurfs der Untersuchung ist die folgende Bemerkung: Wenn eine der Flüssigkeit entnommene Masse, welche die Erscheinung der regelmäßigen Zusammenziehungen und Ausdehnungen aufweist, zufolge der Scheinkraft in Bewegung ist, so entsteht zwangsweise eine Gleitfläche rings um diese Masse, und diese Oberfläche kann als die Grenze eines Inbegriffes von Wirbeln betrachtet werden, deren Radius die Null zur Grenze hat. Daraus folgt, daß die vollständige Theorie der Wirbel zu Schlüssen bezüglich der Fernwirkungen führt.

Aus den Differentialgleichungen, die für die Bewegung einer reibungslosen Flüssigkeit aufgestellt werden, zieht der Verf. eine Reihe von bemerkenswerten Sätzen. „Es entsteht ein Wirbel um die Schnittlinie der Oberfläche gleicher Dichtigkeit und der Oberfläche gleichen Potentials in der Richtung vom Vektor Dichtigkeit nach dem Vektor Potential." — „In bezug auf die Tauchflüssigkeit nimmt ein schwerer Körper eine absteigende Bewegung an und ein weniger schwerer eine aufsteigende. Das ist eine dynamische und ganz neue Erklärung der von dem archimedischen Prinzipe abhängigen Erscheinungen." — „Es entsteht ein Wirbel um die Schnittlinie der Oberfläche gleicher Dilatation und der Oberfläche gleichen Potentials in der Richtung einer Rotation vom zweiten Vektor zum ersten." — „In bezug auf die umgebende Flüssigkeit nimmt ein sich zusammenziehender Körper eine Bewegung an in der Richtung derjenigen der Flüssigkeit, ein sich ausdehnender in entgegengesetzter Richtung." — „In bezug auf die umgebende Flüssigkeit bewegt sich ein Körper von größerem spezifischen Volumen in der Richtung der abnehmenden Energie, einer von geringerem spezifischen Volumen in entgegengesetzter Richtung." — „Die ponderomotorische Kraft in dem elektrostatischen Felde und die Kraft der Energie im hydrodynamischen haben gleiche Curls, aber von entgegengesetztem Zeichen." — „Die Kraft der Energie in dem hydrodynamischen Felde und die ponderomotorische Kraft des elektrostatischen Feldes erzeugen gleiche, aber entgegengesetzte Bewegungen der in ihnen befindlichen Körper." — „Wenn man die Verteilung des spezifischen Volumens in einem hydrodynamischen System mit derjenigen der dielektrischen Konstante identifiziert und die der Dilatation mit derjenigen der wahren Elektrizität, so ist die Bewegungsgröße verteilt, wie es die elektrostatische Intensität sein würde." Lp.

V. Bjerknes. Recherches sur les champs de force hydrodynamiques. Arch. sc. phys. et nat. (4) **20**, 325-350, 473-505.

Untersuchungen über die Bewegung flüssiger Körper in einer Flüssigkeit. I. Allgemeine Hypothesen. II. Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. III. Voraussetzungen hinsichtlich der Konstitution des flüssigen Systems. IV. Geometrische Analogie der hydrodynamischen Felder und der stationären elektromagnetischen Felder. V. Fernewirkungen. VI. Verschiedene Analogien. VII. Permanenter Bewegungszustand. VIII. Zustand schwingender Bewegungen. Lp.

V. Bjerknes. Über Wirbelbildung in reibungslosen Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrostatischen. Ark. för Math., Astr. och Fysik **1**, 225-250.

Wenn eine pulsierende Flüssigkeitsmasse als Folge der Anziehung eine Bewegung durch die umgebende Flüssigkeit angenommen hat, so findet notwendig ein Gleiten an derjenigen Fläche statt, welche die pulsierende Flüssigkeitsmasse von der umgebenden nicht pulsierenden Flüssigkeit trennt. Jedes Gleiten kann aber als der Grenzfall eines Wirbels aufgefaßt werden. Es hat also eine Wirbelbildung stattgefunden, und es muß möglich sein, aus den Gesetzen der Wirbelbildung in reibungslosen Flüssigkeiten Schlüsse allgemeiner Art über die auf dem Flüssigkeitsdruck beruhenden scheinbaren Fernwirkungen zu bilden. Eine Reihe einfacher Sätze über Wirbelbildung hat der Verf. in mehreren seit 1898 in Schweden veröffentlichten Abhandlungen hergeleitet und dann besonders ihre Anwendung auf die Erörterung der Luft- und Meeresbewegungen gezeigt. Jetzt kehrt er zu derjenigen Anwendung zurück, durch welche er zu der Untersuchung der Wirbelbewegung geführt wurde, nämlich zu der Anwendung auf hydrodynamische Fernkräfte. Der anzuwendende Wirbelbildungssatz wird in neuer, unabhängiger Ableitung gegeben. Auf die Herleitung der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen folgt der allgemeine Wirbelbildungssatz in der Form mehrerer Differentialgleichungen. Aus ihnen ergibt sich, wann schon bestehende Wirbel erhalten bleiben, und unter welchen Bedingungen neue Wirbel gebildet werden. Die Wirbelbildungen durch äußere Kräfte, durch Volumenveränderung in einem Stromfelde und durch Beweglichkeitsunterschiede im Stromfelde werden gesondert betrachtet. Endlich wird die Analogie der wirbelbildenden Kräfte in der Flüssigkeit mit den ponderomotorischen Kräften im elektrostatischen Felde und die der elektrostatischen und der hydrodynamischen Erscheinungen durchgeführt. Wie in den Schlußbemerkungen hervorgehoben wird, hat zwar die entwickelte Theorie der Wirbelbildung in reibungslosen Flüssigkeiten eine ausgedehnte Verallgemeinerung der früher bekannten Resultate über die Analogie hydrodynamischer Erscheinungen mit elektrischen oder magnetischen ermöglicht; aber nicht alle früher bekannten Resultate sind Gegenstand der Verallgemeinerung geworden. „Die Diskussion der Wirbelbildung an sich kann als eine zweckmäßige einleitende Aufgabe betrachtet werden.“ (Vgl. F. d. M. **35**, 751, 1904.) Lp.

E. LAURA. Sulle equazioni differenziali canoniche del moto di un sistema di vortici elementari, rettilinei e paralleli, in un fluido incompressibile indefinito. Torino Atti **40**, 296-312.

Die Bewegung von n geradlinigen elementaren Wirbeln, die zu einer Ebene senkrecht sind, hängt bekanntlich von der Integration des Hamiltonschen Systems ab:

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial P}{\partial p_i}, \; \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$P = -\frac{1}{2\pi} \Sigma_{i,k}\, m_i m_k \log \left[\left(\frac{x_i}{m_i} - \frac{x_k}{m_k}\right)^2 + (p_i - p_k)^2\right],$$

wo m_i die Intensität des Wirbels ist, dessen Spur auf der (x, y)-Ebene die kartesischen Koordinaten x_i/m_i und p_i hat.

Beachtet man, daß die Funktionen ϱ_{ik} in der eckigen Klammer bei P im Lieschen Sinne eine Gruppe bilden, so erkennt man, daß das System (I) einer besonderen Klasse Hamiltonscher Systeme angehört, nämlich derjenigen mit $2n$ konjugierten Variabeln, bei denen die charakteristische Funktion P von nur $q(< n)$ Funktionen abhängt, die eine Gruppe bilden. Unter Benutzung dieser Bemerkung wird aus dem System ein System in den Variabeln ϱ_{ik} abgeleitet, das zwar nicht, wie (I), ein Hamiltonsches System ist, aber sich bei der Diskussion derjenigen besonderen Fälle von Bewegungen von n Wirbeln als nützlich erweist, bei denen die aus der Theorie bekannten Integrale die Integration der entsprechenden Systeme auf Quadraturen zurückführen. Vermittelst jenes Differentialsystems wird im dritten Abschnitte der Abhandlung die Bewegung von vier Wirbeln bestimmt, die zu je zweien bezüglich eines Punktes symmetrisch sind, sobald ihr Trägheitsmoment in bezug auf denselben Punkt Null ist. Lp.

J. WEINGARTEN. Ein einfaches Beispiel einer stationären und rotationslosen Bewegung einer tropfbaren schweren Flüssigkeit mit freier Begrenzung. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 408-413.

Bringt man eine Funktion $f(x+yi)$ in die Form $\varphi + \psi i$, so ist die Funktion φ von x und y das Geschwindigkeitspotential einer zweidimensionalen stationären Flüssigkeitsbewegung, während $f'(x+yi) = u - vi$ die Geschwindigkeitskomponenten u, v gibt. Sollen vermöge der Funktion $f(x+yi)$ Bewegungen dargestellt werden, bei denen die Flüssigkeit eine ruhende Atmosphäre von gegebenem Druck p_0 zur teilweisen Begrenzung hat, so muß diese Grenze mit einer Stromlinie (oder einem Stück derselben) zusammenfallen. Für $p = p_0$ muß dann ψ in eine Konstante übergehen ($\psi =$ konst. ergibt die Stromlinien). Dies wird an dem Beispiel näher gezeigt:

$$f(x+yi) = \tfrac{2}{3}\sqrt{2\,g\cos\alpha} \cdot e^{\frac{3}{2}\alpha i}\,(x+yi)^{3/2} = \varphi + \psi i.$$

Lp.

F. R. Sharpe. On the stability of the motion of a viscous fluid. Amer. M. S. Trans. 6, 496-502.

Reynolds hat (F. d. M. **26**, 872, 1895) ein Energiekriterium für die Stabilität der Bewegung einer zähen Flüssigkeit aufgestellt und hat es auf den Fall einer zwischen zwei parallelen Ebenen sich bewegenden Flüssigkeit angewandt. Für eine Flüssigkeit von der Dichtigkeit ϱ und Zähigkeit μ, die sich zwischen zwei parallelen Ebenen im Abstande $2b$ mit der mittleren Geschwindigkeit U bewegt, findet er, daß die Bewegung instabil ist, falls $2b\varrho U > 517\mu$. Mit Benutzung des Prinzips, daß die kritische Geschwindigkeit umgekehrt proportional der hydraulischen mittleren Tiefe ist, folgerte er, daß für eine zylindrische Röhre vom Radius a die kritische Geschwindigkeit durch $2a\varrho U > 1034\mu$ gegeben wird, und er verglich dies mit seinem experimentellen Werte 1900μ. — In dem vorliegenden Artikel erörtert Sharpe abermals den Fall der zylindrischen Röhre und findet, daß die Bewegung instabil ist, falls $2a\varrho U > 470\mu$. Ferner findet er durch Benutzung einer anderen Lösung der Kontinuitätsgleichung und der Grenzbedingungen, daß die Bewegung zwischen zwei parallelen Ebenen instabil ist, wenn $2b\varrho U > 167\mu$ statt der von Reynolds gefundenen 517μ. Lp.

L. Prandtl. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 484-491.

„Ich habe mir die Aufgabe gestellt, systematisch die Bewegungsgesetze einer Flüssigkeit zu durchforschen, deren Reibung als sehr klein angenommen wird. Die Reibung soll so klein sein, daß sie überall vernachlässigt werden darf, wo nicht etwa große Geschwindigkeitsunterschiede auftreten, oder eine akkumulierende Wirkung der Reibung stattfindet. Dieser Plan hat sich als sehr fruchtbar erwiesen, indem man einerseits auf mathematische Formulierungen kommt, die eine Bewältigung der Probleme ermöglichen, andrerseits die Übereinstimmung mit der Beobachtung sehr befriedigend zu werden verspricht.“

Die entstehenden mathematischen Probleme werden kurz besprochen; am Schlusse der Betrachtungen sagt der Verf.: „Nach dem Vorhergehenden zerfällt also die Behandlung eines bestimmten Strömungsvorganges in zwei miteinander in Wechselwirkung stehende Teile: einerseits hat man die freie Flüssigkeit, die als reibungslos nach den Helmholtzschen Wirbelgesetzen behandelt werden kann, andererseits die Übergangsschichten an den festen Grenzen, deren Bewegung durch die freie Flüssigkeit geregelt wird, die aber ihrerseits durch die Aussendung von Wirbelschichten der freien Bewegung das charakteristische Gepräge geben“.

Zuletzt wird über bezügliche Versuche des Verf. berichtet. Lp.

A. G. M. Michell. The lubrication of plane surfaces. Zs. für Math. u. Phys. **52**, 123-137.

Der Aufsatz behandelt eine Anwendung der hydrodynamischen Theorie des Reibungswiderstandes geschmierter Oberflächen von O. Reynolds mit Benutzung der Verbesserungen von A. Sommerfeld (vgl. F. d. M. **35**, 765, 1904), und zwar wird der Fall eines Gleitblockes mit rechteckiger Basis auf horizontalem Lager bei einer Bewegung in der Richtung der einen Rechteckseite erörtert. Die Aufgabe wird auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung gebracht, und die Integration der letzteren wird mit Hülfe der Besselschen Funktionen I_1 und K_1 sowie zweier Potenzreihen bewirkt. Danach wird der Druck berechnet, daraus die Reibung und endlich der gesamte Widerstand. Die Ergebnisse der allgemeinen Untersuchung werden dann zur zahlenmäßigen Berechnung mehrerer Fälle benutzt, und die Resultate der Rechnung werden graphisch veranschaulicht.

Zuletzt wird auf die Möglichkeit einer experimentellen Bestätigung der ermittelten Werte hingewiesen, indem die ganze Untersuchung vollständig analog derjenigen für ein elastisches Problem ist, nämlich der Bestimmung der Spannkräfte (stresses) in einem inkompressiblen elastischen Körper von der Form eines rechteckigen Keiles, der zwischen zwei starren, nahezu parallelen ebenen Flächen eingeklemmt ist, von denen die eine parallel der anderen in der Richtung der größten gegenseitigen Neigung verschoben wird. Lp.

N. Chudzinsky und E. Jassinsky. Versuche über die Zähigkeit der Öle nach dem System von Prof. N. Joukowsky. Moskau. Phys. Sekt. **13**, 45-54. (Russisch.)

Die Versuche bestanden darin, daß zwei verschiedene Öle vermittelst zweier ganz gleichen Kapillarröhrchen aus zwei Gefäßen ausgepreßt wurden, wobei das Innere der Gefäße unter stets gleichem Druck und gleicher Temperatur gehalten wurde. Dabei wird, wie die Theorie lehrt, das Volumen der in gleicher Zeit herausfließenden Ölmenge umgekehrt proportional zu den Zähigkeitskoeffizienten der Öle sein. Die Experimentatoren untersuchten und verglichen die verschiedenen Naphthaöle mit Rübölen, deren Zähigkeitskurve sehr vollständig von Petrow untersucht ist. Die Untersuchungen wurden bei verschiedenen Temperaturen, zwischen 5 und 80° C, gemacht; die Experimentatoren fügen ihrer Arbeit mehrere graphische Darstellungen der Zähigkeitskurven bei. Jk.

Mathy. Résistance de l'ellipsoïde immergé dans un fluide parfait incompressible. Intégration des formules. Expression des valeurs approchées. Cas du disque plat et de l'aiguille. Nouv. Ann. (4) **5**, 170-176.

Bekanntlich ist der Widerstand eines in eine vollkommene Flüssigkeit eingetauchten Körpers das Produkt dreier Faktoren. Der erste hängt

von der Gestalt des Körpers ab; der zweite ist die Masse der Flüssigkeit von gleichem Volumen wie der Körper; der dritte ist die Differenz der Beschleunigung des Körpers und der Flüssigkeit. Die Bestimmung des ersten Faktors verursacht ernstliche Schwierigkeiten; sein Wert wird für das Ellipsoid bei den Autoren nur in Integralform ausgedrückt. Der Verf. wertet diesen Ausdruck mit Hülfe der Weierstraßschen elliptischen Funktionen aus und zeigt, daß, falls die Integrationsgrenzen nicht halbe Perioden sind, die Näherungswerte in der Praxis ebenso anwendbar sind wie die Kreisfunktionen. Lp.

A. B. Basset. On the motion of bicircular quartic cylinders in a liquid. Quarterly J. **36**, 267-279.

Der Verf. geht mit dieser Arbeit auf Untersuchungen zurück, die er in derselben Zeitschrift **19**, **20**, **21** (1883-1886) veröffentlicht hat, und bei denen es sich um die Bewegung einer Reihe von Zylindern vierter Ordnung in einer Flüssigkeit handelte. Manche dieser Fälle sind dann auch in sein Lehrbuch der Hydrodynamik übergegangen. Der Zweck der gegenwärtigen Veröffentlichung ist die Berichtigung einiger Irrtümer jener älteren Arbeiten und die Ausdehnung der Untersuchung auf Zylinder, deren senkrechter Querschnitt ist: die Cassinische Kurve, eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten (nebst mehreren Unterfällen), die Kardioide, eine zirkulare kubische Kurve. „Das Interesse, welches dieser Zweig der Physik vor 25 Jahren erregte, hat zufolge des Studiums der orthomorphischen Transformation, die für die mitgeteilten Resultate einen kurzen Zugang eröffnet, beträchtlich abgenommen. Gleichzeitig liegt aber ein Vorzug darin, daß man zur Lösung derartiger Aufgaben eine Methode besitzt, welche die Theorie der Funktionen nicht voraussetzt.“ Die Methode der Forschung ist also dieselbe geblieben. Lp.

O. Olsson. Über die Bewegung symmetrisch schraubenförmiger Körper in Flüssigkeiten. Arkiv för mat., fys. och astr. **2**, Nr. 25, 38 S.

Erweiterung einer früheren Abhandlung des Verf. (Arkiv f. mat., astr. och fys. **1**, 541-594; F. d. M. **35**, 756, 1904). Im vorliegenden Aufsatze wird die Bewegung derjenigen Körper untersucht, die eine gewisse schraubenförmige Symmetrie in bezug auf eine bestimmte Achse haben. Die fraglichen Körper sind so geformt, daß sie in sich selbst übergehen, wenn man sie um ihre Achse, und dies sowohl in positivem wie auch in negativem Sinne, um einen gewissen Winkel dreht. Msn.

W. Stekloff. Sur le problème du mouvement d'un ellipsoïde fluide homogène dont toutes les parties s'attirent suivant la loi de Newton. C. R. **141**, 999-1001.

Für das folgende Problem wird die vollständige Lösung ohne Beweis mitgeteilt: Alle möglichen Fälle der Bewegung eines flüssigen Umdrehungsellipsoids zu finden, wenn die Komponenten u_r, v_r, w_r der relativen Geschwindigkeit des Punktes (ξ, η, ζ) der Flüssigkeit nach den beweglichen Achsen ξ, η, ζ sich als lineare und homogene Funktionen der Variabeln ξ, η, ζ ausdrücken. Die Achsen seien $a = b$ und c. 1) $a < c$, abgeplattetes Ellipsoid. Es existiert nur ein einziger Fall der Bewegung, nämlich der bekannte Dirichletsche Fall. 2) $a > c$, verlängertes Rotationsellipsoid. Die Aufgabe läßt drei Lösungen zu. Die erste entspricht dem Dirichletschen Falle, die anderen beiden scheinen neu zu sein. Das von Riemann in der Abhandlung „Über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoids" ausgesprochene Ergebnis seiner Untersuchung erfordert nach Stekloff, daß $\delta = (b - c)(c - a)(a - b)$ nicht Null ist, verliert also seine Gültigkeit für ein Rotationsellipsoid. Die beiden zuletzt erwähnten Lösungen geben Beispiele hierfür. Lp.

W. Stekloff. Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde fluide de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement. C. R. **141**, 1215-1217.

In dieser Note wird ein Fall der Bewegung eines flüssigen Ellipsoids unter den in dem vorstehend besprochenen Artikel gemachten Voraussetzungen behandelt. Es seien $a = b, c > a$ die Quadrate der Halbachsen des Ellipsoids. Die Bewegung, um welche es sich handelt, zerlegt sich in eine Fortführung, die sich auf die Rotation des Ellipsoids, als ob es ein fester Körper wäre, um seinen Schwerpunkt reduziert (System A), und in eine Relativbewegung der Flüssigkeit um das System A. Die Berechnung beider Bewegungen wird kurz angedeutet. Lp.

W. Stekloff. Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde fluide de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement. Zusammenstellung nach C. R. (11. décembre 1905, 26. décembre 1905, 8. janvier 1906).

Riemann hatte in seiner Abhandlung über das Dirichletsche Problem einen neuen Fall der Bewegung flüssiger Ellipsoide gefunden. In diesem Falle verändert sich die Form des Ellipsoids nicht, und dieses dreht sich um eine Achse, welche in einer seiner Hauptebenen liegt, indem die Flüssigkeitsmassen in ihrer Relativbewegung ähnliche Ellipsen beschreiben, deren Ebenen unter sich parallel und zu der erwähnten Hauptebene des Ellipsoids senkrecht sind. Stekloff zeigt nun, daß dieser Fall nicht statthat, wenn das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, und er zeigt für diesen Fall eine neue Art der Bewegung, welche nicht stationär ist. Wenn das flüssige Drehellipsoid eine abgeplattete Form hat, so kann für dasselbe, unter Beibehaltung der Form und bei relativer Bewegung der Massen, nur der bekannte Dirichletsche Fall der Bewegung

möglich sein. Dieser Fall ist auch möglich für das verlängerte Drehellipsoid; aber außerdem sind für das letztere noch zwei Bewegungen möglich, die von Stekloff gefunden sind.

Bei diesen Bewegungen hat die Projektion der Winkelgeschwindigkeit Ω auf die Äquatorialebene eine konstante Größe ω.

Der erste Typus der Bewegung findet statt, wenn $0 < \frac{\omega^2}{\pi} < \frac{4}{15}$, der zweite Typus, wenn

$$\frac{4}{15} < \frac{\omega^2}{\pi} < \psi(\sigma'),$$

wo σ' die reelle positive Wurzel der Gleichung

$$\log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} = 2\,\frac{15\sigma^2 - 3\sigma - 4}{15\sigma^3 - 3\sigma^2 - 9\sigma + 1}$$

ist, und die Funktion $\psi(\sigma)$ folgende Form hat:

$$\psi(\sigma) = \sigma(\sigma + 1)(\sigma^2 - 1)\left[\frac{3\sigma^2 - 1}{2\sigma} \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - 3\right].$$

Im ersten Typus hat die Gleichung

$$(K) \qquad \frac{\omega^2}{\pi} = \psi(\sigma)$$

nur eine reelle Wurzel σ_0, und die Quadrate der Halbachsen des Ellipsoids $a = b, c$ werden nach dem Quadrat des Volumens $\frac{16}{9}\pi^2 v_0$ aus folgenden Formeln: $\sigma_0 = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c - a}}$, $a^2 c = v_0$ bestimmt. Im zweiten Falle hat die Gleichung (K) zwei reelle Wurzeln σ_1 und σ_2, und wir bekommen zwei Formen des verlängerten Rotationsellipsoids, welche aus folgenden Gleichungen sich ergeben:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{c_i}}{\sqrt{c_i - a_i}}, \quad a_i^2 c_i = v_i \; (i = 1, 2).$$

Was die Rotationskomponenten p, q, r und die relativen Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die beweglichen Achsen ξ, η, ζ betrifft, so werden diese durch folgende Formeln ausgedrückt:

$$p = \omega \cos \tau, \quad q = \pm\, \omega \sin \tau, \quad r = f(t), \quad \tau = \mp \int r\,dt + \text{const.}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = r\eta \pm \zeta\,\frac{\omega(1 - \sigma)}{\sigma} \sin \tau,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -r\xi + \zeta\,\frac{\omega(\sigma - 1)}{\sigma} \cos \tau,$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\omega\sigma}{1 + \sigma}(\eta \cos \tau \mp \xi \sin \tau).$$

Jk.

H. Lamb. On deep-water waves. Presidential Address. Lond. M. S. Proc. (2) **2**, 371-400.

Die Rede, mit welcher Lamb seine letzte Pflicht als zurücktretender Präsident der Londoner Mathematischen Gesellschaft erfüllte, beschäftigt sich in den ersten fünf Paragraphen mit den Leistungen von Poisson und Cauchy in ihren Bewerbungsschriften um den Preis der Pariser Akademie im Jahre 1816. „Es ist nicht möglich, die Arbeit dieser Forscher etwas sorgfältig durchzugehen, ohne das Gefühl einer tiefen Bewunderung für das analytische Geschick zu empfinden, das für ein selbst jetzt noch in manchen seiner Verzweigungen schwieriges Problem aufgewandt wurde, und für den Erfolg, mit dem sie eine für die meisten Zwecke praktisch vollständige Lösung erreichten. Doch ist ungeachtet der darauf verwandten Mühe und Kunstfertigkeit diese Lösung allgemein als dunkel, wo nicht als zweifelhaft erachtet worden, und sie ist nie ordentlich gedeutet worden. Heutzutage sollte nach meiner Ansicht keine Schwierigkeit mehr darin zu erblicken sein, die wesentlichen Resultate aus dem Nebel der Analysis, der sie verhüllte, ans Licht zu bringen und die ganze Sache, wenigstens soweit die zweidimensionale Form des Problems in Betracht kommt, in eine einfache und leicht verständliche Gestalt zu bringen. Dies ist auf alle Fälle das Ziel, welches ich in den §§ 1-5 dieser Mitteilung zu erreichen gesucht habe. In den übrigen §§ 6, 7 habe ich die durch eine periodische Kraftwirkung auf die Oberfläche erzeugten Wellen behandelt; die Ergebnisse sind einfach und dürften hoffentlich einige interessante Züge aufweisen.“ Lp.

Lord Kelvin. Deep water ship-waves. (Continued.) Edinb. R. S. Proc. **25**, 562-587; Phil. Mag. (6) **9**, 733-757.

Die Abhandlung bildet die Fortsetzung der beiden vorangegangenen Veröffentlichungen „On deep-water two-dimensional waves produced by pry given initiating disturbance“ und „On the front and rear of a free anocession of waves in deep water“ (vgl. F. d. M. **35**, 754-755, 1904); sie enthält die fortlaufend bezifferten §§ 32-64 unter der Überschrift „Kanalwellen“, eine Bezeichnung, die als bequemer für den früher gebrauchten Ausdruck „zweidimensionale Welle“ gesetzt ist. „Tief“ soll gleichbedeutend mit „unendlich tief“ gelten. „Schiffwellen“ sollen solche sein, die von einem sich bewegenden Körper erzeugt werden. Der Einfachheit wegen wird die Bewegung geradlinig und gleichförmig vorausgesetzt. Statt dieses Problems wird ein anderes genommen: Als Wellenerzeuger wird ein Kräftesystem („forcive“ nach einem Vorschlage von J. Thomson) gedacht, das aus einer gegebenen stetigen Druckverteilung an der Oberfläche besteht und über die Oberfläche hin mit einer gegebenen Geschwindigkeit wandert. Liegt die Achse OX in der Längsrichtung des Kanals, OZ vertikal abwärts, und sind die Komponenten der Verrückung eines Wasserteilchens (x, z) durch ξ und ζ bezeichnet, so gelten die Gleichungen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\xi\frac{d\xi}{dx}+\zeta\frac{d\xi}{dz}=-\frac{dp}{dx},\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}+\xi\frac{d\zeta}{dx}+\zeta\frac{d\zeta}{dz}=g-\frac{dp}{dz},$$

wo p der Druck ist. Nun werden ξ und ζ unendlich klein angenommen; dann gehen jene Gleichungen über in:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=-\frac{dp}{dx},\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}=g-\frac{dp}{dz},$$

und setzt man $\xi=\frac{d\varphi}{dx},\ \eta=\frac{d\varphi}{dz}$, so folgt

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0.$$

Damit ist das Problem auf eine bekannte Gleichung gebracht, die nun mit Hülfe der Fourierschen Methode behandelt wird. Die Einzelheiten der Rechnungen, deren Resultate in einer Reihe von Figuren erläutert werden, sind im Originale nachzulesen. Lp.

Lord Kelvin. Deep sea ship-waves. (Continued from Proc. R. S. E., Jan. 23, 1905.) Edinb. R. S. Proc. **25**, 1060-1084.

Die Mitteilung umfaßt die §§ 65-95 der Arbeit. Zunächst wird angenommen, die Depression des Wassers im Abstande x vom Ursprunge folge dem Gesetze (herrührend von einer „forcive" genannten Ursache): $\Pi(x)=gkb^2/(x^2+b^2)$, graphisch also dargestellt durch die wohlbekannte Kurve der Agnesi. Dann wird die weitere Annahme gemacht, daß diese Kraftform sich mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt. Ist h die Höhe des entstandenen Wellenkammes über dem mittleren Wasserstande, A die Fläche zwischen der Agnesischen Kurve und ihrer Asymptote, $\lambda=2\pi v^2/g$, so berechnet sich $h=4\pi A/\lambda$, woraus einige Folgerungen gezogen werden, so insbesondere, wenn zwei solche Kraftformen im Abstande $\frac{1}{2}\lambda$ vorhanden sind, oder auch im Abstande $\frac{11}{2}\lambda$. Alle diese Betrachtungen werden durch Zeichnungen erläutert. Dann geht der Verf. von dem zweidimensionalen Problem von Kanalschiffwellen zu dem dreidimensionalen Problem von Seeschiffwellen über und benutzt hierbei eine synthetische Methode von Lord Rayleigh (The form of standing waves on the surface of running water. Lond. M. S. Proc. **15**, 69-78; F. d. M. **16**, 840, 1884). Die bezüglichen Paragraphen 80-95 „der gegenwärtigen Abhandlung sind bloß eine Bearbeitung des einfachen Problems von reinen Schwerewellen mit keiner Oberflächenspannung auf Grund des von Rayleigh aufgestellten Prinzipes für das viel verwickeltere Problem von kapillaren Stirnwellen, bei denen die Oberflächenspannung der Hauptbestandteil der Kraftform ist, und Rückenwellen, bei denen der Hauptbestandteil der Kraftform die Schwere ist." Lp.

G. Chrystal. Some results in the mathematical theory of seiches. Edinb. R. S. Proc. **25**, 328-337, 637-647.

Die Theorie der unter dem Namen „Seiches“ vom Genfer See bekannten Seespiegelschwankungen für einen See, bei dem die Linie größter Tiefe angenähert gerade ist, und dessen Tiefe, Querschnitt und Oberflächenbreite sich nicht plötzlich von Punkt zu Punkt ändern, wird unter der Annahme entwickelt, daß die Quadrate der Verrückungen und ihrer Ableitungen vernachlässigt werden können. Der Seichesinus und der Seichekosinus sind synektische Integrale der Differentialgleichung $(1-w^2)\frac{d^2P}{dw^2}+cP=0$. Außerdem werden der hyperbolische Seichesinus und -kosinus betrachtet. Folgende Gestalten des Sees werden einzeln untersucht: See mit symmetrischem Längsschnitt von konkaver parabolischer Gestalt; hierbei Seiches mit 1, 2, 3, 4 und 5 Knoten. Konkaver See mit unsymmetrisch biparabolischem Querschnitt. Unsymmetrischer See mit einer Untiefe und zwei maximalen Tiefen. Lp.

G. Chrystal. On the hydrodynamical theory of seiches. With a bibliographical sketch. Edinb. R. S. Trans. **41**, 599-649.

1. Allgemeine Übersicht. Die longitudinale Seiche des Loch Lomond mit einer Periode von zehn Minuten, hervorgerufen durch das große Erdbeben von Lissabon. Forel, der Faraday der Seiches, nebst seiner eigentümlichen, jetzt klar gefestigten Theorie, daß eine Seiche eine stehende Schwingung eines Binnensees ist. Die akustische Analogie mit einer Orgelpfeife befriedigt nicht, die mit einer an beiden Enden befestigten gespannten Saite ist vollkommen. Die Knotenpunkte der Saite entsprechen den Bäuchen des Sees. Der Apparat von E. Maclagan-Wedderburn.

2. Mathematische Theorie. Allgemeine Theorie einer kleinen longitudinalen Seiche in einem See von veränderlicher Breite und veränderlichem Querschnitt. Fall eines Sees von konstanter Breite, rechteckigem Querschnitt, aber veränderlicher Tiefe. Allgemeine Lösung für einen parabolischen Längsschnitt. Im übrigen vergleiche man das vorstehende Referat.

Einführung der „Seefunktion“:

$$L(c,z)=z-c\cdot\frac{z^2}{1\cdot 2}-c\left(1-\frac{c}{1\cdot 2}\right)\frac{z^3}{2\cdot 3}-c\left(1-\frac{c}{1\cdot 2}\right)\left(1-\frac{c}{2\cdot 3}\right)\cdot\frac{z^4}{3\cdot 4}-\cdots$$

Die L-Lösung für einen vollständigen parabolischen und biparabolischen See, usw.

Der dritte Teil enthält eine Bibliographie von 1755 bis 1905. Lp.

G. Chrystal and E. Maclagan-Wedderburn. Calculation of the periods and nodes of Lochs Earn and Treig, from the bathymetric data of the Scottish Lake Survey. Edinb. R. S. Trans. **41**, 823-850.

T. Levi-Civita. Sulla contrazione delle vene liquide. Ven. Ist. Atti [(8) 7] **64**, 1465-1472.

Für die oft behandelte Frage der theoretischen Ableitung der Contractio venae wird in einfacher Weise eine strenge und allgemeine Formel aufgestellt, aus der die bekannte Tatsache folgt, daß der Kontraktionskoeffizient in den gewöhnlichen Fällen immer $> \frac{1}{2}$ ist, sich aber für Bodenöffnungen mit nach innen eingesetzten zylindrischen Mundstücken bis auf $\frac{1}{2}$ zurückführen läßt. Außerdem wird aus der Formel die neue Folgerung erschlossen, daß bei einem in den Boden des Gefäßes nach innen eingefügten Mundstück, das sich oben erweitert, der Kontraktionskoeffizient unterhalb $\frac{1}{2}$ liegen kann. Lp.

H. Hahn, G. Herglotz und K. Schwarzschild. Über das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen. Zs. für Math. u. Phys. **51**, 411-426.

„In einem während des letzten Winters unter der Leitung von F. Klein abgehaltenen Seminar über Hydraulik haben wir über das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen berichtet. Es ist das ein Gegenstand von weitgehender praktischer Bedeutung und zugleich von großem theoretischem Interesse, der aber von den Technikern wesentlich nur nach der praktischen Seite hin erforscht und von Physikern und Mathematikern wohl nicht nach Gebühr gewürdigt ist. Wir glauben daher in der Absicht der Vermittlung und Anregung die folgende Darstellung trotz ihres zum Teil referierenden, zum Teil vorläufigen Charakters veröffentlichen zu sollen.“ Die theoretischen Entwicklungen über voll ausgebildete Turbulenz der Wasserbewegung knüpfen besonders an die Untersuchungen von Boussinesq an: Essai sur la théorie des eaux (courantes. Mém. prés. par divers savants **23** (1877). — Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides. Paris: Gauthier-Villars (1897). Lp.

J. Boussinesq. Propagation des ondes le long d'une colonne liquide compressible, se composant de filets à vitesses inégales et remplissant un tuyau élastique horizontal, sans tension longitudinale. C. R. **141**, 8-13.

Die im Titel angegebene Aufgabe ist von Resal behandelt worden C. R. **82**, 698-699; F. d. M. **8**, 614, 1876), um gewisse praktisch

vorkommende Fälle, wie die Bewegung des Blutes in den Adern, des Wassers in Gummischläuchen, theoretisch zu untersuchen; er hat dabei aber, um zunächst eine angenäherte Lösung zu erhalten, sowohl die gegenseitige Einwirkung der die Röhre zusammensetzenden Ringe, als auch die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeit vernachlässigt. Die Berücksichtigung der Kompressibilität der Flüssigkeit ist jüngst von Allievi geschehen (Théorie générale du mouvement varié de l'eau dans les tuyaux de conduite. Revue de mécanique, 1904), allein bei der hierdurch bewirkten Verallgemeinerung der Resalschen partiellen Differentialgleichung ist die Voraussetzung des Parallelismus der Schichten bei der bewegten Flüssigkeit festgehalten. In dem vorliegenden Artikel trägt Boussinesq den Ungleichmäßigkeiten in der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsfäden Rechnung und zeigt, wie die partiellen Differentialgleichungen der Bewegung aufzustellen sind. Lp.

J. Boussinesq. Calcul, pour les diverses contextures et épaisseurs de paroi possibles, de la résistance élastique qu'un tuyau sans tension longitudinale oppose au gonflement de la colonne liquide le remplissant. C. R. **141**, 81-86.

Der Hauptzweck der Note besteht darin, bei einer homogenen elastischen, aber nur um ihre Längsfasern isotropen Röhre mit einer von allem äußeren Drucke frei gedachten Oberfläche aufzufinden, wie der innere Radius R sich ausdehnt, wenn der auf ihre konkave Fläche von der anliegenden Flüssigkeit ausgeübte Druck wächst. Die auf diese Weise erhaltene Beziehung verknüpft den Druck p dieser Flüssigkeit mit dem wirklichen Radius des Querschnittes σ, den sie einnimmt, und ist gerade diejenige, welche die Elastizitätstheorie der Hydrodynamik zur Erledigung des Problems der Bewegungen der Flüssigkeit liefern muß. Die Dicke ε der Wandung der Röhre wird beliebig vorausgesetzt, nicht mehr als ein kleiner Bruchteil von R, wie in der vorangehenden Note. Die betreffende Formel lautet:

$$\frac{p}{d'} = E' \cdot \frac{\varepsilon}{R}, \quad \text{wo } E' = E \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2R}}{1 + 4 \frac{(\lambda+\mu)\nu - \lambda'^2}{(\lambda+2\mu)\nu - \lambda'^2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2R}\right)\frac{\varepsilon}{2R}}.$$

Hierin sind $\lambda, \mu, \nu, \lambda'$ vier Elastizitätskonstanten, E der gewöhnliche Elastizitätsmodul, E' ein anderer, durch die Formel definierter, d' die Ausdehnung der Ringfaser durch den betrachteten Punkt. Lp.

J. Boussinesq. Sur un cas simple, où se calculent aisément l'action mutuelle des anneaux juxtaposées constituant un tuyau et l'influence de cette action mutuelle sur la propagation des ondes liquides dans le tuyau. C. R. **141**, 234-236.

Zu der Theorie der vorangehenden Note wird ein Beispiel gegeben, in welchem eine einfache Lösung möglich ist, nämlich der Fall einer geraden gewichtslosen Röhre, die nur an ihren beiden Enden unterstützt ist.
Lp.

J. Boussinesq. Propagation des ondes le long d'une colonne liquide compressible, se composant de filets à vitesses inégales et contenue dans un tuyau élastique horizontal, sans tension longitudinale. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 349-368.

Zusammenfassende Darstellung der in den drei vorstehend besprochenen Noten enthaltenen Betrachtungen. Lp.

A. Boulanger. Théorie de l'onde solitaire qui se propage le long d'un tube élastique horizontal. C. R. **141**, 1001-1004.

E. H. Weber hat experimentell in einer inkompressiblen ruhenden Flüssigkeit, die einen horizontalen Kautschukschlauch ausfüllte, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Anschwellung bestimmt, die er durch rasche Zusammenpressung des einen Schlauchendes hervorrief. Indem W. Weber die beobachtete Geschwindigkeit ω mit der berechneten Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω_1 der kleinen Bewegungen verglich, fand er einen erheblichen Unterschied beider und schrieb diese Abweichung der ungenauen Messung von Elementen bei der Berechnung von ω_1 zu. Nach der Meinung des Verf. liegt die Ursache in der nicht hinreichenden Annäherung der Theorie von W. Weber. Unter Benutzung der Methode, welche Boussinesq 1871 zur theoretischen Behandlung der Translationswellen in Kanälen aufgestellt hat, gelingt nach Einführung zweier Annäherungen die Integration der partiellen Differentialgleichungen des Problems und die Aufstellung einer Endformel. Ihre Anwendung auf die Weberschen Versuche ist nicht angängig, weil unter den von Weber angegebenen Daten eine in der Formel enthaltene Konstante fehlt. Bezügliche Versuche sollen angestellt werden. Lp.

H. Lorenz. Die Wasserströmung in rotierenden Kanälen. (Beiträge zur Turbinentheorie.) Phys. Zs. **6**, 82-88, 206-207.

Bei der bisher angenommenen Turbinentheorie begnügt man sich nach dem Vorgange von Euler mit der Verfolgung eines mittleren Stromfadens, den man sich bei den Axialturbinen auf einem Zylinder, bei den Radialturbinen in einer Ebene senkrecht zur Drehachse verlaufend denkt, ohne sich um die Form der außerhalb dieser Fläche befindlichen Stromfäden weiter zu kümmern. Um zu einer von solchen Annahmen freien Theorie

zu kommen, geht der Verf. auf die Grundgleichungen der Hydrodynamik zurück und gibt ihnen durch Einführung der Zylinderkoordinaten eine der Aufgabe entsprechende bequeme Form. Durch die Integration dieser Gleichungen werden dann Eigenschaften der Stromlinien gewonnen, die sich für die Theorie der Turbinen gut verwerten lassen. Lp.

N. Joukowsky. Über ein Problem betreffs der Stauwasserkurve. Moskau. Phys. Sekt. 13, 44-45. (Russisch.)

Der Autor zeigt, daß bei nicht reibender Bewegung der Flüssigkeit der Sprung in der Stauwasserkurve der Tiefe h entspricht, bei welcher Tiefe die mittlere Geschwindigkeit der Strömung

$$v = \sqrt{gh}$$

ist. Diese Geschwindigkeit ist die Wellengeschwindigkeit bei der Tiefe h.

Jk.

É. Fontaneau. Préliminaires d'hydraulique. III. Principes et applications. Assoc. Franç. Grenoble 33, 1-42.

Fortsetzung der vorjährigen Arbeit (F. d. M. 35, 764, 1904). Zunächst werden die charakteristischen Eigenschaften des Systems krummliniger Koordinaten betrachtet, von denen in den früheren Mitteilungen Gebrauch gemacht ist; hauptsächlich werden drei von ihnen hervorgehoben. Danach werden diese zu dem Nachweise benutzt, daß zwischen den Eulerschen und den Lagrangeschen Gleichungen kein wesentlicher Unterschied besteht; deshalb kann auf sie eine einzige, der allgemeinen Theorie der Gleichungen der Mechanik entlehnte Integrationsmethode angewandt werden. Stützt man sich auf die Cauchyschen Integralformeln, so genügt es zur Vervollständigung seiner Rechnung und zur Integration der Lagrangeschen Gleichungen, wenn man drei simultane Differentialgleichungen mit drei abhängigen Variabeln befriedigt.

Für die zähen oder wirklich vorkommenden Flüssigkeiten findet jedoch die Cauchysche Transformation nicht mehr statt, und die Integration der hydrodynamischen Gleichungen erfordert diejenige dreier simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Nach einigen Entwicklungen, die in diesem Falle die Hamiltonsche und Jacobische Funktion S beleuchten sollen, kommt der Verf. auf die Frage der Kreiswirbel, die von Helmholtz aufgeworfen ist, und gibt für sie eine einfache Lösung, die aber doch nur wenig verschieden von der früher von ihm entwickelten ist. Darauf wird eine Methode zur Integration der hydrodynamischen Differentialgleichungen in dem Falle vorgeführt, bei welchem Wirbel oder Wirbeloberflächen statt Geschwindigkeiten oder Strömungsflächen gegeben sind. Diese Methode, die übrigens auf den

nämlichen Prinzipien beruht, macht die Anwendung der oben erwähnten krummlinigen Koordinaten nötig; auch kann man sie auf beliebige Vektoren anwenden. Aus diesem Grunde könnte man sie zur Abkürzung mit dem Namen vektorieller Koordinaten belegen. Lp.

Edm. Maillet. Essais d'hydraulique souterraine et fluviale. Paris: A. Hermann, VI u. 218 S. Mit XXXI Tabellen u. 11 Diagrammen.

Das Buch enthält eine systematische Darstellung der Untersuchungen des Verf., von denen einige in den letzten Jahren veröffentlichte Ergebnisse Gegenstand des Berichtes gewesen sind. Wenn sich auch viele Berührungspunkte mit den bezüglichen Boussinesqschen Arbeiten finden, so sind doch auch manche neue Seiten des Problems berührt, und das Interesse wird besonders durch den zweiten Teil erhöht, in welchem die theoretischen Resultate des ersten Teils mit den in Frankreich beobachteten Tatsachen verglichen werden.

In dem ersten Teile wird die Frage der Stabilität bei der Bewegung in der unterirdischen Wasserschicht oder der Natur dieser Bewegung unter verschiedenen Voraussetzungen behandelt, indem die Beiträge, welche der Regen zur Schicht liefert, in Rechnung gestellt werden. Hierbei werden die älteren Arbeiten von Boussinesq über die Frage benutzt, indem noch die Krümmung des undurchlässigen Grundes, auf dem die Schicht ruht, berücksichtigt wird. Bei Annahme verschiedener mehr oder weniger einfacher Formen für diesen Boden ergibt sich, daß in sehr häufigen Fällen die Natur des von Regengüssen herbeigeführten Anwachsens wesentlich von jener Krümmung abhängt. Wenn dieser Boden dem Himmel zugewandt konvex ist, tritt das Maximum schnell ein (Beispiel: Quellen der Vanne); ist dieser Boden konkav, so geschieht das Steigen langsam (Beispiel: Quellen bei le Havre). Der Einfluß eines Teiles der Schicht auf das Maximum ist um so stärker, je stärker die Neigung des Bodens ist. In verbreiteten Fällen, besonders wenn der Boden horizontal und ungefähr im Wasserspiegel der Quelle ist, sind die Bewegungen stabil, oder wenigstens ändern viele Störungen ihre Stabilität nicht.

Auf eine möglichst allgemeine Weise werden die Beziehungen aufgesucht, welche die niedrigen Wasserstände N oder die Ergiebigkeiten nebst anderen damit zusammenhängenden Erscheinungen für einen Punkt eines Wasserlaufes oder einer Quelle mit den Regenfällen verbinden. In der Praxis kann man oft N als eine Funktion der Gesamtregen der vorangehenden warmen und kalten Jahreszeiten betrachten. Abgesehen von den sehr regenreichen warmen Zeiten und der Einwirkung undurchlässiger Gelände erfährt N, besonders wenn das Becken ausgedehnt genug ist, nur sehr langsame Änderungen von einem Jahr zum andern.

Das sind unter dem theoretischen Gesichtspunkte die wichtigsten Resultate des ersten Teils. Von dem Standpunkte der Analysis aus sind dieselben interessante Anwendungen der Differential- und der Integral-

rechnung oder auch schwierigerer Fragen aus der Theorie der Differentialgleichungen. So kommen vor: eine lineare Differentialgleichung, eine integrierbare Riccatische Differentialgleichung, lineare oder auch nicht lineare partielle Differentialgleichungen, lineare Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typus.

Nach dem zweiten „praktischen Teile", der eine Fülle von Anwendungen auf wirklich beobachtete Wasserbewegungen enthält, werden in einer angehängten Denkschrift die Ergiebigkeitskurven und die Sinkbewegungen in den Flüssen erörtert. Lp.

EDM. MAILLET. Sur les mouvements d'une nappe souterraine, particulièrement dans les terrains perméables, spongieux et fissurés. S. M. F. Bull. 33, 2-12.

Die Gegenstände, mit denen sich dieser Aufsatz beschäftigt, sind: 1. Die unbestimmten Gleichungen für die Bewegung des Beckens in einem derartigen Gelände, besonders in den Perioden, wenn es keine äußeren Zufuhren erhält. 2. Die Gestalten des Beckenbodens, für welche ein Bewegungszustand existiert, bei welchem die Dicke des Wasserbeckens nur von der Zeit abhängt. Es gibt dann einen Zustand, bei welchem die Ergiebigkeit der Quelle die Form hat

$$Q = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} \qquad (\alpha_1, \alpha_2 > 0;\ \alpha_1, \alpha_2, C_1, C_2 = \text{const.}).$$

3. Der Fall eines horizontalen Bodens. — Die Ergebnisse stimmen mit denen überein, die Boussinesq auf ganz anderem Wege erhalten hat. Lp.

EDM. MAILLET. Sur les solutions de certains systèmes d'équations différentielles; applications à un système hydraulique de n déversoirs. S. M. F. Bull. 33, 129-145.

Maillet nimmt hier die Frage wieder auf, über welche er in der nachstehend besprochenen Note der Akademie einiges mitgeteilt hat. Er erörtert allgemeinere Fälle, besonders für n Behälter, die ausschließlich mit nicht eingebauchten Auslässen versehen sind. Auch in diesem Falle ergibt sich eine Familie einfacher Lösungen, die zu allen Lösungen asymptotisch sind, selbst wenn man in Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen gewisse Koeffizienten, die in die Formeln für die Ergiebigkeit der Auslässe eingehen, als etwas veränderlich mit der Beschickung ansieht. Gleichzeitig werden zugehörige oder allgemeine Systeme von Differentialgleichungen angegeben, von denen man wenigstens eine einfache partikulare Lösung finden kann, welche von einer willkürlichen Konstante abhängt und zuweilen zu einer ganzen Kategorie von Lösungen asymptotisch ist. Lp.

Edm. Maillet. Sur la vidange des systèmes de réservoirs. C. R. **140**, 712-714.

Es seien n zylindrische Gefäße gegeben, die durch eingetauchte oder nicht eingetauchte (oberflächliche) Öffnungen mit einander verbunden sind. Die allgemeinen Differentialgleichungen für den Ausgleich der Flüssigkeiten in diesen Gefäßen lassen sich zwar aufstellen, aber nur unter besonderen Annahmen integrieren. Von solchen Fällen werden fünf aufgezählt, nebst kurzen Angaben über die Lösungen. Lp.

A. Pizzarello. Oscillazioni isocrone del mercurio in tubi comunicanti. Nuovo Cimento (5) **9**, 375-383.

Wenn ein Massenpunkt von einem festen Zentrum aus eine der Entfernung proportionale Anziehung erfährt, so ist bekanntlich die Schwingungsdauer des Punktes von der Schwingungsweite unabhängig. Pizzarello macht darauf aufmerksam, daß eine Flüssigkeit — am besten Quecksilber — in zwei kommunizierenden Röhren ihre Schwingungen unter der Herrschaft desselben Gesetzes ausführt. Die vom Verf. in seinen Experimentalvorlesungen ausgeführten Versuche, durch welche er diese Gesetze bestätigte, haben noch einige interessante Nebenerscheinungen gezeigt. Am Schlusse wird eine elementare Theorie dieser Schwingungen gegeben. Lp.

G. A. Zanon. Portata di una bocca d'estuario. Continuazione della Memoria: Velocità ragguagliata e potenza effossoria delle maree in una bocca d'estuario. Ven. Ist. Atti [(8) 7] **64**, 815-831.

„Ein Mündungsgebiet wie das venetianische hat während der Ebbe und Flut nicht einen Wasserspiegel von konstanter Ausdehnung; daher ist es zur Bestimmung der Tragweite der Mündung notwendig, der Veränderlichkeit der überschwemmten Fläche Rechnung zu tragen. Außerdem ist die Bestimmung der augenblicklichen Ausdehnung des Beckens nicht leicht, genau genommen sogar unmöglich wegen der Mannigfaltigkeit der Kanäle, der Sumpfstellen und der Krümmungen der letzteren." Mit Rücksicht auf die wichtigen Interessen, die für Venedig in Betracht kommen, hat Zanon Annahmen gemacht, die den mittleren Verhältnissen angepaßt sind, und für sie angenäherte Berechnungen ausgeführt. Die Arbeit setzt die im Titel genannte Untersuchung fort, welche in Ven. Ist. Atti **57** [(7) **10**], 147-176, 1898, erschienen ist. Lp.

H. C. POCKLINGTON. Growth of a wave-group when the group-velocity is negative. Nature **71**, 607-608.

Erläuterung der in jüngster Zeit erörterten Frage über den Energiestrom an dem Beispiele eines linear angeordneten mechanischen Systems, dessen Energie durch den Ausdruck $\frac{1}{2}\{(d^2y/dxdt)^2 + y^2\}\,dx$ gegeben ist.
Lp.

G. ZEMPLÉN. Sur l'impossibilité des ondes de choc négatives dans les gaz. C. R. **141**, 710-712.

J. HADAMARD. Remarque au sujet de la Note de M. G. Zemplén. C. R. **141**, 713.

P. DUHEM. Sur l'impossibilité des ondes de choc négatives dans les gaz. C. R. **141**, 811.

„Man kann sich zwei Arten von Stoßwellen denken: Kompressionswellen (positive), die sich nach dem Teile des Gases hin fortpflanzen, wo die Dichtigkeit am kleinsten ist, und Dilatationswellen (negative), die sich nach der dichtesten Stelle hin fortpflanzen.“ Die Unmöglichkeit der Fortpflanzung negativer Stoßwellen leitet Zemplén aus dem zweiten Hauptsatze der Thermodynamik ab. „Die in einer positiven Stoßwelle erzeugte Wärme ist die Wärme der inneren Reibung zwischen den mit verschiedenen Geschwindigkeiten behafteten Gasteilen an den beiden Seiten der Welle. Die Erzeugung der Reibungswärme ist aber ein irreversibler Vorgang; denn sie ist von einer Vergrößerung der Entropie begleitet. — Hadamard bemerkt, daß die direkte Betrachtung der Entropie einen ganz einfachen Beweis liefert. Duhem dagegen erinnert an den Satz seiner Recherches sur l'hydrodynamique: „Falls man die Ausdrücke der aufgenommenen Aktionen der Zähigkeit dem Falle, wo die partiellen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten gewisse Grenzen nicht übersteigen, als allgemein ansieht, so kann im Innern einer mit innerer Reibung oder Zähigkeit behafteten Flüssigkeit sich keine Stoßwelle fortpflanzen.“ Duhem will daher von dem Eingreifen der inneren Reibung nichts wissen.
Lp.

A. MALLOCK. Air resistance encountered by projectiles at velocities up to 4500 feet per second. Lond. Roy. Soc. Proc. **74**, 267-270.

Die hohen Geschwindigkeiten wurden erzielt mit Aluminiumgeschossen aus Flinten, die mit Kordit geladen waren. Zur Messung der Geschwindigkeit diente das ballistische Pendel, und zwar wurde in zwei Abständen, die um 5 Yards differierten, die Geschwindigkeit bestimmt. Nebenbei betrug die berechnete Verzögerung des leichten Geschosses bei 4500 Fuß Geschwindigkeit 205000 Fuß pro Sek. Die erhaltenen Resultate sind in zwei Diagrammen abgebildet; das zweite gibt den Luftwiderstand auf

einen Quadratzoll in englischen Pfunden. Obgleich die Kugeln nur ein kleines Gewicht hatten (23 Gran), schließt sich die erhaltene Kurve recht gut an die früher von Bashforth abgebildete an. Ref. versuchte aus der Tafel ein Gesetz des Widerstandes zu berechnen; für die höheren Geschwindigkeiten würde $R = kv^{2,21}$ die Kurve leidlich gut wiedergeben.

Lp.

Ringelmann. Sur le travail mécanique fourni par les moulins à vent. C. R. **141**, 688-689.

Kurzer Bericht über messende Versuche bei einer Windmühle, die zum Heben von Wasser benutzt wurde. Die Mühle konnte schon zur Arbeit verwendet werden, wenn die Windgeschwindigkeit V zwischen 4 und 10 m in der Sekunde lag. Zwischen der Umfangsgeschwindigkeit v des Radumfanges und V bestand die Gleichung $v = nV$, wo n zwischen 0,75 bis 0,88 schwankte. Die Arbeit T wurde durch die Formel $T = KAV^3$ dargestellt, wo A die durch den Wind getroffene Oberfläche der Flügel bezeichnet; K ist ein Koeffizient, der von 0,0198 bei $V = 4{,}08$ m bis 0,0030 bei $V = 10$ m sinkt. Das in einer Stunde auf 10 m Höhe gehobene Wasservolumen stieg von 1563 bis zu 3527 Litern.

Lp.

F. Ferber. Les progrès de l'aviation par le vol plané. Rev. d'Artillerie **66**, 317-375; **67**, 44-74, 81-105.

Der erste Artikel gibt eine Geschichte der Flugversuche von Lilienthal an. In den beiden folgenden Artikeln wird eine Theorie der Aeroplanen gegeben, in dem als Grundgesetz für den Normalwiderstand eines Flächenelementes die Formel $N = kSV^2 \sin\gamma$ genommen wird (k der Zahlenkoeffizient für den Luftwiderstand, S der Flächeninhalt des Elements, V die Geschwindigkeit, γ der Angriffswinkel). Die Bewegungsgleichungen für die Bewegung eines freien starren Körpers werden angesetzt, und aus ihnen werden zuerst die Folgerungen für den Aeroplan ohne Motor gezogen, dann für den vorwärts getriebenen Aeroplan. In dem letzten Artikel benutzt der Verf. die von Williams (F. d. M. **35**, 969, 1904) angestellten Untersuchungen bezüglich der Stabilität eines Aeroplans und wiederholt dessen Rechnungen unter einigen Abänderungen. Die Zahl der praktisch zu verwertenden „Folgerungen" steigt dabei bis auf 20.

Lp.

M. Brillouin. Indétermination de la trajectoire limite des planeurs rigides. C. R. **140**, 570-573.

Durch Abschätzung des Einflusses aller in Betracht zu ziehenden Kräfte gelangt Brillouin zu dem Schlusse: „Unter dem Einflusse der Anfangsbedingungen in ruhiger Luft oder unter der zufälligen Einwirkung

eines Windstoßes in freier Luft ist der Niederstieg mit konstanter beträchtlicher Geschwindigkeit auf einer Schraubenlinie von sehr kurzer Ganghöhe immer ein möglicher Grenzzustand eines starren Schwebers, sei er noch so gut äquilibriert." — Kein starrer Schweber gewährt Sicherheit. Ein etwas heftiger Windstoß kann die Grenzbahn derart vertikal machen, daß der Sturz eintritt, bevor die ausgleichenden Einrichtungen haben wirksam werden können. Lp.

Weitere Literatur.

P. R. Alger. Hydromechanics: an elementary treatise prepared for the use of the midshipmen. Annapolis, Md., Alger. 145 S. 12mo.

E. Bertin. Sur la giration des navires. C. R. **140**, 337-342.

Auszug aus einer größeren Abhandlung, die der Akademie überreicht wurde. Lp.

I. P. Church. Hydraulic motors, with related subjects, including centrifugal pumps, pipes, and open channels; designed as a textbook for engineering schools. New York: Wiley. VI u. 269 S. 8°.

Fournier. Résistance de l'eau à la translation des navires. Carènes de moindre résistance. C. R. **140**, 48-50.

Berichtet über Versuche an Modellen zur Bestätigung von Formeln, die der Verf. früher aufgestellt hatte. Lp.

E. R. v. Grünebaum. Zur Theorie der Zentrifugalpumpen. Berlin: J. Springer. VII u. 88 S. 61 Fig. 8°.

E. L. Hancock. A new problem in hydrodynamics with extraneous forces acting. Proc. Indiana Ac. of Sc. 1903, 97-108.

H. Lamb. Hydrodynamics. 3rd edition. Cambridge: University Press. 648 S. 8°.

U. Masoni. L'énergie hydraulique et les récepteurs hydrauliques. Paris: Gauthier-Villars. IV u. 320 S. 8°.

L. Vidal. Manuel pratique de cinématique navale et maritime. Paris: Gauthier-Villars. VIII u. 171 S. [Nature **72**, 361-362.]

G. Zeuner. Théorie des turbines. Traduit de l'allemand par E. Kreitmann. Paris: Dunod et Pinat. 8°.

A. Samuelson. Resistance of air and the question of flying. New York: Spon. 36 S. 8°.

E. Taffoureau. Sur le coefficient d'utilisation des hélicoptères. C. R. **141**, 878-880.

M. Vallier. Notes sur la dynamique de l'aéroplane. Paris. 98 S. 4°.

Kapitel 5.

Potentialtheorie.

E. Grimsehl. Angewandte Potentialtheorie. I. Bd. Leipzig: G. J. Göschen. VII u. 219 S. 8⁰ (Sammlung Schubert XXXVIII).

In möglichst elementarer Darstellung, unter Mitbenutzung der einfachsten Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung, entwickelt der Verf. die ersten Begriffe der allgemeinen Potentialtheorie und wendet dieselben dann auf Gravitation und Elektrostatik an. Der Begriff des Potentials wird aus dem der Arbeit hergeleitet, dann das Potential einer homogenen Kugelfläche wie das einer homogenen Vollkugel für äußere und innere Punkte berechnet. Nebenbei werden die bekannten geometrischen Beweise dafür reproduziert, daß eine homogene Kugelfläche oder eine von zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzte unendlich dünne Schale auf einen innern Punkt keine Anziehung ausüben. Es wird weiter der Begriff der Niveauflächen und Kraftlinien erörtert, dann die Laplacesche Gleichung für anziehende Massenpunkte und die Poissonsche Gleichung für das Innere einer homogenen Vollkugel abgeleitet. Daß der Verf. sich bei der Darstellung der allgemeinen Potentialtheorie auf die genannten Punkte beschränkt, war teils durch seine Absicht, hauptsächlich die Anwendungen zu behandeln, teils, weil er nur elementare Hilfsmittel benutzen wollte, geboten. Indessen sind gegen die Darstellung selbst verschiedene Bedenken zu erheben. Es wird nicht zwischen anziehenden und abstoßenden Kräften unterschieden, und daher werden mehrfach Resultate, die nur für abstoßende Kräfte gelten, auch auf anziehende angewandt, z. B. daß die Kraftkomponenten die negativen Ableitungen des Potentials sind. Auch was S. 30 über die Richtung gesagt wird, in der eine Kraft zu rechnen ist, ist unklar. An anderen Stellen ist die Darstellung durch die Art der Bezeichnung verwirrend. So wird beim Potential der Vollkugel der Kugelradius mit a, der Abstand des angezogenen Punktes vom Mittelpunkt mit r bezeichnet, solange es sich um äußere Punkte handelt, während für innere Punkte mit r der Kugelradius, mit a der Abstand des angezogenen Punktes bezeichnet wird; und dabei wird nicht einmal deutlich gesagt, daß eine Änderung der Bezeichnung vorgenommen wird.

Von großem Interesse sind die die Anwendungen betreffenden Abschnitte, die mehr als drei Viertel des Buches umfassen, insbesondere durch die große Zahl numerischer Beispiele, die geeignet sind, die Wichtigkeit des Potentialbegriffs für die Physik zu erläutern. Die Anwendungen betreffen: Die Bestimmung der Gravitationskonstante, die mittlere Erddichtigkeit, das Erdpotential innerhalb und außerhalb der Erde; dabei wird für Sternschnuppen unter der Voraussetzung, daß sie ihre Energie nur in Folge des Kraftfeldes der Erde erlangen, die Erwärmung berechnet, die sie erfahren, wenn alle Bewegungsenergie in Wärme verwandelt wird. Neben dem homogenen Kraftfeld der Erde wird auch das zusammengesetzte Feld von Erde und Sonne betrachtet etc. Von den elektrostatischen Anwendungen,

die weit über die Hälfte des Bandes ausmachen, heben wir hervor: Das Coulombsche Gesetz, das Pendel-Elektrometer, die elektrostatische Einheit; das elektrostatische Kraftfeld eines oder zweier elektrisch geladenen punktförmigen Körper, das Potential einer leitenden Kugel im Kraftfeld eines Punktes; Gaußscher Mittelwertsatz, Kapazität eines Leiters und seine Veranschaulichung, Spitzenwirkung, elektrische Bilder; das Potential auf den beiden Seiten einer elektrisch geladenen Flasche; Potential einer kreisförmigen Platte. Prinzip der Kondensatoren, Kugel- und Plattenkondensator; das Dielektrikum; die Franklinsche Tafel. Messung des Potentials und der elektrischen Ladung; Darstellung des Verlaufs der Kraftlinien im elektrostatischen Kraftfelde; das elektrische Potential der Erde.

Wn.

E. R. Neumann. Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Preischriften d. Fürstl. Jablonowskischen Ges. in Leipzig. XXIII u. 194 S. Leipzig 1905.

Die Preisfrage, deren Beantwortung die vorliegende Schrift gewidmet ist, lautet: „Die Gesellschaft wünscht, daß die in der Abhandlung von Poincaré: La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet, 1896, enthaltenen Untersuchungen nach irgendwelcher Seite hin vervollkommnet werden möchten.“ Dieser Wunsch ist dadurch gerechtfertigt, daß die in Rede stehende Poincarésche Arbeit (Acta Math. **20**; vgl. F. d. M. **27**, 316, 1896) zwar für die Behandlung der Randwertaufgabe, die C. Neumann mit seiner Methode des arithmetischen Mittels nur für überall nach außen konvexe Flächen erledigen konnte, ganz neue Gesichtspunkte eröffnet, indessen die neue Methode nicht durchweg mit der für ihre Allgemeingültigkeit nötigen Strenge entwickelt.

Über die Richtung seiner Untersuchung und ihr Verhältnis zu andern sich an Poincaré anschließenden Arbeiten, insbesondere denen von A. Korn, A. Liapounoff, W. Stekloff und S. Zaremba, spricht sich E. R. Neumann dahin aus, daß er den schließlichen Konvergenzbeweis für die Methode des arithmetischen Mittels nicht in den Vordergrund gestellt, sich vielmehr bemüht hat, die eigentlichen Grundlagen der Methode zu erforschen und die Funktionen (Potentiale), auf deren Anwendung die C. Neumannsche Methode beruht, einem gründlichen Studium zu unterwerfen. Neben den C. Neumannschen hat er die Robinschen Potentiale in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen, die, wie bekannt, zur Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie (bei der an der Grenze nicht das Potential selbst, sondern seine normale Ableitung gegeben ist) führen; und er deckt hier einen engen Zusammenhang zwischen beiden Arten von Potentialen auf. Einige von seinen Resultaten hat der Verf. übrigens bereits früher kurz mitgeteilt (vgl. F. d. M. **30**, 771, 1899; **33**, 795, 1902). Wesentlich neu ist in der vorliegenden Arbeit die Betrachtung spezieller Potentiale, die er „Polarpotentiale“

nennt; sie sind eng verwandt mit der Greenschen Funktion und geeignet, unsere Kenntnis auch vom Wesen dieser Funktion zu vertiefen.

Die Arbeit zerfällt in sieben Abschnitte. An die Spitze des ersten wird die für alle folgenden Erörterungen wesentliche Voraussetzung gestellt, daß die Fläche σ, für deren Innen- und Außenraum die Potentialgleichung integriert werden soll, frei von allen Singularitäten wie Ecken und Kanten ist und überall endliche Krümmung besitzt. Nach Liapounoff wird dann der für das folgende wichtige Begriff der Gleichförmigkeit der normalen Ableitungen eingeführt; es werden die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Greenschen Formeln präzisiert, es werden ferner den Potentialfunktionen, deren Begriff hinsichtlich der Kontinuität der ersten Ableitungen etwas weiter gefaßt wird, als üblich, die C. Neumannschen Fundamentalfunktionen an die Seite gestellt, die sich von jenen insbesondere durch ihr Verhalten im Unendlichen unterscheiden, und schließlich werden die beiden Randwertaufgaben streng formuliert.

Im zweiten Abschnitt werden die allgemeinen Eigenschaften der Potentiale einer einfachen und einer Doppelbelegung der Fläche σ erörtert; es wird im Anschluß an Liapounoff und Korn untersucht, welche Bedingungen neben der Stetigkeit der Dichtigkeit, resp. der Stetigkeit des Moments der Doppelbelegung noch erforderlich sind, damit die ersten Differentialquotienten der beiden Potentiale bis an die Fläche σ heran eindeutig und stetig sind. Es wird ferner der Liapounoffsche Satz über die normalen Ableitungen des Doppelbelegungspotentials abgeleitet, endlich zwei wichtige Sätze über die Konstanz des Moments μ einer Doppelbelegung. Der erste dieser Sätze besagt, daß, wenn μ stetig ist und das Potential von μ in allen Punkten von σ den Wert $2\pi\mu$ hat, μ notwendig konstant sein muß.

Der dritte Abschnitt entwickelt die hauptsächlichsten Eigenschaften der C. Neumannschen und der Robinschen aufeinanderfolgenden Flächenfunktionen und Potentiale, insbesondere ihre Integraleigenschaften. Diese beziehen sich auf die Werte der über den ganzen unendlichen Raum erstreckten verallgemeinerten Poincaréschen Integrale:

$$[W^{(\varkappa)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}] = \int\left(\frac{\partial W^{\varkappa}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{W}^{\lambda}}{\partial x} + \frac{\partial W^{\varkappa}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{W}^{\lambda}}{\partial y} + \frac{\partial W^{\varkappa}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{W}^{\lambda}}{\partial z}\right) d\tau,$$

worin $W^{(\varkappa)}$ und $\mathfrak{W}^{(\lambda)}$ irgend zwei der aufeinanderfolgenden C. Neumannschen Potentiale bezeichnen, und zwar ist für W und $\mathfrak{W}$ die Dichtigkeit verschieden. Gerade in den Integraleigenschaften zeigt sich ein inniger Zusammenhang zwischen den C. Neumannschen und den Robinschen sukzessiven Potentialen. Im ganzen bildet dieser dritte Abschnitt eine weitere Ausführung des oben erwähnten Aufsatzes vom Jahre 1902.

Im vierten Abschnitt werden die Polarfunktionen eingeführt. Ihre Definition ist die folgende. Es sei E_{0s} der Abstand eines Punktes s der Fläche σ von irgend einem festen Punkte O außerhalb der Fläche, dem Pol; ν_s sei die Flächennormale in s. Dann sind die Funktionen

$$\varphi_{(o)s} = \frac{1}{E_{os}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{(o)s} = \frac{1}{2\pi}\int \varphi^{(n)}_{(o)\sigma}(d\sigma)_s \ldots \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

die polaren Flächenfunktionen der C. Neumannschen Methode,

$$\gamma_{(o)s} = \frac{\partial \frac{1}{E_{os}}}{\partial \nu_s}, \ldots, \gamma^{(n+1)}_{(o)s} = \frac{1}{2\pi}\int \gamma^{(n)}_{(o)s}[d\sigma]_s, \ldots \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

die polaren Flächenfunktionen der Robinschen Methode. Dabei ist

$$(d\sigma)_s = \frac{\partial \frac{1}{E_{s\sigma}}}{\partial \nu_\sigma} d\sigma = \frac{\cos(E_{s\sigma}, \nu_\sigma)}{E^2_{s\sigma}} d\sigma, \; [d\sigma]_s = \frac{\partial \frac{1}{E_{s\sigma}}}{\partial \nu_s} d\sigma = \frac{\cos(E_{s\sigma}, \nu_s)}{E^2_{s\sigma}} d\sigma,$$

falls $E_{s\sigma}$ den Abstand des Punktes s der Fläche σ von dem Flächenelement $d\sigma$ bezeichnet, ν_σ die Normale in $d\sigma$. Ferner sind, wenn p einen beliebigen Punkt des Raumes bezeichnet:

$$W^{(n)}_{(o)p} = \frac{1}{2\pi}\int \varphi^{(n)}_{(o)\sigma}(d\sigma)_p \text{ und } V^{(n)}_{(o)p} = \frac{1}{2\pi}\int \gamma^{(n)}_{(o)\sigma}\frac{d\sigma}{E_{p\sigma}} \ldots (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Polarpotentiale der Neumannschen, resp. der Robinschen Methode.

Durch Einführung dieser Polarpotentiale ergibt sich ein neuer Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Poincaréschen Integralen und den Funktionswerten der Potentiale selbst. Bezeichnet $W^{(\varkappa)}$ eines der sukzessiven Neumannschen Potentiale für eine beliebige Doppelbelegung von σ, $W^{(\lambda)}_{(o)i}$ eines der Polarpotentiale für den innerhalb σ gelegenen Punkt i als Pol, $W^{(\varkappa)}_i$ den Wert von $W^\varkappa$ im Punkte i, so ist

$$\left[W^{(n-q)},\; W^{(q)}_{(o)i}\right] = -4\pi\left[W^{(n+1)}_i - W^{(n)}_i\right].$$

Tritt ein äußerer Punkt a an Stelle von i, so steht in der Klammer rechts die Summe statt der Differenz. Ähnliche Gleichungen gelten auch für die Robinschen Potentiale.

Die speziellen Eigenschaften der polaren Funktionen und der Polarpotentiale werden eingehend im fünften Abschnitt erörtert. Es ergibt sich u. a., daß von den aufeinanderfolgenden Funktionen $\varphi_{(o)}, \varphi'_{(o)}, \varphi''_{(o)}, \ldots$ nur die beiden ersten in O unendlich werden, die folgenden aber endlich sind.

Im sechsten Abschnitt werden die Differentialquotienten der C. Neumannschen und Robinschen sukzessiven Potentiale untersucht, wobei sich ergibt, daß die normalen Ableitungen der Neumannschen Potentiale $W^{(n)}$ mit wachsendem Index n gleichmäßig in allen Punkten von σ sich dem Werte 0 nähern.

Im siebenten Abschnitt endlich wendet sich der Verf. der schließlichen Lösung der beiden Randwertaufgaben zu. Er verläßt dabei die Methode der Polarfunktionen und benutzt zum Beweis der Konvergenz

der C. Neumannschen Lösung der ersten, wie der Robinschen Lösung der zweiten Randwertaufgabe folgenden Satz, den er als „Poincarésches Prinzip“ bezeichnet: „Es sei U das Potential einer auf σ ausgebreiteten einfachen Belegung von der stetigen Dichtigkeit η und der Gesamtmasse Null, und es seien $[U, U]_{\mathfrak{J}}$ und $[U, U]_{\mathfrak{A}}$ die bei der über das Innengebiet $\mathfrak{J}$, bezw. über das Außengebiet $\mathfrak{A}$ hin erstreckten Integrale von der Form

$$[U, U] = \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

Dann läßt sich eine der Fläche σ eigentümliche endliche und von 0 verschiedene Konstante k_g derart bestimmen, daß unabhängig von der näheren Beschaffenheit der Flächenbelegung stets

$$\frac{1}{k_g} \leqq \frac{[U, U]_{\mathfrak{J}}}{[U, U]_{\mathfrak{A}}} \leqq k_g$$

ist, und zwar ist diese Konstante $k_g \geqq \sqrt{2}$. Dieses Prinzip, verbunden mit gewissen vorher abgeleiteten Sätzen über die Werte der verallgemeinerten Poincaréschen Integrale, sowie über die Werte der normalen Ableitungen der sukzessiven Potentiale, führt sehr schnell zu dem Konvergenzbeweise. Wn.

S. Zaremba. Contribution à la théorie d'une équation fonctionnelle de la physique. Palermo Rend. **19**, 140-150.

Die Bildung des Laplaceschen Differentialausdrucks

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

setzt, mag es sich um eine gegebene oder eine zu suchende Funktion handeln, die Existenz der zweiten partiellen Ableitungen von f voraus. Diese Voraussetzung ist, wie hier gezeigt wird, in vielen Fällen unnötig. Bezeichnet nämlich $\Delta(f, h)$ den Ausdruck:

$$(1)\quad \Delta(f, h) = \frac{1}{h^2}\{f(x+h, y, z) + f(x-h, y, z) + f(x, y+h, z) + f(x, y-h, z) + f(x, y, z+h) + f(x, y, z-h) - 6f(x, y, z)\},$$

so kann man den Ausdruck $\Delta(f)$ ersetzen durch

$$\lim_{h=0} \Delta(f, h),$$

vorausgesetzt, daß dieser Grenzwert innerhalb des in Frage kommenden Gebietes eine kontinuierliche Funktion $f_1(x, y, z)$ ist. So kann man, wie zuerst gezeigt wird, die Poissonsche Gleichung für das Potential Φ eines Körpers in bezug auf Punkte der Masse durch folgende ersetzen:

$$(2)\qquad \lim_{h=0} \Delta(\Phi, h) = -4\pi\varphi(x, y, z),$$

wo φ die Dichtigkeit bezeichnet. Ferner ergibt sich, daß, wenn eine kontinuierliche Funktion u innerhalb des Gebietes D der Gleichung

$$(3)\qquad \lim_{h=0} \Delta(u, h) = 0$$

genügt, u innerhalb D kontinuierliche Ableitungen jeder Ordnung besitzt und der Laplaceschen Gleichung

$$\Delta(u) = 0$$

genügt. Aus beiden Sätzen folgt: Wenn in D

$$(4)\qquad \lim_{h=0} \Delta(u,h) = f(x, y, z)$$

und f eine kontinuierliche Funktion ist, so genügt die Funktion

$$(5)\qquad \psi(x, y, z) = u + \frac{1}{4\pi}\int_{(D)} f(x', y', z')\frac{d\tau'}{r},$$

in der r den Abstand der Punkte x, y, z und x', y', z' darstellt, $d\tau'$ das Volumenelement von D, innerhalb D der Gleichung

$$\lim_{h=0} \Delta(\psi, h) = 0$$

und daher der Gleichung $\Delta(\psi) = 0$.

Genügt u außer der Gleichung (4) noch der partiellen Differentialgleichung

$$(6)\qquad \lim_{h=0} \Delta(u, h) + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + pu = 0,$$

so folgt weiter $\lim\limits_{h=0} \Delta(u, h) = \Delta(u)$.

Die Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen ausdehnen, und dadurch ergibt sich das folgende Resultat, das der Verf. an die Spitze seiner Abhandlung stellt: Bei der Lösung der Fredholmschen Integralgleichung

$$(7)\qquad f(x_1, \ldots, x_n) = \int_{(D)}\cdots\int G(x_1, \ldots, x_n;\ \xi_1, \ldots, \xi_n)\ \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\ d\xi_1 \ldots d\xi_n,$$

in der G die Greensche Funktion oder eine der von Hilbert eingeführten Verallgemeinerungen dieser Funktion bezeichnet, ist die Voraussetzung der Existenz und der Kontinuität der ersten und zweiten Ableitungen der gegebenen Funktion f nicht erforderlich. Es ist nur nötig, daß f selbst und

$$\lim_{h=0} \Delta(f, h) = f_1(x_1, \ldots, x_n)$$

[($\Delta(f,h)$ ist ganz analog gebildet wie in (1)] in dem betrachteten Bereiche D kontinuierlich ist. In der Hilbertschen Lösung der Gleichung (7) [Göttinger Nachr. 1904 Nr. 3, vgl. F. d. M. **35**, 378ff., 1904] hat man ferner den Ausdruck

$$\Delta(f)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

durch f_1 zu ersetzen. Wn.

T. J. I'A. Bromwich. Theorems on the logarithmic potentials. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 345-370.

Ähnliche Untersuchungen, wie sie Petrini für das Newtonsche Potential angestellt hat [vgl. F. d. M. **30**, 693, 1899; **31**, 730, 1900; **32**, 779, 1901], werden hier für das logarithmische Potential durchgeführt. Nachdem einleitend gezeigt ist, daß auch für die Punkte im Innern einer mit Masse belegten Fläche die Anziehungskomponenten durch die partiellen Ableitungen des Potentials dargestellt werden, wendet sich der Verf. der Frage zu: welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz der zweiten Ableitungen des logarithmischen Potentials in Punkten der anziehenden Masse? Dabei wird hinsichtlich der Dichtigkeit ϱ angenommen, daß ϱ auf jedem von dem betrachteten Punkt x, y ausgehenden Radius r kontinuierlich ist, daß aber $\lim\varrho$ für $r=0$ auf den verschiedenen Radien einen verschiedenen Wert $f(\vartheta)$ hat. Die Existenz der ersten Ableitungen von ϱ wird bei der ganzen Untersuchung nirgends vorausgesetzt. Wie üblich, wird die Betrachtung auf einen kleinen, den Punkt x, y umgebenden Kreis vom Radius a beschränkt. Dann ist $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ der Grenzwert des Integrals

$$J=\frac{2\gamma}{h}\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^a\varrho\left[\frac{r^2\cos\vartheta-hr}{r^2-2hr\cos\vartheta+h^2}-\cos\vartheta\right]dr$$

für $h=0$; und darin wird von vornherein h positiv und kleiner als $\frac{1}{2}a$ genommen, es wird somit nur der nach der positiven x-Richtung genommene Differentialquotient untersucht. Nach Einführung der neuen Variable $t=\frac{r}{h}$ wird J in folgende drei Teile zerlegt:

$$A=2\gamma\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^1\varrho\,F\,dt,\quad B=2\gamma\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_1^{\frac{a}{h}}\varrho\left(F-\frac{\cos 2\vartheta}{t}\right)dt,$$

$$C=2\gamma\int_0^{2\pi}\cos 2\vartheta\,d\vartheta\int_1^{\frac{a}{h}}\frac{\varrho}{t}\,dt=2\gamma\int_0^{2\pi}\cos 2\vartheta\,d\vartheta\int_h^a\frac{\varrho}{r}\,dr,$$

wobei:

$$F = \frac{t^2 \cos \vartheta - t}{t^2 - 2t \cos \vartheta + 1} - \cos \vartheta$$

ist. Für die Grenzwerte der Teile A und B ergibt sich:

$$\lim_{h=0} (A + B) = 2\gamma \int_0^{2\pi} (\vartheta - \pi) \sin (2\vartheta) f(\vartheta) d\vartheta.$$

Zur Existenz von $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ ist daher erforderlich, daß der Grenzwert $\lim C$ für $h = 0$ existiert. Dieser Grenzwert wird nun zunächst für den Fall untersucht, daß die Dichtigkeit zu beiden Seiten einer durch x, y gehenden Kurve konstante, aber verschiedene Werte hat. Ist x, y ein regulärer Kurvenpunkt, so ist $\lim C = 0$. Berechnet man ferner $\lim (A + B)$ nicht bloß für positive, sondern auch für negative h, so ergibt sich für beide Fälle ein verschiedener Wert, der von dem Winkel der Kurventangente mit der x-Achse abhängt. Falls der Punkt x, y in eine Spitze der Kurve fällt, existiert die zweite Ableitung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ nicht, auch nicht die nach der $+x$-Seite genommene, mit Ausnahme zweier speziellen Richtungen. Dagegen existiert $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ für einen Rückkehrpunkt. Ein Beispiel für eine kontinuierliche Dichtigkeit ϱ, für die die zweiten Ableitungen von V nicht mehr existieren, ist

$$\varrho = \frac{(x^2 - y^2) \sin \lambda}{r^2 \lambda},$$

wo

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \lambda = \left(\log \frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist.

Weiter wird das Verhalten der ersten Ableitungen des logarithmischen Potentials einer mit Masse belegten Linie untersucht, und zwar mittels ähnlicher Zerlegungen wie oben. Die hauptsächlichsten Resultate, zu denen die Arbeit hier gelangt, sind folgende. Ist O ein regulärer Kurvenpunkt, in dem sich aber die Dichtigkeit σ diskontinuierlich ändert, so existiert dort nur die normale Ableitung von V, nicht aber die Ableitungen nach anderen Richtungen; zugleich ergibt sich die bekannte Formel für die Diskontinuität der normalen Ableitungen. Zur Existenz auch anderer als der normalen Ableitungen ist erforderlich, daß das Integral

$$\int_r^a \left[\sigma(\xi) - \sigma(-\xi)\right] \frac{d\xi}{\xi}$$

für $r = 0$ einer bestimmten Grenze sich nähert. Die Ausdehnung der Resultate auf nicht reguläre Kurvenpunkte wird angedeutet. Was ferner die

Anziehungskomponenten betrifft, so hat die normale Komponente in O einen bestimmten Wert, die tangentiale Komponente aber ist unbestimmt, außer wenn $\sigma = 0$ ist in O.

Zum Schluß werden die hier abgeleiteten Resultate mit denen von Harnack, Hölder, C. Neumann und Morera verglichen, und es wird darauf hingewiesen, inwiefern sich die Entwicklungen vereinfachen lassen, wenn die Dichtigkeit kontinuierlich ist. Wn.

Fr. Graf. Über die Eigenschaften des Newtonschen und logarithmischen Potentials und seiner ersten Derivierten in einigen einfachen Singularitäten der materiellen Flächen und Linien. Časopis **34**, 5-19, 130-147. (Böhmisch.)

Eine analytische Untersuchung des im Titel angedeuteten Problems, wobei insbesondere auf die singulären Punkte der Rotationsflächen Rücksicht genommen wird. Pe.

G. Lauricella. Sulle derivate della funzione potenziale di doppio strato. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{14}_1$, 70-85.

Liapunow hat in der Abhandlung „Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet“ (Journ. de Math. (5) **4**, 241-311; F. d. M. **29**, 723, 1898) die Existenz der normalen Ableitungen einer Doppelbelegung W in einer Form bewiesen, die beim Gebrauche schwierig zu benutzen ist. Die Methode, die der Verf. in dem vorliegenden Aufsatze darlegt, führt zu dem verlangten Beweise unter der Annahme, daß die Funktion f, welche die Dichtigkeit der auf einer Oberfläche S verteilten Doppelbelegung ausdrückt, in allen Punkten von S endlich und stetig ist, ebenso auch ihre ersten Ableitungen in bezug auf die Parameter u und v eines beliebigen Systems krummliniger Koordinaten auf S; sie muß aber die Eigenschaft besitzen, daß alle ihre Linien eine bestimmte Tangente in jedem stetig sich ändernden Punkte zulassen bei der stetigen Änderung des Berührungspunktes, und daß die zweiten Ableitungen von f in bezug auf die besagten Parameter endlich und integrabel sind. Zum Schlusse wird der Satz über die tangentialen Ableitungen von W kurz ausgesprochen. Lp.

G. Bocchetta. Le funzioni armoniche negli iperspazi. Batt. G. [(2) **12**] **43**, 253-270.

Es wird eine Reihe von bekannten Sätzen der Potentialtheorie auf Räume von beliebig vielen Dimensionen ausgedehnt, und zwar zunächst der Gaußsche Hülfssatz

$$\int\int\int\cdots\frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\cdots = \int\int\cdots\cos(Nx)\,do,$$

sowie verschiedene Folgerungen daraus, wie der Greensche Satz. Aus letzterem ergeben sich in bekannter Weise einige allgemeine Eigenschaften der harmonischen Funktionen, d. h. der Funktionen, die im Innern eines Gebiets der erweiterten Laplaceschen Gleichung genügen, ferner die Darstellung solcher Funktionen für das Innere eines n-dimensionalen Bereichs, falls man die Werte der Funktion und ihrer normalen Ableitung an der Oberfläche des Bereichs kennt. Endlich wird das so erhaltene Resultat auf eine Hypersphäre angewandt und gezeigt, daß man eine harmonische Funktion im Innern einer solchen durch die Werte an der Oberfläche allein (ohne die Werte der normalen Ableitungen) ausdrücken kann, und zwar erscheint das Resultat, das sich ohne Reihenentwicklung ergibt, in derselben Form, die bei drei Dimensionen bekannt ist. Als Hülfssatz bei der Ableitung dieses Resultats wird eine Erweiterung des bekannten Gaußschen Satzes über den Wert des über eine geschlossene Fläche erstreckten Integrals

$$\iint \frac{do \cos(Nr)}{r^2}$$

benutzt. Wn.

T. Boggio. Sulle funzioni di Green d'ordine m. Palermo Rend. **20**, 97-135.

In der Arbeit werden zunächst (Kap. I) einige allgemeine Formeln aufgestellt, die Verallgemeinerungen der bekannten Greenschen Formel sind, insbesondere die Formel:

$$(1) \qquad \int_S (\Delta_{2r-2} u \; \Delta_{2s} v - \Delta_{2r} u \; \Delta_{2s-2} v) dS$$
$$+ \int_\sigma \left(\Delta_{2r-2} u \frac{d\Delta_{2s-2} v}{dn} - \Delta_{2s-2} v \frac{d\Delta_{2r-2} u}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

Darin ist das erste Integral über ein endliches Volumen S, das zweite über dessen Oberfläche σ zu erstrecken; n ist die innere Normale von σ, Δ_2 bezeichnet den bekannten Laplaceschen Differentialausdruck, während $\Delta_4 = \Delta_2 \Delta_2$ ist etc. Aus (1) werden andere Formeln abgeleitet, indem der Reihe nach $r = m$, $s = 1$, $r = m - 1$, $s = 2, \ldots, r = \frac{m}{2} + 1$, $s = \frac{m}{2}$ gesetzt wird und die entstehenden Gleichungen addiert werden, oder auch, indem die Reihe der zu addierenden Gleichungen bis $r = 1$, $s = m$ fortgesetzt wird. So ergibt sich

$$(3) \qquad \int_S (u \Delta_{2m} v - v \Delta_{2m} u) dS$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_\sigma \left(\Delta_{2i-2} u \frac{d\Delta_{2m-2i} v}{dn} - \Delta_{2m-2i} v \frac{d\Delta_{2i-2} u}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

Setzt man in (3) $v = r^{2m-3}$, wo r den Abstand des Punktes x, y, z vom Koordinatenanfang O bezeichnet, so gilt die Formel (3) ohne weiteres, falls O außerhalb S liegt. Liegt O in S, so hat man O durch eine kleine Kugel aus dem Integrationsgebiet auszuschließen und erhält dann, wenn u_0 der Wert von u in O ist:

$$(4)\quad (2m-2)!\,4\pi u_0 = -\int\limits_S r^{2m-3} \Delta_{2m} u \, dS$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\sigma} \left(\Delta_{2i-2} u \frac{d\Delta_{2m-2i} r^{2m-3}}{dn} - \Delta_{2m-2i} r^{2m-3} \frac{d\Delta_{2i-2} u}{dn} \right) d\sigma,$$

während für zwei Variabeln die entsprechende Gleichung lautet:

$$(4_1)\quad 2^{2m-2}[(m-1)!]^2\, 2\pi u_0 = -\int\limits_{\sigma} r^{2m-2} (\log r)\, \Delta_{2m} u \, d\sigma$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{s} \left[\Delta_{2i-2} u \frac{d\Delta_{2m-2i}(r^{2m-2}\log r)}{dn} \right.$$

$$\left. - \Delta_{2m-2i}(r^{2m-2}\log r) \frac{d\Delta_{2i-2} u}{dn} \right] ds.$$

Weiter wird [Kap. II] in (7) an Stelle von r die Greensche Funktion m-ter Ordnung gesetzt, d. h. die Funktion

$$(7)\qquad G_m = r^{2m-3} - \Gamma_m,$$

in der r den Abstand eines festen Punktes M von S von einem beweglichen Punkte x, y, z bezeichnet, während Γ_m innerhalb S der Gleichung $\Delta_{2m}\Gamma_m = 0$ genügt, an der Grenzfläche σ aber den Bedingungen:

$$\frac{d^i \Gamma_m}{dn^i} = \frac{d^i r^{2m-3}}{dn^i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Dann folgt:

$$(8)\quad k \cdot u(M) = -\int\limits_S G_m \Delta_{2m} u \, dS + \sum_{i=1}^{\mu} \int\limits_{\sigma} \left(\Delta_{2i-2} u \frac{d\Delta_{2m-2i} G_m}{dn} \right.$$

$$\left. - \Delta_{2m-2i} G_m \frac{d\Delta_{2i-2} u}{dn} \right) d\sigma, k = (2m-2)!\,4\pi,\ \mu = \frac{m}{2}, \text{ resp.} = \frac{m-1}{2};$$

in (8) ist also die Anzahl der Summanden nur die Hälfte von der in (4). Für zwei Veränderliche tritt $r^{2m-2}\log r$ an Stelle von r^{2m-3}, es wird also (7) $\qquad G_m = r^{2m-2}\log r - \Gamma_m,$

und mittels dieser Funktion ergibt sich eine zu (8) analoge Formel, die nur halb soviel Summanden wie (4_1) enthält. Allgemein läßt sich

übrigens leicht zeigen, daß G_m eine symmetrische Funktion ist, d. h. durch Vertauschung des festen Punktes M mit dem Punkte x, y, z sich nicht ändert.

In Kap. III wird die Aufgabe behandelt, für das Innere eines Kreises die Funktion u zu bestimmen, für die

$$\Delta_{2m}(u) = F(x,y)$$

ist, während an der Kreisperipherie

$$u = \frac{du}{dn} = \cdots = \frac{d^{m-1}u}{dn^{m-1}} = 0$$

ist. F ist dabei eine gegebene n-fach harmonische Funktion

$$F = \sum_{i=0}^{n-1} \varrho^{2i} f_i \quad (\varrho^2 = x^2 + y^2).$$

Es wird gezeigt, wie man aus der gegebenen Reihe für F eine Reihenentwicklung für u ableiten kann, und zwar zunächst für $m = 1$, sodann für beliebige m. Aus dieser Reihenentwicklung einerseits, der Darstellung von u mittels der Greenschen Funktion andererseits folgt, wenn man noch $F = 1$ setzt, für das über das Innere des Kreises vom Radius R erstreckte Integral

$$\int\limits_{\sigma} G_m \, d\sigma \text{ der Wert } \frac{\pi}{2\,m^2}(\varrho^2 - R^2)^m,$$

während für das analoge, über das Innere einer Kugel erstreckte Raumintegral

$$\int\limits_{S} G_m \, dS = -\frac{2\pi}{m(4m^2-1)}(\varrho^2 - R^2)^m$$

wird. ϱ ist dabei die Entfernung des Poles von G_m vom Mittelpunkte.

Waren diese Resultate abgeleitet, ohne daß die analytische Darstellung von G_m bekannt war, wird in Kap. IV G_m durch eine Reihe, resp. ein Integral dargestellt. Ist O der Mittelpunkt des Kreises R, M der Pol der Greenschen Funktion, P ein beliebiger Punkt im Innern des Kreises, $OM = \varrho$, $OP = \varrho_1$, $MP = r$ und

$$r_1^2 = r^2 + \frac{1}{R^2}(R^2 - \varrho^2)\,(R^2 - \varrho_1^2),$$

so hat die Greensche Funktion m-ter Ordnung in P den Wert:

$$G_m = r^{2m-2} \log \frac{r}{r_1} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2i}(r^2 - r_1^2)^i \, r^{2m-2-2i}$$

$$= (-1)^m r^{2m-2} \int\limits_1^{\frac{r_1}{r}} \frac{(v^2-1)^{m-1} dv}{v},$$

während für das Innere einer Kugel

$$G_m = r^{2m-3} - r_1^{2m-3} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(2m-3)(2m-5)..(2m-2i-1)}{i!\,2^i} r_1^{2m-3-2i}$$

$$= (-1)^{m+1} \frac{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2m-3)}{(m-1)!\;2^{m-1}} r^{m-3} \int_1^{\frac{r_1}{r}} \frac{(v^2-1)^{m-1}}{v^2}\,dv$$

wird. Die Formeln werden auf ein n-dimensionales sphärisches Gebiet übertragen; dabei ergibt sich für G_m eine verschiedene Form, je nachdem m gerade oder ungerade ist.

In Kap. V endlich werden die in Kap. IV gefundenen Ausdrücke benutzt, um eine obere Grenze für die Ableitungen von G_m zu ermitteln. Stellt $D^i G_m$ irgendeine der i-ten partiellen Ableitungen von G_m dar, so wird für den Kreis R:

$$\int_\sigma |D^i G_m|\, d\sigma < c_i\, R^{2m-i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2m-1),$$

wobei das Integral über das ganze Innere des Kreises zu erstrecken ist. Die c_i ferner stellen positive, von R unabhängige Zahlen dar. Das gleiche Resultat gilt auch für eine Kugel. Als Folgerung ergibt sich daraus eine Formel für die Maximalwerte einer Funktion u, die im Innern des Kreises oder der Kugel der Gleichung

$$\Delta_{2m} u = F$$

genügt, während an der Begrenzung u und seine $m-1$ ersten normalen Ableitungen verschwinden. Wn.

T. Boggio. Sulle funzioni associate e sulle linee di forza di un ellissoide di rotazione eterogeneo. Lomb. Ist. Rend. (2) 38, 454-462.

Für zwei von Betti in seinem bekannten Lehrbuch der Potentialtheorie abgeleitete Resultate wird hier eine etwas einfachere Herleitung mitgeteilt. Das eine Resultat betrifft die Kraftlinien eines heterogenen Rotationsellipsoids, das zweite die Kraftlinien einer von einem Punkte induzierten, mit der Erde leitend verbundenen Kugel [s. S. 169, Formel 23, S. 202, Formel 18, der deutschen Übersetzung des Bettischen Buches].

Zur Bestimmung der Kraftlinien hat man bekanntlich die dem Potential V assoziierte Funktion W zu suchen, die, falls die Massen symmetrisch zur z-Achse verteilt sind, mit V durch die Gleichungen zusammenhängt:

$$u\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial u}, \quad u\frac{\partial V}{\partial u} = -\frac{\partial W}{\partial z}, \quad u^2 = x^2 + y^2;$$

$W =$ Const. gibt die Kraftlinien. Setzt man

$$W = zV + U,$$

so ist die Bestimmung von U einfacher als die direkte Bestimmung von W bei Betti. — Für W werden ferner einige allgemeine Formeln aufgestellt, z. B. daß W biharmonisch ist, d. h. der Gleichung $\Delta(\Delta W)=0$ genügt. Endlich wird W für eine anziehende homogene Strecke nach einer anderen Methode bestimmt, als es von Beltrami geschehen ist. Wn.

G. Morera. Sulla attrazione degli ellissoidi e sulle funzioni armoniche ellissoidali di seconda specie. Torino Mem. (2) 55, 1-25.

Man setze

$$U=\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2^{n+1}.n!}\int_{s_0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)^n}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}ds,$$

$$U_{p,q,r}=\frac{\partial^n U_n}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r},$$

wo s_0 den Wert s_1 oder 0 hat, je nachdem der Punkt (x, y, z) innerhalb oder außerhalb des Ellipsoids liegt, s_1 die größte Wurzel der kubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}+\frac{z^2}{c^2+s}=1$$

ist. Dann ist bekanntlich U_n die Potentialfunktion des Ellipsoids, das homothetisch mit Masse von der Dichtigkeit:

$$\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2^{n+1}.n!.4\pi abc}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{n-1}$$

belegt ist. — Folgender Satz wird bewiesen: Mit einer linearen Kombination der $U_{p,q,r}(p+q+r\gtreqless n)$ ist es immer möglich, eine außerhalb des Ellipsoids harmonische Funktion zusammenzusetzen, die sich auf ihm auf eine willkürlich gegebene ganze rationale Funktion n-ten Grades reduziert. Hieraus folgt: Jede beliebige harmonische Funktion außerhalb des Ellipsoids kann immer durch eine Reihe vom Typus

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^n U_n$$

dargestellt werden, wo statt $\alpha_1^p\,\alpha_2^q\,\alpha_3^r$ $(p+q+r=n)$ in der symbolischen Entwicklung ein konstanter Koeffizient $\alpha_{p,q,r}$ zu setzen ist. Endlich wird auch gezeigt, daß die Potentialfunktion eines ellipsoidischen Körpers von beliebiger Dichte in die unendliche Reihe entwickelbar ist:

$$\pi abc\sum\frac{\alpha_{p,q,r}}{p+q+r+1}\int_{s_0}^{\infty}\frac{\partial^{p+q+r}(1-\gamma)^{p+q+r+1}}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}\frac{ds}{\Re(s)},$$

wo $\Re(s)=\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}$. Lp.

G. Repetto. Intorno ad una forma del potenziale di una massa sferica, la cui densità non sia costante. Periodico di Mat. (3) **3**, 81-87, 119-124.

Nach einem besonderen Verfahren wird die Form des verlangten Potentials bestimmt, wenn eine kugelförmige Masse gegeben ist, bei der die Dichte nicht nach konzentrischen Kugelflächen sich ändert, sondern nach Kugelflächen innerhalb der gegebenen mit Mittelpunkten, die folgeweise auf einem Durchmesser der gegebenen Kugel liegen, aber so, daß die nächste Kugel immer die vorangehende umschließt. Der betreffende Durchmesser wird als x-Achse genommen, der Kugelmittelpunkt als Anfangspunkt der Koordinaten. Ist die Abszisse eines Kugelmittelpunktes a eine Funktion der Variable u, $l = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$, r der Radius der Kugel um $(a, 0, 0)$ als Mittelpunkt, $\delta(u)$ die zu der Kugelschicht vom Radius r gehörige Dichte, so hat die gesuchte Funktion V die Form:

$$V = 4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \frac{r^2}{l}\left(\frac{dr}{du} + \frac{r}{3} \cdot \frac{x-a}{l^2} \cdot \frac{da}{du}\right) du$$

$$+ 4\pi \int_{u}^{u_1} \delta(u) \left(r \frac{dr}{du} + \frac{x-a}{3} \cdot \frac{da}{du}\right) du.$$

wo die Grenzen der Integrale nach der Lage des angezogenen Punktes zu bestimmen sind. Lp.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Kapitel 1.

Molekularphysik, Kapillarität, Elastizität, Akustik.

A. Molekularphysik und Allgemeines.

MÜLLER-POUILLET. Lehrbuch der Physik und Meteorologie. In vier Bänden. Zehnte umgearbeitete und vermehrte Auflage, herausgegeben von L. Pfaundler. Unter Mitarbeit von O. Lummer usw. Erster Band. Mechanik und Akustik von L. Pfaundler. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. XVII u. 801 S. gr. 8°.

Wenn von einem so umfangreichen Lehrbuch, wie es das vorliegende ist, die Auflagen in verhältnismäßig kurzer Frist einander folgen, so daß nunmehr schon zum zehnten Male an eine Neuherausgabe gegangen werden muß, so ist das der beste Beweis dafür, daß das Werk seinen Zwecken in vollstem Maße entspricht. Wenn ein solches Werk gar auf einem Gebiete, das so außerordentlichen Erweiterungen und Umwandlungen unterworfen ist, wie es die physikalischen Tatsachen und Anschauungen unserer Tage immer noch sind, so lange und unbestritten seinen Platz behauptet, so zeugt dies von der seltenen Fähigkeit des Herausgebers, in einen geschlossenen Rahmen immer wieder neue Gedanken einzufügen und mit dem Ganzen in meisterhafter Darstellung zu verknüpfen.

Die Tendenz des Müller-Pouillet ist ja bekannt: er will unter Bevorzugung der experimentellen Seite und ohne über die elementarsten mathematischen Hülfsmittel hinauszugehen, die Tatsachen und Gesetze der Physik zur Darstellung bringen. Daß auch die zehnte Auflage, von der der erste Band (Mechanik und Akustik) zur Berichterstattung vorliegt, dies Ziel in vollkommener Weise erreichen wird und somit dem rühmlichst bekannten Werke, das schon lange jedem Lehrer der Physik fast unentbehrlich geworden ist, seinen Platz erhalten wird, dafür bürgt der

Name des Herausgebers, dem wir ja schon die letzten beiden Auflagen zu verdanken hatten. Um die Herausgabe zu beschleunigen, hat L. Pfaundler eine Reihe von Fachgenossen zur Mitarbeit gewonnen, die nun in den verschiedenen Gebieten der Wissenschaft das Werk auf den neuesten Standpunkt der Forschung bringen werden. So bearbeitet W. Kaufmann den Magnetismus und die Elektrizität, A. Nippold den Erdmagnetismus, O. Lummer die Optik, J. M. Pernter die Meteorologie, K. Drucker die physikalische Chemie und A. Wassmuth die Wärmeleitung und Thermodynamik.

Der erste Band, von L. Pfaundler selbst bearbeitet, hat eine wesentliche Vermehrung erfahren durch die Aufnahme der metronomischen Abschnitte, die H. v. Wild eingefügt hatte, der in Aussicht genommene, aber leider seiner Arbeit durch den Tod entrissene Herausgeber der zehnten Auflage, für welchen dann, wie schon erwähnt, L. Pfaundler in dankenswertester Weise eingetreten ist. Es ist hier nicht der Ort, eine eingehende Würdigung des Werkes zu geben, das ja gerade in mathematischer Beziehung sich auf das elementarste beschränkt; wir müssen uns daher mit dieser kurzen Anzeige begnügen. Sk.

O. D. Chwolson. Lehrbuch der Physik. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. I. Einleitung. Mechanik. Einige Meßinstrumente und Meßmethoden. Die Lehre von den Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern. Übersetzt von H. Pflaum. XX u. 791 S. (1902). II. Lehre vom Schall (Akustik). — Lehre von der strahlenden Energie. Übersetzt von H. Pflaum. XXII u. 1056 S. (1904). III. Die Lehre von der Wärme. Übersetzt von E. Berg. XI u. 988 S. (1905).

O. D. Chwolson. Traité de physique. Ouvrage traduit sur les éditions russe et allemande, par E. Davaux. Édition revue et considérablement augmentée par l'auteur, suivie de notes sur la physique théorique par E. Cosserat et F. Cosserat. Paris: A. Hermann. I, 1: Introduction, mécanique, méthodes et instruments de mesure. 407 S. (1905). II, 1: Émission et absorption de l'énergie rayonnante, vitesse de propagation, réflexion et réfraction. 202 S. (1906).

Obgleich dieses Lehrbuch der Physik uns nicht zugegangen ist, wollen wir doch nicht unterlassen, auf diese bedeutende Erscheinung der physikalischen Literatur hinzuweisen. Wir haben um so mehr die Pflicht, dies zu tun, als die mathematischen Partien, welche die Leser des Jahrbuchs interessieren, durchaus auf der Höhe wissenschaftlicher Behandlung stehen. Lp.

F. Kohlrausch. Lehrbuch der praktischen Physik. Leipzig: B. G. Teubner. XXVIII u. 656 S. 8°.

Die vorliegende „zehnte vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik", die zweite des Lehrbuchs, das dem praktischen Physiker längst unentbehrlich geworden ist, hat gegen die vorige eine Reihe von Ergänzungen erhalten. Den Mathematiker wird hierbei vor allem ein von Helmert herrührendes Verfahren interessieren, welches die Konstanten mit kleinsten Quadraten zu berechnen gestattet, auch wenn die Fehler verschiedener Beobachtungsgrößen in ihrem Einfluß auf das Resultat von derselben Ordnung sind. Die Minimumgleichung wird dabei durch eine andere ersetzt, bei welcher die Einzelfehler in eine einzige Fehlergröße zusammengezogen werden. Von anderen Abschnitten, welche neu aufgenommen oder erweitert sind, seien erwähnt: Spezifische Wärme von Gasen, Diffusionskonstante, Ionisation, das astatische Torsionsmagnetometer, die elektrischen Wellenmesser. Über den Erfolg der Einigungsbestrebungen in der Bezeichnung der physikalischen Größenwerte durch Buchstaben drückt sich der Verf. ziemlich skeptisch aus. Gt.

K. Schreber und P. Springmann. Experimentierende Physik. Erster Band. Leipzig: J. A. Barth. VI u. 171 S. 8°.

Aus der Erkenntnis heraus, daß der physikalische Unterricht sein Schwergewicht nicht in die Übermittlung und Aneignung einer mehr oder minder großen Anzahl interessanter oder wichtiger Einzeltatsachen zu legen, sondern die Beobachtungsgabe zu schärfen und das physikalische Denken zu entwickeln hat, sind in den letzten Jahren an die Seite der theoretischen Unterrichtsstunden allenthalben physikalische Schülerübungen getreten, in denen der Anfänger durch selbständiges Anstellen von Versuchen und deren Verarbeitung in die naturwissenschaftliche Denkweise eingeführt werden soll. Trotz der schon jetzt großen Zahl von Anleitungen zu selbständiger Arbeit, die uns die letzten Jahre gebracht haben, wird dem Physiklehrer immer noch jedes Werk willkommen sein, das ihm eine neue Reihe von einfachen, eigenartigen und instruktiven Versuchsanordnungen an die Hand gibt. Er wird es daher den Verfassern danken, daß sie es unternommen haben, den von H. Abraham im Auftrage der Société française de Physique unter Mitarbeit von 172 Physikern herausgegebenen Recueil d'expériences élémentaires de Physique für deutsche Verhältnisse zu bearbeiten. Der vorliegende erste Band enthält zunächst eine Anleitung zu allerlei Werkstattarbeiten, wie Löten, Glasblasen u. a. m., die für die Selbstanfertigung von einfachen Apparaten nützlich sind, sodann die Mechanik und Wärmelehre. Die Versuchsanordnungen, die nicht nur die einfachsten Gesetze aus diesen Gebieten abzuleiten gestatten, sind klar beschrieben, die das Denken anregenden Fragen führen den Schüler geschickt auf das Wesentliche. Das Buch wird seinen Zwecken wohl entsprechen. Sk.

G. Mahler. Physikalische Aufgabensammlung. Mit Resultaten. Leipzig: G. J. Göschen. 117 S. 8°. (Sammlung Göschen Nr. 243.)

Das Büchelchen enthält 582 Aufgaben aus allen Gebieten der Physik. Da nur elementare Hülfsmittel zur Lösung verwandt werden, sind sie für den Schulunterricht zur Klärung und Festigung des Geschauten trefflich brauchbar. Die Lösungen sind beigefügt. Sk.

P. Rossi. Intorno alle dimensioni delle grandezze fisiche. Nuovo Cimento (5) **9**, 355-374.

Gibt eine Zusammenstellung verschiedener Möglichkeiten, die Temperatur in das CGS-System einzuschalten und die Dimensionen elektromagnetischer Größen durch Einführung einer vierten Dimension zu vereinfachen. Br.

A. E. Haas. Über ein Maßsystem, das die Längeneinheit und die Lichtgeschwindigkeit als Grundeinheiten enthält. Physik. Zs. **6**, 204-205.

Das betreffende Maßsystem wird kurz definiert und durch eine Tabelle erläutert. „Es wird erreicht, daß die Zahlenwerte elektrischer Größen unabhängig davon sind, ob sie elektrostatisch oder elektromagnetisch gemessen werden." Lp.

L. Koenigsberger. Über die Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Berl. Ber. 1905, 841-854.

Der in der neueren Zeit so rasche und an wichtigen Resultaten reiche Fortschritt der mathematischen Physik verlangt die Beantwortung der Frage, welche Systeme totaler und partieller Differentialgleichungen, die der mathematischen Physik angehören, mechanischen Ursprungs sind, also die Form der erweiterten Lagrangeschen totalen und partiellen Differentialgleichungen der allgemeinen Mechanik besitzen, oder welche, was dasselbe ist, sich in der Form der Hauptgleichungen der Variation eines einfachen oder mehrfachen Integrales darstellen und somit dem erweiterten Prinzip der kleinsten Wirkung Genüge leisten. Diese Untersuchung kommt im wesentlichen darauf hinaus, die notwendigen und hinreichenden, voneinander unabhängigen Bedingungen für die Existenz des kinetischen Potentials anzugeben. Daher behandelt der Verf. zunächst diese Frage für kinetische Potentiale erster Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen und abhängigen Variablen nach einer auch in analytischer Beziehung interessanten Methode, die eine unmittelbare Ausdehnung auf den allgemeinsten Fall des Problems gestattet. Er liefert damit eine wesentliche Ergänzung seiner früher an demselben Orte veröffentlichten Untersuchungen. Lp.

J. Hadamard. Sur les données aux limites dans les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 414-416.

Allgemeine Betrachtungen über die beiden bisher behandelten Fälle, nämlich 1. (Problem von Cauchy) wenn längs der Grenze des betrachteten Bereiches die unbekannte Funktion z und eine ihrer ersten Ableitungen gegeben sind, 2. (Dirichletsches Problem) wenn auf einer geschlossenen Oberfläche die Werte der unbekannten Funktion allein gegeben sind. Hierzu tritt noch das „gemischte Problem“, das der Verf. in der Arbeit: „Sur un problème mixte aux dérivées partielles“ behandelt hat (vgl. F. d. M. **34**, 387, 1903). Lp.

W. Stekloff. Théorie générale des fonctions fondamentales. Toulouse Ann. (2) **6**, 351-475.

Mit den in der vorliegenden Abhandlung behandelten Fragen hat sich der Verf. bereits seit dem Jahre 1896 in einer großen Reihe von Arbeiten beschäftigt (vgl. F. d. M. **27**, 203, 1896; **28**, 364, 764, 1897; **29**, 782, 1898; **30**, 374, 772, 1899; **31**, 731, 733, 735, 868, 1900; **32**, 777, 1901; **33**, 800, 807, 1902; **34**, 427, 1903; **35**, 436, 438, 1904). Er stellt sich die Aufgabe, für die in der mathematischen Physik auftretenden partiellen Differentialgleichungen 1) die Existenz von unendlich vielen einfachen Lösungen für alle Gebiete von gewisser Beschaffenheit, 2) die Möglichkeit der Entwicklung gegebener Funktionen nach jenen Partikularlösungen nachzuweisen. Abgesehen davon, daß diese Fragen hier von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus behandelt werden als in den meisten der früheren Arbeiten, ist auch die Methode der Ableitung eine wesentlich andere, insofern die Untersuchung sich hier auf die Lösung einer Integralgleichung stützt.

Betreffs der Grenzflächen S der Gebiete D, für die die Entwicklungen gelten, werden dieselben Annahmen gemacht, wie in früheren Aufsätzen des Verf. (vgl. F. d. M. **31**, 731, 1900; **33**, 808, 1902). Ferner wird folgende Bezeichnung gebraucht. Sind x, y, z und ξ, η, ζ die Koordinaten zweier Punkte m und m_1, so wird $f(x, y, z)$ kurz mit $f(m)$ bezeichnet, $f(\xi, \eta, \zeta)$ mit $f(m_1)$, während $f(m, m_1)$ eine Funktion aller sechs Variablen ist. Das Volumenelement von D wird mit $d\tau$, resp. $d\tau'$ bezeichnet, je nachdem sich die Integration auf die Punkte m oder die Punkte m_1 bezieht.

Den Ausgangspunkt bildet die Aufgabe, diejenige Funktion $V(m)$ zu bestimmen, die der Integralgleichung

$$(4) \qquad V(m) = \lambda \int_{(D)} p(m_1)\, G(m, m_1)\, V(m_1)\, d\tau' + f(m)$$

genügt. Darin bezeichnet $p(m)$ eine integrable, innerhalb D stets positive Funktion, während $f(m)$ nur integrabel zu sein braucht; λ ist ein Parameter,

$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{r}$, wo r den Abstand der Punkte m, m_1 bezeichnet, H aber eine symmetrische Funktion der Punkte m und m_1, die in D kontinuierlich ist, und für die eine Zahl A existiert, so daß

$$\int_{(D)} | H(m, m_1) | \, d\tau' < A$$

ist. $V(m)$ läßt sich durch eine Reihe darstellen:

$$(5) \quad V(m) = v_0(m) + \lambda v_1(m) + \lambda^2 v_2(m) + \cdots + \lambda^k v_k(m) + \cdots.$$

wo

$$(6) \quad v_k(m) = \int_{(D)} p(m_1) G(m, m_1) v_{k-1}(m_1) d\tau', \quad v_0(m) = f(m)$$

ist. Setzt man noch $V(m) = f(m) + \lambda V_1(m)$, so läßt sich von der Reihe $V_1(m)$ zeigen, daß sie im Innern von D absolut und gleichmäßig konvergiert und daher eine kontinuierliche Funktion darstellt, falls $|\lambda| < \varrho_0$; und ϱ_0 ist von $f(m)$ unabhängig. Der Konvergenzradius der Reihe $V(m)$ dagegen hängt im allgemeinen von f ab, kann aber eine gewisse positive Zahl l_1 nicht übersteigen.

Weiter werden neben den Funktionen v_k die folgenden Hülfsfunktionen u, w betrachtet:

$$(27) \qquad u_k - \lambda u_{k+1} = v_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

$$(29) \qquad w = \alpha_1 V + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n,$$

wobei die α zunächst unbestimmte Konstanten bezeichnen. Für die Funktion u_k gilt dann die Gleichung

$$(28) \qquad u_k(m) = \int_D p(m_1) \, G(m, m_1) \, u_{k-1}(m_1) d\tau'$$
$$(k = 2, 3, \ldots, n + 1).$$

Ferner lassen sich die Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und die Zahl n so bestimmen, daß w, als Funktion von λ betrachtet, einen Konvergenzradius $\varrho_1 > l_1$ besitzt. Wendet man (27) auf alle möglichen k an, nimmt dazu (29) und die Gleichung $V - \lambda u_2 = v_0$, so kann man aus den so erhaltenen $n + 1$ Gleichungen die u eliminieren und erhält dadurch für V die Darstellung:

$$(32) \qquad V(m) = \frac{P(m)}{D(\lambda)},$$

wo

$$(34) \quad D(\lambda) = \alpha_n - \lambda \alpha_{n-1} + \lambda^2 \alpha_{n-2} - \cdots + (-\lambda)^{n-1} \alpha_1$$

ist, $P(m)$ eine Potenzreihe, die für $|\lambda| < \varrho_1$ konvergiert, und deren Koeffizienten Funktionen der Koordinaten von m sind. Daraus, daß

$D(\lambda) = 0$ wenigstens eine Wurzel $> \varrho_1$ besitzt, folgt, daß $V(m)$ eine meromorphe Funktion des Parameters λ ist. Es läßt sich ferner zeigen, daß diese Funktion nur einfache Pole besitzt, die alle reell sind. Setzt man (32) in (4) ein und nimmt für λ eine der Wurzeln von $D(\lambda) = 0$, d. h. einen der Pole von V, $\lambda = \lambda'$, bezeichnet ferner den zugehörigen Wert von P mit P', so genügt P' der Gleichung

$$P'(m) = \lambda' \int\limits_{(D)} p(m_1)\, G(m, m_1)\, P'(m_1) d\tau'.$$

Die Wurzeln von $D(\lambda) = 0$ hängen nun von der Wahl der Funktion f ab. Setzt man dafür andre und andre Funktionen, so erhält man als Wurzeln der verschiedenen Gleichungen $D(\lambda) = 0$ eine Reihe von Zahlen

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$$

Bezeichnet man die zu $\lambda' = \lambda_k$ gehörige Funktion $P'(m)$ mit V_k, so sind die V_k die zum Gebiete D gehörigen Fundamentalfunktionen, die der erzeugenden Funktion $G(m, m_1)$ und der charakteristischen Funktion $p(m)$ entsprechen. Die Reihe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ kann begrenzt oder unbegrenzt sein.

Für die Fundamentalfunktionen gelten die Sätze:

$$\int\limits_D p(m) V_k^2(m) d\tau = 1,$$

$$\int\limits_D p(m)\, V_r(m)\, V_s(m) d\tau = 0 \quad \text{für } r \gtrless s.$$

Es wird noch gezeigt, wie man die ersten charakteristischen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und die zugehörigen Fundamentalfunktionen berechnen kann.

Wir haben hiermit den Gedankengang des ersten Kapitels der umfangreichen Abhandlung wiedergegeben, ohne dabei auf die benutzten Hülfssätze oder auf die Ausdehnung der Funktionen v_k auf das Gebiet außerhalb S einzugehen. Im zweiten Kapitel wird eine Reihe von Formeln abgeleitet, die namentlich die Fundamentalfunktionen betreffen, so z. B.: Ist $\varphi(m)$ innerhalb des Gebietes D endlich und integrabel, ist ferner

$$A_k = \int p(m)\, \varphi(m)\, V_k(m)\, d\tau \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist

$$\int p(m_1) G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau' = \frac{A_1}{\lambda_1} V_1(m) + \frac{A_2}{\lambda_2} V_2(m) + \cdots + \frac{A_n}{\lambda_n} V_n(m_1)$$

und

$$\int p(m)\, \varphi^2(m)\, d\tau = \sum A_k^2.$$

Insbesondere wird hier auch die Frage der Entwicklung einer Funktion nach Fundamentalfunktionen V_k erledigt. Da die hauptsächlichsten der hier sich ergebenden Resultate, die übrigens größtenteils Sätzen von Hilbert analog sind (vgl. F. d. M. **35**, 378, 1904) schon im vorigen Jahrgang des Jahrbuchs mitgeteilt sind (F. d. M. **35**, 436, 1904), so gehen wir auf weitere Einzelheiten nicht ein.

Das dritte Kapitel enthält Anwendungen der allgemeinen Theorie. Zunächst werden die allgemeinen Resultate der beiden ersten Kapitel dahin spezialisiert, daß $G(m, m_1)$ die Greensche Funktion bedeutet, und es wird das Problem der Wärmeleitung für den Fall gelöst, daß die Oberfläche auf konstanter Temperatur erhalten wird. Weiterhin wird auch der Fall erledigt, daß die Oberfläche strahlt. Sodann wird die Bewegung eines in einem Gefäße eingeschlossenen Gases unter der Voraussetzung behandelt, daß ein Geschwindigkeitspotential existiert. Hier tritt an Stelle der Greenschen Funktion die Funktion

$$H(m, m_1) = H_1(m, m_1) + \frac{1}{4\pi r},$$

wo H_1 innerhalb D der Laplaceschen Gleichung $\Delta H_1 = 0$ genügt, während an der Oberfläche

$$\frac{\partial H_1}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{h}{4\pi r} - hH_1$$

ist (n die innere Normale, φ der Winkel zwischen dieser und r, h eine positive Konstante). Sieht man von dieser Grenzbedingung ab, behält aber die Bedingung $\Delta H_1 = 0$ bei, so läßt sich jede Funktion, die die Form des Newtonschen Potentials hat, nach den zugehörigen Fundamentalfunktionen entwickeln. Diese Fundamentalfunktionen sind die universellen Funktionen von Korn (vgl. F. d. M. **34**, 826, 1903). Zuletzt wird die Anwendbarkeit der Fundamentalfunktionen auf gewisse Minimalprobleme erörtert.

Wn.

A. Buhl. Sur l'approximation des fonctions par des polynômes dans ses rapports avec la théorie des équations aux dérivées partielles; application au problème de l'état initial en physique mathématique. C. R. **140**, 216-218.

Wenn auch die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen der Physik analytische Funktionen sind, so braucht doch ein gleiches für den Anfangszustand nicht der Fall zu sein. Geht man von dem Zustande zur Zeit t allmählich zu $t = 0$ zurück, so erhält man einen analytischen Ausdruck, der den Anfangszustand mit beliebiger Genauigkeit darstellt. Der Anfangszustand an sich braucht aber nicht als analytische Funktion gegeben zu sein. Will man aber den Anfangszustand als Folge eines

vorhergehenden Zustandes ansehen, so muß er entweder als analytische Funktion gegeben sein, oder aber man muß ihn durch diejenige analytische Funktion ersetzen, die ihn mit beliebiger Annäherung darstellt. Wn.

T. H. HAVELOCK. On surfaces of discontinuity in a rotationally elastic medium. Phil. Mag. (6) **10**, 603-613.

Die Kinematik der Wellenausbreitung ist in den letzten Jahren von Duhem und Hadamard eingehend untersucht worden (vgl. F. d. M. **34** und **35**, 1903 u. 1904). Ihre Methode besteht darin, daß sie die Bewegung der Unstetigkeitsflächen in der Flüssigkeit verfolgen und im Zusammenhange damit den auf Hugoniot zurückgehenden Gedanken der Kompatibilität oder Persistenz entwickeln. In den §§ 2-5 des gegenwärtigen Aufsatzes wird eine kurze Darstellung dieser Methode gegeben, und in den §§ 6-9 wird eine Anwendung auf den elektrischen Äther gemacht, wenn dieser als ein drehelastisches Medium betrachtet wird. Die Erzeugung und die Art der Fortpflanzung von Unstetigkeiten verschiedener Ordnungen werden erörtert, ebenso die Beziehungen verschiedener Vektoren an der Unstetigkeitsfläche. Lp.

J. H. JEANS. The kinematics and dynamics of a granular medium in normal piling. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 124-156.

Die vorliegende Abhandlung ist dazu bestimmt, die Behauptung von Reynolds zu untersuchen, daß das von ihm dargestellte mechanische System das einzig denkbare sei, auf Grund dessen man von allen physikalischen Erscheinungen im Universum sich Rechenschaft geben könne (F. d. M. **34**, 37, 1903). Die geometrisch möglichen Aufstapelungen von Kugeln hat Everett genauer angegeben (F. d. M. **35**, 506-508, 1904). Als „normale Schichtung“ ist von ihm diejenige bezeichnet worden, die der gewöhnlichen (tetraedralen) Aufstapelung von Kugeln in Haufen entspricht; diese normale Schichtung hat Reynolds als selbstverständlich angenommen.

Um das Resultat vorwegzunehmen, wollen wir gleich sagen, daß die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchungen den von Reynolds ausgesprochenen Behauptungen über die Fähigkeiten seines Systems zur Erklärung der Naturerscheinungen in keiner Weise als Stütze dienen. Trotzdem hat der Verf. seine Gedanken entwickelt, einerseits zur Widerlegung der Aussprüche von Reynolds, anderseits wegen des Interesses, das sich an die durchführbare Behandlung eines einfachen Systems knüpft. „Es ist in der Tat eines der wenigen Beispiele eines Mediums, dessen schließlicher mechanischer Grundriß vollständig gegeben ist, woraus die Eigenschaften in Vollständigkeit hergeleitet werden können.“

Die in der Untersuchung angewandten Methoden bestehen in einer ausgedehnten Benutzung von Verknüpfungen und Abänderungen der in der Theorie elastischer Körper und in der dynamischen Theorie der Gase gebräuchlichen. Da jedoch die physischen Bedingungen in dem gegenwärtigen Problem von denen eines elastischen festen Körpers oder eines Gases sehr verschieden sind, werden die bekannten Sätze aus diesen Gebieten im allgemeinen nicht herangezogen, sondern die Dynamik des vorliegenden Systems wird meistens von den ersten Prinzipien an entwickelt. Damit ist der Einwand abgeschnitten, daß physikalische Annahmen aus jenen Gebieten der Elastizitätslehre versteckt eingeführt sind.

Wir können hier auf den Gang der Untersuchung nicht näher eingehen. Von den Folgerungen wollen wir, nur des Beispiels wegen, die folgenden anführen:

„In der Nähe sich bewegender oder strahlender Körper, wo die Äthertemperatur am höchsten wäre, würde die Lichtgeschwindigkeit größer als anderswo sein (oder was auf dasselbe hinauskommt, die lokale Zeiteinheit würde kleiner sein). Folglich würden die Vibrationsperioden der Atome in der Nähe heißer oder sich bewegender Körper kürzer sein als anderswo; die Strahlung aus Gegenden, in denen die Äthertemperatur höher wäre als die in der Nähe der Erde, würde eine gleichmäßige Verrückung nach dem Violett hin zeigen, wenn sie in einem Spektroskope auf der Erde analysiert würde, während die aus Gegenden niederer Äthertemperatur eine ähnliche Verrückung nach dem Rot hin zeigen würde. — Licht, das aus einer höheren zu einer niederen Temperatur überginge, würde eine Brechung erleiden. Und da das Medium, wie bereits gesehen, äolotropisch ist, könnte eine abermalige Brechung infolge der Verzerrung der Einfassungslinien des Mediums hinzutreten.“ Lp.

J. H. Jeans. On the partition of energy between matter and aether. Phil. Mag. (6) **10**, 91-98.

Es wird zuerst eine Aufstellung über die Energieverteilung und die daraus folgenden Bewegungserscheinungen in einem Medium gemacht, das aus Äther und einem mit Äther nicht in Wechselwirkung stehenden System von kleinen materiellen Kugeln ohne inneren Freiheitsgrad besteht, die nur mechanische Kräfte aufeinander ausüben, und dann eine Überlegung darüber angestellt, wie sich diese Erscheinungen ändern, wenn zwischen den materiellen Kugeln und dem Äther eine Wechselwirkung besteht, die nur bei starker Näherung zweier Kugeln einen größeren Wert annimmt. Br.

S. Guggenheimer. Über die universellen Schwingungen von Systemen von Rotationskörpern. Münch. Ber. **35**, 265-313.

S. Guggenheimer. Über die Anwendung der Theorie der universellen Schwingungen auf das Gleichgewichtsproblem des Saturn und seiner Ringe. Physik. Zs. **6**, 207.

In einer vorangehenden Arbeit (F. d. M. **35**, 817, 1904) wurde die universelle Grundschwingung eines schwach kompressiblen Kreisringes in einem kompressiblen Medium betrachtet. Gegenwärtig wird die gleiche Untersuchung für ein konzentrisches System von Kugel und Kreisring durchgeführt, danach für den Fall, daß Kugel und Ring nicht konzentrisch sind. Die Ergebnisse dieser umfangreichen mathematischen Abhandlung, die, als I: die universellen Schwingungen eines Systems Kugel-Kreisring bezeichnet, weitere Fortsetzungen erwarten läßt, werden am Schlusse in folgende Sätze zusammengefaßt:

Fällt der Kugelmittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Polarkreises des Ringes zusammen, dann treten keine Kräfte auf, und das Gleichgewicht ist stabil; denn erteilt man der Kugel eine kleine Verrückung aus dieser Gleichgewichtslage, so treten sofort Kräfte auf, die den Ring in die Gleichgewichtslage zurückzuführen suchen.

Für eine in beliebiger Richtung vor sich gehende Verrückung sind diese Kräfte von der Form:

$$X = \frac{Km_1 m_2}{\lambda_0 \sqrt{\lambda_0}} \sin \omega_0 (1 + \lambda_0^2) \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos \omega_0 + \lambda_0^2},$$

$$Y = K' m_1 m_2 \frac{1 - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}(1 + \lambda_0)}, \quad Z = 0.$$

Für eine in der Richtung der X-Achse vor sich gehende Verrückung, also für $\lambda_0 = 1$, $\omega_0 < \pi$, erhält man:

$$X = Km_1 m_2 \sin \omega_0 \sqrt{1 - c \cos \omega}, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

K, K', m_1, m_2 sind Konstanten, von denen die letzteren von den Dimensionen der Kugel und des Ringes abhängen. — Zugleich zeigen die Resultate, wie man die Theorie der universellen Schwingungen von Systemen schwach kompressibler Körper in einem inkompressiblen Medium auf andere Gleichgewichtsprobleme anwenden kann, wie z. B. auf das Problem des stabilen Gleichgewichts des Systems vom Saturn und seiner Ringe. Diese Anwendung ist der Gegenstand der zweiten Note. Lp.

A. N. Panoff. L'attraction newtonienne considérée comme une fonction du temps. Astron. Nachr. **167**, 273-288.

Folgende Thesen werden an die Spitze der Betrachtungen gestellt: 1) Die Ursache der Gravitation ist eine kosmische Substanz. 2) Die Gravitation pflanzt sich mit einer endlichen Geschwindigkeit fort. 3) Die Bewegung ist eine Eigenschaft der Materie; mithin ist im Weltall nie absolute Ruhe gewesen, noch wird sie je bestehen. 4) Die materiellen Teilchen, die der Anziehung fähig sind, sind in einem gewissen Zeitpunkte der Vergangenheit entstanden.

Auf Grund dieser Annahmen werden folgende Punkte behandelt: 1) Die Attraktion der materiellen Punkte. „Die Entstehung dieser Punkte hat in der kosmischen Substanz eine dynamische Deformation hervorgerufen, welche die Ursache der Gravitation ist.“ 2) Die Attraktion eines Punktes durch einen materiellen Körper M. „Die Gesamtheit der Spuren („traces“) aller Punkte des Körpers M, zu denen der Punkt m hingezogen wird, bilden zur Epoche T einen gewissen fiktiven oder dynamischen Körper, als eine Spur des Körpers M im Raume.“ 3) Eigenschaften des fiktiven oder dynamischen Körpers. 4) Der Schwerpunkt des fiktiven Körpers. 5) Wie zieht der fiktive Körper zur Epoche T den materiellen Punkt m an? 6) Potential des fiktiven Körpers auf den Punkt $m(x, y, z)$ zur Epoche T. „Zur Epoche T hat der fiktive Körper eine vollkommen bestimmte Gestalt; er besitzt kraft seiner Wirkungen auf m zu dieser Epoche alle Eigenschaften des wirklichen Körpers, den man sich in seinem Volumen vorstellen kann; deshalb sind alle Sätze der Mechanik über die Attraktion auf alle Fälle der Atraktion von m nach dem fiktiven Körper zur Epoche T anwendbar. Wenn man die Geschwindigkeit der Attraktion v unendlich groß annimmt, so behandeln wir die Attraktionskraft als eine Funktion der Materie und des Raumes, während offenbar die Attraktionskraft eine Funktion der Materie, des Raumes und der Zeit ist, was wir durch die Annahme endlicher Geschwindigkeit v erhalten.“ 7) Die Anziehung der materiellen Körper durch die Erde und die Variationen der Anziehung. 8) Dynamisches System zweier materiellen Punkte. 9) Bemerkung über die Bewegung der Planeten. Lp.

H. Fritsch. Die Newtonschen Zentralkräfte abgeleitet aus Bewegungen undurchdringlicher Massen. Progr. städt. Realgymn. Königsberg i. Pr. 11 S.

Die schon öfter vom Verf. entwickelten Grundvorstellungen seiner Theorie sind die folgenden: Es gibt zwei wesentlich verschiedene Massen, den Äther in unendlich feiner Verteilung und die ponderable Masse, deren Teilung im Atom aufhört. Über den eigentlichen „Aggregatzustand“ des Äthers, dessen Zerteilung doch eigentlich eine Grenze finden müßte, gesteht der Verf. sein Unvermögen der Vorstellung ein. Den Massen werden die beiden Eigenschaften der Trägheit und der Undurchdringlichkeit zuerteilt, außerdem die vollständige Elastizität, damit beim Aufprallen das Gesetz von der Erhaltung der kinetischen Energie gewahrt bleibe. Endlich sollen die „kleinsten, voneinander im Raume weit entfernten Teilchen“ des Äthers den Raum mit sehr großer geradliniger Geschwindigkeit durchlaufen, beim Stoße gegeneinander immer noch weiter zerfallen und doch alle ihre Stöße elastisch ausführen (??). Die Newtonsche Gravitation wird nach dem Muster der Lesageschen Theorie des Hagelschauers von Ätherteilchen erklärt. Die Molekularkräfte sollen durch Schwingungen der Atome erklärt werden, die der Äther „bekanntlich überträgt“; die zwischen den Atomen bei großer Annäherung auftretenden abstoßenden

Kräfte durch die zwischen ihnen hin und her fliegenden Ätherteilchen, welche elastische Stöße gegen sie ausüben. Von der ganzen Literatur der Frage aus dem neunzehnten Jahrhundert ist nichts erwähnt als die eigenen spekulativen Betrachtungen. Über diese hat Ref. bei der Anzeige des Artikels vom Jahre 1901 zuletzt seine Ansicht angedeutet (F. d. M. **32**, 790). Lp.

V. Crémieu. Recherches sur la gravitation. C. R. **141**, 653-656.

Die Anziehungserscheinungen zwischen Tropfen, die der Verf. in C. R. **140**, 80-83, beschrieben hat, sind Veranlassung gewesen, daß er den Versuch von Cavendish durch Eintauchung der anziehenden festen Massen und der angezogenen beweglichen Massen in eine und dieselbe Flüssigkeitsmasse ausgeführt hat. Die Messungen sind mit einer Torsionswage ausgeführt. Drei Jahre vorbereitender Studien sind nötig gewesen, um die Anordnung des Apparates für den Versuch reifen zu lassen. Die gegenwärtige Note enthält eine Beschreibung des Apparates und des Meßverfahrens. Die bis jetzt erzielten Ergebnisse sollen demnächst veröffentlicht werden. Lp.

A. Föppl. Ein Versuch über die allgemeine Massenanziehung. Physik. Zs. **6**, 113-114.

Um festzustellen, ob bei der relativen Bewegung zweier Massen gegeneinander Kräfte auftreten, die von der relativen Geschwindigkeit herrühren, hat der Verf. einen ähnlichen Versuch angestellt, wie früher die Gebrüder Friedländer, aber mit verfeinerter Methode. Das Ergebnis ist negativ ausgefallen. Unter den Umständen des Versuchs muß daher die „Geschwindigkeitskraft“, falls eine solche vorhanden ist, kleiner als 3.10^{-5} Dynen gewesen sein. Lp.

C. H. Wind. Elektronen und Materie. Physik. Zs. **6**, 485-494.

Diese Antrittsvorlesung bei Übernahme der Professur an der Universität zu Utrecht (20. Februar 1905) gibt ein übersichtliches Bild von der Entwicklung der Elektronentheorie und ihres Einflusses auf die „elektrische Weltanschauung“. Unter ihrem Zauber stehend, sprach ja Balfour bei der Eröffnung der British Association 1904 (F. d. M. **35**, 84, 1904) den eindrucksvollen Satz: „Matter is not merely explained, but it is explained away“. Wir setzen hier die am Schlusse der Rede gestellte Prognose her: „Dann würde es sich zeigen, daß die gewöhnliche Materie als ganz aus Elektronen bestehend aufgefaßt werden muß, die keine andere als ihre elektromagnetische Masse besitzen. Die auf die Masse bezüglichen Grundbegriffe und Prinzipien der klassischen Mechanik würden als solche ausgedient haben. Als Hülfsbegriffe und Näherungsgesetze würden sie

noch weiter bei der Behandlung zahlreicher praktischer und theoretischer Probleme eine große Rolle spielen. Ihre höchste Aufgabe aber würde an ein jüngeres System von Grundbegriffen und Prinzipien übergehen, das bereits einen Teil der Naturbeschreibung hat tragen müssen, dann aber gezeigt haben würde, daß es mit dem Ganzen fertig wird. Wir würden ärmer an Illusionen, aber reicher in unseren Idealen geworden sein. Diese letzteren aber sind es, die am meisten zur Arbeit anregen.

Lp.

H. Reissner. Mechanische und elektrische Masse. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **4**, 23-39.

Ein mathematischer Beitrag zur elektromagnetischen Gravitationstheorie. Als Ursache der Gravitation wird angenommen, daß geringe Unterschiede im Vorzeichen der Ladung bei den gegeneinander gravitierenden Systemen vorhanden sind. Diese müssen dann Störungen des Feldes verursachen, von denen angenommen wird, daß die dadurch bewirkten Zustandsänderungen isozyklische sind. Mit den Hülfsmitteln der Vektorenanalysis werden die hierdurch bewirkten Feldänderungen und deren elektrodynamische Wirkungen nach einem hier nicht näher zu kennzeichnenden, in Einzelheiten der kinetischen Gastheorie nachgebildeten System untersucht und rein mechanisch gedeutet. Diese Deutung ist insofern nicht ganz befriedigend, als es nicht gelingt, die mechanischen Größen, wie es die Beobachtungstatsachen eigentlich fordern, von den elektrischen Größen so weit unabhängig zu machen, daß diese den Charakter zufälliger Störungen tragen. Verf. gibt aber an, daß die verbleibende Abhängigkeit numerisch nicht ins Gewicht fällt.

Br.

E. Bandl. Das elektrodynamische Prinzip in seiner Anwendung auf die Erscheinung der Massenanziehung. Naturw. Rundsch. **20**, 273-275.

Der Verf. entwickelt in allgemeinen Umrissen seine Gedanken über die Möglichkeit der Erklärung der Massenanziehung mit Heranziehung der elektrodynamischen Vorgänge, ohne jedoch den Versuch zu machen, diese unbestimmten Vorstellungen in eine zahlenmäßig zu verfolgende faßbare Schlußreihe zu bringen.

Lp.

V. Fischer. Eine Bemerkung über Gravitations- und elektrische Masse. Physik. Zs. **6**, 106-107.

B. Davis. Das Verhältnis zwischen elektrischer und Gravitationskraft. Physik. Zs. **6**, 236-237.

E. v. Schweidler. Über das Verhältnis der Gravitationskonstante zur spezifischen Ladung des Elektrons. Physik. Zs. **6**, 237.

H. Reissner. Eine Bemerkung über Gravitations- und elektrische Masse. Physik. Zs. 6, 237.

Die angenäherte zahlenmäßige Übereinstimmung zwischen der reziproken Gravitationskonstante und dem Verhältnis von elektromagnetisch gemessener Ladung und deren scheinbarer Masse wird von den beiden ersten Autoren durch theoretische Überlegungen als notwendig nachzuweisen versucht. Die beiden letzten decken die Haltlosigkeit der gemachten Schlüsse auf. Lp.

R. Gans. Gravitation und Elektromagnetismus. Physik. Zs. 6, 803-805.

Die Note soll die Lorentzsche Theorie der Gravitation ergänzen, indem alle Erscheinungen des Elektromagnetismus und der Gravitation zu erklären sind, insbesondere die Superposition von Gravitationswirkungen und elektromagnetischen Wirkungen, die Schirmwirkung von Leitern für elektrostatische Kräfte, keine Schirmwirkung für Gravitationskräfte. „Alle Fragen lassen sich mit einem Schlage lösen, wenn wir die Grundgleichungen der Elektronentheorie für die positiven und für die negativen Elektronen einzeln hinschreiben.“ Lp.

Lord Kelvin. Plan of an atom to be capable of storing an electrion with enormous energy for radioactivity. Phil. Mag. (6) 10, 695-698.

Es wird entwickelt, daß ein Atom die im Titel genannte Aufgabe lösen kann, wenn es das Elektron außerhalb seiner Sphäre umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes anzieht, im Innern zunächst abstößt und ganz nahe dem Mittelpunkt wieder anzieht. Br.

R. Nasini. Dinamica chimica, statica ed elettrochimica sotto l'azione della luce a proposito di alcuni lavori del Dott. M. Wildermann. Ven. Ist. Atti [(8) 7] 64, 1683-1691.

Seit mehreren Jahren hat M. Wildermann die Einwirkung des Lichtes auf den Verlauf chemischer und physikalischer Prozesse zu dem Zwecke studiert, die Gesetze aufzufinden, nach denen die Lichtenergie jene Prozesse verändern kann, und er ist dazu gelangt, die Resultate seiner Forschungen in einfache mathematische Formeln zu fassen (vgl. F. d. M. **34**, 833, 1904). Nasini gibt einen Überblick über die Ergebnisse der Arbeiten Wildermanns. Lp.

K. v. Wesendonck. Über freie Energie. Physik. Zs. 6, 545-548.

Im Hinblick auf einen Aufsatz von Richards in der Zs. f. physik. Chem. **42**, 129-154, 1903, gibt der Verf. eine Darlegung der Beziehungen

der Änderungen der freien Energie zu äußerer Arbeit (sogenannter chemischer Arbeit) nach den Gibbs-Neumannschen Betrachtungen.
Lp.

J. SCHUR. Sur la vitesse de dissolution des sels dans leurs solutions aqueuses. Journ. de Phys. (4) 4, 17-26.

Der Aufsatz ist ein Auszug des Verf. aus seiner Thèse (1904). Für das Jahrbuch kommt nur die Ableitung der Formel für die Auflösungsgeschwindigkeit eines Salzes in Wasser in Betracht. Es sei x_0 das Gewicht des Salzes, das ein Liter Wasser bei der Temperatur des Versuchs sättigen kann, x das wirklich in der Lösung befindliche Salzgewicht, dx der Gewichtsverlust des aufzulösenden Salzes in der Zeit dt, so besteht das Gesetz: Die Auflösungsgeschwindigkeit $dx/dt = A \log(x_0/x)$. Lp.

J. S. SAND. The rôle of diffusion during catalysis by colloidal metals and similar substances. Lond. R. S. Proc. 74, 356-369.

Enthält in theoretischer Beziehung die Ableitung von Formeln für die Reaktionsgeschwindigkeit bei katalytischen Vorgängen unter der Annahme, daß diese nicht nur von der Diffusion zwischen der unveränderten und der von den Katalysatoren veränderten Flüssigkeit, sondern auch von Konvektionserscheinungen abhängig ist, und Anwendungen auf einfache Spezialfälle. Br.

G. SENTER. The rôle of diffusion in the catalysis of hydrogen peroxide by colloidal platinum. Lond. R. S. Proc. 74, 566-574.

Behandelt dasselbe Thema. Br.

RUD. SCHMIDT. Über die Diffusion von Argon und Helium. Ann. der Phys. (4) 14, 801-821.

Enthält in theoretischer Beziehung nur den Ausdruck für die Druckverteilung in einem System zweier gegeneinander diffundierenden Medien in Form einer unendlichen Reihe aus den partikularen Integralen der entsprechenden Differentialgleichung. Br.

P. J. KIRKBY. The union of hydrogen and oxygen at low pressures through the passage of electricity. Phil. Mag. (6) 9, 171-185.

Enthält in mathematischer Beziehung Formeln für die durch elektrische Glimmentladung zwischen planparallelen Elektroden in Gemischen von Wasserstoff und Sauerstoff erzeugte Wassermenge unter verschiedenen Versuchsbedingungen. Br.

G. Matignon. Prévision d'une réaction chimique formant un système monovariant. C. R. **140**, 512-515.

Mit den üblichen Hülfsmitteln wird der Satz abgeleitet, daß eine Umsetzung zwischen festen Körpern und Gasen nur möglich ist, wenn bei der Temperatur des normalen Dissoziationsdrucks die entwickelte Wärme größer ist als die Summe der Schmelzwärmen und der Verdampfungswärmen der Gase. Br.

H. Hilton. On crystallographic projections. Phil. Mag. (6) **9**, 85-88.

Gibt sehr zusammengedrängt eine Reihe von Formeln betreffend die Darstellung der Orientierung von Kristallflächen mit den Hülfsmitteln der analytischen Geometrie, namentlich in bezug auf die Darstellung in Projektion, dies Wort in dem kartographischen Sinne verstanden. Br.

Weitere Literatur.

A. A. C. Belinfante. De duwkracht. Beschouwingen van stoffen en hun bewegingen als gevolgen van botsende af duwkracht; verwerpiing der aantrekkingskracht, zwaartekracht en moleculaire krachten. Westzaan. 186 S. 8°.

A. Clark. Molecular forces and Newtonian laws. Glasgow: W. and R. Holmes. 237 S. [Nature **73**, 51-52.]

G. H. Darwin. The analogy between Lesage's theory of gravitation and the repulsion of light. Lond. R. S. Proc. **76**, 387-410.

Despaux. Explication mécanique de la matière, de l'électricité et du magnétisme. Paris: Félix Alcan. 210 S. [Nature **73**, 51-52.]

L. Donati. Lezioni di fisica matematica, raccolte a cura di R. Bonola e R. Viti. Bologna. 352 S. 8°.

H. Friedmann. Über ein physikalisches Endlichkeitsprinzip und den allgemeinsten Ausdruck der Naturgesetzlichkeit. Jurjew-Dorpat: J. G. Krüger. 64 S. Lex. 8°.

H. Führer. Das Bild der Materie. Heidelberg: J. Hörning. III u. 129 S. 8°.

H. J. Gramatzki. Elektrizität und Gravitation im Lichte einer mathematischen Verwandtschaft. Versuch zur Grundlage einer einheitlichen Mechanik der elektrischen, gravitierenden und trägen Massen mit Hülfe der phänomenologischen Interpretation gewisser mathematischer Begriffsvorgänge. München: Lindauer. IV u. 92 S. 8°.

W. Hibbert. Life and energy. Four addresses. London: Longmans, Green and Co. XIV u. 182 S. (1904).

J. Kunz. Über die Teilbarkeit der Materie. Akademische Antrittsvorlesung. Zürich: E. Speidel. 56 S. 8°.

Ol. Linden. Die Formelzeichen. Ein Beitrag zur Lösung der Frage der algebraischen Bezeichnung der physikalischen, technischen und chemischen Größen. Leipzig: Jäh & Schunke. III u. 96 S. Lex. 8°.

H. A. Lorentz. Beginselen der Natuurkunde. 4 te druk, bewerkt door H. A. Lorentz en L. Siertsema. Leiden 8vo.

K. Mack. Physikalische Hypothesen und ihre Wandelungen. Akademische Festrede. Mit Anmerkungen und Literaturnachweisen. Leipzig: J. A. Barth. 39 S. 8°.

L. Mottez. La matière, l'éther et les forces physiques. Mém. Soc. Sc. nat. et math. Cherbourg (4) 4, 1-236 (1904).

A. Patschke. Der Sturz des Anziehungsgesetzes und die Entdeckung des einheitlichen Weltgesetzes der Kraft. München: Seitz & Schauer. 33 S. Lex. 8°.

H. Poincaré. L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique. Paris, Revue des idées. 18 S. gr. 8°.

Ed. Riecke. Lehrbuch der Physik zu eigenem Studium und zum Gebrauche bei Vorlesungen. Zwei Bände. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. 1. Mechanik, Molekularerscheinungen und Akustik, Optik. 2. Magnetismus und Elektrizität. Wärme. Leipzig: Veit & Co. XVI u. 576, XII u. 696 S. gr. 8°.

A. Righi. Die moderne Theorie der physikalischen Erscheinungen (Radioaktivität, Ionen, Elektronen). Aus dem Italienischen von B. Dessau. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. V u. 152 S.

H. Rudolph. Über die Unzulässigkeit der gegenwärtigen Theorie der Materie. Coblenz. 36 S. 4°.

O. Schmatolla. Die unbegrenzte Teilung der Masse, der Aufbau der Körper. Berlin. 8°.

B. Kapillarität.

G. Bakker. Zur Theorie der Kapillarschicht.. Ann. der Phys. (4) 17, 471-500.

Verf. unterzieht die Gauss-Laplacesche Theorie einer eingehenden Revision in bezug auf die neueren Anschauungen über die für den Übergang aus dem flüssigen in den dampfförmigen Zustand maßgebenden Größen, insbesondere auf Grund der Gibbsschen Arbeiten. Die Abhandlung wächst dabei zu einer generellen Vergleichung der hauptsächlichsten bisherigen Darstellungen der Kapillaritätstheorie überhaupt aus und geht in einer Reihe von Punkten, die hier nicht einzeln angeführt werden können, zu einer neuen, eigenen Darstellung über. Das praktische Endziel ist die Gewinnung eines Zahlenwertes für die Dicke der Kapillarschicht, die zu 5 bis 25 $\mu\mu$ ermittelt wird. Br.

G. BAKKER. Bemerkung über die Theorie der Oberflächenspannung von H. Hulshof. Ann. der Phys. (4) **14**, 609-619.

H. HULSHOF. Erwiderung. Ann. der Phys. (4) **16**, 188-192.

G. BAKKER. Antwort. Ann. der Phys. (4) **17**, 584-588.

Betrifft eine Prioritätsreklamation und Meinungsverschiedenheiten über die Richtigkeit der Darstellung in der Arbeit von Hulshof: Über die Oberflächenspannung (Ann. der Phys. (4) **4**, 165-186; F. d. M. **32**, 816, 1901). Br.

G. BAKKER. L'épaisseur de la couche capillaire (2e mémoire). Journ. de Phys. (4) **4**, 95-105.

„Die Laplacesche Theorie der Flüssigkeiten kann in ihrer Ausdehnung auf eine im Gleichgewicht befindliche Schicht, deren Niveauflächen parallele Ebenen sind, und in ihrer Anwendung auf ein Natterersches Rohr als Funktion der Isothermen von James Thomson und von van der Waals meßbare Werte für die Übergangsschicht oberhalb der Temperatur von Cagniard-Latour ergeben. Unter diesen Bedingungen wäre die Verdickung der Übergangsschicht bei diesen Temperaturen nicht in Widerspruch mit den kritischen Phänomenen, und diese könnten als eine Verdickung der Übergangsschicht angesehen werden, die zwei homogene Phasen trennt, welche sich mehr und mehr voneinander entfernen, wenn man von der Cagniard-Latourschen Temperatur zu der kritischen Temperatur übergeht.“ Diese Sätze sind die Folgerungen aus einer längeren theoretischen Betrachtung. Lp.

G. BAKKER. Dicke und Spannung der Kapillarschicht. Zs. f. phys. Chemie **51**, 344-367.

Zusammenstellung der Ergebnisse der Untersuchungen des Verf. auf diesem Gebiete. Lp.

E. ALMANSI. Sopra una delle esperienze del Plateau. Annali di Mat. (3) **12**, 1-17.

Es handelt sich um den Versuch, bei dem der in einer Flüssigkeit gleicher Dichte, aber anderer Oberflächenspannung aufgehängte Tropfen die Form eines Zylinders annimmt, wenn er zwischen zwei kreisförmigen, senkrecht übereinander gehaltenen Drähten ausgespannt wird und genau das Volumen des hierdurch bestimmten Kreiszylinders hat. Es wird in einer etwas neuen Weise zunächst gezeigt, daß die Zylinderfläche unter diesen Bedingungen wirklich eine Minimalfläche ist, und dann, daß die an den kreisförmigen Begrenzungen auftretenden Spannungsverhältnisse

das Resultat im allgemeinen nicht wesentlich beeinflussen, indessen doch die Wiederholung des Experiments mit Umkehrung der Flüssigkeiten verhindern können. Br.

PONSOT. Chaleur dans le déplacement d'équilibre d'un système capillaire. C. R. **140**, 1176-1179.

Es werden die allgemeinen Formeln für die Änderungen der Energieverteilung eines Systems aus einer Flüssigkeit, ihrem Dampf und einem von ihr benetzten Behälter aufgestellt und in ihrer Abhängigkeit von den verschiedenen Variablen, insbesondere von der Temperatur, untersucht. Br.

R. FEUSTEL. Über Kapillaritätskonstanten und ihre Bestimmung nach der Methode des Maximaldrucks kleiner Blasen. Ann. der Phys. (4) **16**, 61-92.

Enthält in theoretischer Beziehung die Aufstellung von Formeln für die Berechnung der Kapillaritätskonstanten aus dem beobachteten Maximaldruck beim Abschnüren von Blasen, wenn man ein Gas senkrecht von oben durch eine Röhre in eine Flüssigkeit drückt. Br.

C. Elastizitätstheorie.

P. DUHEM. Recherches sur l'élasticité. De l'équilibre et du mouvement des milieux vitreux. Les milieux vitreux peu déformés. La stabilité des milieux élastiques. Propriétés générales des ondes dans les milieux visqueux et non visqueux. Paris: Gauthier-Villars. 218 S. 4°.

P. DUHEM. Recherches sur l'élasticité. Troisième partie. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **22**, 143-217.

Das Buch umfaßt die unter dem nämlichen Titel in den Annales de l'École Normale der Jahre 1904/6 veröffentlichte Reihe von Artikeln. Von den vier Teilen, in die es zerfällt, sind die beiden ersten im Vorjahre besprochen worden (F. d. M. **35**, 803-805, 1904).

Der dritte Teil, „die Stabilität der elastischen Medien", der 1905 erschienen ist, und dessen Besprechung noch aussteht, ist in drei Kapitel eingeteilt. Das erste Kapitel erörtert die zur anfänglichen Stabilität eines elastischen Mediums hinreichenden Bedingungen. Der anfängliche Zustand ist ein derartiger, bei welchem dieses Medium, das einzig einem äußeren Druck unterworfen und in allen seinen Punkten auf eine und dieselbe Temperatur T_0 gebracht ist, sich im Gleichgewicht befindet. Aus den aufgestellten Gleichungen folgt, daß der Anfangszustand sicher ein Zustand stabilen Gleichgewichtes ist, wenn man die Temperatur unveränderlich

und die das Medium begrenzende Oberfläche unbeweglich hält. Die besonderen Bedingungen der Stabilität für ein glasartiges Medium werden in einem eigenen Paragraphen aufgestellt (vgl. F. d. M. **35**, 805, 1904). Im zweiten Kapitel werden die notwendigen Bedingungen für die Stabilität eines elastischen Mediums ermittelt. Nach verschiedenen Bemerkungen über die kleinen Bewegungen eines elastischen Mediums (§ 1) wird in § 2 eine für die anfängliche Stabilität eines beliebigen kristallisierten oder glasartigen Mediums notwendige Bedingung betrachtet (vgl. F. d. M. **35**, 805, 1904). Die Aufstellung verschiedener Formeln, die zur Erörterung der anfänglichen Stabilität eines glasartigen Mittels zu benutzen sind, geschieht in § 3 (vgl. F. d. M. **35**, 805); dann folgt in § 4 eine andere für die Stabilität eines unbegrenzten glasartigen Mediums notwendige Bedingung. Das Postulat der kleinen Bewegungen, welches schon in der Abhandlung Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides vom Verf. gebraucht ist (F. d. M. **34**, 798, 1903), wird im § 5 analysiert. Hierbei wird der beachtenswerte Satz ausgesprochen: Aus dem Umstande, daß zwei Systeme partieller Differentialgleichungen nur unendlich wenig voneinander abweichen, darf nicht geschlossen werden, daß ihre den nämlichen Anfangsbedingungen entsprechenden Integrale unendlich wenig verschieden sind. Die beiden letzten Paragraphen des Kapitels dienen dazu, die Modifikationen zu zeigen, welche der Gebrauch des Postulats der kleinen Bewegungen an den vorangehenden Betrachtungen anzubringen gestattet.

Das dritte Kapitel behandelt die Verrückung des Gleichgewichtes. Man betrachte ein durch eine bestimmte Anzahl normaler Variabeln $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ außer der absoluten Temperatur T definiertes System. Bei einer gewissen Temperatur T nehme das System einen Gleichgewichtszustand an, wenn man es den äußeren Aktionen $A, B, \ldots, L$ unterwirft, und dieser Zustand ändere sich stetig, wenn die Werte $A, B, \ldots, L$ bei festgehaltenem T sich ändern. Erfahren die Aktionen $A, B, \ldots, L$ unendlich kleine Änderungen $dA, dB, \ldots, dL$, „störende Aktionen" benannt, so erfahren die dem Gleichgewichte zugehörigen Variabeln $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ Änderungen $d\alpha, d\beta, \ldots, d\lambda$, „Störungen" genannt. Der Ausdruck $dA d\alpha + dB d\beta + \cdots + dL d\lambda$ heißt „isothermische Störungsarbeit". Die Aussage, eine Störungsarbeit sei positiv, bedeutet unter genauer mathematischer Form, die Störung vollziehe sich in derselben Richtung, nach welcher die störenden Aktionen wirken. Offenbar sind die Systeme der Natur im allgemeinen so beschaffen, daß jede isothermische Störungsarbeit, die von einem Gleichgewichtszustand aus vollzogen wird, positiv ist. Dieselben sind nach dem Ausdrucke des Verf. dem Gesetze der isothermischen Verrückung des Gleichgewichts unterworfen. Nach Auseinandersetzung dieser Redeweise (§ 1) müssen wir uns nun darauf beschränken, die Titel der übrigen Paragraphen herzusetzen. § 2. Von der isothermischen Verrückung des Gleichgewichtes für ein elastisches, mit einer homogenen Deformation behaftetes Medium. § 3. Von der isothermischen Verrückung des Gleichgewichtes im allgemeinen bei einem elastischen Medium. § 4. Auf die Stabilität des Gleichgewichtes bezügliche

Folgerung aus der im § 2 aufgestellten Bedingung. § 5. Von der isentropischen Verrückung des Gleichgewichtes. § 6. Anwendungen der vorangehenden Betrachtungen auf ein sehr wenig deformiertes elastisches Medium. § 7. Anwendung der vorangehenden Bedingungen auf ein wenig deformiertes glasartiges Medium.

Im vorstehenden wurde wiederholt auf frühere Veröffentlichungen des Verf. verwiesen, wo die behandelten Gegenstände bruchstückweise bekannt gegeben sind. Ähnliche Bemerkungen treffen auch für den vierten Teil des Buches zu: Allgemeine Eigenschaften der Wellen in den viskosen und nichtviskosen Medien. Der Kürze wegen begnügen wir uns mit diesem allgemeinen Hinweise und beschränken uns auf die Wiedergabe des Inhaltes.

Kap. I. Allgemeine Theorie der Fortpflanzung der Wellen im Innern der von Viskosität freien Medien. § 1. Einige Hülfssätze aus der Kinematik. § 2. Fortpflanzung einer Welle im Innern eines von Viskosität freien Mediums. Komponenten der Elongation, bezogen auf den ursprünglichen Zustand. § 3. Störung der Geschwindigkeit. § 4. Komponenten der Elongation, bezogen auf das deformierte Medium. § 5. Fortpflanzung der Wellen im Innern eines von Viskosität freien und sehr wenig deformierten Mediums. § 6. Fortpflanzung der Wellen im Innern eines sehr wenig deformierten glasartigen Mediums.

Kap. II. Theorie der Wellen im Innern der mit Viskosität ausgestatteten Medien. § 1. Von den Wellen erster Ordnung in bezug auf die Komponenten der Geschwindigkeit. § 2. Von den Wellen zweiter Ordnung in bezug auf die Komponenten der Geschwindigkeit. § 3. Schnitt einer Scheidewelle und der freien Oberfläche des Mediums.

Kap. III. Kontinuität des flüssigen und des glasartigen Mediums.

Erst in dieser zusammenhängenden Darstellung ist eine Übersicht über die vielen Einzelartikel des Verf. aus den vorangehenden Jahren möglich und werden manche der daselbst gemachten Bemerkungen verständlich. In vielen Punkten mit Hadamards Leçons sur la propagation des ondes zusammentreffend (F. d. M. **34**, 793, 1903), werden die Duhemschen Untersuchungen die Forschung nach verschiedenen Richtungen beeinflussen.

Lp.

C. Chree. Note on the determination of the volume elasticity of elastic solids. Lond. R. S. Proc. **74**, 518-523.

Der Aufsatz bezieht sich auf eine von Mallock (Lond. R. S. Proc. **74**, 50-52; F. d. M. **35**, 824, 1904) angegebene Methode zur Bestimmung des Elastizitätskoeffizienten und insbesondere der Volumenelastizität aus der Ausdehnung eines unter inneren Druck gesetzten Hohlzylinders und entwickelt die zur Berechnung der Versuche gebrauchten Formeln unter entsprechender Diskussion der zu vernachlässigenden Größen. Br.

Ch. A. Bell. Determination of Young's modulus (adiabatic) for glass with an appendix by C. Chree. Phil. Mag. (6) **9**, 413-424.

Enthält in mathematischer Beziehung (im Appendix) Entwicklungen über die Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus den Schwingungszahlen tönender Stäbe. Br.

K. Soecknick. Über das Saint-Venantsche Problem. Teil II. Progr. (Nr. 6) Friedrichs-Kollegium, Königsberg i. Pr. 45 S.

Die übersichtliche und eingehende Darstellung wird für den Fall der Biegung fortgesetzt (vgl. F. d. M. **35**, 813, 1904). Nach einer von Voigt stammenden Berichtigung, wonach sich Saint-Venants Gleichungen nur auf Biegung ohne Längskraft beziehen, werden die Saint-Venantschen Entwicklungen in etwas anderer Fassung wiedergegeben und in bezug auf Grenzbedingungen, Krümmung der Querschnitte und Hauptspannungen vervollständigt. Sodann wird ein partikulares algebraisches Integral der Differentialgleichung für die Querschnittswölbung diskutiert; hierbei tritt als Sonderfall der Vollzylinder auf. Der rechteckige Querschnitt wird mit Hülfe von Produktreihen aus hyperbolischen und goniometrischen Funktionen behandelt, und zwar auch für diagonal gebogene Quadrate. Zum Schluß erledigt der Verf. auch den Fall eines gebogenen Hohlkreiszylinders ausführlich in geschlossener Form. Rr.

R. Marcolongo. Le formule del Saint-Venant per le deformazioni finite. Palermo Rend. **19**, 151-155.

Die betreffenden Formeln von de Saint-Venant beziehen sich auf den Fall einer infinitesimalen Deformation; der Beweis für die Notwendigkeit und Hinlänglichkeit solcher Bedingungen für die Existenz der orthogonalen Verrückungen u, v, w ist von Beltrami geführt worden. Die Untersuchung der entsprechenden Bedingungen für eine endliche Deformation ist von Manville jüngst durchgeführt (Sur la déformation finie d'un milieu continu. Bordeaux 1903). Marcolongo gibt in dem vorliegenden Artikel ein direkteres Verfahren; hierbei werden die erhaltenen Formeln mit einer Funktion Φ in Verbindung gesetzt, der reziproken Form der charakteristischen Funktion φ der Deformation. Aus den Entwicklungen Manvilles ergibt sich, daß diese Formeln auch die hinreichenden Bedingungen enthalten (F. d. M. **34**, 844, 1903). Lp.

V. Volterra. Un teorema sulla teoria della elasticità. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{14}_1$, 127-137.

Unter Bezugnahme auf einen von Weingarten ausgesprochenen Satz (F. d. M. **32**, 799, 1901) beweist der Verf. mehrere Theoreme.

„Regelmäßig“ nennt er eine Deformation, wenn ihre sechs Charakteristiken („strain“ der Engländer) endliche, stetige, monodrome Funktionen sind, welche endliche, stetige, monodrome Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen. I. Wenn ein elastischer Körper einen endlichen, einfach zusammenhängenden (azyklischen) Raum einnimmt und nur regelmäßige Deformationen erfährt, so befindet er sich im natürlichen Zustande, sobald er weder Massenkräften, noch Oberflächenspannungen unterworfen wird. II. Ein elastischer Körper, der einen endlichen, mehrfach zusammenhängenden (zyklischen) Raum einnimmt, kann in einem nicht natürlichen Zustande sein, d. h. sich in einem Spannungszustande befinden, auch wenn er weder Massenkräften, noch Oberflächenspannungen unterworfen ist, auch bei regelmäßiger Deformation. — Der analoge Satz der Hydrodynamik lautet: Eine endliche, nicht zusammendrückbare Flüssigkeit, die zwischen starren und festen Wandungen eingeschlossen ist, und in der keine Wirbel bestehen, muß in Ruhe verharren, wenn der von ihr eingenommene Raum einfach zusammenhängend (azyklisch) ist, kann jedoch in Bewegung sein, wenn der eingenommene Raum mehrfach zusammenhängend (zyklisch) ist. Lp.

V. Volterra. Sull' equilibrio dei corpi elastici più volte connessi. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 193-202; Nuovo Cimento (5) **10**, 361-385.

Man denke sich den mehrfach zusammenhängenden Körper durch passende Schnitte in einen einfach zusammenhängenden verwandelt. Aus den Betrachtungen der vorangehenden Mitteilung geht dann hervor: Die Teilchen, welche zu den beiden Seiten eines und desselben Schnittes liegen und die vor dem Durchschneiden in Berührung waren, erfahren vermöge jenes Durchschneidens eine relative Verrückung, die aus einer Translation und aus einer Rotation resultiert, und solche Translationen und Rotationen sind für alle Paare von Teilchen gleich, welche an einem und demselben Schnitte liegen. Nimmt man den Ursprung zum Reduktionszentrum, so sind die drei Komponenten der Translation und die drei der Rotation bezüglich der Koordinatenachsen die sechs „Charakteristiken des Schnittes“. Dieselben hängen nicht von dem Orte ab, wo der Schnitt ausgeführt ist, sondern ausschließlich von der geometrischen Natur des Raumes, den der Körper einnimmt, und von der regelmäßigen Deformation, welcher er unterworfen ist. Die Anzahl der unabhängigen Verdrehungen (distorsioni), denen ein elastischer Körper unterworfen werden kann, ist gleich der um eine Einheit verminderten Ordnung des Zusammenhanges des vom Körper eingenommenen Raumes. In dem vorliegenden Artikel wird der folgende Satz bewiesen: „In jedem isotropen, mehrfach zusammenhängenden elastischen Körper können nach Annahme einer abgeschlossenen Menge von Verdrehungen unendlich viele regelmäßige Deformationen des Körpers berechnet werden, die ihnen entsprechen und von Oberflächenspannungen im Gleichgewicht gehalten werden, welche in bezug auf eine beliebige Achse die Resultante und das Moment Null haben.“

Lp.

V. Volterra. Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi. Rom. Acc. L. Rend. (5) 14_1, 351-356.

Falls der elastische Körper einen zyklischen Raum einnimmt, entsteht eine ganze Reihe zu lösender Probleme, nämlich die Spannungszustände der Körper zu bestimmen, die von gegebenen, auf sie ausgeübten Verdrehungen herrühren. Zur Erleichterung der Lösung solcher Probleme stellt Volterra einige allgemeine Betrachtungen an und beweist unter anderem das folgende Theorem: Wenn in einem mehrfach zusammenhängenden Körper zwei Systeme von Verdrehungen zwei Kraftsysteme erzeugen, so ist die Summe der Produkte der Kräfte des ersten Systems in die Charakteristiken des zweiten Systems von Verdrehungen gleich dem Produkte der Kräfte des zweiten Systems in die Charakteristiken des ersten Systems von Verdrehungen. Oder auch so ausgedrückt: Die Kraft von der Ordnung i, welche von der elementaren Verdrehung h-ter Ordnung induziert wird, ist gleich der Kraft von der Ordnung h, die von der elementaren Verdrehung i-ter Ordnung induziert wird. Lp.

V. Volterra. Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici. Rom. Acc. L. Rend. (5) 14_1, 431-438.

In diesem Artikel untersucht Volterra einen besonderen Fall mit Hülfe der vorstehend besprochenen Prinzipien. Dadurch wird der Mechanismus der Verdrehungen ergründet, und es werden Tatsachen ans Licht gebracht, die man durch anschauliche Behandlung der Frage nicht hätte vorhersehen können. Das Ergebnis wird erzielt, ohne daß man auf Integrationsmethoden der Differentialgleichungen zurückgreift, nämlich durch die einfache und elementare Diskussion des Ausdrucks für die Energie eines elastischen Systems, welches gegebene Verdrehungen erlitten hat. Wir führen auch noch den allgemeinen Satz an: In einem zweifach zusammenhängenden elastischen Körper induziert jede elementare Verdrehung die einzige konjugierte Kraft, sobald man das Reduktionszentrum in dem Zentralpunkte der Symmetrieachse annimmt. Lp.

V. Volterra. Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici. Rom. Acc. L. Rend. (5) 14_1, 641-654.

In dieser Abhandlung wendet der Verf. die Ergebnisse der vorangehenden Aufsätze auf bestimmte Beispiele an, nämlich auf Ringkörper, die symmetrisch zu einer Achse sind, speziell auf Hohlzylinder mit kreisförmiger Basis. Aus ihnen wird einmal ein Stück herausgeschnitten durch zwei in der Achse sich schneidende Ebenen, ein zweites Mal durch zwei parallele Ebenen in gleichem Abstande von der Achse. Dann wird der Zylinder wieder geschlossen (die Trennungsflächen zusammengefügt).

Ferner werden an dem ursprünglichen Zylinder einfache Torsionen ausgeführt. Für alle diese Fälle werden die Formeln ausgerechnet. Um eine experimentelle Bestätigung zu haben, ließ Volterra sich Kautschukzylinder anfertigen, die den Annahmen entsprechend durch Kräfte beansprucht wurden. Die Resultate der Messung stimmten mit denen der Rechnung gut überein. Lp.

V. Volterra. Sulle distorsioni generate da tagli uniformi. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{14}_2$, 329-342.

Der Verf. spricht sich über den Zweck dieser Abhandlung mit den folgenden Worten aus. „In einer vorangehenden Note („Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi“) habe ich die wesentlich verschiedenen Bedingungen in den beiden Fällen gegenübergestellt, bei denen in einem Hohlzylinder eine Verzerrung eintritt zufolge eines radialen Schnittes oder eines einförmigen Schnittes. Den ersten Fall habe ich dort erledigt; ich habe gezeigt, daß der Körper nach Eintritt der Verzerrung nicht die Zylinderform behält, weil der innere Rand der beiden Grundflächen anschwillt, indem er sich aufrichtet, der äußere Rand dagegen sich zusammenzieht und in dem Mittelteile des Zylinders sich eine Verkürzung bildet. Noch merklicher und seltsamer sind die Verzerrungen, die man in dem Falle des einförmigen Schnittes erhält, indem der Körper nach Eintritt der Verzerrung nicht mehr symmetrisch ist. Ich gestatte mir, in der gegenwärtigen Note diesen Fall zu entwickeln, obgleich die Rechnungen etwas verwickelt sind; aber auch in diesem Falle werden die von der Rechnung vorausgeschauten Ergebnisse, gerade wie im vorigen, so gut durch das Experiment bestätigt, daß dieser Fall ein lehrreiches Beispiel in der Elastizitätslehre liefert, und zwar um so mehr, als die bloße Anschauung ohne Anleitung durch die Rechnung oder das Experiment nicht zu der Voraussage hätte gelangen können, nicht einmal in ungefährer oder qualitativer Art, welche Deformation im Körper durch die Verzerrung veranlaßt wird.“ Die genauere Beschreibung der interessanten Ergebnisse würde mehrere Figuren und die Wiedergabe einer größeren Anzahl von Formeln erfordern. Lp.

G. A. Maggi. Sull' interpretazione del nuovo teorema di Volterra sulla teoria dell' elasticità. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{14}_2$, 409-411.

In der ersten Mitteilung zur Elastizitätstheorie aus dem Berichtsjahre hat Volterra auf die Analogie des von ihm unter Verweis auf Weingarten aufgestellten Satzes mit einem hydrodynamischen Theorem aufmerksam gemacht. Maggi hält es für nicht überflüssig, die Unterschiede dieser als analog hingestellten Sätze hervorzuheben. Volterra gebühre das Verdienst, nicht nur die Existenz der von Weingarten einfach angeschauten Verrückungen elastischer Körper bewiesen, sondern auch ihre Art bestimmt zu haben.

Lp.

G. Lauricella. Sull' integrazione delle equazioni dell' equilibrio dei corpi elastici isotropi. Annali di Mat. (3) **11**, 269-283.

Der Beweis, den der Verf. in Nuovo Cimento (4) **9**, 97-109 und **10**, 5-19 für die Existenz der regelmäßigen Integrale der Differentialgleichungen für das Gleichgewicht der isotropen elastischen Körper bei gegebenen Komponenten der Verrückungen an der Oberfläche gegeben hat (F. d. M. **30**, 716, 1899), erscheint ihm weder einfach genug, noch hinreichend gegen schwer zu widerlegende Einwände gesichert. Daher nimmt er jetzt die Frage wieder auf und erledigt sie für diejenigen endlichen konvexen Gebiete, für welche die auf das Dirichletsche Problem bezügliche Methode von C. Neumann gültig ist. Die Beweisführung beruht auf einigen das Dirichletsche Problem betreffenden allgemeinen Resultaten, die Liapunow für derartige Bereiche aufgestellt hat (Journ. de Math. (5) **4**, 241-311; F. d. M. **29**, 723, 1898). Hiernach gelten diese Resultate und somit auch der fragliche Satz für ein rechtwinkliges Parallelepiped und noch andere konvexe Bereiche, die sich der Anwendung der Neumannschen Methode entziehen, für die aber die Greensche Funktion bekannt ist. Lp.

G. Lauricella. Sulle equazioni della deformazione delle piastre elastiche cilindriche. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{14}_1$, 605-612.

In dem Artikel werden einige allgemeine Sätze über die Gleichungen der Deformation elastischer zylindrischer Scheiben von beliebiger Dicke bewiesen. So hatte Boggio in dem Aufsatze „Sulla deformazione delle piastre elastiche cilindriche“ (F. d. M. **35**, 811, 1904) den Satz ausgesprochen: Die Integration der Gleichungen, von denen die Untersuchung der Deformation einer elastischen zylindrischen Scheibe beliebiger Dicke abhängt, bei gegebenen Kräften, welche auf die Seitenfläche der Scheibe parallel zur Basis einwirken, kann immer auf die Integration der Laplaceschen Doppelgleichung in dem Felde zurückgeführt werden, das von dem senkrechten Querschnitte der Scheibe gebildet wird, für gegebene Werte der unbekannten Funktion und seiner normalen Ableitung in den Punkten des Umfanges jenes Feldes. Gegenwärtig zeigt Lauricella, daß die Integration der Laplaceschen Doppelgleichung immer auf die Integration der Gleichungen elastischer zylindrischer Scheiben zurückgeführt werden kann.

Es ergibt sich ein bemerkenswerter Unterschied zwischen den Eigenschaften der Gleichungen für diese Scheiben und denen der analogen Gleichungen für die Deformation elastischer Körper von beliebiger Gestalt. Ferner wird eine Ausdehnung des Begriffes einer den Gleichungen des Gleichgewichtes elastischer Scheiben konjugierten harmonischen Funktion gegeben. Lp.

L. Orlando. Integrazione della Δ_4 fra due piani paralleli. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 4-7.

Der Verf. bestimmt eine regelmäßige Lösung der Differentialgleichung $\Delta_4 F(x,y,z) = 0$ in dem Raume zwischen den beiden Ebenen $z = h$ und $z = -h$, indem er in jedem Punkte dieser Grenzebenen des Gebietes die Werte von F und von $\partial F/\partial z$ als bekannt annimmt. Die Integration dieser Gleichung führt dann zu derjenigen der allgemeinen Gleichung $\Delta_4 F(x,y,z) = Q(x,y,z)$, wo Q eine gegebene Funktion von x, y, z ist. Bei den Daten wird alles als erfüllt angenommen, was zur Existenz der vorkommenden Integrale nötig ist. Im Verlaufe des skizzierten Ganges der Lösung tritt die Beziehung zur Theorie der Elastizität hervor. Lp.

L. Orlando. Sopra alcune funzioni analoghe alla funzione di Green per un parallelepipedo rettangolo. Palermo Rend. **19**, 62-65.

Aus den neueren Untersuchungen von Somigliana (F. d. M. **35**, 806, 1904) geht hervor, daß die Greensche Funktion und ihre analogen für manche Bereiche einen engen Zusammenhang mit der Integration der Gleichungen des elastischen Gleichgewichts haben, und zwar in den Fällen, die man gemischte oder nach Somigliana alternierende nennen kann. Von dieser Bemerkung ausgehend, konstruiert der Verf. eine Funktion, die der Greenschen für das rechtwinklige Parallelepiped analog ist. Dieselbe löst die Aufgabe, in jedem Punkte innerhalb dieses Körpers den Wert einer harmonischen Funktion zu bestimmen, aus welcher in jedem Punkte der Grenze der Wert der nach der Normale genommenen Ableitung erkannt wird. Lp.

L. Orlando. Sulla deformazione di un solido isotropo limitato da due piani paralleli, per tensioni superficiali date. Palermo Rend. **19**, 66-80.

Der Verf. behandelt die Aufgabe, welche wiederholt bearbeitet worden ist, nach einer Methode, die sich auf ganz elementare Begriffe stützt. Lp.

L. Orlando. Sopra alcune funzioni ausiliari. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 138-143.

Die Integration der Differentialgleichung $\Delta_{2n} = 0$ in einem Bereiche S kann, wenn die üblichen Daten es ermöglichen, allgemein als ausgeführt gelten, wenn man für den Bereich S die n-te Greensche Funktion zu bestimmen weiß. Allein die Aufsuchung dieser Funktion ist selbst für Körper von der einfachsten Gestalt sehr schwer, etwa ebenso wie

das vorgelegte Problem. Der Verf. definiert unter Beschränkung auf Δ_2 und Δ_4 einige Hülfsfunktionen, die denselben Zweck haben wie die Greenschen Funktionen, aber einige willkürliche Elemente enthalten, deren man sich bedienen kann, um die Aufsuchung jener Hülfsfunktionen in den einzelnen Fällen zu erleichtern. Lp.

O. Tedone. Sul problema dell' equilibrio elastico di un ellissoide di rotazione. Rom. Acc. L. Rend. **14**$_1$, 76-84.

Ausgehend von den in früheren Arbeiten vom Verf. entwickelten Grundformeln löst er in der Abhandlung die Aufgabe des elastischen Gleichgewichts für ein verlängertes und ein abgeplattetes Rotationsellipsoid in den beiden Fällen, wenn entweder die Verrückungen u, v, w auf der Oberfläche gegeben sind, oder aber die Spannungen; doch werden für die letztere Aufgabe die Rechnungen nur angedeutet. Die verwickelten Rechnungen, welche zur Lösung der ersten Aufgabe führen, können hier nur als ein Zeugnis von dem großen Geschicke des Verf. erwähnt werden. Zum Schlusse bemerkt er, daß das nämliche Verfahren auf einen von zwei konfokalen Rotationsellipsoiden begrenzten Körper anwendbar ist. Lp.

O. Tedone. Sull' equilibrio di un corpo limitato da un cono di rotazione. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 316-322.

Dieselben Methoden, die vom Verf. im Vorjahre zur Lösung des Gleichgewichtsproblems eines unbegrenzten elastischen Zylinders benutzt sind (F. d. M. **35**, 810-811, 1904) und im Berichtsjahre bei einem Rotationsellipsoide (vgl. das vorangehende Referat), werden in dem vorliegenden Aufsatze mit Erfolg auf die im Titel bezeichnete Aufgabe angewandt. Im Schlußparagraphen werden Andeutungen über den Fall gemacht, bei welchem die Spannungen an der Oberfläche gegeben sind. Lp.

T. Boggio. Sulla deformazione delle piastre elastiche soggette al calore. Torino Atti **40**, 219-240.

Die Differentialgleichungen dieses Problems sind von F. Neumann in § 12 der Abhandlung gegeben: „Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichtes“ usw. (Berl. Abh. 1841). Für den Fall einer Kreisplatte bei beliebiger Erwärmung hat Borchardt die Integration jener Gleichungen durchgeführt (Berl. Monatsber. 1873, 9ff.); seine Formeln drücken die Verrückungen u, v mit Hülfe bestimmter Integrale aus.

In der vorliegenden Abhandlung führt der Verf. die Berechnung der Funktionen u, v auf die Lösung des Problems der Randwerte für die

biharmonischen Funktionen zurück oder, was dasselbe ist, auf die Untersuchung der zweiten Greenschen Funktionen für die betrachtete Fläche. Dieses Resultat wird durch eine passende Transformation der erwähnten Gleichungen erzielt und durch nachherige Anwendung der von Morera herrührenden Formeln für die allgemeine Lösung der Gleichgewichtsgleichungen eines kontinuierlichen Körpers.

Das Problem der Randwerte für die biharmonischen Funktionen ist von verschiedenen Autoren (Levi-Civita, Lauricella, Almansi usw.) bei vielen Arten von Flächen gelöst worden, insbesondere für die Flächen, deren konforme Abbildung auf einen Kreis mit rationalen Funktionen bewirkt werden kann; die Lösung enthält Ausdrücke in bestimmten Integralen. Für solche Flächen können daher die Verrückungen u, v mittels bestimmter Integrale erhalten werden.

Wenn die Erwärmung eine harmonische Funktion ist, läßt sich die Frage in äußerst einfacher Form für eine beliebige Gestalt der Platte lösen, weil dann kein Problem der Randwerte vorliegt.

In dem Falle der Kreisplatte erweist sich das Verfahren einfacher als die Borchardtsche Lösungsart, und die Endformeln für u, v haben ein einfacheres Aussehen. Wenn die Erwärmung eine polyharmonische Funktion ist, können die Funktionen u, v durch einfache Integrale ausgedrückt werden, während sie im allgemeinen Falle durch Doppelintegrale dargestellt werden. Wenn endlich die Erwärmung eine ganze rationale Funktion ist, sind auch u, v rationale ganze Funktionen, und dieses Resultat gilt auch für eine elliptische Platte. Lp.

I. Fredholm. Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité. Arkiv för mat., fys. och astr. 2, Nr. 28, 8 S.

Die Note beschäftigt sich mit dem Problem, die Bedingungen des Gleichgewichtes eines elastischen isotropen Körpers zu bestimmen, sobald die Komponenten u, v, w auf der Begrenzungsfläche gegeben und die inneren Kräfte gleich Null gesetzt sind. Die Lösung des Problems wird mit Anwendung des Fundamentalsatzes der Theorie der linearen Integralgleichungen erhalten. Msn.

C. Runge. Bemerkungen über Hennebergs Aufsatz „Zur Torsionsfestigkeit". Zs. f. Math. u. Phys. 51, 431-435.

Schon Kirchhoff und nach ihm de Saint-Venant haben bemerkt, daß die Spannungen eines elastischen Körpers nicht willkürliche Funktionen des Ortes sein können, sondern daß zwischen ihren zweiten Differentialquotienten gewisse lineare Gleichungen bestehen. Es folgt daraus, daß die „technische Methode" gar keine Methode ist, das Torsionsproblem zu lösen, weil sie auf diese notwendigen Bedingungen gar keine Rücksicht nimmt. Wenn also Henneberg sagt, „die technische Methode" sei in

ihren Voraussetzungeu allgemeiner als die Methode de Saint-Venants, so trifft er damit nicht den Kernpunkt der Sache. Allerdings sind die Voraussetzungen allgemeiner; sie sind zu allgemein, weil sie notwendige Bedingungen vernachlässigen. (Vgl. F. d. M. **35**, 813-814, 1904.)

Lp.

A. Föppl. Über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. Münch. Ber. **35**, 249-262, Berichtigung 504.

Unter der Voraussetzung des Fehlens äußerer Kräfte an der Mantelfläche des Stabes führt der Verf. das Problem auf die Lösung einer partiellen Differentialgleichung für die Gesamtverschiebung v zurück:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(v\varrho)\right) = 0, \tag{1}$$

die mit der Grenzbedingung tangential verlaufender Schubspannungen:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\tau_\varrho}{\tau_x} = \left(\frac{\frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho}}{\frac{\partial v}{\partial x}}\right)_{\varrho = z} \tag{2}$$

verträglich ist. Dabei ist x die Stabrichtung, z und ϱ liegen im senkrechten Schnitt, die τ sind Schubspannungen. Hat man für v eine Lösung von (1), so erhält man durch Einsetzen in (2) und Integration die Gleichung der Meridiankurve $z = f(x)$.

Um auch umgekehrt zu einer angenäherten Lösung bei gegebener Meridiankurve zu kommen, wendet Verf. eine hydrodynamische Analogie an, indem er die Schubspannungslinien im Längsschnitt des Stabes als Stromlinien einer ebenen Flüssigkeitsbewegung ansieht. Die Stromgeschwindigkeit wird proportional zu $\varrho^2\tau$ gesetzt. Die Anwendung des Stokesschen Satzes auf ein Stromfadenelement gibt

$$\tau = A\varrho \cdot e^{\int dn/r}, \tag{3}$$

wo r der variable Krümmungsradius der Stromlinien und A eine Integrationskonstante, konstant aber nur für eine jede die Stromlinien überall rechtwinklig schneidende Trajektorie ist.

Wenn nun der Verlauf der Stromlinien im Meridianschnitt schon bekannt wäre, so könnte man A aus der Bedingung berechnen, daß die durch jede Trajektorie hindurchfließende Flüssigkeitsmenge konstant ist. Dies führt zu folgender angenäherten Lösung:

Man trage den Verlauf der Stromlinien schätzungsweise in den Längsschnitt der Welle ein. Man kann nach (3) die Spannungsverteilung längs einer Trajektorie auftragen. Die größte Schubspannung am Umfang einer Übergangsstelle findet man durch die Gleichgewichtsbedingung zwischen dem Torsionsmoment und den Schubspannungen in einer die Stromlinien senkrecht schneidenden Fläche.

Le.

A. V. LEON. Spannungen und Formänderungen einer rotierenden Hohl- und Vollkugel. Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 164-174.

Indem Verf. für die kubische Dilatation und die beiden Verschiebungen im Meridianschnitt etwas unvermittelt von vornherein allgemeine Ansätze, die Stefan bei einem ähnlichen Problem angegeben hatte, einführt, gelangt er nach Erfüllung der Grenzbedingungen zu streng gültigen Integralen der zuvor in Polarkoordinaten abgeleiteten elastischen Grundgleichungen. Die Formeln für einzelne bemerkenswerte Verschiebungen und Spannungen werden in geschlossener Form angegeben. Le.

A. V. LEON. Spannungen und Formänderungen eines Hohlzylinders und einer Hohlkugel, die von innen erwärmt werden, unter der Annahme eines linearen Temperaturverteilungsgesetzes. Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 174-190.

Bei Annahme einer besonderen Temperaturverteilung erhält Verf. als Gleichgewichtsbedingung zwei partielle Differentialgleichungen, deren Lösung durch Entwicklung nach Potenzreihen erhalten wird. Für den unendlich langen Zylinder vereinfacht sich das Problem; im Falle einer Hohlkugel führt es auf eine leicht integrierbare totale lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Le.

TH. WEITBRECHT. Über die elastische Deformation eines kreisförmigen Ringes. Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 383-401.

Die Abhandlung behandelt die elastische Deformation eines Kreisrings, der außer gleichmäßig über die innere Peripherie verteilten radialen Zugkräften Z noch einzelnen beliebigen radialen Druckkräften V unterliegt. Aus den von Winkler angegebenen Formeln leitet Verf. eine totale lineare Differentialgleichung fünfter Ordnung für die radiale Verschiebung ab, aus der dann durch einmalige Integration die tangentiale Verschiebung gefunden werden kann. Die in geschlossener Form erscheinende Lösung findet auf zwei besondere Fälle der Lastverteilung V Anwendung. Le.

M. PANETTI. Teoria della resistenza delle piastre tronco-coniche e sue applicazioni al calcolo di alcuni organi meccanici e dei serbatoi cilindrici. Torino Atti **40**, 349-377.

Unter der Voraussetzung, daß bei einer abgestumpft-konischen Schale von endlicher, konstanter Wandstärke die Querschnitte eben und senkrecht zur Mittelfläche bleiben, werden die Gleichgewichtsbedingungen und die Beziehungen zwischen Querschnittskräften und Formänderungskomponenten

bei symmetrischer Belastung abgeleitet. Die Integration der erhaltenen Gleichungen wird ausgeführt für den Sonderfall ebener Platten, bei denen der Kegel in die Ebene ausartet, und den Fall zylindrischer Schalen mit konstanter und linear veränderlicher Belastung. Die Eigenschaften der Meridiankurven werden diskutiert. Rr.

A. Sommerfeld. Lissajous-Figuren und Resonanzwirkungen bei schwingenden Schraubenfedern; ihre Verwertung zur Bestimmung des Poissonschen Verhältnisses. Wüllner-Festschrift 162-193.

Die vom Verf. benutzten Federn sind zylindrische Schraubenfedern aus Stahldraht oder aus Konstantandraht von 0,7 mm Dicke; ihre Dämpfung war so gering, daß die Amplitude nach 200 Schwingungen immer noch reichlich die Hälfte der ursprünglichen betrug. Die Federn wurden am oberen Ende eingeklemmt und am unteren mit einer regulierbaren Zusatzmasse versehen.

Drei Wege bieten sich zu einer Bestimmung der Poissonschen Zahl μ. 1. Der Weg der statischen Beobachtung, der aber vier unabhängige Messungen nötig macht, die Bestimmung der kleinen Formänderungen mit großer prozentischer Genauigkeit verlangt und durch die Nachwirkungserscheinungen die Beobachtungen getrübt erscheinen läßt. 2. Eine in der beschriebenen Art aufgehängte Feder wird in Schwingungen versetzt, einmal in der Richtung der Längsachse, ein zweites Mal in Drehschwingungen um diese Achse, und es werden die beiden Schwingungszeiten beobachtet. Ist M die für die auf- und abgehende Bewegung in Betracht kommende Masse, M' die auf den Radius r des Zylinders reduzierte Masse, sind endlich n_1 und n_2 die Schwingungszahlen der beiden erwähnten Schwingungen für eine und dieselbe Beobachtungszeit, so findet man $1+\mu = M'n_1^2/Mn_2^2$. Dieser Weg ist von Wilberforth 1894 eingeschlagen.

Der dritte Weg, auf dem der Verf. vorgegangen ist, besteht in der gemeinsamen Beobachtung der beiden angeführten Schwingungsformen und in der Erzeugung von Lissajous-Figuren durch sie. Die Untersuchung ist sowohl von der mathematischen, als auch von der experimentellen Seite mit großem Geschicke durchgeführt worden; es ist aber nicht möglich, die ganze Arbeit hier im Auszuge vorzuführen. Unter der Annahme wenig verschiedener n_1 und n_2 erhält man nach Einführung einer Hülfszahl $N = \frac{1}{2}\frac{n_1+n_2}{n_1-n_2}$, welche die Anzahl der Übergänge in der Lissajous-Figur angibt,

$$1+\mu = \frac{M'}{M}\cdot\frac{N-1}{N+1}.$$

Die Abstimmung der beiden Schwingungen aufeinander und ihre gegenseitige Koppelung wird besonders untersucht; es zeigt sich, daß die beiden Schwingungstypen der Feder sozusagen durch die Endlichkeit des

Steigungswinkels α miteinander verkoppelt sind. Beide Schwingungen wirken aufeinander zurück, und es kann vollkommene Resonanz eintreten, wenn die Energie der Vertikalschwingung vollständig in die der Horizontalschwingung und umgekehrt transformiert wird, wenn also bald die Vertikalschwingung, bald die Horizontalschwingung vollständig aussetzt. Die Bedingung für das Eintreten dieser Erscheinung wird ermittelt. Die Gestalt der hierzugehörigen Kurven, die der Verf. Resonanzkurven nennt, und deren Übergangszahl N mit der der Lissajous-Kurven durch die gleiche Formel bestimmt wird, ist auf photographischem Wege durch die Feder selbst aufgezeichnet worden. Die betreffende Formel:

$$\frac{1+\mu\cos^2\alpha}{1+\mu\sin^2\alpha}=\frac{M'}{M}\cdot\frac{N-1}{N+1},$$

die für $\alpha=0$ in die obige Formel übergeht, dient als vierte Methode zur Bestimmung von μ. Nach dieser Methode ausgeführte Messungen ergaben bei einer Feder aus Stahldraht $\mu=0{,}250$, bei einer aus Konstantandraht $\mu=0{,}355$.

Eine Beschreibung der photographischen Aufnahmen und mathematische Erläuterungen bilden den Schluß der inhaltreichen Arbeit.

Lp.

V. Volterra. Note on the application of the method of images to problems of vibrations. Lond. M. S. Proc. (2) **2**, 327-331.

In den Anwendungen der von Lord Kelvin ersonnenen Methode der Bilder sind bisher die in Betracht kommenden partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen oder parabolischen Typus gewesen. Volterra gibt in der vorliegenden Note eine Anwendung auf eine Differentialgleichung vom hyperbolischen Typus, nämlich die der schwingenden Membranen:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

die er schon in seiner Abhandlung „Sur les vibrations des corps élastiques isotropes" (Acta Math. **18**, 161-232; F. d. M. **25**, 1575, 1894) behandelt hat. Das Ergebnis, auf welches die Aufmerksamkeit gelenkt werden soll, ist dieses, daß in dem erwähnten Falle die Anwendung der Methode von Folgebildern zu Lösungen führt, die eine endliche Anzahl von Posten enthalten, selbst wenn die Anzahl der Bilder unendlich groß ist. Der Grund dieser Vereinfachung ist in der Tatsache zu erblicken, daß die charakteristischen Oberflächen der partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus reell sind; somit ist die fragliche Eigenschaft mit dem hyperbolischen Charakter der Gleichungen verknüpft und daher einer weiten Anwendung fähig. Lp.

A. Kriloff. Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben. Math. Ann. **61**, 211-234.

Die Abhandlung ist aus einem Vorstudium für eine dienstliche Untersuchung von Schiffsvibrationen entstanden; deshalb sind die praktischen Anwendungen in den Vordergrund gestellt. Ihr Gegenstand ist die Auseinandersetzung einer allgemeinen Methode für die Bestimmung der erzwungenen Schwingungen eines gleichförmigen elastischen Stabes, welcher der Einwirkung einer veränderlichen Kraft unterliegt.

Die auf den Stab wirkende Kraft (senkrecht zur Längsachse Ox des Stabes, parallel zur Achse Oz) sei in jedem Punkte auf die Längeneinheit bezogen und durch die Funktion $F(x, t)$ der Abszisse x und der Zeit t dargestellt. Dann kann bekanntlich das Problem mathematisch so ausgesprochen werden: Die Funktion z der unabhängigen Variabeln x und t so zu bestimmen, daß sie der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{1}{qs} F(x, t) \tag{1}$$

genügt, außerdem die Anfangsbedingungen und die Grenzbedingungen erfüllt. Hier bezeichnet q die Dichtigkeit des Stabmaterials, s die Querschnittsfläche, $b^2 = EJ/qs$ eine Konstante (E = Elastizitätsmodul, J = Trägheitsmoment von s um eine zur Schwingungsebene senkrechte zentrale Achse).

Man setze $z = z_1 + z_2$ und bestimme z_1 und z_2 durch die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z_1}{\partial t^4} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z_2}{\partial t^4} = \frac{1}{qs} F(x, t) \tag{3}$$

unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen für z_1 und z_2, wo z_1 die freien, z_2 die erzwungenen Schwingungen darstellen soll. Der Ansatz der freien Schwingungen wird im Anschluß an englische Arbeiten durch die den Grenzbedingungen entsprechenden Normalfunktionen bewirkt.

Der weitere Schritt in der Methode des Verf. besteht in der Bestimmung von z_2. Hierzu wird eine Reihe formaler Vorschriften gegeben. „In jedem einzelnen Falle, wenn die Funktionen wirklich gegeben werden, müßte man beweisen, daß die in der Lösung vorkommenden unendlichen Reihen alle Operationen (Integration und mehrfache Differentiationen nach x und t) ohne weiteres zulassen. In den praktisch technischen Anwendungen braucht man nur eine ziemlich grobe Annäherung, für welche schon wenige erste Glieder der Reihen genügen. Die nötige Anzahl dieser Glieder kann durch eine unmittelbare Rechnung bestimmt werden."

Die Brauchbarkeit dieser Methode wird an dem Beispiele der Bewegung eines Stabes unter beweglicher Last erläutert. Hierbei werden zwei Fälle unterschieden: 1) Ein gleichförmiger, zylindrischer Stab ist an beiden Enden frei gestützt und der Wirkung einer sich gleichförmig

bewegenden punktförmigen Last unterworfen. Die Geschwindigkeit der Bewegung sei a, und die Last sei als eine Kraft P angesehen. Es wird verlangt, die erzwungenen Schwingungen des Stabes zu ermitteln. 2) Ein an beiden Enden frei gestützter Stab ist der Wirkung einer im Punkte $x = c$ angreifenden periodischen Kraft unterworfen. Diese Kraft ist der z-Achse parallel gerichtet und ihre Intensität durch die Formel $F = P \sin nt$ dargestellt. Es wird verlangt, die im Stabe erzwungenen Schwingungen zu bestimmen. — Die Lösung des ersten Falles kann bei der Behandlung der Eisenbahnschienen benutzt werden, die des zweiten Falles bei der Betrachtung der Resonanzerscheinungen. Lp.

M. Radaković. Über die Berechnung der erzwungenen Schwingungen eines materiellen Systems. Wien. Ber. **114**, 877-893.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Satz entwickelt, welcher zu der Berechnung der Form der erzwungenen Schwingung eines reibungslosen Systems unter der Einwirkung einer periodisch veränderlichen Kraft dient. Die Überlegungen werden sodann auf Systeme, welche Reibungskräften unterliegen, unter der Annahme ausgedehnt, daß die Zerstreuungsfunktion von derselben Form wie die lebendige Kraft oder das Potential des Systems ist. Lp.

R. Lorenz. Die Eigenschwingungen rotierender Stäbe. Diss. Jena. 54 S. [Beibl. **29**, 1139-1140.]

Nach dem Referate in den Beibl. ist das behandelte Problem enger begrenzt als bei Stodola und Kneser (vgl. F. d. M. **35**, 815, 1904), indem der Stab als homogener, um seine Achse rotierender Kreiszylinder vorausgesetzt ist. Dagegen werden aber auch Schwingungen betrachtet, welche durch Stöße während der Rotation hervorgerufen werden. Lp.

J. Morrow. On the lateral vibration of bars of uniform and varying sectional area. Phil. Mag. (6) **10**, 113-125; Proc. Phys. Soc. London **19**, 588-602. [Chem. News **91**, 140; Nature **71**, 502.]

Das Ziel der Arbeit besteht darin, eine Methode darzulegen, um die Schwingungen durch eine Folge von Annäherungen zu berechnen, vermöge deren man sowohl bei der Vibrationskurve als auch bei der Schwingungsperiode jeden Grad der Genauigkeit erreichen kann. Schon Lord Rayleigh hat eine Methode angegeben, durch welche die angenäherte Periode der Schwingung eines Stabes ohne den Gebrauch transzendenter Gleichungen berechnet werden kann; danach haben Garrett und Chree die Frage in jüngster Zeit noch genauer behandelt. Diese Richtung wird also vom Verf. weiter verfolgt.

Die Methode wird zuerst an solchen Fällen erläutert, bei denen die Lösung völlig bekannt ist: an einem Stabe, bei welchem 1) ein Ende festgeklemmt ist, 2) beide Enden unterstützt sind, 3) der ganz frei ist. Danach wird ein an einem Ende festgeklemmter Balken von veränderlicher Breite b behandelt, wenn 1) $b = Ax$, 2) $b = Ax^2$, endlich ein Balken von veränderlicher Tiefe $d = Ax$.

In der Diskussion über den Vortrag wies Chree darauf hin, daß außer den vom Verf. als bei Kirchhoff behandelt erwähnten Fällen auch noch andere von ihm erledigt seien, so besonders die letzte Aufgabe des Verf. Lp.

J. Morrow. On the lateral vibrations of loaded and unloaded bars. Phys. Soc. London. Nov. 24, 1905. [Chem. News **92**, 259; Nature **73**, 142.]

Diese Arbeit bildet die Fortsetzung der im vorangehenden Referate besprochenen. Vermittelst einer Methode stetiger Annäherung können die Kurven der elastischen Verrückung und die Schnelligkeit der seitlichen Schwingungen von Stäben bis zu jedem Grade der Genauigkeit bestimmt werden. Die Methode wird zuerst auf einige Fälle unbelasteter Stäbe sowie auf masselose Stäbe, die konzentrierte Lasten tragen, angewandt. Die Abhandlung beschäftigt sich dann mit den Hauptaufgaben belasteter Balken, die selbst von abschätzbarer Masse sind. Die Gleichungen in ihren allgemeinen Formen sind schwerfällig; aber für eine gegebene Lage der konzentrierten Last und für ein gegebenes Verhältnis der Masse der Last zu derjenigen des Stabes werden die Ausdrücke für die Schnelligkeit sehr einfach. Um die Resultate auf eine für den praktischen Gebrauch vorteilhafte Gestalt zu bringen, sind die numerischen Konstanten in diesen Ausdrücken für die verschiedenen Lagen der Last und für Verhältnisse der Masse der Last zu der des Stabes zwischen 0 und 1 berechnet worden. In dem letzten Abschnitte der Schrift wird die Methode auf die Aufsuchung der Korrektionen angewandt, welche von der Rotationsträgheit der Massen und der Querschnitte des Stabes herrühren; ferner wird eine Vergleichung mit den von Lord Rayleigh und von Chree für ähnliche Zwecke gebrauchten Methoden angestellt. Lp.

W. Keck. Vorträge über Elastizitätslehre als Grundlage für die Festigkeitsberechnung der Bauwerke. Erster Teil. Hannover: Helwing. VIII u. 303 S. 8°.

Die wohlbekannten Vorträge von Keck sind von seinem Nachfolger Hotopp neu herausgegeben worden. Außer einigen Umordnungen sind als Ergänzungen zu erwähnen: die Spannungsverteilung in Stäben, deren Material nicht dem Hookeschen Gesetz folgt, und die häufigere Nebeneinanderstellung graphischer und analytischer Methoden. Die erstere Zufügung wird dem Elastizitätstheoretiker recht willkürlich erscheinen,

da von der Ebenheit der Querschnitte ausgegangen wird. Jedoch ist eben nur wiedergegeben, was in der neueren Praxis der Betoneisenkonstruktionen sich als notwendiges Hülfsmittel herausgestellt hat. Rr.

E. A. BRAUER. Festigkeitslehre. Kurz gefaßtes Lehrbuch nebst Sammlung technischer Aufgaben. Leipzig: S. Hirzel. XI u. 247 S. gr. 8°. [Physik. Zs. 6, 590-591.]

H. Lorenz schließt seine Anzeige des Buches in der Physik. Zeitschr. mit den Worten: „Jedenfalls haben wir es in der Brauerschen Festigkeitslehre mit einem durchaus eigenartigen, wohldurchdachten Werke zu tun, welches sich würdig an die Schriften von Grashof und Föppl anreiht und als eine Bereicherung der technischen Literatur warm zu begrüßen ist“. Lp.

H. AHLBERG. Festigkeitslehre in elementarer Darstellung mit zahlreichen, der Praxis entnommenen Beispielen. Zum Gebrauch für Lehrer und Studierende an technischen Mittelschulen sowie für die Praxis. Hannover: Gebr. Jänecke. IV u. 144 S. gr. 8°.

Diese Zusammenstellung der Festigkeitslehre ist aus dem Unterrichte des Verf. am Kyffhäuser-Technikum in Frankenhausen hervorgegangen. Die einzelnen Paragraphen behandeln: 1. Definition und allgemeine Begriffe. 2. Zug- und Druckfestigkeit. 3. Beispiele zur Zug- und Druckfestigkeit. 4. Schub- oder Abscherungsfestigkeit. 5. Beispiele zur Schubfestigkeit. 6. Biegungsfestigkeit. 7. Trägheits- und Widerstandsmomente. 8. Beispiele zu den Trägheits- und Widerstandsmomenten. 9. Untersuchung von verschiedenen Trägern in bezug auf Biegungsfestigkeit (nebst Beispielen). 10. Träger gleicher Biegungsfestigkeit (nebst Beispielen). 11. Drehungsfestigkeit. 12. Polar-, Trägheits- und Widerstandsmomente. 13. Der Verdrehungswinkel. 14. Beispiele zur Drehungsfestigkeit. 15. Zug oder Druck und Biegung. 16. Beispiele zur Zug- oder Druck- und Biegungsfestigkeit. 17. Biegung und Drehung. 18. Beispiele zur Biegungs- und Drehungsfestigkeit. 19. Knickfestigkeit. 20. Beispiele zur Knickfestigkeit. 21. Allgemeine Beispiele.

Die Kenntnis der infinitesimalen Methoden ist nicht vorausgesetzt; 254 Figuren erleichtern das Verständnis. Lp.

BOUASSE et BERTHIER. Sur les allongements par flexion. Journ. de Phys. (4) 4, 821-829.

Während ein einfacher Zug einen Draht nur wenig verlängern kann, bis er zerreißt, gelingt eine bedeutendere Verlängerung leicht durch wiederholtes Biegen. „Es scheint, daß beträchtliche Verlängerungen

besonders schwer erhaltbar sind, wenn man homogene Deformationen verwertet, daß dagegen die allmähliche und stetige Deformation benachbarter Teile leichter erhalten werden kann." Mit dieser Erscheinung und ihrer Aufklärung beschäftigen sich die Verf. Lp.

Z. Carrière. Sur les déformations de l'alliage eutectique plomb-étain et les métaux visqueux. Toulouse Ann. (2) 7, 317-382; Thèse. Paris: Gauthier-Villars. 69 S. 4°.

Die eutektische Legierung Blei-Zinn stellt einen sehr vollkommenen Typ derjenigen Metalle dar, deren Formänderungswiderstand den Charakter einer Flüssigkeitsreibung hat. Deshalb hat Verf. diese Legierung nach den Methoden und mit den Apparaten des bekannten Forschers auf diesem Gebiete, Bouasse, untersucht. Er bestätigt, daß die genannte Mischung dem Coulombschen Prinzip, bis zum Bereich früherer Deformationen vollkommene Elastizität zu besitzen, nicht folgt, und daß die Geschwindigkeit der Formänderung auf die Spannung außerordentlichen Einfluß hat, während die andere Klasse von Metallen gerade die umgekehrten Eigenschaften besitzt. Jene Eigenschaften der Viskosität werden an statischen und dynamischen Zug-, Biegungs- und Torsionkurven verfolgt. Die dabei benutzten Drähte sind nahe dem Schmelzpunkt bei 175° C gezogen. Rr.

H. Bouasse. Sur les métaux du type visqueux. Toulouse Ann. (2) 7, 383-415.

Die Arbeit bringt die theoretische Ausarbeitung der eben besprochenen Experimentaluntersuchung. An der Spitze steht die allgemeine obengenannte, von Bouasse präzisierte Einteilung der elastischen Formänderungen, wobei die Ausdrücke Härtung (écrouissage), Hysteresis, Nachwirkung genau definiert werden. Sodann wird für die „zähflüssigen" Metalle die Hypothese: „Formänderungsgeschwindigkeit eine Funktion der Spannung auf die Querschnittseinheit" mit den Erfahrungskurven verglichen und annehmbare Übereinstimmung gefunden. Die Abweichungen werden durch eine Funktion der Desagregation korrigiert und auf die Änderung der zylindrischen Form des Drahtes zurückgeführt, wobei die Annahme einer Strukturänderung bei diesen weichzähen Metallen zurückgewiesen wird. Für sehr kleine Formänderungen wird dann die bis dahin vernachlässigte vollkommene Elastizität hinzugefügt und die Konsequenzen für die Formänderungskurven bei verschiedenen Annahmen über die Abhängigkeit zwischen Geschwindigkeit und Last gezogen.

Nachdem dann für die Torsion bei veränderlichem Drehungsmoment die charakteristischen Erscheinungen auseinandergesetzt sind, werden die Theorien von Coulomb, Stokes und Kelvin als unvereinbar mit den Tatsachen, die Theorie von Brillouin als qualitativ übereinstimmend mit den Eigenschaften der zähen Metalle nachgewiesen, während letzterer zur Untersuchung der „härtbaren" Metalle die Ansätze fehlten.

Auch für die freien Schwingungen der Metalle mit „flüssiger Reibung“ werden Formeln und Versuchsanordnungen beschrieben. Für die Metalle mit „fester Reibung“ wird die Nichtumkehrbarkeit der Vorgänge bei der Kaltbearbeitung (écrouissage) in der Form ausgesprochen, daß es nicht möglich sei, die durch Formänderungen gehärtete Struktur durch eine Reihe von Formänderungen allein wieder in den früheren Zustand zu bringen. Zum Schluß erfahren die Versuche von Wertheim und Tresca abfällige Beurteilung. Rr.

H. Bouasse. Essais des matériaux. Notions fondamentales relatives aux déformations élastiques et permanentes. Grenoble: A. Gratier & J. Rey. 145 S. 8⁰. (Bibliothèque de l'Élève-Ingénieur.)

Außer einer Darstellung der einfachsten Festigkeitslehren für Zug, Biegung, Torsion von Stäben und Federn werden die in den beiden vorhergehenden Referaten auseinandergesetzten Anschauungen dargelegt und durch alle möglichen statischen und dynamischen Versuchsanordnungen verfolgt. Zu bemerken ist besonders die Definition des Elastizitätsmoduls durch die Grenztangente eines oft wiederholten Formänderungsumlaufs, mit dem für unvollkommen elastische härtbare Metalle überhaupt viel gearbeitet wird. In Verbindung mit dem Coulombschen oben erwähnten Prinzip gestattet dies dem Verf., die meisten Erscheinungen qualitativ zu verfolgen und für die zahlenmäßige Erforschung neue Wege anzugeben.

Neu scheint auch die Feststellung, daß der Vorteil zäher Metalle bei dynamischer Beanspruchung nicht in ihrer hohen Dehnungsziffer liegen kann, sondern in ihrer inneren „flüssigen“ Reibung, durch die Schwingungsenergie ohne Strukturveränderungen vernichtet würde.

Rr.

K. Jesipoff. Die Formel der Knickfestigkeit. Moskau. Phys. Sekt. **13**, 1-23. (Russisch.)

Unter der Voraussetzung, daß bei einer vertikalen Belastung P der Gipfel der Säule in vertikaler Richtung auf eine Entfernung p abweicht, bestimmt der Autor die Formel für die Schnitte der Säule unter der Bedingung, daß die größte Spannung in jedem Schnitte eine und dieselbe gegebene Größe x hat, und daß die vertikale Säule am untern Ende befestigt ist. Das Problem wird auf die Integration der Gleichung

$$\frac{E\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\Phi(y)$$

zurückgeführt und wird durch Quadraturen gelöst. Die Funktion $\Phi(y)$ wird durch P, p und durch verschiedene andere Bedingungen bestimmt,

von denen der Autor die Schnittprofile abhängig macht. Er betrachtet verschiedene Säulen: 1) mit Schnittprofilen bei einer konstanten und einer veränderlichen Dimension (z. B. ein Rechteck mit einer konstanten und einer veränderlichen Seite); 2) Schnittprofile mit zwei veränderlichen Dimensionen (z. B. die Ellipse mit Achsen, welche ein gegebenes Verhältnis haben). Für die Kreisschnittprofile findet der Autor, daß die Radien z durch folgende Formel sich ausdrücken lassen:

$$\arcsin\left(\frac{z}{z_0}\right) - \frac{z}{z_0}\sqrt{1-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2} = \frac{\pi(l-x)}{2l},$$

wo x die Entfernung vom Zentrum der Belastung bis zum betrachteten Schnitte, l die Entfernung vom Zentrum der Belastung bis zum Säulenfuße. Was die horizontale Verschiebung p des Säulengipfels betrifft, so wird diese durch folgende Formel ausgedrückt:

$$\frac{16\,\varkappa\, l}{3\,\pi\, E}\left[\frac{3\,\pi\, E}{P}\left(\frac{l}{\gamma\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Jk.

Fr. Joh. Müller. Theorie der Knickung in ihrer historischen Entwicklung. München. 43 S. gr. Lex. 8°.

Der Verf., Obergeometer an der Königl. Eisenbahn-Direktion Augsburg, wollte in der Abhandlung „den Nachweis erbringen, daß die Nichtübereinstimmung der theoretischen Knickformeln mit der Erfahrung nicht in den elastischen Grundsätzen, wie Kübler meint, sondern in der mathematischen Entwicklung begründet sein dürfte“. Von den im Vorwort angekündigten Teilen ist aber nur der „historische Überblick“ abgedruckt; es fehlen die beiden Teile, in denen „die theoretischen Grundlagen zu diesem Nachweise gegeben werden“ sollten.

Der historische Überblick besteht in Auszügen aus den Schriften über Elastizität und Festigkeitslehre seit Galilei und beruht für die ältere Literatur auf dem Werke von Todhunter, vollendet von K. Pearson: A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time. Cambridge, 1886-1893. Bei der neueren Literatur werden besonders die technischen Schriften herangezogen. Es ist hier nicht der Platz, um Auslassungen zu ergänzen und Urteile zu berichtigen.

Lp.

A. Timpe. Problem der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hülfe der Airyschen Funktionen. Zs. f. Math. u. Phys. 52, 348-383.

Verf. behandelt das „ebene Problem“ unter Benutzung der Spannungsfunktion F, als deren zweite Differentialquotienten die Spannungen erscheinen, indem er durch Kombinationen von bekannten partikularen

Lösungen der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ Randwerte zu erzielen versucht, die den in der Praxis vorkommenden Belastungsfällen entsprechen. Die Lösung glückt in den Fällen a) des geraden und des von sich berührenden Kreisen begrenzten krummen Streifens, b) des von sich nicht schneidenden, insbesondere von konzentrischen Kreisen begrenzten Streifens, c) des von sich schneidenden Kreisen begrenzten Streifens.

Die Untersuchungen Michells, die als Anregung dienten, werden durch die Ergebnisse der Abhandlung bestätigt. Le.

H. Zimmermann. Der gerade Stab mit stetiger, elastischer Stützung und beliebig gerichteten Einzellasten. Berl. Ber. 1905, 898-912; Berichtigung, 1056.

Die Abhandlung gibt eine Erweiterung der Theorie des elastisch quergestützten Stabes, indem auch Kräfte in Richtung der Stabachse zugelassen werden, wodurch sich die Differentialgleichung der elastischen Linie, die linear ist und konstante Koeffizienten hat, um ein der Knickbeanspruchung entsprechendes Glied vermehrt. Je nach dem Verhältnis von Längskraft und Quersteifigkeit stellen sich drei verschiedene Knickungsfälle heraus. Le.

M. Greco. Sul calcolo della sezione e delle armature di una trave in cemento armato sottoposta a flessione retta semplice. Torino Atti **40**, 507-530.

Verf. gibt eine Berechnung der Lage der Nullinie im rechteckigen oder T-förmigen Querschnitt von Eisenbetonträgern. Vorausgesetzt wird die Ebenheit der Querschnitte nach der Deformation, sowie die Hypothese von Considère, nach der es beim Beton eine Fließgrenze gibt. Durch Nullsetzen eines Faktors in den erlangten Resultaten werden diese auch gültig für die andere herrschende Hypothese, nach der alle Zugspannungen im Querschnitt vom Eisen allein aufgenommen werden. Le.

A. Hertwig. Beziehungen zwischen Symmetrie und Determinanten in einigen Aufgaben der Fachwerktheorie. Wüllner-Festschr. 194-213.

Es werden die Vereinfachungen behandelt, die sich bei Determinantenberechnungen von symmetrischen Fachwerken insbesondere nach der Ersatzstabmethode aus deren zyklischen oder verallgemeinerten zyklischen Eigenschaften ergeben. Die Beziehungen werden durch einige bemerkenswerte ebene und räumliche Systeme und an durchgeführten Rechnungen erläutert. Auch die wichtige Frage des mittleren Fehlers, der durch die Unsicherheit der Gleichungskoeffizienten entsteht, wird im Zusammenhange mit den Symmetrieeigenschaften behandelt. Kr.

S. Canevazzi. Sulla determinazione dell' asse neutro o di rotazione nelle sezioni trasversali di un solido in muratura, simmetrico rispetto ad un piano assiale e sollecitato da forze agenti nel piano di simmetria. Bologna Mem. (6) **2**, 81-91.

Die Spannungsnullinie in Mauerwerksquerschnitten, die symmetrisch beansprucht sind, wird mit Hülfe von Seilpolygonen gefunden. Rr.

E. Sándor. Über die günstigste Form des Gitterträgers, ein Beitrag zur Theorie des Fachwerks. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **4**, 43-53.

Die behandelte Aufgabe lautet: „Es ist die Spannweite eines gegliederten Tragwerks gegeben; man soll für einen gegebenen Belastungszustand die Form des Fachwerks so bestimmen, daß der Materialaufwand ein Minimum wird.“ Der Verf. bemerkt hierzu: „Die Praxis hat schon längst nachgewiesen, daß der Materialaufwand der Tragwerke von der Form des Fachwerks sehr abhängt. Es ist jedoch noch nicht gelungen, durch theoretische Untersuchungen auf die günstigste Form zu kommen. Mit der folgenden Arbeit lege ich eine allgemeine Theorie vor, erlaube mir aber zu bemerken, daß ich bis jetzt die Frage nur teilweise, nämlich für einen einzigen Belastungszustand gelöst habe, also z. B. für ständige Belastung. Dagegen ist die Methode ganz allgemein, also auch für statisch unbestimmte Systeme geeignet.“ Lp.

B. J. W. Reuser. Die vorteilhafteste Pfeilhöhe eines gleichmäßig belasteten symmetrischen Dreigelenkbogens mit kreisförmiger Mittellinie. Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 401-409.

Verf. berechnet die Pfeilhöhe bei Bedingung des Minimums der Materialmenge, indem er eine Gleichung ableitet, in der die Materialmenge als Funktion des Abstands der Kämpfergelenke, des konstanten Verhältnisses von Querschnittsfläche und Widerstandsmoment und der Pfeilhöhe erscheint. Le.

Considère. Calcul des ponts en arc et des ponts suspendus. C. R. **140**, 202-206.

Pigeaud. Arcs associés à des longerons par des montants verticaux articulés. C. R. **140**, 1091-1093.

Beide Arbeiten behandeln den Fall eines biegungsteifen Bogens und eines Balkens, die durch unendlich viele starre Vertikalen verbunden sind, und zeigen, wie man in solchen Fällen das System durch einen einzelnen Balken oder Bogen ersetzen kann. Rr.

Pigeaud. Sur le calcul des arcs encastrés. C. R. **140**, 774-777.

Verf. führt als statisch unbestimmte Größen eines symmetrischen gelenklosen Bogens den Horizontalschub, die halbe Summe und die halbe Differenz der Einspannungsmomente ein und löst die Elastizitätsgleichungen für den Fall eines kreisförmigen Bogens von konstantem Querschnitt. Neu ist wohl nur die Tatsache, daß der Verf. Tabellen zu diesen Formeln berechnet hat. Rr.

Auric. Sur le calcul d'une arche en maçonnerie. C. R. **141**, 621-622.

In geschlossener Form werden für einen eingespannten Bogen mit symmetrischer Belastung Horizontalschub und Angriffspunkt desselben angegeben. Die Einfachheit der Formeln fließt aus der Voraussetzung, daß der Bogen Zykloidenform habe und die Bogenstärke eine gewisse Funktion der Bogenlänge sei. Rr.

C. Guidi. Una proprietà degli archi elastici. Torino Atti **40**, 967-969.

Beweis des bekannten Satzes, daß die Ordinaten der Einflußlinie des Horizontalschubs eines Bogens die Senkungen der Bogenpunkte für eine Verschiebung des Auflagers angeben. Rr.

Belzecki. Sur l'équilibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle. C. R. **140**, 1016-1019.

Das Problem des Gewölbes wird als ebenes Spannungsproblem mit Hülfe von trigonometrischen Reihen integriert, deren Koeffizienten Funktionen des Radius sind. Rr.

Ramisch. Bestimmung der Kraft K eines über zwei Öffnungen gestreckten Balkens mittels ihrer Einflußlinie. Mitt. üb. Art. u. Genie **36**, 730-736.

Behandlung derselben Aufgabe wie in Jahrgang 34 derselben Zeitschrift (F. d. M. **34**, 865, 1903), doch wird jetzt die Belastung als beweglich angenommen. Das Verfahren ist das nämliche, wie in „Des Ingenieurs Taschenbuch", herausgegeben vom Verein „Hütte". Die Theorie ist ganz elementar; als Anwendung wird ein Zahlenbeispiel gegeben. Lp.

G. Marié. Oscillations des véhicules de chemin de fer à l'entrée en courbe et à la sortie. C. R. **140**, 1222-1224.

In kurzem Referat werden die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt, wie sie sich nach Abdämpfung der Oszillationen beim Eintritt des Wagens

in die Kurve und am Ende einer Schwingung beim Eintritt in die Kurve und beim Austritt aus ihr ergeben. Wegen der Federwirkung ist die Zentrifugalkraft im zweiten und dritten Falle doppelt, bezw. negativ zu nehmen. Für die Praxis wird eine Anwendung auf die Größe des Überhöhungswinkels zu Anfang und Ende der Kurve gegeben. Le.

L. Levy. Remarques sur la détermination des moments fléchissants produits par le passage d'un convoi sur une poutre à deux appuis simples. Nouv. Ann. (4) 5, 289-299.

Zur Bestimmung des größten Maximalmomentes eines Trägers auf zwei Stützen nach Ort des Querschnitts und Stellung des Belastungszuges gibt Verf. eine rein geometrische Methode von Lemann an, bei der die Biegungsmomente als Ordinaten kongruenter Parabeln erscheinen, deren Zahl die der sich bewegenden Lasten ist. Le.

H. Benndorf. Beiträge zur Theorie der Drahtseile II. Zs. des Öst. Ing. u. Arch. Ver. 1905, Nr. 50, 28 S.

Im zweiten Teile der Abhandlung behandelt Verf. die doppelt und dreifach geflochtenen Seile. Für die Spannungen der Umfangs- und Seelendrähte in den einzelnen Litzen werden Formeln abgeleitet, die die Abhängigkeit dieser Spannungen von dem „Flechtwinkel“ zeigen. Die Untersuchung des schon aus den Versuchen von Bach bekannten Anwachsens des Elastizitätsmoduls, der dem ganzen Seile zukommt, mit Steigerung der Belastung ergibt, daß das elastische Verhalten der Drahtseile durch drei Größen gekennzeichnet werden kann: den Elastizitätsmodul für die Belastung 0, den für theoretisch unendlich große Belastung, und durch eine Konstante, die angibt, wie rasch dieser Endmodul erreicht wird. Der Vergleich der theoretischen Resultate mit den sorgfältigen Versuchsreihen von Divis ergibt eine vortreffliche Übereinstimmung.
Le.

Ch. H. Lees. On the depression due to a load at the centre of an elastic chain tightly stretched between two points in the same horizontal plane. Phil. Mag. (6) 9, 811-816.

Gibt eine Methode an, wie man den Elastizitätsmodul berechnen kann aus dem Unterschied in der Durchbiegungstiefe zwischen der Kettenlinie, die die Gleichgewichtsfigur eines horizontal aufgehängten unbelasteten elastischen Drahtes bedeutet, und dem System der beiden Kettenlinien, die die Gleichgewichtsfigur eines in der Mitte belasteten elastischen Drahtes bedeuten. Br.

F. LUDWIG. Weitere Abschnitte aus der Biometrie. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 105-114, 175-181, 266-274.

Dieser Aufsatz, als Artikel IX der vom Verf. gelieferten Beiträge bezeichnet, behandelt den „Aufbau des Waldes nach statischen Gesetzen“. Als auf der Grenze der im Jahrbuche zu besprechenden Arbeiten stehend, verdient er doch immer eine Erwähnung, weil die mathematischen Gesetze der Festigkeitslehre in ihm eine hübsche Anwendung finden. Da der Verf. aber zumeist über Arbeiten anderer Autoren referiert, besonders über die gründlichen Untersuchungen von Metzger, müssen wir uns mit diesem nachdrücklichen Hinweise auf den Gegenstand begnügen.

Lp.

CH. CHARET. Fabrication de tubes sans soudure par le procédé de „Louvroil“. Rev. d'Artillerie **67**, 124-141.

Seit 1902 werden in einer Fabrik zu Louvroil durch ein neues Verfahren, nämlich das der „Zentrifugation“, Röhren ohne Naht hergestellt. Zuerst wird dieses Verfahren beschrieben, danach wird eine theoretische Untersuchung der Vorgänge des Verfahrens gegeben. Lp.

Weitere Literatur.

W. H. ATHERTON. An introduction to the design of beams, girders, and columns in machines and structures, with examples in graphic statics. London: Charles Griffin and Co. XIV u. 236 S. [Nature **73**, 1.]

C. BACH. Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmäßige Grundlage. Fünfte vermehrte Auflage. Berlin: J. Springer. XXIV u. 688 S. gr. 8.

ZD. BAŽANT. Statisch bestimmte durchgehende Fachwerksträger. Rozpravy **14**, Nr. 27, 54 S. Mit 7 Taf. (Böhmisch.)

F. BOHNY. Theorie und Konstruktion versteifter Hängebrücken. Leipzig: Engelmann. VI u. 109 S. 8°.

H. J. BOVEY. Theory of structures and of materials. 4th edition, rewritten and enlarged. New York: Wiley. XIII u. 968 S. 8°.

F. R. FARROW. Stresses and strains: their calculation and that of their resistances, by formulae and graphic methods. New York: Macmillan. VI u. 144 S. 12mo (The Builder, students' series).

C. E. GREENE. Structural mechanics; comprising the strength and resistance of materials, and elements of structural design. With examples and problems. Revised by A. E. Greene. 2d edition. New York. 241 S. 8°.

E. FISCHER. Über künstliche Belastungen bei der Aufstellung von Bogenbrücken. Diss. Dresden. 47 S. 8°.

A. H. Heller. Stresses in structures and the accompanying deformations. Columbus: Heller. 167 S. 8°.

I. Hiroi. The statically indeterminate stresses in frames commonly used for bridges. New York: Van Nostrand. IX u. 174 S. 12mo.

M. A. Howe. Cross-bending tests on steel-concrete beams. Chicago: Western Society of Engineers. 15 S. 8°.

C. J. Kriemler. Von der Erhaltung der Energie und dem Gleichgewicht des nachgiebigen Körpers. (Virtuelle Verschiebungen.) Ein Kapitel aus der technischen Mechanik. (Aus Zs. für Architektur und Ingenieurwesen.) Wiesbaden: C. W. Kreidel. 59 S. 16 Abb. 8°.

G. C. Mehrtens. Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. Band III: Formänderungen und statisch unbestimmte Träger. Nebst Sach- und Namenverzeichnis über das ganze Werk. Leipzig: Engelmann. 330 S. 8°.

M. Merriman. Mechanics of materials. Tenth edition rewritten and enlarged. New York: Wiley and Sons; London: Chapman and Hall. XI u. 507 S. [Nature **73**, 25-26.]

O. Mohr. Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin: W. Ernst & Sohn. IX u. 459 S. Lex. 8°.

H. Müller-Breslau. Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Erster Band. Vierte vermehrte Auflage. Stuttgart: A. Kröner. VII u. 576 S. 585 Abb. und 7 Tafeln. gr. 8°.

Ramisch. Querschnittbestimmung eines armierten Betonbogens. Mitt. üb. Art. u. Genie **36**, 736-740.

L. Ròiti. Nozioni di resistenza dei materiali. Torino: Streglio. 239 S. 16mo.

L. Sachs. Zur Berechnung räumlicher Fachwerke. Allgemeine Formeln für statisch bestimmte und insbesondere statisch unbestimmte Kuppel-, Zelt- und Turmdächer. Berlin: Ernst. IV u. 56 S. 8°.

L. v. Tetmajer. Die angewandte Elastizitätslehre. Auf Grundlage der Erfahrung bearbeitet. Dritte Auflage. Wien: F. Deuticke. XVI u. 618 S. gr. 8.

K. Zillich. Statik für Baugewerkschulen und Baugewerksmeister. Zweiter Teil: Festigkeitslehre. Dritte Auflage. Berlin: Ernst & Sohn. VII u. 176 S. 8°.

D. Akustik.

Th. Neininger. Ein Kapitel aus der Akustik und Optik in Theorie und Praxis. Progr. Nr. 254. Progymn. Zaborze 1905, 21 S.

Elementare Darstellung der Theorie der schwingenden Saite, wobei lediglich Bekanntes reproduziert wird. Zum Schluß wird auf die Analogie der Lichtschwingungen mit den transversalen Schwingungen der Saite hingewiesen. Wn.

R. Malagoli. Composizione parallela del moto vibratorio col moto progressivo applicata all' esame dei corpi sonori. Modena Mem. (3) 4, 141-146.

Durch Zusammensetzung einer periodischen Schwingung mit einer gleichförmigen Translation, die in der Schwingungsrichtung erfolgt, erhält man für den Ausschlag eines Punktes die Formel:

$$s = U \cdot t + A\left(1 - \cos\frac{\pi t}{T}\right).$$

Diese Formel wird für den Fall, daß

$$U < A \cdot \frac{\pi}{T}$$

ist, diskutiert, und die aus der Diskussion sich ergebenden Resultate werden auf gewisse Experimente angewandt (s. auch F. d. M. **34**, 873, 1903). Wn.

M. Th. Edelmann. Kinematische Studie über die longitudinalen Bewegungen des Stieles einer tönenden Stimmgabel. Physik. Zs. 6, 445-450.

Die Studie bezieht sich hauptsächlich auf die neuere Form der Stimmgabeln, bei denen der die beiden Zinken verbindende elastische Bogen durch einen (unelastischen) Metallklotz ersetzt ist. Die Methode der Untersuchung ist die experimentelle. Lp.

M. Wien. Ein Bedenken gegen die Helmholtzsche Resonanztheorie des Hörens. Wüllner-Festschr. 28-35.

Das starke Anwachsen der Empfindlichkeit des Ohres mit der Tonhöhe ist mit der Resonanztheorie nicht in Einklang zu bringen. Die Cortischen Fasern müssen nach dieser Theorie auch bei tiefen Tönen in Schwingungen geraten mit einer Amplitude, die etwa 1/27,3 von der ihrer Eigenschwingung entsprechenden Amplitude ist. Bei einer Verstärkung eines tiefen Tones durch eine Kraft, die 27300 mal so groß ist, müßte die Amplitude auf das Tausendfache steigen; solche Töne, die unter 28 Schwingungen haben, konnten jedoch von Helmholtz nicht wahrgenommen werden. Lp.

L. Erményi. Petzvals Theorie der Tonsysteme. (Schluß.) Zs. für Math. u. Phys. 51, 341-410.

Die aus den hinterlassenen Papieren stammende, von Erményi zusammengestellte Abhandlung erörtert in großer Breite die verschiedenen möglichen Tonsysteme. Neben vielen allgemein bekannten Tatsachen

sind auch neue Gedanken vorgebracht und zur Bildung neuer Tonsysteme benutzt. Die ganze Schrift enthält, vom mathematischen Gesichtspunkte betrachtet, nichts Bemerkenswertes. Vom musikalischen Standpunkte aus ist wohl manche Ausführung beachtenswert. Der Physiologe vermißt jede nähere Begründung des Wohlgefallens an der Konsonanz von Tönen. (Vgl. F. d. M. **35**, 832, 1904.) Lp.

H. J. Sharpe. On the reflexion of sound at a paraboloid. Part II. Cambr. Philos. Soc. Proc. **13**, 133-147.

Fortsetzung einer in denselben Proc. 1899 veröffentlichten Untersuchung. Lp.

H. Rubens und O. Krigar-Menzel. Flammenröhre für akustische Beobachtungen. Ann. der Phys. (4) **17**, 149-164.

Vgl. F. d. M. **35**, 835, 1904. Lp.

C. Krediet. Een elementaire bepaling van de voortplantingssnelheid van het geluid. Wisk. Tijdschr. **1**, 185-189.

P. Behrens. Über Refraktion von Schallstrahlen in der Atmosphäre. Diss. Rostock. 29 S. 8°.

Kapitel 2.

Optik.

A. Theoretische Optik.

J. Classen. Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes. Leipzig: G. J. Göschen. VII u. 249 S. 8°, 61 Fig.

Der Verf. behandelt in allgemein verständlicher Weise das Problem der elektromagnetischen Lichttheorie. Um dies vollständig zu erschöpfen, faßt er demgemäß auch einen größeren Teil der elektrischen Wellenerscheinungen mit unter diesen Titel. Wenige einfach gefaßte Abschnitte mehr mathematischer Darstellung werden durch eine Reihe von schön angeordneten Experimenten ergänzt, die auch dem Fachmann genügend Anregung geben können. Es werden behandelt: Geometrische Optik, Interferenz, Beugung, Polarisation, elektrische Schwingungen. Die Versuche von Hertz, Drahtwellen und Luftwellen, Analogie zu den Lichtwellen. Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Ausdehnung des Spektrums in die unsichtbaren Gebiete. Normale und anomale Dispersion, Rubenssche Reststrahlen, Resonanzerscheinungen, Leitfähigkeit und Absorption des Lichtes. Versuche von Hagen und Rubens, magnetische Drehung der Polarisationsebene. Gm.

G. Jäger. Theoretische Physik. Dritte Auflage. II. Licht und Wärme. Leipzig: G. J. Göschen. 152 S. 47 Fig. kl. 8⁰. (Samml. Göschen Nr. 77.)

G. Jäger. Theoretische Physik. III. Elektrizität und Magnetismus. Leipzig: G. J. Göschen: 149 S. kl. 8⁰. 33 Fig. (Samml. Göschen Nr. 78.)

Die schnelle Aufeinanderfolge der Auflagen beweist die Nützlichkeit der kleinen Bändchen. Wesentliche Änderungen der vorliegenden dritten Auflage sind gegen die zweite Auflage nicht vorgenommen. Sk.

G. Sagnac. Sur la propagation de la lumière dans un système en translation et sur l'aberration des étoiles. C. R. **141**, 1220-1223.

Verf. nimmt an, daß sich der Äther mit der Materie nicht wesentlich mitbewegt; dann wird, wie auch bei Lorentz, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem zu v/V^2 proportionalen Betrag geändert, wenn man höhere Potenzen von v/V vernachlässigt. Hieraus läßt sich das Theorem von Veltmann, sowie die Aberration ableiten. Gm.

M. Brillouin. Le mouvement de la Terre et la vitesse de la lumière. C. R. **140**, 1674-1676.

Die von W. Wien (1904) vorgeschlagene Anordnung, von der Brillouin zuerst geglaubt hatte, sie sei geeignet, die Frage nach der Mitführung des Äthers durch die Erde zu lösen, ist in ihrer bisherigen Gestalt dazu nicht imstande. Lp.

R. Sissingh. Over de theorie der terugkaatsing van het licht door niet volkomen doorschijnende lichamen. Amst. Ak. Versl. **14**, 335-344.

Der Verf. geht von den von Cauchy, Ketteler, Voigt und Lorentz auf verschiedenen Wegen gefundenen aber doch gleichen Formeln für die metallische Reflexion aus, um eine Theorie der unvollkommen durchscheinenden Medien zu entwickeln. Indem er dabei nach dem Vorgange von Eisenlohr einen komplexen Brechungsindex einführt, gelangt er zu Gleichungen, die im wesentlichen denen Cauchys gleich sind. Die Reflexion an vollkommen durchsichtigen Körpern läßt sich dabei als Grenzfall der Metallreflexion darstellen. Gm.

R. Sissingh. Afleiding van de grondvergelijkingen der metallieke terugkaatsing uit Cauchy's theorie. Amst. Ak. Versl. **14**, 506-509.

Verf. hatte in der vorstehend besprochenen Arbeit gezeigt, daß die Theorien von Cauchy, Ketteler, Voigt und Lorentz für die Metallreflexion zu

denselben Resultaten führen. Aus den Theorien der drei letzten Autoren ergeben sich nun die bekannten Beziehungen zwischen dem Brechungsindex und dem Absorptionskoeffizienten für senkrecht und schräg einfallendes Licht; dieselben müssen sich daher auch aus der Cauchyschen Theorie ableiten lassen. Der Verf. führt diese Ableitung durch. Gm.

A. EINSTEIN. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. Ann. der Phys. (4) **17**, 132-148.

Für die vorliegenden Probleme könnte es nach dem Verf. vielleicht heuristisch brauchbarer sein, das Licht nicht von kontinuierlichen Raumfunktionen, sondern von einer endlichen Anzahl lokalisierter Elementarquanten herrührend anzunehmen. Eine erste Überlegung über die Anwendung des gastheoretischen Satzes, daß allen Freiheitsgraden derselbe Durchschnittswert der kinetischen Energie entspricht, führt zu der Erkenntnis, daß die gewonnenen theoretischen Grundlagen nur für große Energiedichten und Wellenlängen brauchbar sind. Im weiteren werden die Formeln für die Entropie der Strahlung, das Grenzgesetz für die Entropie der monochromatischen Strahlung bei geringer Strahlungsdichte abgeleitet. Eine molekulartheoretische Untersuchung der Abhängigkeit der Entropie der Gase und verdünnten Lösungen vom Volumen und eine Interpretation des Ausdruckes für die Abhängigkeit der Entropie der monochromatischen Strahlung vom Volumen nach dem Boltzmannschen Prinzip werden durchgeführt. Die Formeln werden auf die Herleitung der Stokesschen Regel über Photolumineszenz und zur Beschreibung der Erzeugung von Kathodenstrahlen durch Belichtung fester Körper und der Ionisierung der Gase durch ultraviolettes Licht angewandt. Gm.

K. STREHL. Über die angeblich anomale Fortpflanzung des Lichtes im Brennraum. Physik. Zs. **6**, 513-514.

Gouy glaubte 1890 gefunden zu haben, daß vor oder nach einem Brennpunkte eine Verspätung oder Verfrühung der Elementarwellen um $\frac{1}{4}\lambda$ stattfinde. Sagnac hat dagegen im Vorjahre (F. d. M. **35**, 857) nachgewiesen, daß sich die Phase nicht sprungweise, sondern stetig ändert, einfach nach den Beugungsgesetzen. Strehl leitet dies aus den Formeln seiner „Theorie des Fernrohres" ab. Lp.

M. LAUE. Über die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien II. Gött. Nachr. 1905, 117-127.

In einer früheren Arbeit hatte der Verf. nur eine Welle betrachtet. Es läßt sich dabei gegen seine Resultate einwenden, daß das Zusammen-

wirken der vielen unabhängigen Strahlen eines Strahlenbündels die durch die Plancksche Hypothese geforderte Ungeordnetheit erhalten könne und so der Konflikt mit dem zweiten Hauptsatz vermieden werde. Verf. zeigt, daß unter gewissen Bedingungen für die Fortpflanzung der Strahlungsintensität im Strahlenbündel dieselben Gleichungen gelten wie bei der einzelnen Welle. Gm.

M. Laue. Die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien. Ann. der Phys. (4) **18**, 523-566.

Die Arbeit führt die beiden früher in den Göttinger Nachrichten erschienenen Untersuchungen weiter aus. Bei der Fortpflanzung der Strahlung in derartigen Medien müssen die Lichtwellen Deformationen erleiden, wobei die natürliche Strahlung nach und nach die für sie geforderte Ungeordnetheit verliert. Es wird gezeigt, daß indessen die Strahlung praktisch vollständig absorbiert ist, bis dieser Zustand vollständig erreicht ist, so daß also ein Widerspruch zum zweiten Hauptsatz nicht auftritt. Bis dahin gilt denn auch der Satz, daß sich die Strahlung mit Gruppengeschwindigkeit ausbreitet. Es wird hierbei noch das Paradoxon aufgeklärt, daß die Gruppengeschwindigkeit größer sein kann, als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Gm.

A. Broca. Sur le pouvoir inducteur spécifique des métaux dans le cas des ondes calorifiques et lumineuses. C. R. **141**, 24-26.

Verf. zeigt, daß man sowohl sein Resultat, das einer sehr großen spezifischen Induktion: $n^2 = 1{,}19\,\lambda r$ (für große Wellen), als auch dasjenige von Planck $n^2 = 0$ aus der Maxwellschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 4\pi\lambda \frac{\partial P}{\partial t}$$

ableiten kann; beide sind die einzigen nicht imaginären Lösungen der aus jener folgenden Gleichung für das Reflexionsvermögen:

$$R = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda r}} \sqrt{\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4}}{\beta^2 + 4}}, \quad \beta = \frac{n^2}{\lambda r}.$$

Gm.

H. Nagaoka. Relation between the index of refraction and density. Tokio Math. Ges. **2**, 293-295.

Die vom Verf. in einer früheren Note hergeleitete Formel (Tokio Math. Ges. **2**, No. 17) für den Brechungsindex war unter der Voraussetzung hergeleitet, daß durch elektromagnetische Schwingungen nur die

einzelnen Atome beeinflußt werden, während in Wirklichkeit die Elektronen eines Atoms Schwingungen unterworfen sind, die von der Zusammenfassung der Atome zu Molekeln herrühren. Der Verf. versucht diesen Einfluß abzuschätzen. Sk.

R. C. Maclaurin. The theory of the reflexion of light near the polarizing angle. Lond. R. S. Proc. (A) **76**, 49-65.

Auf Grund der elektromagnetischen Lichttheorie und unter Annahme einer Übergangsschicht zwischen Luft und dem reflektierenden Medium werden die Formeln für die Zusammensetzung des reflektierten Lichtes entwickelt und auf den Grenzfall des Polarisationswinkels angewendet. Die Rechnungen gehen sehr ins einzelne und werden schließlich an der Erfahrung geprüft. Br.

R. A. Houston. The effect of a surface film in total reflexion. Phil. Mag. (6) **10**, 12-24.

Unter surface film ist die Übergangszone an der Grenze zweier Medien zu verstehen, die man annehmen muß, um die Fresnelsche Theorie mit der Beobachtung in Übereinstimmung zu bringen. Die Arbeit betrifft in erster Linie Beobachtungen zum Nachweis dieser Zone und in zweiter die theoretischen Entwicklungen zur Verwertung der Beobachtungsergebnisse. Die Anordnung wird so getroffen, daß das einfallende monochromatische Licht unter einem Winkel von 45° gegen die Einfallsebene polarisiert ist. Br.

R. A. Houston. Über die Wirkung einer Oberflächenschicht bei Totalreflexion. Phys. Zs. **6**, 208-216.

Es handelt sich um Oberflächenschichten, deren Dicke im Vergleich zur Wellenlänge des Lichtes klein ist. Für das Jahrbuch kommen nur die theoretischen Entwicklungen in Betracht. An erster Stelle werden die für beliebig große Schichtdicke bezüglich der eintretenden Phasendifferenz geltenden Formeln aus den ersten Prinzipien abgeleitet. An zweiter Stelle wird die Elliptizität des Lichtes im Soleil-Babinetschen Kompensator behandelt. Lp.

R. A. Houston. Total reflexion at the second surface of a thin plane parallel plate. Phil. Mag. (6) **10**, 24-33.

Betrifft Versuche über die Reflexion an einer dünnen Glasplatte, deren Rückseite mit Silber oder Jodsilber belegt ist, wenn der Reflexions-

winkel im Bereich der totalen Reflexion liegt, und eine Entwicklung der Formeln, die nötig sind, um die Kontrolle der Theorie durch die Beobachtung zu gestatten, auf Grund der Anschauungen von Voigt. Br.

F. Ehrenhaft. Die diffuse Zerstreuung des Lichtes an kleinen Kugeln. Ultramikroskopische Studie. Wien. Ber. **114**, 1115-1141.

Verf. weist zunächst darauf hin, daß bei dem Ultramikroskop die Gestalt der Beugungsbildchen von der Gestalt der Öffnung, bzw. von Blenden an dieser herrührt. Dann geht er auf die Ableitung der Theorie über, wobei er die Radien der betrachteten Kugeln zwar als klein, aber nicht als unendlich klein gegen die Lichtwellenlänge annimmt. Indem er von den Maxwellschen Gleichungen und insbesondere von den von Hasenöhrl für diesen Fall aufgestellten allgemeinsten Integralen ausgeht, erhält er Aufschluß über die Intensitätsverhältnisse der zerstreuten Strahlen, die Abhängigkeit von der mittleren Größe der Teilchen und über den Polarisationszustand der zerstreuten Strahlen. So ist z. B. die Intensität in erster Annäherung proportional der sechsten Potenz des Radius der Teilchen, ferner ist der Winkel der stärksten Polarisation zwischen 120° und 90° abhängig von der mittleren Teilchengröße. Schließlich werden auch noch die Schlüsse, die sich aus der Farbe auf die Größe der Teilchen ziehen lassen, diskutiert; letztere ist für die Farbe zwar mitbestimmend, insbesondere bei Metallen, indessen nicht allein maßgebend. Gm.

W. Betz. Eine Methode zur Bestimmung der Dicke und optischen Konstanten durchsichtiger Metallschichten. Ann. der Phys. (4) **18**, 590-605.

Verf. teilt die von ihm aus der Theorie von Voigt, bzw. Drude entwickelten Formeln mit für 1) die elliptische Polarisation des bei schiefem Einfall durch eine planparallele, absorbierende Platte hindurchgegangenen Lichtes; 2) die Intensitätsverhältnisse zwischen einfallendem und reflektiertem sowie einfallendem und durchgegangenem Strahl, insbesondere für den Fall, daß das dritte Medium verschieden vom ersten ist. Mit Hülfe dieser Formeln kann man Dicke, Brechungsindex und Absorptionskoeffizienten bestimmen. Gm.

R. C. Maclaurin. On Newton's rings formed by metallic reflexion. Lond. R. S. Proc. (A) **76**, 515-544.

Es wird der Versuch unternommen, die von Stokes (Mathematical and physical papers **5**, 361-364) mitgeteilten Beobachtungen über die

Änderung der Newtonschen Ringerscheinung zwischen Glas und Metall mit der Änderung der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes durch die bekannten Eigenschaften der metallischen Reflexion zu erklären. Bei diesen Beobachtungen tritt ein kritischer Einfallswinkel auf, innerhalb dessen die Erscheinungen anders verlaufen als außerhalb. Entsprechend zerfällt auch die mathematische Behandlung in zwei Teile, und in jedem Teil wird das senkrecht zur Einfallsebene und das parallel zu ihr polarisierte Licht besonders untersucht. Es stellt sich heraus, daß zwischen Theorie und Beobachtung kein Widerspruch besteht. Br.

M. Laue. Die Krümmung der Interferenzstreifen beim Stufengitter. Physik. Zs. **6**, 283-285.

Die Interferenzstreifen beim Stufengitter sind erheblich gekrümmt. Die theoretische Erklärung dieser Erscheinung wird nach der Kirchhoffschen Beugungstheorie in dem gegenwärtigen Artikel gegeben. Aus der Rechnung folgen die Interferenzstreifen als Kurven vierter Ordnung. Ihre konkave Seite wenden sie der Richtung zu, in welcher die Dicke des Stufengitters zunimmt. Die Interferenzstreifen sind also in demselben Sinne gekrümmt, wie die von einem Prisma entworfenen Spaltbilder. Diese Analogie ist kein Zufall; beide Erscheinungen beruhen auf gleichem Grunde. Lp.

A. A. Michelson. A reciprocal relation in diffraction. Phil. Mag. (6) **9**, 506-507.

Kurze Ableitung, wonach die Schwingungszustände auf zwei Kugeln, von denen jede durch den Mittelpunkt der andern geht, sich reziprok so entsprechen, daß jeder als Beugungsbild des andern aufgefaßt werden kann. Br.

J. Boussinesq. Sur l'existence d'un ellipsoïde d'absorption dans tout cristal translucide, même sans plan de symétrie ni axe principal. C. R. **140**, 401-405.

J. Boussinesq. Formule rationnelle du coefficient de l'absorption de la lumière par un corps translucide quelconque. C. R. **140**, 622-624.

J. Boussinesq. Sur l'existence d'un ellipsoïde d'absorption dans tout cristal translucide, même sans plan de symétrie ni axe principal, et sur la construction des rayons lumineux dans les milieux opaques. Darb. Bull. (2) **29**, 131-151.

Verf. führt seine früher gegebenen Entwicklungen über den Absorptionskoeffizienten translucider (schwach absorbierender) Flüssigkeiten

weiter aus. Der Exponent k des Schwächungsverhältnisses e^{-k} der Amplitude auf der Weglänge 1 war: $k = r(a' l'^2 + b' m'^2 + c' n'^2)$, wo r die Strahlgeschwindigkeit, l', m', n' die Richtungskosinus der Schwingungsrichtung gegen die Absorptionshauptachsen, a', b', c' die Absorptionskonstanten sind. Vernachlässigt man r, so erhält man durch Auftragen von $\frac{1}{\sqrt{k}}$ auf der Schwingungsrichtung das Absorptionsellipsoid. Eine rationelle Formel erhält man, wenn man r mit Hülfe der Fresnelschen Formel: $\frac{1}{r^2} = \frac{\mathfrak{l}'^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{m}'^2}{b^2} + \frac{\mathfrak{n}'^2}{c^2}$ ausdrückt, wo $\mathfrak{l}', \mathfrak{m}', \mathfrak{n}'$ die Richtungskosinus der Schwingungsrichtung gegen die Hauptachsen a, b, c der Wellenfläche sind. Bezieht man die Absorption auf die Fortpflanzung in der Zeiteinheit, so wird sie zu

$$f = \frac{a' l'^2 + b' m'^2 + c' n'^2}{\frac{\mathfrak{l}'^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{m}'^2}{b^2} + \frac{\mathfrak{n}'^2}{c^2}},$$

eine Formel, die sich durch Vernachlässigung der Quadrate der relativen Differenzen der a, b, c noch weiter vereinfachen läßt. Gm.

S. Nakamura. Über die Dispersion der optischen Symmetrieachse im durchsichtigen inaktiven monoklinischen Kristall. Physik. Zs. **6**, 172-174.

In einem Kristall des monoklinischen Systems ist für jede Lichtart die kristallographische b-Achse eine optische Symmetrieachse. Aber die beiden anderen in der Ebene 0 1 0 gelegenen optischen Symmetrieachsen ändern ihre Richtung mit der Farbe. Es zeigt sich also in diesem Kristall eine Dispersion der optischen Symmetrieachse. In dem vorliegenden Aufsatze wird die Dispersionsformel nach der Elektronentheorie abgeleitet. Lp.

W. Voigt. Theoretisches und Experimentelles zur Aufklärung des optischen Verhaltens aktiver Kristalle. Ann. der Phys. (4) **18**, 645-694.

Nachdem in den ersten Paragraphen für alle 32 Kristallgruppen die möglichen linearen Beziehungen zwischen den Komponenten eines polaren und axialen Vektors aufgestellt und die Bedeutung sowie die Eigenschaften von deren Koeffizienten untersucht worden sind, wird die Theorie zunächst allgemeiner aufgestellt, eingehender aber nur für die speziell zu untersuchenden Probleme ausgeführt, insbesondere in Annäherungsformeln. Zur Untersuchung der Verhältnisse der Lichtstrahlen wurde besonders ihre Definition durch den Energiefluß benutzt. Die Formeln liefern für

die Ergebnisse des Experimentes den Schluß, daß bei optisch einachsigen enantiomorphen Kristallen senkrecht zur Achse die Wellen sich in sehr lang (1 : 500) gestreckten Ellipsen fortbewegen und zur Darstellung die Theorien mit zwei Aktivitätskonstanten anzusetzen sind. Ein Versuch, an hemimorphen einachsigen Kristallen eine Entscheidung zwischen der Theorie von Pocklington, bzw. der älteren Theorie von Drude und der von Voigt, bzw. der neueren Theorie von Drude (Spiralbahnen der Elektronen in aktiven Körpern) herbeizuführen, mißlang. Dagegen ergaben die theoretischen Entwicklungen für die sogenannte konische Refraktion bei inaktiven Körpern und eine gewisse Singularität derselben bei aktiven Körpern eine genügende Erklärung, die zugleich den von Poggendorff beobachteten Kreis mit umfassen. Diese Erscheinungen rühren nämlich davon her, daß eine zur Achse geometrisch genau parallele Welle nicht erhalten werden kann, sondern stets die Welle eines Strahlenbündels, deren Normale einen feinen Kegel mit der optischen Achse als Kegelachse erfüllen, und deren jeder nur zwei Strahlen zugehören. Gm.

W. Voigt. Über die Wellenfläche zweiachsiger aktiver Kristalle und über konische Refraktion. Verh. Deutsche Phys. Ges. 7, 340-345; Physik. Zs. 6, 787-790; Verh. Naturf. Ges. Meran 2_1, 344.

„Es bestand in bezug auf das optische Verhalten zweiachsiger aktiver Kristalle bisher ein merkwürdiger Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung, insofern die erstere die als innere konische Refraktion bezeichnete Erscheinung nicht zuläßt, während sie die Beobachtung bei aktiven Kristallen genau ebenso liefert wie bei inaktiven. Eine eingehendere Untersuchung der Wellenfläche aktiver Kristalle führt zur Erklärung des scheinbaren Widerspruches, die darin gipfelt, daß das betreffende Phänomen gar nicht die Wirkung der theoretischen konischen Refraktion ist, sondern sich anders erklärt." Lp.

W. Voigt. Bemerkung zur Theorie der konischen Refraktion. Physik. Zs. 6, 672-673.

W. Voigt. Nochmals die Theorie der konischen Refraktion. Physik. Zs. 6, 818-820.

„Die von der Theorie geforderte innere konische Refraktion hat noch nie ein Beobachter wahrgenommen, und kein Beobachter wird sie je wahrnehmen. Was in dem hellen Ring sich ausdrückt, ist nicht die Wirkung der parallel zur optischen Achse fortgepflanzten Welle, sondern die von Wellen, die in kleiner Neigung gegen sie fortschreiten und die gewöhnliche Doppelbrechung erleiden... Bei der äußeren konischen Refraktion unter Benutzung der gebräuchlichen Beobachtungsmethode liegen die Verhältnisse anders, wie eine einfache Überlegung lehrt." Lp.

L. Natanson. Sur une particularité de la double réfraction accidentelle dans les liquides. Journ. de Phys. (4) **4**, 183-190.

S. Zaremba. Note sur la double réfraction accidentelle de la lumière dans les liquides. (Deuxième note.) Journ. de Phys. (4) **4**, 514-516.

L. Natanson. Sur une particularité de la double réfraction accidentelle dans les liquides. (Deuxième note.) Journ. de Phys. (4) **4**, 768-770.

Weitere Beiträge zu dem Streite zwischen den beiden Autoren, die sich zuerst in dem Krakauer Anzeiger befehdet hatten (vgl. F. d. M. **34**, 803-808, 1903 und **35**, 806 u. 847, 1905). Zaremba schließt seine Note mit den Worten: „Ich erachte, daß die Streitfrage zwischen Natanson und mir, eine im Grunde sehr einfache Frage, keine weiteren Entwicklungen mehr verträgt, und betrachte meinerseits die Erörterung als geschlossen.“ Natanson überläßt in seiner zweiten Note das Urteil über die Streitfrage dem Leser. Lp.

G. Wulff. Zur Geometrie der Doppelbrechung. Ann. der Phys. (4) **18**, 579-589.

Die vorliegende Notiz ist den wohlbekannten Interferenzkurven gewidmet, welche man in den Kristallplatten im konvergenten polarisierten Lichte beobachtet. Es wird hier ein einfacher und zugleich genauer geometrischer Ausdruck für den Gangunterschied der beiden ebenen Lichtwellen gegeben, welche durch Zerlegung einer in die Kristallplatte unter beliebigem Winkel eintretenden ebenen Lichtwelle entstehen. Damit wird auch die exakte Definition der oben erwähnten Kurven gegeben und eine genaue Berechnung der Lichtstärke in jedem Punkte des Interferenzbildes ermöglicht, und dies führt zu einer einfachen Methode, die Form derjenigen Flächen genau zu prüfen, welche die Verbreitung des Lichtes in den Kristallen bestimmen. Lp.

V. Drysdale. On the curvature method of teaching optics. Phil. Mag. (6) **9**, 467-491.

Es wird eine Methode entwickelt, mit deren Hülfe man aus der Änderung der Gestalt der Wellenfläche beim Durchgang des Lichtes durch die Trennungsfläche zweier Medien die geometrisch-optischen Eigenschaften dieser Fläche ermitteln kann, und an einigen einfachen Beispielen die praktische Anwendung dieser Darstellungsart erläutert. Br.

J. J. Hallo. La rotation magnétique du plan de polarisation dans le voisinage d'une bande d'absorption. Arch. Néerl. (2) **10**, 148-205.

Die Abhandlung ist eine etwas abgekürzte Übersetzung der Dissertation des Verf. (Amsterdam 1902). Nach zwei verschiedenen Richtungen

hat W. Voigt die Existenz von Erscheinungen vorausgesagt, die mit der magnetischen Zerlegung einer Spektrallinie zusammenhängen, und hat ihre Beschreibung qualitativ und quantitativ gegeben. In einer der beiden Richtungen (magnetische rotatorische Polarisation) wurde die experimentelle Bestätigung eines Teils seiner Schlüsse und unabhängig von seinen theoretischen Betrachtungen von Macaluso und Corbino gegeben (vgl. F. d. M. **29**, 744, 1898 u. **30**, 754, 1899). Voigt selbst lieferte in Gemeinschaft mit Wiechert den experimentellen Nachweis für die zweite Richtung. Die gegenwärtige Arbeit enthält eingehendere quantitative und qualitative Unterstützungen der von Macaluso und Corbino entdeckten starken Drehung der Rotationsebene. Für das Jahrbuch kommen die experimentellen Teile nicht in Betracht; es ist nur auf die vom Verf. entwickelte Theorie hinzuweisen. Diese ist eine Ausführung der von Becquerel in C. R. **127**, 647 u. 899 gegebenen Betrachtungen, durch welche die Beobachtungen der beiden italienischen Physiker erklärt wurden.

Lp.

Lord Rayleigh. The origin of the prismatic colours. Phil. Mag. (6) **10**, 401-407.

Die Arbeit enthält Ansätze zu einer theoretischen Darstellung der durch ein Prisma bewirkten Farbenzerstreuung unter der Annahme, daß diese ähnlich wie bei einem in fließendes Wasser gehaltenen Gegenstand durch ein System von Stauungs- und Nachwirkungswellen zustande kommt.

Br.

Lord Rayleigh. On the influence of collisions and of the motion of molecules in the line of sight, upon the constitution of a spectrum line. Lond. R. S. Proc. (A) **76**, 441-444.

Die Diskussion des Einflusses der im Titel genannten Molekularwirkungen auf die neben dem Dopplereffekt noch eintretende Verbreiterung der Spektrallinien hatte Verf. (Phil. Mag. (5) **27**, 298ff., 1889) und Godfrey (Lond. Phil. Trans. (A) **195**, 329ff; F. d. M. **32**, 819, 1901) zu Resultaten geführt, die um 10 Proz. von einander abwichen. Die vorliegende Arbeit schlägt eine Korrektion der Godfreyschen Rechnungen vor, die diese Differenz zu beseitigen bestimmt ist. Br.

M. Planck. Normale und anomale Dispersion in nichtleitenden Medien von variabler Dichte. Berl. Ber. 1905, 382-394.

Nach einer einleitenden Wiederholung der Grundlagen der vom Verf. entwickelten Theorie (vgl. F. d. M. **34**, 926, 1903 und **35**, 849, 1904)

werden die verschiedenen Formen, welche die Dispersionskurve einer Substanz annehmen kann, an der Hand der Ausdrücke für den Brechungsexponenten abgeleitet und geschildert.

Die Dispersionskurve des ersten Typus ist charakterisiert durch eine merkliche Ausdehnung des Gebietes der anomalen Dispersion, ferner, ebenso wie die Extinktionskurve desselben Typus, durch eine unsymmetrische Form, ein flaches Minimum und ein steiles Maximum des Brechungsexponenten. Während aber bei der Extinktionskurve die rechte Seite des Maximums die steilere ist, verläuft bei der Dispersionskurve die linke Seite steiler. Bei den Kurven vom Typus II ist sowohl das Reflexionsvermögen, als auch die Dispersion des Mediums sehr klein, während die Kurven andererseits einen wohldefinierten und bei dickeren Schichten leicht nachweisbaren schmalen Absorptionsstreifen besitzen. Zwischen diese beiden extremen Fälle reiht sich der Typus III als verbindendes Glied ein. Er vermittelt den stetigen Übergang von den Dispersionskurven des Typus I zu denen des Typus II und umfaßt jene beiden Typen mit als Grenzfälle. Lp.

K. Aichi and T. Tanakadate. On the theory of the rainbow due to a circular source of light. Tokio Math. Ges. **2**, 417-422.

J. M. Pernter. Zur Theorie des von einer kreisförmigen Lichtquelle erzeugten Regenbogens. Wien. Ber. **114**, 785-801.

Die beiden japanischen Physiker haben die Airysche Theorie des Regenbogens dadurch erweitert, daß sie an die Stelle der punktförmigen Lichtquelle die Sonnenscheibe gesetzt haben, und sind dadurch zu einem Doppelintegrale bei der Berechnung geführt (vgl. F. d. M. **35**, 850, 1904). Pernter dagegen hat in seiner bekannten Arbeit (F. d. M. **28**, 753, 1897) eine mit Lichtpunkten besetzte Gerade angenommen, um auf leichte Weise ein angenähertes Resultat zu erhalten. „Daß es in der Tat unerlaubt ist, das Airysche Integral für J zu benutzen, um die von der ganzen Sonnenoberfläche erzeugte Wirkung im Regenbogenbilde durch Integration über die ganze Fläche der Sonne zu erhalten, will ich (Pernter) im folgenden zeigen und dann die Gründe anzudeuten versuchen, warum das nur über einen Sonnendurchmesser gewonnene Integral Resultate liefert, welche der Wirklichkeit sehr nahe entsprechen." Zum Schlusse weist Pernter auch auf die Beobachtungen hin, die „nicht für die Rechnungsresultate von Aichi und Tanakadate sprechen". Diese beiden Gelehrten beharren aber in ihrer Note auf ihrem Standpunkte. Lp.

L. Puccianti. Alcune osservazioni ed esperienze nuove relative ai fondamenti della spettroscopia celeste. Nuovo Cimento (5) **9**, 393-475.

Die umfangreiche Abhandlung ist vom Verf. als Habilitationsschrift eingereicht worden; sie verfolgt den Zweck, die Grundlagen der Spektro-

skopie theoretisch und experimentell zu untersuchen. Die Prüfung erstreckt sich auf die Bedingungen und die Eigenschaften der Emission der Gase, die Modifikationen des durch die Gase gehenden Lichtes und die Beziehungen, welche zwischen diesen beiden Gattungen von Erscheinungen bestehen. Als kritische und zusammenfassende Darstellung der bisher aufgestellten Ansichten hat die Arbeit einen besonderen Wert. Wir führen aus dem Schlußworte folgende Sätze an: Das Kirchhoffsche Gesetz läßt sich streng auf dem größeren Teile der von der Spektroskopie erforschten Fälle der Emission und der Absorption nicht anwenden; denn obschon es wahrscheinlich ist, daß in manchen derselben eine Temperaturstrahlung stattfindet, so fehlt doch die Gewißheit. Um so weniger greift diese Gewißheit Platz bei der Strahlung der Körper, die sich auf der Sonne und den anderen Gestirnen befinden. Statt die Umkehrung des Spektrums als eine Folge aus dem Kirchhoffschen Gesetze anzusehen, kann man sie viel eher als eine experimentelle Tatsache betrachten, die sich aus dem Begriff der Resonanz erklärt; usw. Lp.

W. H. JULIUS. Les images spectrohéliographiques et leur interprétation par la dispersion anomale. Arch. Néerl. (2) **10**, 97-105.

Hale und Ellermann haben eine Methode ersonnen, mittels deren sie mit dem Spektroheliographen von Rumford die Art und Weise ermitteln können, wie Licht von einer bestimmten Wellenlänge über die Sonnenscheibe verbreitet ist. Bei der Erklärung der beobachteten Erscheinungen haben sie sich einer Arbeitshypothese bedient, die von Julius nicht gebilligt wird. „Wir können uns ebenso gut von allen den neuen, bisher vom Spektroheliographen enthüllten Erscheinungen Rechenschaft geben, wenn wir von ganz anderen Vorstellungen über die Konstitution der Sonne ausgehen, vornehmlich von denjenigen, zu welchen unsere Betrachtungen über die Krümmung der Strahlen in nicht homogenen Medien und die anomale Dispersion in absorbierenden Dämpfen geführt haben.“ Lp.

O. M. CORBINO. Sull' osservazione spettroscopica della luce di intensità periodicamente variabile. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**, 332-340; Nuovo Cimento (5) **10**, 29-39.

Verf. erörtert, in welcher Weise ein Spektroskop die von einer Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen zerlegt, wenn die Intensität dieser Lichtquelle periodisch sehr rasch wechselt. Bei der Annahme eines unendlich gut auflösenden Spektroskopes erhält er je nach der Annahme über die Art des periodischen Wechsels (Darstellung durch Fouriersche Reihen etc.) verschiedene Resultate, wie ein diskontinuierliches Spektrum von äquidistanten Linien, zwei Linien konstanter Intensität, aber periodisch variabler Schwingungsdauer, eine durch eine bewegliche Linie dargestellte Bande etc.

Für ein gewöhnliches Spektroskop ist nur die Auflösung in zwei Linien geeignet. Indessen würde selbst bei Verwendung der Methode von Abraham-Lemoine-James mit Wellen von 1 m Länge der Abstand der beiden Linien nur $^1/_{1000}$ des Abstandes der D-Linien betragen. Für Wellen von 1 cm könnte man bis auf $^1/_7$ dieses Abstandes kommen.

Gm.

Weitere Literatur.

A. Schuster. An introduction to the theory of optics. London: Edward Arnold. XV u. 340 S. (1904). [Nature 71, 457-458.]

C. E. Curry. The electromagnetic theory of light. Part I. London: Macmillan and Co. XV u. 400 S. [Nature 73, 316-317.]

J. Walker. The analytical theory of light. Cambridge: The University Press. XV u. 416 S. (1904). [Nature 73, 241-242.]

K. W. Wood. Physical optics. New York: Macmillan. XIII u. 546 S. 8°.

J. Schuster. Theorie der Lichterscheinungen in einem sich bewegenden Medium. Pr. Realgymn. in Smichov. 19 S. (Böhmisch.)

P. Stoenesco-Dunare. Sur la propagation et l'extinction des ondes planes dans un milieu homogène et translucide. (Thèse). Paris: Bonnet. 47 S. 4°.

V. von Schimmelpfennig von der Oye. Zur Theorie der Doppelbrechung. Zweiter Teil (Fortsetzung und Schluß). Pr. Brünn. 37 S. 8°.

V. Grünberg. Farbengleichung mit Zuhülfenahme der drei Grundgleichungen im Young-Helmholtzschen Farbensystem. Ann. der Phys. (4) 17, 165-173.

Aus Wien. Ber. **113**, 627-636 abgedruckt; vgl. F. d. M. **35**, 852, 1904.

B. Geometrische Optik.

E. Study. Über Hamiltons geometrische Optik und deren Beziehungen zur Theorie der Berührungstransformationen. Deutsche Math. Ver. 14, 424-438.

Hamiltons Arbeiten über theoretische Optik sind leider fast unbekannt geblieben, obgleich sie es gewesen sind, die ihn zu seinen berühmten Entdeckungen auf dem Gebiete der Mechanik geführt haben. Erst 1891 hat F. Klein auf die große Wichtigkeit dieser Arbeiten hingewiesen. Und doch nimmt Hamilton durch sie nicht bloß unter den Begründern der Liniengeometrie einen hervorragenden Platz ein, sondern er hat auch einen nicht unwesentlichen Teil von Lies Theorie

der Berührungstransformationen vorweggenommen; denn seine „charakteristische Funktion“ erscheint im Grunde auch schon bei ihm als erzeugende Funktion einer Schar von ∞^1 Berührungstransformationen. Study führt nun aus, wie sich gewisse Untersuchungen Hamiltons gestalten, wenn man die Lieschen Begriffe Element und Elementverein heranzieht und die Lieschen Elementkoordinaten dadurch vervollkommnet, daß man den Begriff des orientierten Flächenelementes einführt, was durch Benutzung überzähliger Elementkoordinaten geschehen kann. Die Berührungstransformationen, durch welche Reflexionen und Brechungen von Lichtstrahlen dargestellt werden, erscheinen dabei im Gegensatze zu Lie nicht durch aequationes directrices in Punktkoordinaten bestimmt, sondern durch solche in Ebenenkoordinaten. El.

L. Matthiessen. Mathematische Theorie der Spiegelung in abwickelbaren Flächen. Zs. f. Math. u. Phys. 52, 138-150.

Auf einer Ebene befinde sich, senkrecht stehend, ein Kreiskegel mit spiegelnder Oberfläche. Außerhalb desselben sei ein leuchtender Punkt, der ein unendlich dünnes homozentrisches Strahlenbündel auf die spiegelnde Fläche entsendet, wo es astigmatisch deformiert in das Auge eines Beobachters reflektiert wird. Die bekannten Neumannschen Gleichungen für die Bildweiten der sagittalen und meridionalen Strahlenanteile werden dann auf dieses reflektierte Bündel angewendet. Die Diskussion der betreffenden Gleichungen hat vorwiegend mathematisches Interesse. Insbesondere stellt der Autor den Satz auf, daß die Aufgabe, für einen gegebenen leuchtenden Punkt die Richtung desjenigen Strahles zu finden, welcher von einem unbekannten Spiegel nach einem festen Augenpunkt reflektiert wird, mathematisch nur lösbar ist, wenn jener Spiegel ein Kreiskegel oder ein Kreiszylinder ist, während die Lösung für die übrigen abwickelbaren Flächen unmöglich erscheint. Gln.

F. Biske. Korrektionsspiegel zu parabolischen Reflektoren. Zs. f. Math. u. Phys. 52, 191-201.

Nachdem der Verf. einen mathematischen Ausdruck für die lineare und die winkelige Aberration parabolischer Spiegel hergeleitet hat, gibt er die Aufstellung und Auflösung der Differentialgleichung eines Korrektionsspiegels. In dieser Gleichung ist die Aberration für einen bestimmten Winkel α, den ein Strahlenbüschel mit der Achse des Paraboloids bildet, aufgehoben. Für größere oder kleinere α läßt sich die Korrektion durch achsiale Bewegung des Korrektionsspiegels in der Richtung zum parabolischen, resp. in der entgegengesetzten Richtung ermöglichen.

In der ferneren Darstellung wird gezeigt, wie sich eine punktweise und winkeltreue Abbildung des Objekts ermöglichen läßt. Gln.

F. Biske. **Katoptrisches Okular.** Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 425-470.

Der Autor geht von dem Gedanken aus, daß bei Spiegelteleskopen der Vorzug der Achromasie wenigstens zum Teil wieder dadurch verloren geht, daß die zur Verwendung kommenden dioptrischen Okulare nicht vollständig achromatisch sein können. Er schlägt deshalb vor, für das Okular ebenfalls einen Reflektor zu verwenden, und stellt die zur Erfüllung der verschiedenen Bedingungen (bez. sphärische Aberration, Vergrößerung, Lage der Austrittspupille usw.) erforderlichen mathematischen Beziehungen auf. An dem großen Reflektor zu Melbourne, der nach Cassegrainschem Typus eingerichtet ist, wird ein Zahlenbeispiel ausgeführt. Zum Schluß weist der Autor auf die Verwendung derartiger katadioptrischer Okulare für die Zwecke der Stellarphotometrie hin. Gln.

J. Fraunhofer. **Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Glasarten in bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernröhre. Herausgegeben von A. von Oettingen.** Leipzig: Engelmann. 36 S. 8°. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 150.)

Die vorliegende Schrift, die zuerst in den Denkschriften der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu München für die Jahre 1814 und 1815 erschien, ist längst Gemeingut aller Wissenschaftler geworden, so daß es sich erübrigt, über ihren Inhalt zu sprechen. Es ist aber jedenfalls mit Freuden zu begrüßen, daß es durch diese neue Herausgabe außerordentlich erleichtert wird, die klassischen Ausführungen Fraunhofers zu studieren. Daneben werden die Anmerkungen, die der Herausgeber der Schrift angefügt hat, sicherlich die Beachtung des Lesers auf sich ziehen. Auch die schöne Wiedergabe der von Fraunhofer angefertigten Spektralzeichnung wird niemand gern missen, da sie besonders gut zeigt, mit welcher Vollendung der Meister in seinen Untersuchungen gearbeitet hat. Gln.

K. Schwarzschild. **Untersuchungen zur geometrischen Optik.** Gött. Abh. (2) **4**. **I. Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs.** 31 S. **II. Theorie der Spiegelteleskope.** 28 S. **III. Über die astrophotographischen Objektive.** 54 S.

In dem ersten Teile der vorliegenden Untersuchungen gibt der Verf. eine Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs. Nur gar zu oft hat man die von Hamilton eingeführte „charakteristische Funktion“ als etwas zu Theoretisches aus dem Gebiet der rechnenden Optik verwiesen. Schwarzschild zeigt nun, daß man gerade durch Anwendung dieser Funktion, die Bruns mit dem Namen „Eikonal“ belegt hat, sehr bequem die praktisch wichtigsten Sätze,

insbesondere die Seidelschen Formeln, entwickeln kann. Um den Begriff „Eikonal" selbst zu erläutern, kann man sich folgender Erklärung bedienen: Sind in einem optischen System zwei Punkte $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ und $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ gegeben, so ist im allgemeinen ein Lichtstrahl vorhanden, der vom ersten Punkte zum zweiten führt. Bezeichnet dann s die Wegstrecken, die dieser Strahl in den Medien vom Brechungsexponenten n zurücklegt, so heißt $E = \sum ns$, die sogenannte „optische Weglänge" des Strahls, als Funktion der Variabeln $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ Eikonal. Verschiebt man die beiden Punkte P_0 und P_1, und bezeichnet man die Richtungskosinus der Normalen auf den Flächen konstanten Eikonals in P_0 und P_1 mit m_0, p_0, q_0 und m_1, p_1, q_1, so ergeben sich für die Änderungen des Eikonals die Gleichungen:

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = n_1 m_1, \quad \frac{\partial E}{\partial x_0} = -n_0 m_0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial y_1} = n_1 p_1, \quad \frac{\partial E}{\partial y_0} = -n_0 p_0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = n_1 q_1, \quad \frac{\partial E}{\partial z_0} = -n_0 q_0.$$

In diesen Gleichungen liegt die praktische Bedeutung des Eikonalbegriffs. Denn ist E als Funktion von $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ bekannt, so kann bei gegebenem Ausgangspunkt x_0, y_0, z_0 und gegebener Ausgangsrichtung m_0, p_0, q_0 durch obige Gleichungen der Endpunkt x_1, y_1, z_1 gefunden werden. Um die Unannehmlichkeiten zu vermeiden, die dadurch entstehen, daß in der Nähe des zu P_0 konjugierten Brennpunktes E Singularitäten bekommt, führt Schwarzschild eine E verwandte Größe ein, das Winkeleikonal W. Dabei ist W eine Funktion der vier Variabeln p_0, q_0, p_1, q_1. Im weiteren Verlaufe der Untersuchungen gibt der Verf. die Reihenentwicklung des Eikonals und untersucht die Fehler dritter und fünfter Ordnung eines optischen Systems. Bei der Erörterung der Fehler eines zusammengesetzten optischen Systems ergibt sich der Satz, daß die Fehler dritter Ordnung eines Gesamtsystems sich aus den Fehlern der Einzelsysteme additiv zusammensetzen. Zum Schluß dieses Teiles werden die Seidelschen Formeln entwickelt und die Ableitung des Petzvalschen Theorems gegeben. Anschließend an diese Untersuchungen, entwickelt Schwarzschild in dem zweiten Hauptteile seiner Arbeit eine Theorie der Spiegelteleskope. Zunächst wird daselbst eine Theorie der Fehler dritter Ordnung eines Spiegelsystems gegeben. Als praktische Anwendung ergibt sich hieraus eine Übersicht über die Verwendbarkeit von Systemen, die aus zwei Spiegeln zusammengesetzt sind. Auch die Konstruktionsdaten eines sehr günstigen Systems sind beigegeben. Zum Schluß werden auch Systeme mit großen Öffnungswinkeln untersucht und das Problem behandelt, ein System von zwei Spiegeln anzugeben, welches nicht nur einen scharfen Brennpunkt besitzt, sondern auch streng die Sinusbedingung erfüllt.

Der dritte Hauptabschnitt endlich handelt über die astrophotographischen Objektive. Der Verf. ist bestrebt, in diesem Teile eine kritische Beurteilung der astrophotographischen Objektivsysteme so weit durchzuführen, als dies auf Grund der Theorie der Fehler dritter Ordnung möglich ist. Um dies zu erreichen, wird die Aufgabe gestellt, Systeme selbst zu errechnen, die von Fehlern dritter Ordnung möglichst frei sind. Bevor an die Lösung dieser Aufgabe gegangen wird, gibt Schwarzschild noch eine Theorie der Farbenfehler und behandelt die Frage nach achromatischen Systemen aus einer Glassorte. Sodann werden die Fehler dritter Ordnung einer dünnen Linse untersucht und erörtert, und daran anschließend sind die allgemeinen Formeln für die Fehler von Systemen zusammengestellt, die aus dünnen Linsen zusammengesetzt sind. Die folgenden Abschnitte behandeln dann der Reihe nach das gewöhnliche Fernrohrobjektiv, das Petzvalobjektiv, den Aplanaten und das Taylorobjektiv. Im Schlußparagraphen endlich sind die Hauptresultate dieser außerordentlich interessanten und äußerst wichtigen Untersuchungen zusammengestellt. Gln.

E. Gatti. Particolarità della rifrazione dovuta ad una corona cilindrica retta. Torino Atti **40**, 732-746.

Man denke sich einen Körper, begrenzt von zwei koaxialen Zylinderflächen, deren senkrechte Querschnitte also zwei konzentrische Kreise sind; der Brechungsindex der Masse des Körpers sei größer als 1. Man betrachte den Gang eines Lichtstrahls in einem solchen senkrechten Querschnitt. Der Strahl wird an der äußeren Zylinderfläche gebrochen, treffe die innere Zylinderfläche und werde hier reflektiert, treffe dann die äußere Fläche zum zweiten Male und trete nach abermaliger Brechung aus. Die Aufgabe, welche Gatti stellt und löst, ist die: zu ermitteln, ob es Fälle gibt, bei denen der austretende Strahl die direkte Fortsetzung des einfallenden ist, der Strahl also so fortgeht, als ob er keine Brechung erfahren hätte. Es ergibt sich, daß durch jeden Punkt der äußeren Zylinderfläche, falls eine Bedingung zwischen den Radien der Querschnitte erfüllt ist, zwei solche Strahlen gezogen werden können, die symmetrisch zu dem Radius durch den Punkt liegen. Lp.

F. Meisel. Über die übliche Erklärung der Brennweite einer Linse. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 102-105.

Befürwortet eine größere Präzision in den Definitionen der elementaren Lehrbücher unter Verweisung auf die grundlegenden Untersuchungen von Gauß und Abbe. Lp.

R. J. Sowter. On ellipsoidal lenses. Phil. Mag. (6) **10**, 180-183.

Betrifft den Durchgang eines astigmatischen Strahlenbündels durch eine Ellipsoidlinse und den dadurch geschaffenen neuen astigmatischen Zustand auf Grund einer besonderen, als bekannt vorausgesetzten, dem Ref. aber nicht zugänglichen optischen Theorie des Verf. Br.

W. Pscheidl. Neue Berechnung einer aplanatischen Brenn- und Beleuchtungslinse. Physik. Zs. **6**, 511-513.

J. Petri. Neue Berechnung einer aplanatischen Brenn- und Beleuchtungslinse. Physik. Zs. **6**, 632-633.

Beide Autoren behandeln bekannte optische Eigenschaften der Rotationsflächen von Kegelschnitten. Pscheidl führt am Schlusse seines Artikels an, er habe nach Beendigung der Arbeit erfahren, daß Descartes in seiner Dioptrik die bezügliche Eigenschaft der plankonvexen hyperbolischen Linse nachgewiesen hat. Es möge hinzugefügt werden, daß dieser Gegenstand auch in der Géométrie von Descartes am Ende des zweiten Buches behandelt ist. John Herschel hat die bezüglichen Rechnungen in seinem Werke On light (deutsch von Schmidt 1831) in den Nummern 232-237 gegeben. Besonders durch den Einfluß von Karl Schellbach sind diese Dinge als hübsche Anwendungen einfacher Eigenschaften der Kegelschnitte in den Unterricht auf Gymnasien und Realanstalten übergegangen. Lp.

S. D. Chalmers. The theory of symmetrical optical objectives II. Lond. R. S. Proc. **74**, 396-399.

Enthält eine Anwendung der vom Verf. früher (Lond. R. S. Proc. **72**, 267-272; F. d. Math. **34**, 904, 1903) entwickelten Darstellungsart auf die mit dem Bildwinkel des Objektivs in Zusammenhang stehende Frage. Br.

Lord Rayleigh. An optical paradox. Phil. Mag. (6) **9**, 779-781.

G. J. Stoney. On an optical paradox. Phil. Mag. (6) **10**, 126-129.

Kurze Note, die sich auf die Lichterscheinung bezieht, die man in einem Fernrohr erblickt, wenn ein reelles Bild eines Gegenstandes durch eine Sammellinse auf der Objektivoberfläche eines Fernrohrs erzeugt wird, einschließend eine Andeutung des Weges, wie sich der Widerspruch zwischen Beobachtung und dem Ergebnis sich zuerst aufdrängender theoretischer Überlegungen durch eine Vervollständigung der Theorie erklären ließe. Die Bemerkung von Stoney betrifft eine Diskussion der wirklich beobachteten Erscheinungen. Br.

A. Gemeiner. Über die Reliefwirkung der Doppelfernrohre (Binocles). Mitt. üb. Art. u. Genie 36, 773-806.

„Wenn man ein Doppelfernrohr auf einen mehr oder weniger weit entfernten Gegenstand richtet, so entstehen von demselben zwei virtuelle Bilder, das eine B_l infolge der Wirkung des linken, das andere B_r infolge der Wirkung des rechten Fernrohrs. Beim gleichzeitigen Gebrauche beider Augen erscheint uns das Fernrohrbild weder in B_l, noch in B_r, sondern dort, wo sich die Achsen der von B_l und B_r ausgehenden und aus den Okularen austretenden Lichtbüschel schneiden. Der Schnittpunkt ist das im Raume schwebende binokulare oder stereoskopische Bild des betrachteten Objektpunktes. — Die vorliegende Studie hat den Zweck, die Lage des binokularen Bildes mathematisch festzulegen, dessen Gestalt zu untersuchen und zu bestimmen, welche Breiten- und Tiefenabmessungen des in einer gegebenen Entfernung befindlichen Gegenstandes bei Betrachtung desselben durch ein Doppelfernrohr noch wahrnehmbar sind. Die Grundlage dieser Untersuchungen bildet die Theorie des Sehens mit unbewaffneten Augen. Es erscheint daher zweckdienlich, mit der Besprechung der wichtigsten Eigenschaften des Sehens mit freien Augen zu beginnen.“ Lp.

L. Malassez. Évaluation du pouvoir grossissant des objectifs microscopiques. C. R. 141, 1004-1006.

Das Vergrößerungsvermögen P, das nach dem Vorschlag des Verf. als Vergrößerung durch das Objektiv in der Entfernung 1 von dessen hinterer Fläche definiert ist, wird auf einfache und genaue Weise durch die Formeln

$$P = (1 - \varphi'_p)\,\gamma, \quad P = (1 + \varphi'_a)\,\gamma$$

berechnet. Hier bedeutet γ die Gesamtvergrößerung des Mikroskops, φ'_p und φ'_a den hinteren Abstand Brennpunkt-Objektivfläche, je nachdem der hintere Brennpunkt hinter oder vor der hinteren Objektivfläche liegt.

Die Formeln zeigen, daß das Vergrößerungsvermögen nur ausnahmsweise der Gesamtvergrößerung gleich sein kann, nämlich dann, wenn φ'_p und φ'_a gleich Null werden. Bei schwachen Objektiven, wo der hintere Brennpunkt hinter der letzten Objektivfläche sich befindet, ist das Vergrößerungsvermögen kleiner als die Gesamtvergrößerung, da ja die letztere mit $1 - \varphi'_p$, welcher Ausdruck kleiner als 1 ist, multipliziert wird: dagegen wird bei stärkeren Objektiven, wo der hintere Brennpunkt vor der letzten Fläche liegt, das Vergrößerungsvermögen größer als die Gesamtvergrößerung.

Da die hinteren Abstände Brennpunkt-Objektivfläche die Gesamtvergrößerung beeinflussen, ist das Vergrößerungsvermögen nicht immer in Übereinstimmung mit der Gesamtvergrößerung; deshalb können auch Objektive mit gleicher Gesamtvergrößerung bei gleicher Entfernung verschiedene Vergrößerungen geben. Gln.

A. Gleichen. Vorlesungen über photographische Optik. Leipzig: G. J. Göschen. IX u. 230 S. 8°.

Der Verf. gibt die Darstellung der photographischen Optik nach den Vorlesungen, die er an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg im Wintersemester 1902-1903 gehalten hat. Das erste Kapitel enthält die physikalischen und geometrischen Grundlagen der Bilderzeugung, das zweite die Bilderzeugung durch zentrierte Kugelflächen im paraxialen Gebiete. Im dritten und vierten Kapitel werden die Lehren von der Strahlenbegrenzung und der Achromasie abgehandelt. In den weiteren Kapiteln findet dann die Entwicklung der wichtigsten monochromatischen Fehler statt, nämlich der Aberration, des Astigmatismus, der Koma aus der Abweichung von der Sinusbedingung, und zwar geht der Autor hier von den Prinzipien der Wellentheorie aus und entwickelt die betreffenden mathematischen Ausdrücke aus der Hamiltonschen Funktion. Den Kern des Buches bildet das neunte Kapitel, in dem die Theorie der sogenannten natürlichen Blende dargestellt wird. Hierdurch ist eine neue Methode zur trigonometrischen Durchrechnung optischer Systeme, insbesondere photographischer Objektive gegeben, welche zur Feststellung des Astigmatismus aus der Koma in geneigten Bündeln eine bessere Kontrolle der erhaltenen Resultate geben soll als die bisherigen Methoden. Den Schluß des Bandes bilden Anleitungen zur trigonometrischen Durchrechnung von Systemen an der Hand einer größeren Reihe von praktischen Beispielen. Gln.

E. Haudié. Étude photométrique des images formées par les systèmes optiques. Journ. de Phys. (4) 4, 693-699.

„Es knüpft sich einiges Interesse daran, nachzuweisen, daß bei allen gebräuchlichen Typen optischer Systeme, seien sie einfach oder zusammengesetzt, die gewöhnlichen auf die Helligkeit und die Beleuchtung bezüglichen Folgerungen unmittelbar aus den beiden auf den eigenen Glanz und die Beleuchtung eines Bildes bezüglichen Grundeigenschaften fließen, wie Kirchhoff und Cornu diese Eigenschaften aufgefaßt haben.“ Lp.

R. Daublebsky v. Sterneck. Versuch einer Theorie der scheinbaren Entfernungen. Wien. Ber. 114, 1685-1703.

Die Erfahrung lehrt, daß man bei Distanzschätzung von einem festen Punkt aus die Entfernungen im allgemeinen um so mehr unterschätzt, je größer sie sind. Stehen nun diese Schätzungen in irgend welchen gesetzmäßigen Beziehungen zu einander?

Zur Beantwortung dieser Frage wurden vom Verf. Versuche vorgenommen, als deren Objekte die Lampen der Straßenbeleuchtung dienten.

Die Entfernungen der Lampen vom Beobachtungsstandpunkt aus wurden geschätzt und dann abgeschritten. Bedeutet d die wahre Distanz und d' die taxierte, so ergab z. B. die eine Beobachtungsreihe

$$d = 56\,m \quad 100\,m \quad 143\,m \quad 205\,m \quad 270\,m$$
$$d' = 100 \quad 170 \quad 215 \quad 250 \quad 270\ .$$

Die d' stellen nur relative Größen dar. Der Abstand d'_1 der ersten Lampe vom Beobachter wurde gleich 100 gesetzt und die Entfernung $d'_2, d'_3, \ldots$ mit dieser Lampe verglichen.

Ein mathematischer Ausdruck für den Zusammenhang der Größen d und d' muß die Form haben: $d' = f(d)$. Da erfahrungsgemäß kleine Entfernungen nicht unterschätzt werden, ist dieser Ausdruck so zu gestalten, daß bei einem kleinen Werte d der Wert d' nahezu mit d zusammenfällt. Ferner darf in der gesuchten Funktion die Größe d' bei noch so großem d einen bestimmten endlichen Wert nicht überschreiten, weil uns z. B. der Mond in derselben Entfernung erscheint, wie die ihn umgebenden Fixsterne. Den beiden gestellten Bedingungen entspricht als einfachster Ausdruck: $d' = cd/(c+d)$, wo c eine bestimmte, ziemlich große Konstante bedeutet. Aus

$$d'_1 = \frac{cd_1}{c+d_1}, \quad d'_2 = \frac{cd_2}{c+d_2}$$

ergibt sich sofort

$$c = \frac{d_1 d_2 (1 - d'_1/d'_2)}{d_2 d'_1/d'_2 - d_1}.$$

So entsteht bei jeder Versuchsreihe für c ein Mittelwert; für die oben angegebene ist $c = 216$.

Einen Maßstab für die Verwendbarkeit der Formeln gewinnt man dadurch, daß man mit dem betreffenden c nach der Formel die Distanzen d' berechnet und die Einheit für die geschätzten d' so wählt, daß in jeder Versuchsreihe der kleinste geschätzte Wert d' mit dem aus der Formel gefundenen numerisch übereinstimmt. Dann ist in der angeführten Versuchsreihe

$$d' \text{ (geschätzt) } 44{,}4\,m,\ 75{,}6\,m,\ 95{,}6\,m,\ 112{,}0\,m,\ 122{,}8\,m$$
$$d' \text{ (berechnet) } 44{,}4\,m,\ 68{,}3\,m,\ 86{,}0\,m,\ 105{,}2\,m,\ 120{,}0\,m.$$

Die Übereinstimmung zeigt, daß die geschätzte Distanz d' mit der wahren Distanz d in dem Zusammenhang $d' = cd/(c+d)$ steht, wo c für ein und dieselbe Versuchsreihe konstant bleibt, für jede andre Versuchsreihe aber einen andern Wert hat.

Die Konstante c, die „Unterschätzungskonstante“, hängt natürlich davon ab, ob die Umgebung hell erleuchtet oder finster, einförmig oder abwechslungsreich ist, überhaupt davon, welche Erfahrungsdaten uns vom Beobachtungsort zugänglich sind.

Die vom Verf. entwickelte Theorie gestattet eine ungezwungene Erklärung der scheinbaren Konvergenz paralleler Linien. Nimmt man

den Standpunkt des Beobachters als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, und verläuft in der Entfernung a von der y-Achse eine Gerade, so ist deren Gleichung: $x = a$. Diese Gerade erscheint jedoch wegen der Unterschätzung der Entfernungen als krumme Linie, und einer ihrer Punkte, p, wird nicht in der Entfernung d, sondern in der Entfernung

$$d' = cd/(c + d) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

gesehen. Durch Benutzung der Beziehung $x/\sqrt{x^2 + y^2} = a/d$ ergibt sich schließlich nach Elimination von d und d' als Gleichung der Kurve $c^2(a - x)^2 = a^2(x^2 + y^2)$. Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, deren reelle Achse mit der x-Achse zusammenfällt. Für $x = 0$ wird $y = \pm c$. Die Punkte, in denen die Kurve die y-Achse schneidet, haben also die Entfernung c vom Beobachtungsort. Bedeutet nun die Gerade $x = a$ eine der Parallelen, z. B. eine der beiden Eisenbahnschienen, die Ordinatenachse aber die Mittellinie zwischen den beiden Schienen, so schneiden sich die letzteren scheinbar in der Entfernung c.

Ein ähnliches Problem ist das der Alleekurve, das in seiner einfachsten Fassung lautet: Welche Kurve ist so beschaffen, daß ihre Punkte, von einem fixen Standort aus gesehen, in einer gegebenen geraden Linie zu liegen scheinen? Durch Anwendung der Theorie findet man, daß die Kurve eine Hyperbel mit der Gleichung $c^2(x - a)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ ist. Diese Hyperbel ist mit der früheren identisch; nur ist es offenbar der andre Ast derselben, der die Alleekurve darstellt.

Das Resultat kann in den folgenden Satz zusammengefaßt werden: „Eine gegebene, nach beiden Seiten ins Unendliche verlaufende Gerade wird von einem gegebenen Standpunkt aus als der eine Ast einer bestimmten Hyperbel gesehen; der andre Ast derselben Hyperbel hat dann die Eigenschaft, von demselben Standpunkt aus als die gegebene gerade Linie zu erscheinen."

Die ferneren Untersuchungen des Verf. betreffen die scheinbaren Dimensionen des Himmelsgewölbes. Schwebt in der Höhe von $h = 2500\ m$ eine so große Wolkenschicht, daß der ganze Himmel gleichmäßig bedeckt erscheint, so sind die scheinbaren Dimensionen nach der Theorie $h' = 2{,}0\ km$ und $r' = 10{,}0\ km$. Für die Beurteilung dieser Distanzen bei heiterem Tageshimmel fehlen alle Erfahrungselemente. Jedoch ist man geneigt, das Verhältnis der vertikalen Erhebung im Zenit zum Radius des Schnittkreises mit der Horizontalebene mit 1 : 4 oder 1 : 3 einzuschätzen.

Gln.

Weitere Literatur.

H. Kefferstein. Strahlengang und Vergrößerung in optischen Instrumenten. Eine Einführung in die neueren optischen Theorien. Berlin: J. Springer. 42 S. Lex. 8° (Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft, Heft 5).

M. Linnemann. Über nicht-sphärische Objektive. Diss. Göttingen.

Th. Nolan. The telescope. New York: Van Nostrand Company (1904). [Nature 71. 460.]

M. C. Curey. Télémètre de côte à grande base horizontale, système du colonel russe de la Launitz. Rev. d'Artillerie 67, 5-43.

Kapitel 3.

Elektrizität und Magnetismus.

A. Winkelmann. Handbuch der Physik. Zweite Auflage. Vierter Band. Zweite Hälfte. Elektrizität und Magnetismus I. Leipzig: J. A. Barth. XIV u. S. 385-1014 gr. 8°.

Die erste Hälfte dieses Bandes ist F. d. M. **24**, 908, 1903, angezeigt worden. Die vorliegende zweite Hälfte umfaßt folgende Abschnitte: Elektrische Leitfähigkeit der Elektrolyte, von R. Luther (385-453). — Die Elektrizität in Gasen, von J. Stark (454-654). — Radioaktivität. von J. Stark (654-686). — Die atmosphärische Elektrizität, von H. Gerdien (687-729). — Thermoelektrizität, von F. Braun (730-758). — Wärmewirkung des Stromes infolge des Widerstandes, von M. Cantor (759-765). — Pyro- und Piezoelektrizität, von F. Pockels (766-793). — Theorie des galvanischen Elementes, von M. Cantor (794-847). — Berührungselektrizität, von P. Duhem (848-867). — Elektrolyse und Ionenwanderung, von R. Luther (868-916). — Spezielle Elektrolyse, von R. Luther (916-939). — Elektrische Endosmose und Strömungsströme, von L. Graetz (940-967). — Galvanische Polarisation, von M. Cantor (968-999). — Die Akkumulatoren, von M. Cantor (1000 bis 1007). — Sachregister (1008-1014). — Den breitesten Raum nimmt hiernach der von J. Stark bearbeitete Abschnitt über die Elektrizität in Gasen ein, dem sich das Kapitel über Radioaktivität auf natürliche Weise angliedert. Dieser Abschnitt mußte völlig umgestaltet werden, wenn die neuesten Entdeckungen berücksichtigt werden sollten. „Die elektrischen Erscheinungen in Gasen waren noch vor einem Jahrzehnt in tiefes Dunkel gehüllt, trotzdem zahlreiche qualitative Beobachtungen über sie vorlagen und von mehreren Seiten der Versuch gemacht wurde, sie aus einfachen Grundvorstellungen zu erklären und zu systematisieren. Das letzte Jahrzehnt hat indes dieses dunkle Gebiet in zweierlei Hinsicht für die exakte Forschung erobert. Erstens hat es umfassende und zuverlässige quantitative Messungen an der elektrischen Strömung in Gasen geliefert und damit eine sichere Grundlage für einen theoretischen Aufbau gegeben; zweitens hat es eine einfache Theorie der elektrischen Erscheinungen in Gasen entwickelt, die Ionentheorie, welche diese organisch zu gliedern und neue Beziehungen aufzudecken gestattet. Unterstützt wurde dieser Erfolg durch die Entdeckung neuer wichtiger Strahlungsvorgänge, nämlich der Röntgen- und der Becquerelstrahlen.“

„Die Anlage des Buches vom Verf. ist für vorliegenden Artikel in den Hauptzügen beibehalten; inhaltlich ist es indes nach dem letzten Stand der Forschung Anfang 1904 umgearbeitet worden, insbesondere die Abschnitte über Ionisierung, unselbständige Strömung und elektrisches Leuchten. Der Radioaktivität ist ein selbständiger Artikel gewidmet worden."

Die einzelnen Teile dieses großen Artikels sind betitelt: Ionisierung und Elektrisierung. — Charakteristik der elektrischen Strömung. — Wanderung der Ionen und Ionenkonstanten. — Ionenstrahlen. — Kräfte auf die Ionen. — Thermische, optische und chemische Wirkungen.

An dem Beispiele dieses einen Artikels mag der Leser erkennen, daß das Werk von allen Mitarbeitern auf der Höhe der Forschung gehalten wird. Das ungemein reiche Zitatenverzeichnis, das den Text fortlaufend begleitet, verweist den Forscher, der sich in irgend eine Frage vertiefen will, auf die zu befragenden Quellen, und obschon gerade auf dem Felde der Elektrizität die Fortschritte so schnell gemacht werden, daß ein Sammelwerk, wie das vorliegende, rasch veraltet, so ist es doch von bleibendem Werte, indem es den Standpunkt der Wissenschaft zur Zeit seiner Veröffentlichung mit großer Treue kennzeichnet. Lp.

A. Winkelmann. Handbuch der Physik. Zweite Auflage. Fünfter Band. Erste Hälfte. Elektrizität und Magnetismus II. Leipzig: J. A. Barth. VIII u. 515 S. gr. 8°.

Dem Umfange und der Bedeutung der Elektrizitätslehre innerhalb der Physik entspricht es, wenn ihr zwei der starken Bände des Winkelmannschen Handbuchs gewidmet werden, das allerdings in seinen schweren Bänden äußerlich diesem Namen wenig entspricht. Der vorliegende Halbband ist ausschließlich von F. Auerbach geschrieben; er umfaßt die folgenden Abschnitte: 1. Magnetismus im allgemeinen. 2. Magnetische Messungen. 3. Magnetische Induktion. a) Theorie; b) Beobachtungen. 4. Magnetismus der verschiedenen Körper. 5. Beziehungen des Magnetismus zur Mechanik. 6. Beziehungen des Magnetismus zur Wärme. 7. Beziehungen des Magnetismus zum Licht. 8. Elektromagnetismus. 9. Erdmagnetismus.

„Während die magnetischen Erscheinungen früher ein in sich abgeschlossenes Ganzes bildeten, haben sie nunmehr einen vielfältigen und recht innigen Zusammenhang mit allen anderen Gebieten der Physik gewonnen, ganz besonders mit den elektrischen Erscheinungen. Es handelt sich hier einerseits um jene Wechselwirkungen zwischen elektrischen und magnetischen Kräften, welche die „elektromagnetischen" und die „magnetoelektrischen" Erscheinungen hervorrufen, andererseits darum, daß man häufig mit gutem Erfolge Magnete als elektrische Stromgebilde oder umgekehrt Ströme als magnetische Gebilde auffassen kann. Auch mit Lichterscheinungen besteht ein derartiger doppelter Zusammenhang: tatsächliche

Wechselwirkungen einerseits und der Aufbau der Lichttheorie auf elektromagnetischer Grundlage andererseits. Von großem Interesse sind schließlich auch die Beziehungen des Magnetismus zur Mechanik und zur Lehre von der Wärme. Unter diesen Umständen ist es begreiflicherweise unmöglich, das Gebiet scharf abzugrenzen." Lp.

A. Righi. Die moderne Theorie der physikalischen Erscheinungen (Radioaktivität, Ionen, Elektronen). Aus dem Italienischen von B. Dessau. Leipzig: J. A. Barth. 139 S.

Ausgehend von dem Begriff der elektrolytischen Ionen, kommt der Verf. zur Darstellung der modernen Anschauungen über die Elektronen. Es werden dann behandelt: Die Elektronen und die Lichterscheinungen, die Natur der Kathodenstrahlen, die Ionen in Gasen und in festen Körpern, die Radioaktivität mit Darstellung der Rutherfordschen Zerfalltheorie, Masse, Geschwindigkeit und elektrische Ladung der Ionen und Elektronen, die Konstitution der Materie. — Die Darstellung ist durchaus populär gehalten. Der deutschen Übersetzung liegt die zweite italienische Auflage zugrunde. In einem Anhang sind die nach Vollendung des Buches bis 1905 erschienenen wichtigsten einschlägigen Arbeiten angegeben. Gm.

M. Abraham. Theorie der Elektrizität. II. Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Leipzig: B. G. Teubner. X u. 405 S.

Das Werk bildet als zweiter Band der „Theorie der Elektrizität" die Fortsetzung des vom Verf. umgearbeiteten Föpplschen Werkes: Einleitung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Es ist eine geschlossene Darstellung der heutigen Elektronentheorie vom Standpunkte des Verf. aus. Er teilt die Materie zunächst in zwei Abschnitte: I. Das Feld und die Bewegung der einzelnen Elektronen. (Kap. 1. Die physikalischen und mathematischen Grundlagen der Elektronentheorie. Kap. 2. Die Wellenstrahlung einer bewegten Punktladung. Kap. 3. Die Mechanik der Elektronen.) II. Elektromagnetische Vorgänge in wägbaren Körpern. (Kap. 1. Ruhende Körper. Kap. 2. Bewegte Körper.)

Von einer eingehenden Darstellung der experimentellen Beweise für die Existenz der Elektronen und der Bestimmungen ihrer Größe ausgehend, wird zunächst aus den Grundgleichungen der Elektronentheorie der Begriff der elektromagnetischen Bewegungsgröße abgeleitet, auf dem die Abrahamsche Mechanik des Elektrons hauptsächlich beruht. Es werden dann die elektromagnetischen Potentiale eingeführt und die durch diese erhaltenen Lösungen mit Hülfe eines einzigen Vektors, als Hertzscher Vektor bezeichnet, dargestellt. Das Elektron wird als starr und kugelförmig angenommen, die Lorentzsche Annahme eines deformierbaren Elektrons diskutiert, aber, um ohne weitere Hypothese das Energieprinzip aufrecht erhalten zu können, abgewiesen. Der Gültigkeitsbereich

der für die angenommene quasistationäre Bewegung erhaltenen Gesetze wird untersucht, die aus diesem Bereich herausgehenden Arbeiten von P. Hertz und A. Sommerfeld verarbeitet. Im II. Abschnitt wird die Mittelwertsbildung nach H. A. Lorentz benutzt. Für dielektrische Körper werden Polarisationselektronen, für metallische Leitung nach Drude Leitungselektronen eingeführt. Weiter wird insbesondere die Lösung des Problems der Reflexion am bewegten Spiegel und der Zusammenhang mit der Thermodynamik sowie der Einfluß der Erdbewegung behandelt. Bei der Diskussion der letzteren wird auch die Cohnsche Theorie kurz besprochen, doch als vorläufig nicht genügend umfassend verworfen.

Gm.

W. Wien. Über Elektronen. Verh. Naturf. Ges. Meran **1**, 23-38; Verh. Deutsche Phys. Ges. **7**, 259-262; Physik. Zs. **6**, 806-807; Naturw. Rundsch. **20**, 545-549, 557-561.

In diesem Vortrag, gehalten in der ersten allgemeinen Sitzung der Naturforschergesellschaft zu Meran, gibt Wien eine Übersicht über die Entwicklung und die Leistungen der Elektronentheorie. „Die vielen und bedeutenden Schwierigkeiten, auf die wir gestoßen sind, zeigen an, wie sie harrt, durch eine allgemeine ersetzt zu werden. Aber sie hat gezeigt, daß wir bei fortschreitender Erkenntnis immer mehr vom sinnlichen Schein und von überkommenen physikalischen Begriffen uns losmachen müssen, daß die Abstraktion notwendig eine immer allgemeinere wird." Vgl. das folgende Referat.

Lp.

W. Wien. Über Elektronen. Leipzig: B. G. Teubner. 28 S. 8°.

Verf. gibt einen Überblick über die experimentellen Tatsachen und die Theorien. Er geht schließlich auch insbesondere auf die Schwierigkeiten ein, die sich der Elektronentheorie darbieten, so z. B. die gegenseitige Wirkung der einzelnen Teile eines Elektrons. Für den Aufbau von Atomen komme nur ein Zustand relativer Ruhe in Frage, da die Elektronen durch sehr starke Kräfte vom Zentralkörper angezogen werden. Das wird auch durch die Verbreiterung der Spektrallinien bei größeren Dichten der Gase bestätigt. Die Radiumstrahlung ist durch einen labilen Zustand des Radiumatoms zu erklären.

Gm.

W. Wien. Über die Energie der Kathodenstrahlen im Verhältnis zur Energie der Röntgen- und Sekundärstrahlen. Wüllner-Festschr. 1-14; Ann. der Phys. (4) **18**, 991-1007.

Verf. legt in den theoretischen Ableitungen die Annahme eines starren kugelförmigen Elektrons zugrunde. Sind E_R, E_K und E_S die Energien der Röntgen-, Kathoden- und Sekundärstrahlen, so findet er:

$$E_R : E_K = 1{,}35 \cdot 10^{-3}, \text{ und hieraus } E_R = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{g-Cal}}{\text{sec.}}.$$

Ferner: $E_R : E_S = 530.$

Schließlich berechnet er die Impulsbreite der Röntgenstrahlen zu $\lambda = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$, ein Wert, der 100mal kleiner ist als der von Sommerfeld aus den Beobachtungen von Haga und Wind abgeleitete. Gm.

H. v. Mangoldt. Über eine Lücke der Elektronentheorie. Wüllner-Festschr. 23-27.

Aus der Entwicklung des Poyntingschen Vektors:

$$\operatorname{div} \mathfrak{S} = c(\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E}) - c(\mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H})$$

zusammen mit den Lorentzschen Feldgleichungen erhält man die Gleichung:

$$-\operatorname{div} \mathfrak{S} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\right\} + \varrho(\mathfrak{E}\,\mathfrak{v}),$$

wo ϱ die Dichte und $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Ladung bedeutet. Hiernach muß das Elektron aus dem Äther Energie aufnehmen oder an diesen abgeben, je nachdem im Äther $(\mathfrak{E}\mathfrak{v})$ positiv oder negativ ist. Dann aber muß auch durch das Elektron selbst ein Poyntingscher Energiefluß strömen. Mit dieser Bedingung ist nun die Annahme eines starren Elektrons unverträglich, man gelangt so notwendig zur Vorstellung von deformierbaren Elektronen. Gm.

M. Abraham. Sopra un' applicazione del metodo di Riemann alla integrazione delle equazioni differenziali della teoria degli elettroni. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{14}_1$, 7-10.

Die Grundgleichung der Elektronentheorie wird durch die Substitution $l = ct$ verwandelt in: (1) $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial l^2} - \Delta\Phi = 4\pi\varrho$. Die Anfangswerte für $l = 0$ sind dann: (2) $\Phi = f(x,y,z)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial l} = g(x,y,z)$. Setzt man dann (3) $\frac{\Omega(r,l)}{r} = \frac{1}{4\pi}\int \Phi\, d\omega$, wobei die rechte Seite den Mittelwert von Φ auf einer Kugel mit Radius r um einen bestimmten Punkt darstellt, so erhält man (4) $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial l^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} = \chi$, wo $\chi(r,l) = r\int \varrho\, d\omega$ ist und ϱ eine auf der Kugel r bekannte Funktion von l und den Koordinaten. Für

$l=0$ ist dann $\Omega = F(r) = \frac{r}{4\pi}\int f d\omega$, $\frac{\partial \Omega}{\partial l} = G(r) = \frac{r}{4\pi}\int g d\omega$. Aus den Eigenschaften $F(-r) = -F(r)$, desgleichen von G und χ erhält man eine entsprechende Reduktion einer bereits früher schon von Volterra aufgestellten Integralgleichung von (4), die für $\chi = 0$ homogen geworden ist. Es ergibt sich dann leicht auch eine Lösung für Φ. Gm.

J. D. van der Waals jr. Opmerkingen naar aanleiding van de dynamica van het electron. Amst. Ak. Versl. **14**, 509-518.

Während Abraham, was für die quasistationäre Bewegung möglich ist, aus den Feldgleichungen I bis IV der Elektronentheorie die Gleichung der ponderomotorischen Wirkung berechnet hat, muß man im allgemeinen Fall die unabhängige Gleichung (V) $\mathfrak{f} = \mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{h}]$ hinzufügen. $\mathfrak{f} = 0$ gibt dann die Geschwindigkeit bei rein elektromagnetischer Masse. Man erhält so (Va):

$$\iiint \varrho \left\{ \mathfrak{d} + \frac{1}{c}\left[(\mathfrak{v} + [\mathfrak{g}\mathfrak{r}])\mathfrak{h}\right]\right\} dS = 0.$$

Für die Berechnung ist zu bemerken, daß $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ von der früheren Bewegung des Elektrons abhängen. Nimmt man nun an, daß das Elektron in der Bewegungsrichtung eine Symmetrieachse besitzt, und daß es nicht rotiert, so fällt in Gleichung V das Glied mit $\mathfrak{h}$ fort, es ist nur noch $\mathfrak{d}$ zu berechnen. Dazu hat hat man es in zwei Teile zu zerlegen, die dem inneren und dem äußeren Felde entsprechen. Die Annahme, daß das äußere Feld plötzlich verschwinde, müßte dann nach der reduzierten Gleichung V bedingen, daß auch das innere Feld verschwinde, was nicht möglich ist. Weiter zeigt der Verf., daß eine plötzliche Verzögerung bei Überlichtgeschwindigkeit zwar mehr Kraft beanspruche, aber die nun im „aktiven Zeitintervall" herrschende Geschwindigkeit des Elektrons seine weitere Bewegung so beeinflusse, daß in der Tat einer Verminderung der Geschwindigkeit auch eine Verminderung der Kraft entspricht. Schließlich führt der Verf. noch aus, daß bei der Anwendung der Elektronentheorie auf die Serienspektra auch die Einführung quasielastischer Kräfte keine weiteren Vorteile ergibt. Gm.

A. Sommerfeld. Zur Elektronentheorie III. Über Lichtgeschwindigkeits- und Überlichtgeschwindigkeitselektronen. Gött. Nachr. 1905, 201-235.

Bei stationärer Bewegung hatte sich eine kräftefreie Bewegung der Elektronen mit Überlichtgeschwindigkeit als unmöglich gezeigt; Verf. sucht

eine solche jetzt unter den verzögerten oder beschleunigten. Bei der Ableitung der allgemeinen Formeln für eine plötzliche Erregung von Unterlichtgeschwindigkeit erhält Verf. die von P. Hertz auf anderem Wege gefundenen Resultate. Die Übertragung auf Überlichtgeschwindigkeit zeigt, daß hier eine Trägheits- oder Beschleunigungswirkung und eine Strahlungs- oder Geschwindigkeitswirkung zu unterscheiden sind. Eine kräftefreie Bewegung wurde nicht gefunden. Die graphische Behandlung ergab das Resultat, daß außer für unendliche Beschleunigung die nötige Kraftzufuhr nie gleich Null wird, wenn sie auch von einer wenig verzögerten zu einer wenig beschleunigten abnimmt. Analytisch ließ sich die Nichtexistenz einer Lösung nicht beweisen. Für Lichtgeschwindigkeit kann eine stationäre Bewegung ohne äußere Störung dauernd bestehen; doch bewirkt schon eine hinzukommende transversale Kraft eine Abnahme der Geschwindigkeit außer der seitlichen Ablenkung.

Gm.

A. Sommerfeld. Über die Mechanik der Elektronen. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb. 417-432.

„Als Lorentz die Theorie ausbaute, war sein Blick wesentlich auf die alten optischen Probleme der Aberration, der Fresnelschen Mitführung usw. gerichtet. Seitdem ist eine Fülle neuer wunderbarster Tatsachen von der experimentellen Forschung ans Licht gefördert worden, das Zeeman-Phänomen, die Röntgen-Strahlen, die Becquerel-Strahlen. Und bei jeder dieser Entdeckungen, die von dem ursprünglichen Machtbereiche der Elektronen fern ab zu liegen schienen, hat die Theorie ein erlösendes Wort zu sprechen vermocht; sie hat entweder das Rätselhafte der Erscheinungen in allgemeinen Umrissen erhellt, wie bei den Röntgen-Strahlen; oder sie hat, wie bei dem Zeeman-Phänomen und den Radiumstrahlen, ganz bestimmte, zahlenmäßige Anhaltpunkte zur Beurteilung der Erscheinungen geliefert. Seit Jahresfrist war ich bemüht, mir einen neuen Zugang zu dieser Theorie zu bahnen; meine Ergebnisse habe ich in den Göttinger Nachrichten mitgeteilt (vgl. F. d. M. **35**, 866, 1904). Zunächst kam es darauf an, das von einem Elektron bei beliebiger Bewegung erregte elektrische und magnetische Feld zu berechnen, was in äußerst einfacher Form gelingt. Als Probe gebe ich die Formeln für den besonders einfachen Fall eines gleichförmig über seine Oberfläche geladenen Elektrons an.“

„Die letzten Betrachtungen habe ich hier unter dem Gesichtspunkte mitgeteilt, daß sie eine Art Modell für eine mögliche Konstitution des Radiumatoms liefern können.“

Es liegt in der Natur der Untersuchung begründet, daß wir von den analytischen Betrachtungen und den zahlreichen Formeln auszugsweise nicht gut etwas mitteilen können. Lp.

E. Wiechert. Bemerkungen zur Bewegung der Elektronen bei Überlichtgeschwindigkeit. Gött. Nachr. 1905, 75-82.

Das vom Elektron gestörte Gebiet wird als Bewegungsschatten (nach Sommerfeld) bezeichnet. Eine Übertragung des Gaußschen Satzes $\int \mathfrak{E}_\nu d\sigma = 4\pi e$ gibt dann: Das Flächenintegral der elektrischen Kraft über jeden Querschnitt des Bewegungsschattens, der ganz außerhalb des elektrischen Körpers verläuft, ist 4π mal der Gesamtladung. — Schneidet der Querschnitt den elektrischen Körper, so wirkt nur der vor dem Schnitte liegende Teil des Körpers. — Diese Sätze gelten auch für die Querschnitte von Teilschatten.

Es wird dann die geradlinige Bewegung bei einer Geschwindigkeit $v > v_0 > c$ untersucht. c ist die Lichtgeschwindigkeit, v_0 ein unterer Grenzwert für v. Der Schattenkegel hat so mindestens einen Öffnungswinkel α_0, so daß $\sin\alpha_0 = v_0/c$ ist. Es ergibt sich dann für die „hemmende Kraft“: $dF = 4\pi \cdot de \int_0^p \varrho \cdot dp$, wo p die Entfernung des Elementes de von dem Querschnitte ist, wenn ϱ auf Ebenen senkrecht zur Bewegungsrichtung konstant angenommen wird. dF ist also nur von der Beschaffenheit des Körpers abhängig. Es werden nun Körper erster Art konstruiert, deren Tangentialebenen mit den Bewegungsrichtungen Winkel bilden, die gleich oder größer als α_0 sind, und Körper zweiter Art, die Spiegelbilder von diesen sind. In beiden Fällen wird $F =$ konst. Für den Fall sehr dünner Platten dieser Art erhält man $F = 0$. Es existiert für die untersuchten Körper also keine Trägheit infolge elektrischer Ladung, sondern ein konstanter Widerstand. Wird die treibende Kraft größer oder kleiner als F, so muß die Geschwindigkeit momentan über jede Grenze wachsen oder unter v_0 herabsinken. Gm.

H. Poincaré. Sur la dynamique de l'électron. C. R. **140**, 1504-1508.

Verf. modifiziert seine Formeln nach der Lorentzschen Hypothese. Dabei findet er aus geometrischen Gründen, daß die Konstante l in der Transformation: $x' = kl(x + \varepsilon t)$, $y' = ly$, $z' = lz$, $t' = kl(t + \varepsilon x)$ gleich 1 sein muß, wozu Lorentz auf anderem Wege gelangte. Ist ϱ die Dichte und (ξ, η, ζ) die Geschwindigkeit des Elektrons, so findet Verf. etwas abweichend von Lorentz:

$$\varrho' = \frac{k}{l^3}\varrho(1 + \varepsilon\xi), \quad \varrho'\xi' = \frac{k}{l^3}(\xi + \varepsilon), \quad \varrho'\eta' = \frac{\varrho\eta}{l^3}, \quad \varrho'\zeta' = \frac{\varrho\zeta}{l^3}.$$

Hieraus ergibt sich auch eine etwas abweichende Formel für die Kräfte auf ein Volumenelement:

$$X' = \frac{k}{l^3}(X + \varepsilon \Sigma X\xi), \quad Y' = \frac{y}{l^3}, \quad Z' = \frac{z}{l^3}.$$

Das Zusatzglied mit $\varepsilon\Sigma X\xi$ entspricht einem anderweitig von Lienard gefundenen Resultat. Sind weiter x, y, z die Projektionen des Gravitationsvektors und (ξ, η, ζ), bzw. (ξ', η', ζ') die Geschwindigkeiten zweier gravitierenden Massen, so kann man die Komponenten der Attraktion, wenn sie das Gravitationsgesetz geben sollen, nur dann obigen Gleichungen entsprechend als Funktionen der (x, y, z), (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') bestimmen, wenn die Geschwindigkeiten (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') so klein sind, daß ihre Quadrate gegen das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit vernachlässigt werden können. Gm.

M. Brillouin. Inertie des électrons. C. R. **141**, 942-945.

Verf. hat bereits früher eine allgemeine Berechnung der Trägheit gegeben; danach erhält man zunächst sechs „Trägheitskoeffizienten", von denen einer bei spezieller Wahl der Koordinatenachsen fortfällt. Abraham erhält durch die Annahme der Kugelform nur zwei Trägheitskoeffizienten, die longitudinale und die transversale Masse, doch ist auch dann noch nötig, daß das Elektron durch Rotation immer dieselbe Achsenrichtung beibehält. Gm.

S. H. Burbury. On the theory of electric inertia. Phil. Mag. (6) **9**, 243-250.

Vergleich verschiedener Methoden zur Berechnung der von Lodge eingeführten elektrischen Trägheit, die als Widerstand gegen Beschleunigung definiert wird, aus den mechanischen und elektrischen Grundeinheiten. Br.

W. Kaufmann. Über die Konstitution des Elektrons. Berl. Ber. 1905, 949-956.

Die neueren Versuche des Verf. gestatten jetzt, auch aus den Konstanten der erhaltenen Kurven die „Apparatkonstanten" zu eliminieren — was in seinen ersten Versuchen nicht möglich war — und so an den Ergebnissen die Theorien zu prüfen. Die Abrahamsche Theorie und die von Bucherer (starr, kugelförmig, bzw. deformierbar mit konstantem Volumen) ergaben annähernd gleiche Abweichungen, wenn sie auch noch bedeutend größer als die Versuchsfehler sind; die Lorentzsche Theorie ergab aber drei- bis viermal größere Abweichungen. Gm.

E. Riecke. Über die Elektromechanik des Galvanismus und der Wärme. Verh. Naturf. Ges. Meran **2**, 26-27; Physik. Zs. **6**, 754-755; Verh. Deutsche Phys. Ges. **7**, 263-264.

Auszug aus einem Vortrag, der im Jahrbuch für Elektronik und Radiologie **3**, 24-47, 1906, unter dem Titel veröffentlicht ist: „Über die

Elektronentheorie des Galvanismus und der Wärme.“ Das auf Wunsch des wissenschaftlichen Ausschusses der Deutschen Physikalischen Gesellschaft erstattete Referat erstreckt sich auf die Arbeiten des Vortragenden und die Untersuchungen von Drude und Lorentz. Lp.

A. Korn und E. Strauss. Über eine Beziehung zwischen Wanderungsgeschwindigkeit und Form der Ionen. Münch. Ber. 1905, 13-19.

Die Wanderungsgeschwindigkeiten der Metallionen werden den Widerständen reziprok angenommen, welche die Ionen infolge ihrer Gestalt als Rotationsellipsoide erfahren. Für eine Bewegung mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der Rotationsachse finden die Verf. einen Widerstand: $W = \text{konst.}\, v \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{b^2 a^2}{e^3} \arcsin \frac{e}{a} - \frac{b^4}{e^2}\right]$, wo a, b, e große, kleine Halbachse und Exzentrizität sind.

Für eine Wanderungsgeschwindigkeit J und das Äquivalentgewicht G bei rotationsellipsoidischem, J_0 und G_0 bei kugelförmigem Ion erhält man:

$$\frac{J_0}{J} = \frac{W}{W_0}, \quad \frac{G_0}{G} = \frac{a_0^3}{a^2 b}.$$

Die Elimination von a_0 gibt dann:

$$\left(\frac{J_0}{J}\right)^3 \cdot \left(\frac{G_0}{G}\right)^2 = \Psi\left(\frac{b}{a}\right).$$

Für $\frac{b}{a}, \frac{e}{a}$ und $\Psi\left(\frac{b}{a}\right)$ wird eine Tabelle angegeben.

Wird Zink kugelförmig angenommen, so ist b/a für Kalium 0,58, für Natrium 0,92. Ist das Wasserstoffion kugelförmig, so gibt dies für Kalium: 0,62, für Natrium: 0,96. Gm.

H. Nagaoka. Mutual action of electron atoms. Tokio Math. Ges. 2, 316-320.

Verf. betrachtet Atome, die aus einem positiv geladenen Kern und zahlreichen um diesen kreisenden negativ geladenen Korpuskeln bestehen, deren Gesamtladung jener des Kerns entgegengesetzt gleich ist. Da so die Gesamtladung des Elektronatoms gleich Null ist, bleibt für die elektrostatische Kraft nur ein mit r^{-4} proportionaler Ausdruck übrig. Das gleiche gilt für die von ihrem magnetischen Feld erzeugten ponderomotorischen Kräfte. In erster Annäherung sind also die von Elektronatomen aufeinander ausgeübten Kräfte umgekehrt proportional der vierten Potenz der Entfernung. Gm.

H. Nagaoka. Virial of molecular forces due to electron atoms, the charakteristic equation and the Joule-Kelvin effect. Tokio Math. Ges. **2**, 335-340.

Aus dem Virialtheorem von Clausius wird die van der Waalssche Gleichung abgeleitet, und von dieser gelangt der Verf. zu einem Ausdruck, der in der Form mit der empirisch gewonnenen Gleichung von Rose Innes übereinstimmt. Die Koeffizienten von dessen Gleichung sind aber nach dem Verf. unmöglich. Die Anwendung der gefundenen Gleichung auf den Joule-Kelvin-Effekt wird diskutiert; indessen kann nur eine experimentelle Untersuchung über ihre Brauchbarkeit entscheiden. Gm.

A. H. Bucherer. Das Feld eines rotierenden Elektrons. Physik. Zs. **6**, 225-227.

„In der Theorie des Magnetismus spielt das rotierende Elektron eine fundamentale Rolle. Es fehlte aber bisher eine Berechnung seines elektromagnetischen Feldes. Zwar enthält die bekannte Abhandlung von H. A. Lorentz in der Enzyklopädie der Mathematik kurze allgemeine Anweisungen zur Lösung des Problems und die Angabe des Feldes im Innern des Elektrons; aber das besonders wichtige äußere Feld ist nicht angegeben. Ich glaubte deshalb, daß eine auf anderem Wege erzielte Lösung der Aufgabe von einigem Interesse sein könnte.“ Lp.

A. H. Bucherer. Die Rotation eines Elektrons mit Volumenladung. Physik. Zs. **6**, 269-270.

In der vorstehend angeführten Note ist das Feld eines rotierenden Elektrons unter der Annahme berechnet, daß das Elektron als Kugel mit Oberflächenladung aufgefaßt werden kann, und daß die Ladung fest an den Flächenelementen haftet. Die gegebene Lösung gestattet nun eine leichte Berechnung eines mit Volumenladung von konstanter Dichte behafteten rotierenden Elektrons. Das Problem reduziert sich nämlich auf die Aufgabe, die Felder zu addieren, welche von den unendlich vielen Kugelschalen herrühren, in die man sich das Elektron eingeteilt denkt. Lp.

A. H. Bucherer. Das deformierte Elektron und die Theorie des Elektromagnetismus. Physik. Zs. **6**, 833-834.

Die vom Verf. aufgestellte Theorie des Elektrons nimmt an, daß die Elektrizität, welche an den Volumenelementen des im Ruhestande kugelförmigen Elektrons haftet, inkompressibel sei, und daß die innern

elastischen Kräfte, die den elektrischen das Gleichgewicht halten, in gleicher Weise wie diese durch die Bewegung geändert werden. Nach Kaufmann paßt sich diese Theorie ebensogut seinen neuesten Versuchen an wie die Annahme eines starren kugelförmigen Elektrons, während Lorentz' Theorie viel stärker abweicht. Verf. dehnt nun seine Theorie in gleicher Weise auf die Mechanik aus, indem er annimmt, daß alle Abmessungen eines translatorisch bewegten Systems in der Bewegungsrichtung im Verhältnis $1 : s^{1/3}$ verkürzt und senkrecht dazu im Verhältnis $1 : s^{-1/6}$ dilatiert werden. Es wird kurz gezeigt, daß hiermit sich der Michelson-Morleysche Versuch erklären läßt. Schließlich zeigt sich auch, daß gewisse Bedenken, die gegen die Lorentzschen Annahmen sprechen, dadurch wesentlich verringert werden. Insbesondere ergibt sich, daß hier die Energie der inneren Kräfte des Elektrons in der Bewegung konstant bleibt, während sie bei Lorentz abnimmt. Gm.

D. B. Brace. The negative results of second and third order tests of the „aether drift" and possible first order methods. Phil. Mag. (6) **10**, 71-80.

Allgemeine Vergleichung der verschiedenen Methoden und ihrer Aussichten, ohne spezielle Entwicklungen. Br.

P. Langevin. Sur l'impossibilité physique de mettre en évidence le mouvement de translation de la Terre. C. R. **140**, 1171-1173.

Nach einer kurzen Besprechung aller bisherigen Versuche, die zur Lösung obiger Aufgabe gemacht wurden, glaubt Verf. mit Hülfe eines dem Hamiltonschen analogen Prinzipes zum Ziele zu gelangen. Rns.

P. Langevin. Sur les ions de l'atmosphère. C. R. **140**, 232-234.

Verf. tadelt an der Ebertschen Methode, daß sie nicht die Wirkung von Ionen verschiedener Beweglichkeiten erkennen lasse. Ist die Beweglichkeit k, so ist in dem Ebertschen Apparate der Sättigungsstrom gegeben durch: $dJ = Uf(k)dk$. Für Ionen geringerer Beweglichkeit ist indessen $\frac{di}{dJ} = k\frac{4\pi CV}{U} = kx$, wo U die Geschwindigkeit des Luftstromes, C und V Kapazität und Spannung des benutzten Kondensators sind. Ist für diese Ionen der Sättigungsstrom noch nicht erreicht, so muß also k kleiner als $\frac{1}{x}$ sein. Um dies festzustellen, muß man daher eine Kurve beobachten, die den Gesamtstrom gibt:

$$i = Ux\int_0^{\frac{1}{x}} kf(k)dk + U\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} f(k)dk.$$

Man erhält hieraus: $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{x^3}{U}\frac{d^2 i}{dx^2}$, d. h. es existieren Ionen der Beweglichkeit k nur dann, wenn die Kurve i am Punkte $x = \frac{1}{k}$ eine Krümmung aufweist. Verf. hat auf diesem Wege an der Erdoberfläche außer den gewöhnlichen Ionen $\left(k = 1{,}5\,\frac{v}{cm}\right)$ noch solche von ca. $k = \frac{1}{3000}$ gefunden, die teilweise bis 50 mal zahlreicher waren als die ersten. Gm.

P. Langevin. Recombinaison et diffusion des ions gazeux. Journ. de Phys. (4) **4**, 165-183.

„Die von McClung beobachtete Unabhängigkeit zwischen dem Wiedervereinigungs-Koeffizienten und dem Gasdrucke ist sicherlich ungenau wegen eines Einflusses der Diffusion der Ionen, die bei schwachen Drucken oder hohen Temperaturen vorwiegend werden kann.“ Lp.

P. Langevin et M. Moulin. Sur un enregistreur des ions de l'atmosphère. C. R. **140**, 305-307.

Um Ionen verschiedener Beweglichkeiten zu messen, wird in einem Apparate nach Art des Ebertschen der Sättigungsstrom mit dem Elektrometer festgestellt. Große Kapazität des Kondensators und schwacher Luftstrom (mit Gasuhr gemessen) lassen Ionen sämtlicher Beweglichkeiten messen, kleine Kapazität und große Geschwindigkeit des Luftstromes (mit Anemometer gemessen) lassen nur die Ionen großer Beweglichkeit zur Wirkung kommen. Gm.

O. W. Richardson. The rate of recombination of ions in gases. Phil. Mag. (6) **10**, 242-253.

Mit Hülfe einer Methode, die derjenigen der kinetischen Gastheorie nachgebildet ist, leitet Verf. ab, daß praktisch nach Kollisionen mit vier Molekülen jedes Ion, nach Kollisionen mit drei Molekülen schon die meisten Ionen, nach Kollisionen mit zwei Molekülen etwa der sechste Teil der Ionen gebunden ist. Auch andere damit in Zusammenhang stehende gesetzmäßige Erscheinungen werden festgestellt. Br.

G. Moreau. Sur les mobilités des ions des vapeurs salines. C. R. **141**, 1225-1227.

Sind k und e Beweglichkeit und Ladung eines Ions, x der Durchmesser dividiert durch den eines Gasmoleküls (s), w und ϱ Druck und spezifische Masse eines Gases, so gilt nach Maxwell, bzw. Langevin:

$$k = \frac{3}{2}\frac{e}{(1+x)^2 s^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\pi\varrho w}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}.$$

An dieser Formel prüft Verf. seine experimentellen Ergebnisse und findet für Temperaturen zwischen 170° und 70° die Ionen als elektrische Zentren von der Größe eines Gasmoleküls, das von 2 bis 7 Lagen von Molekülen umgeben ist. - Unterhalb 70° wächst x sehr rasch und beträgt bei 15° ungefähr 20 bis 40. Gm.

T. Retschinsky. Über die Wiedervereinigung der Ionen in der Luft. Ann. der Phys. (4) **17**, 518-548.

Für den Fall, daß die Ionen Molionen sind, werden die Vorgänge in ionisierten Gasen zwischen zwei unendlich großen planparallelen Platten durch das von Riecke gegebene System von Differentialgleichungen dargestellt. Eine allgemeine Integration ist nicht möglich. Während Riecke die Annahme eines fast gesättigten Stromes macht, gelangt man nach Stark ebenfalls zu einer Lösung, wenn man nur geringe Stromstärken betrachtet. Die Resultate sind: I. Der Mittelwert α/ε ist nach der Rieckeschen Methode 4090, nach der von Stark 4200 (bei 760 mm). II. Bei kleinem Elektrodenabstand darf die Adsorption an den Elektrodenoberflächen nicht vernachlässigt werden. III. Der Koeffizient α/ε nimmt mit sinkendem Drucke in dem Bereich von 760 bis 200 mm im Mittel um 300 auf 100 mm ab. Gm.

G. Giorgi. Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di elettrodinamica. Atti Assoz. Elettr. Ital. **9**, 651-699

Das Studium der Elektrodynamik führt auf das einer Reihe von Operatoren, die allgemein mit $f\left(\frac{d}{dt}\right)$ bezeichnet werden können. Die Arbeit ist der Entwicklung der funktionalen Lösungen gewidmet, die sich hieraus ergeben. Gm.

Fr. Hasenöhrl. Zur Integration der Maxwellschen Gleichungen. Verh. Deutsche Physik. Ges. **7**, 450-457; Verh. Naturf. Ges. Meran **2**, 19.

„Der Vortragende bespricht, wie man gewisse aus der Potentialtheorie und verwandten Gebieten bekannte Methoden auch auf die Theorie

der elektrischen Schwingungen anwenden kann. So läßt sich ein Vektor angeben, der auf diesem Gebiete Analoges leistet, wie die Greensche Funktion der Potentialtheorie. Ferner läßt sich zeigen, daß sich auch hier die ausgezeichneten Lösungen mit einem Minimumproblem in Verbindung bringen lassen." Lp.

R. Gans. Zur Elektrodynamik in bewegten Medien. Ann. der Phys. (4) **16**, 516-534.

Die Cohnschen Gleichungen werden zur Darstellung der optischen Erscheinungen erweitert. Nach einer Vergleichung mit der Lorentzschen Theorie erfolgt dann die Ableitung von Dispersion, Absorption und Zirkularpolarisation aus der Cohnschen Theorie ganz analog den Entwicklungen Drudes. Da dieser Ausbau der Cohnschen Theorie keinerlei Hülfshypothese bedarf, ergibt sich auch aus ihr in diesen Fällen kein Einfluß der Erdbewegung; der Klinkerfues-Hagasche Versuch und die Mascart-Lord Rayleighschen Versuche werden also bestätigt. Es folgt dann die Dynamik des Elektrons. Die Feldstärken im Außenraum sind identisch mit denen der Lorentzschen Theorie. Die longitudinale Masse ist aber in dieser ausgebauten Cohnschen Theorie sowohl bei Flächen- als Volumenladung gleich, entgegengesetzt zu den Folgerungen Abrahams. Die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit ist in beiden Theorien die gleiche; dagegen unterscheiden sich die ponderomotorischen Kräfte, auch ist keine elektromagnetische Bewegungsgröße vorhanden. Die transversale Masse ist aus geradlinig fortschreitender Bewegung nicht zu ermitteln, sondern nur z. B. aus einer Kreisbewegung. Gm.

R. Gans. Zur Elektrodynamik in bewegten Medien. II. Ann. der Phys. (4) **18**, 172-186.

Die Cohnsche Theorie wird weiter ergänzt. Für einen bewegten vollkommenen Spiegel hat der normale Strahlungsdruck denselben Wert wie nach Lorentz. Die von Abraham mit Hülfe retardierter Potentiale aufgestellten Formeln für einen bewegten Lichtpunkt erfüllen ebenso, wie das ihm vollkommen entsprechende System W. Wiens, der von einem ruhenden Dipol (nach Hertz) ausgeht, wie die Lorentzsche so auch die Cohnsche Theorie. Für die letztere gilt das indessen nur so lange, als sich der Punkt durch das Vakuum oder ruhende Luft bewegt; wird die Luft mitbewegt, so gelten die gewöhnlichen Hertzschen Formeln für einen ruhenden Dipol, wenn man in ihnen die absolute Zeit durch die Ortszeit ersetzt. Für das absolute Vakuum ergibt sich, daß dieses infolge der Erdbewegung mit den Eigenschaften eines optisch einachsigen Kristalles erscheint, so daß hier die ursprüngliche Lorentzsche Theorie mit der Cohnschen übereinstimmt. Im absoluten Vakuum müßten demgemäß auch der Trouton-Noblesche Effekt, ebenso wie der von Michelson und Morley gesuchte, vorhanden sein. Gm.

R. GANS. Gravitation und Elektromagnetismus. Deutsche Math.-Ver. **14**, 578-581.

Mit H. A. Lorentz (1900) wird angenommen, daß ungleichartige Elektrizitäten sich etwas stärker anziehen, als gleichartige sich abstoßen, daß also eine Anziehungskraft von Massen bleibt, die als aus gleichviel positiver und negativer Elektrizität bestehend vorgestellt werden. In Weiterbildung dieser Theorie nimmt Gans an, daß die Elektronen nicht nur die elektromagnetischen, sondern auch die Gravitationserscheinungen verursachen. Mit Benutzung der Lorentzschen Vorstellung, daß nur die negativen Elektronen in einem Leiter beweglich sind, die positiven aber im Körper haften, werden aus den Lorentzschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes dieselben Zusatzkräfte zur Newtonschen Anziehungskraft hergeleitet, die bei Lorentz auftreten. Wegen des Haftens der positiven Elektronen am Körper findet keine Schirmwirkung der Gravitation statt. Die β-Strahlen brauchen keine Gravitation zu zeigen, die α-Strahlen müssen Gravitation zeigen. Die Kenntnis des Aufbaues eines Massenatoms aus seinen Elektronen wird es ermöglichen, das Verhältnis seiner trägen Masse zur gravitierenden Masse anzugeben. Lp.

G. JAUMANN. Elektromagnetische Vorgänge in bewegten Medien. Wien. Ber. **114**, 1635-1684.

Zwei den Maxwellschen Gleichungen gehorchende elektromagnetische Vorgänge müssen gleichzeitig in demselben Felde bestehen können, ohne sich gegenseitig zu stören. Sie addieren sich vektorisch. Solche Erscheinungen werden superpositorisch.

Die nicht superpositorischen Erscheinungen zerfallen in zwei Gruppen. Die erste Gruppe bilden die elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Medien. Die Gesetze derselben aufzustellen, ist das Ziel dieser Untersuchung.

Zu diesen Erscheinungen gehören die ponderomotorischen Wirkungen im elektromagnetischen Felde und der Strahlungsdruck, die Induktion elektrischer und magnetischer Art in bewegten Medien, die Unipolarinduktion, das Rowlandsche und das Röntgensche Rotationsphänomen, die Aberration des Lichtes, der Fizeausche Versuch und der Michelsonsche Versuch, die Kundtsche Doppelbrechung rasch verzerrter Flüssigkeiten und die Elektrisierung durch Reibung. Rns.

O. HEAVISIDE. Electromagnetics in a moving dielectric. Nature **71**, 606-607.

„Als ich vor einiger Zeit die Annahme erwog, daß der Äther innerhalb eines Körpers ganz stationär ist, wenn ein Körper bewegt wird, und

daß dies bei der Anwendung der Maxwellschen Äthergleichungen den Gebrauch einer festen Zeitdifferentiation für den Äther, einer beweglichen für die Materie verlangt, folgerte ich, daß dasselbe nicht nur auf die elektrische Polarisation Anwendung finde, wie es von Lorentz und Larmor geschehen ist, sondern auch auf die magnetische Polarisation. Ich sagte zu dem verstorbenen Fitz Gerald, daß die Ausführung dieser Erweiterung eine Art kategorischen Imperativs schiene. Denn dies schließt keine Annahme über die Art in sich, wie die magnetische Polarisation erzeugt wird. Zu jener Zeit machte ich nur die Anwendung auf ebene Wellen. Seitdem habe ich sie auf den allgemeinen Fall ausgedehnt. Das Hauptinteresse liegt gegenwärtig in der mechanischen Aktivität, die sich grundlegend mit der Frage des Strahlungsdrucks verknüpft und mit den elektromagnetischen bewegenden Kräften im allgemeinen. Die Resultate bestätigen, daß es wünschenswert ist, ähnliche Überlegungen auf die magnetische und die elektrische Polarisation anzuwenden, insofern sie relativ einfach sind und über den Gegenstand Licht verbreiten." Lp.

O. Heaviside. The transverse momentum of an electron. Nature **72**, 429.

Berechnung dieses Moments unter Zugrundelegung der Newtonschen Bewegungsgesetze und mit Benutzung früherer Arbeiten des Verf. in der Form:

$$M_2 = -\mu Q^2 a / 6\pi v k^3.$$

Q ist die Ladung, a die Beschleunigung oder u^2/R, wenn R der Radius der Bahn ist, $k^2 = 1 - u^2/v^2$. Lp.

A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. der Phys. (4) **17**, 891-921.

Verf. macht drei Voraussetzungen, bzw. Annahmen: 1. Das Relativitätsprinzip. daß für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten. 2. Die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit des emittierenden Körpers. 3. Die Definition der gemeinsamen Zeit für zwei synchron gehende Uhren, wonach die „Zeit", die das Licht beim Hingange von der einen zur anderen Uhr braucht, gleich sein soll der Zeit des Rückganges. Unter diesen Voraussetzungen kommt Verf. zu einer allgemeinen Theorie der Relativität, die für die Elektrodynamik im wesentlichen zu der Lorentzschen Theorie mit ihren neueren Ergänzungen führt. Die Transformationen, die auf die

Gleichungen der Elektrodynamik in einem bewegten System anzuwenden sind, lauten:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \beta(x - vt),\ \eta = y,\ \zeta = z,$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

wobei v die Geschwindigkeit des bewegten Systems bedeutet. Gm.

F. Kerntler. Die Ermittelung des richtigen elektrodynamischen Elementargesetzes auf Grund allgemein anerkannter Tatsachen und auf dem Wege einfacher Anschauung. Budapest: Pester Lloyd Gesellsch. 29 S.

Verf. leitet aus einer Stromanordnung, bei der vier geschlossene Stromleiter von der Form eines gleichschenkligen Trapezes symmetrisch um ein Stromelement gruppiert sind, ein Elementargesetz ab, das er, unter Verwerfung des Ampèreschen und anderer Elementargesetze, als das richtige hinstellt. Gt.

H. A. Lorentz. De beweging der electronen in de metalen II. Amst. Ak. Versl. 13, 565-573.

Aus den Formeln für eine offene thermoelektrische Kette leitet sich zunächst leicht die Formel für den Strom in einer geschlossenen ab, indem der Elektronenstrom ν nicht mehr gleich Null anzunehmen ist, sondern der Gleichung: $i = e\nu\Sigma$ entsprechen muß, wo Σ ein normaler Querschnitt ist. Um die entwickelte Wärme zu berechnen, wird ein durch äußere Mittel auf konstanter Temperatur gehaltener Stromkreis betrachtet. Die gesamte Wärme zerfällt dann in drei Teile: die Joulesche Wärme: $\frac{i^2}{\sigma\cdot\Sigma}dx$, die von der Wärmeleitung herrührende: $-\frac{d}{dx}(W_1\Sigma)dx$ und einen dritten Teil, der, auf die Stromeinheit bezogen, sich darstellt zu: $q'_{i=1} = \frac{m}{2eh}\cdot\frac{d\log A}{dx}dx$, aus dem die Peltier-Wärme und der Thomson-Effekt abgeleitet werden kann.

Die Übereinstimmung der Resultate mit der Thermodynamik wird gezeigt. Ferner wird die Notwendigkeit, mehrere Elektronengattungen für die Inkonstanz von $\frac{k}{\sigma}$ in Metallen und den Hall-Effekt anzunehmen, kurz besprochen, eine weitere Diskussion auf später verschoben. Gm.

H. A. LORENTZ. De beweging der electronen in de metalen III. Amst. Ak. Versl. **13**, 710-729.

H. A. LORENTZ. Le mouvement des électrons dans les métaux. Arch. Néerl. (2) **10**, 337-371.

Dieser Abschnitt behandelt die Annahme zweier Gattungen von Elektronen.

Für die elektrische Leitfähigkeit gilt dann einfach $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Für andere Erscheinungen muß man einen quasistationären Zustand annehmen, bei dem ständig Vereinigung und Neubildung von Elektronen erfolgt. Der Elektronenfluß durch einen Querschnitt wird 0, wenn die elektrische Kraft den Wert $E = \frac{1}{e}\frac{dV}{dx} + \frac{m}{2he}\frac{d\log A}{dx} + \frac{m}{e}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{h}\right)$ annimmt. Für die einzelnen Elektronengattungen erhält man so:

$$E_1 = \frac{1}{e_1}\frac{dV_1}{dx} + \frac{2}{3}\frac{\alpha T}{e_1}\frac{d\log A_1}{dx} + \frac{4}{3}\frac{\alpha}{e_1}\frac{dT}{dx}$$

und analog für E_2. Für den Fall eines offenen Kreises von verschiedenen Metallen bei gleicher Temperatur kann man $i = 0$ nur erhalten, wenn man i_1 und i_2 einzeln gleich 0 und damit $E_1 = E_2$ setzt. Dann erhält man das Gesetz der Spannungsreihe. Im Falle eines einzigen Metalles bei verschiedenen Temperaturen darf man aber nicht $E_1 = E_2$ setzen. Für einen offenen Stromkreis erhält man so eine Formel, die das Gesetz der thermoelektrischen Reihe darstellt, für einen geschlossenen das Ohmsche Gesetz. Peltier-, Thomson-Effekt und Wärmeleitfähigkeit werden nicht behandelt, weil bei ihnen die Formeln zu kompliziert ausfallen. Verf. schlägt vor, nur mit einer Gattung von Elektronen zu rechnen, außer wo es, wie z. B. bei dem Hall-Effekt, unbedingt nötig ist. Gm.

F. EMDE. Spannung, Spannungsdifferenz, Potential, Potentialdifferenz, elektromotorische Kraft. Sep. aus Zeitschr. für Elektrotechn. 8 S.

Der Aufsatz bezweckt eine Klärung der im Titel angegebenen Begriffe. Es wird gezeigt, wie man zu ihnen gelangt, wie sie auseinanderzuhalten sind, und welche Sätze sich für sie ergeben. Gt.

T. J. I'A. BROMWICH. Some contributions to the theory of two electrified spheres. Messenger (2) **35**, 1-12.

Obgleich das Problem der elektrischen Verteilung auf zwei leitenden Kugeln sehr oft behandelt ist, schließt doch die Diskussion des Problems, wenn die beiden Kugeln sich bis zur Berührung gegeneinander bewegen, gewisse Schwierigkeiten in sich, welche noch nicht gehörig erörtert zu

sein scheinen. Die Kraft zwischen zwei gleichen, in Berührung befindlichen Kugeln ist von Lord Kelvin in Gliedern einer Doppelreihe berechnet worden (Phil. Mag. 1853, April- und Augustheft); allein leider konvergiert diese Reihe nicht absolut, und daher hängt der Wert der Reihe von der Art der Summation ab. Tatsächlich hat Bromwich (London M. S. Proc. (2) **2**; F. d. M. **35**, 319, 1904) gezeigt, daß der von Lord Kelvin erhaltene Wert nicht als die Kraft zwischen den Systemen von Bildern in den beiden Kugeln gedeutet werden kann. Diese letztere Kraft ist unbestimmt und schwankt zwischen zwei Grenzen, die angenähert $0{,}1364\ V^2$ und $0{,}0114\ V^2$ sind, wenn V das Potential der beiden Kugeln ist. Lord Kelvins Wert ist das Mittel aus diesen beiden Grenzen, oder angenähert $0{,}0739\ V^2$. Daß die Kelvinsche Art der Summation den richtigen Wert für die Kraft zwischen den beiden Kugeln gibt, kann nach dem Verf. durch Betrachtungen dargetan werden, auf die er hier nicht eingeht; er gibt jedoch in § 1 eine andere, zu demselben Werte führende Untersuchung. Eine weitere hiermit zusammenhängende Aufgabe ist die Berechnung der Oberflächendichtigkeit an den Punkten, die sich nachher berühren, unmittelbar vor dem Zusammentreffen. Der Wert hierfür wurde zuerst von Kirchhoff gegeben, nachdem er vorher von seinen Vorgängern fehlerhaft berechnet war. In § 2 gibt Bromwich eine bezügliche Untersuchung, die dem Verfahren in § 1 entspricht. Der § 3 dient zur Auswertung der in den beiden ersten Paragraphen benutzten bestimmten Integrale. Lp.

O. M. Corbino. Sulla viscosità dielettrica dei condensatori. Nuovo Cimento (5) **9**, 81-105.

Verf. ersinnt eine Vorrichtung, bei der in einem Nebenzweig und seinen wiederholten Abzweigungen Selbstinduktionsspulen, Kapazitäten und Widerstände in bestimmter Anordnung eingeschaltet sind, und stellt daran Beobachtungen mittels einer Braunschen Röhre an. Hieran knüpft er experimentelle und theoretische Untersuchungen über dielektrische Viskosität in einem veränderlichen Felde. Gt.

T. Levi-Civita. Sopra un problema di elettrostatica che si è presentato nella costruzione dei cavi. Palermo Rend. **20**, 173-228.

Für die Konstruktion von Kabeln ist es wichtig, das Spannungsgefälle in der isolierenden Schicht zu kennen, da dieses einen bestimmten Betrag nicht übersteigen darf, wenn nicht ein Durchschlagen erfolgen soll. Das Gefälle ist nun einerseits der Spannung der durch das Kabel gehenden Ströme proportional, andererseits einer lediglich von der geometrischen Form des Kabelquerschnitts abhängigen Konstante. Der Berechnung der letzteren ist die vorliegende Arbeit gewidmet, und zwar gründet sich die Rechnung auf rein elektrostatische Betrachtungen; daß diese ausreichen,

hat der Verf. in einer früheren Arbeit begründet, in der auch die Hauptresultate der vorliegenden Untersuchung schon mitgeteilt sind [vgl. F. d. M. **35**, 873, 1904]. Für ein Kabel mit nur einem Leitungsdraht ist der Querschnitt der isolierenden Schicht ein von zwei konzentrischen Kreisen begrenzter Ring; die Kreisradien seien R (äußerer) und r (innerer). Für ein aus mehreren Drähten bestehendes Kabel ergibt sich der Querschnitt σ, indem man $m\,(\geqq 6)$ Kreise konstruiert, deren jeder die beiden benachbarten und den Kreis r berührt. Die äußeren Bogen dieser Berührungskreise bilden die innere Begrenzung T von σ, während die äußere Begrenzung auch hier von dem Kreise R gebildet wird. In dem so definierten Gebiete σ bestimme man dasjenige logarithmische Potential V, das an T den Wert 0, an R den Wert 1 annimmt: dann ist die gesuchte Konfigurationskonstante G der Maximalwert von

$$\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} \text{ in } \sigma.$$

Zur Bestimmung von G wird die zu V assoziierte Funktion U eingeführt, die nur eindeutig ist, wenn das zweifach zusammenhängende Gebiet σ durch einen von T nach R verlaufenden Querschnitt in ein einfach zusammenhängendes verwandelt wird. In letzterem ist

$$u = U + iV$$

eine eindeutige und reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x+iy = \varrho e^{i\vartheta}$. Ferner hat V infolge der Konfiguration von σ den gleichen Wert für die Punkte ϱ, ϑ und $\varrho, \vartheta - \frac{2\pi}{m}$, während der Wert von U in diesen Punkten sich stets um eine Konstante 2ω unterscheidet. Kehrt man das Abhängigkeitsverhältnis um, so ist z eine eindeutige und reguläre Funktion von u in einem Rechteck, dessen Seiten $V=0$, $V=1$, $U=m\omega$, $U=-m\omega$ sind, mit Ausnahme einzelner auf der Rechteckseite $V=0$ liegenden Punkte, die den Spitzen von T entsprechen. Von dieser Funktion z wird nun in Anlehnung an die von H. A. Schwarz bei Abbildungsaufgaben benutzten Überlegungen gezeigt, daß sie durch den Quotienten der beiden Integrale der folgenden Differentialgleichung dargestellt werden kann:

$$\frac{d^2f}{du^2}+\left(\frac{1}{4}\wp(u)+B\right)f=0,$$

wo $\wp(u)$ die Weierstraßsche Funktion bezeichnet. Diese Gleichung wird, nachdem die charakteristischen Eigenschaften ihrer Integrale allgemein erörtert sind, angenähert integriert, indem $\wp(u)$ durch

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)}-\frac{\eta}{\omega}$$

ersetzt und an Stelle der Konstante B eine andere eingeführt ist. Die angenäherte Gleichung läßt sich, wenn man

$$\xi = e^{\frac{i\pi u}{\omega}}$$

als unabhängige Variable einführt, auf die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe reduzieren, und somit läßt sich z durch den mit einer Poteuz von ξ multiplizierten Quotienten zweier hypergeometrischen Reihen ausdrücken:

$$z = cR\xi^{-\frac{1}{m}} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right)}.$$

Die Konstante c ist so zu bestimmen, daß die Grenze, der die rechte Seite für $\xi = 1$ zustrebt, $= r$ wird. Aus diesem Ausdruck für z folgt leicht der Wert der gesuchten Konfigurationskonstante G:

$$G = \frac{e^{-\mu}}{r[\log R - \log r - \mu]} \cdot F^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2}\right),$$

wo μ mit der in dem Ausdruck für z enthaltenen Konstante c durch die Gleichung

$$c = \frac{r}{R} e^{\mu}$$

zusammenhängt.

Es wird dann noch untersucht, welchen Einfluß die vorher vernachlässigten Glieder auf das Resultat haben können. Dieser Fehler ergibt sich als höchstens von der Ordnung

$$16\left(\frac{r}{R}\right)^m,$$

so daß für die praktische Anwendung $\left[\frac{r}{R} \leqq \frac{1}{4}, m \geqq 6\right]$ die Näherung völlig ausreicht. Es folgt eine Diskussion der Formel für G und eine Berechnung des numerischen Wertes von G für verschiedene m. Für ein Kabel mit einem Drahte nimmt G den Wert an:

$$G_1 = \frac{1}{r[\log R - \log r]},$$

und für $m = \infty$ wird

$$G = 1{,}393\ G_1.$$

Wn.

Ch. Fortin. Tension superficielle d'un diélectrique dans le champ électrique. C. R. **140**, 576-578.

Für das Verhalten gewisser dielektrischer Flüssigkeiten im elektrischen Felde ist die Frage von Wichtigkeit: Wie ändert sich die Oberflächenspannung unter Einwirkung des Feldes? Es wurde die Ablenkung von der wagerechten Lage bestimmt, welche eine dielektrische Flüssigkeit zwischen zwei ebenen, parallelen Kondensatorplatten erfährt. Die Totalablenkung läßt sich ausdrücken durch

$$\frac{a}{F^2} = \frac{K-1}{8\pi dg} + \frac{2B}{edg},$$

wo K die spez. Induktionskraft der Flüssigkeit, d ihre Dichte, e der Abstand der Platten, V die Potentialdifferenz derselben und $F = \frac{v}{e}$. Es genügt, zu entscheiden, ob $\frac{a}{F^2}$ mit der Distanz der Platten variiert. Für Petroleum ergab sich: In einem elektrischen Felde von 20000 volt/cm ist die relative Variation der Oberflächenspannung unter 1/450. Rns.

J. Thomae. Bemerkung über das elektrische Potential bei geradlinigen Elektroden. Leipz. Ber. **57**, 68-78.

Unter der Voraussetzung, daß die Intensität des einfließenden Stromes in jeder einzelnen Elektrode eine gleichförmig verteilte ist, wird obige Aufgabe durch einen Grenzübergang zu lösen versucht. Bei einer unendlichen Platte wird das elektrische Potential für den Fall punktförmiger Elektroden, für zwei parallele geradlinige Elektroden und für zueinander senkrechte Elektroden untersucht. Ferner wird das Potential geradliniger Elektroden in der Halbebene, und bei einer Kreisplatte mit dem Radius 1 das Potential für einen speziellen Fall punktförmiger Elektroden dargestellt. Rns.

Ch. Nordmann. Mesure de la conductibilité des diélectriques au moyen des gaz ionisés. C. R. **140**, 38-39.

Bisher pflegte man, um den Widerstand R isolierender Mittel zu messen, mit einer gegebenen Potentialdifferenz zu arbeiten. Demgegenüber schlägt der Verf. vor, während die eine Fläche des Dielektrikums geerdet ist, der anderen mittels ionisierter Gase in der Zeiteinheit konstante und bekannte Elektrizitätsmengen zuzuführen und elektrometrisch das variable Potential E dieser Fläche zu beobachten. Die Formel, die abgeleitet wird, reduziert sich in kurzer Zeit auf $R = E : Q$. Verf. verspricht sich von dieser Methode Aufschluß über die Ursache der zeitlich variablen Isolierung gewisser Dielektrika. Gt.

A. Szarvassi. Über elektromotorische Kräfte und die reversibelen Wärmetönungen des elektrischen Stromkreises. Ann. der Phys. (4) **17**, 248-284.

Verf. geht von dem Thermoelement aus und gelangt zu Resultaten, welche von der bisherigen Auffassung der thermoelektrischen Erscheinungen wesentlich abweichen. Er entwickelt zunächst die von W. Thomson gegebenen Gleichungen und leitet aus ihnen die Gleichung $\Pi = T \cdot dE/dT$ ab, in denen E die elektromotorische Kraft und Π den Peltier-Effekt für die absolute Temperatur T bedeuten. Es stellt sich heraus, daß die Thomsonschen Gleichungen mit der Erfahrung wenig übereinstimmen, während die angeführte Gleichung durch die Erfahrung in befriedigender Weise bestätigt wird. Verf. betrachtet sie als Grundgesetz der thermoelektrischen Erscheinungen und zeigt, daß sie sich, unabhängig von den Thomsonschen Gleichungen, auch aus der Theorie der Thermoelektrizität von F. Kohlrausch ergibt. Eine Prüfung der elektromotorischen Kraft an der Berührungsstelle zweier Metalle zeigt, daß die Annahme solcher Kräfte mit dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie im Widerspruch steht. Die Übertragung dieser Untersuchungen auf elektrolytische Leiter gestattet, die von Nernst gefundene elektromotorische Kraft von Konzentrationsgefällen in verdünnten Lösungen ohne spezielle Hypothesen zu berechnen. Gt.

H. Fletcher Moulton. Current flow in rectangular conductors. Lond. M. S. Proc. (2) **3**, 104-110.

Die Aufgabe, die Elektrizitätsbewegung in einer rechteckigen Platte zu bestimmen, bei welcher die Elektroden sich an zwei entgegengesetzten Seiten befinden, aber nicht ganz über diese ausdehnen, führt auf elliptische Funktionen. Mit Hülfe der Schwarzschen Transformation gelingt es dem Verf., die Aufgabe zu lösen. Auch der Fall eines geradlinig begrenzten ebenen Leiters, bei dem ein Winkel ein rechter und zwei entgegengesetzte Seiten die Elektroden sind, wird in ähnlicher Weise behandelt. Sonderfälle schließen sich an. Gt.

W. Einthoven. Verdere mededeelingen over den snaargalvanometer: Analyse der snaargalvanometrische krommen. Massa en spanning van den kwartsdraad en weerstand der draadbeweging. Amst. Ak. Versl. **13**, 824-886.

Sehr schnelle Stromschwankungen werden mit Hülfe des aperiodischen Saitengalvanometers gewöhnlich so gemessen werden müssen, daß die Zeit für den ersten Ausschlag größer ist als die Stromperiode. Der Verf. zeigt die Analyse der Kurve unter der Annahme, daß bei der Saitenbewegung der Luftwiderstand proportional der Geschwindigkeit ist.

Zur Vereinfachung wird ein besonderes Maßsystem eingeführt. Zur Ermittelung des Widerstandes dient die Kurve, die beim Einleiten eines konstanten Stromes aufgezeichnet wird. Die elektromagnetische Dämpfung wird ebenso durch Anwendung eines sehr großen und eines minimalen Widerstandes im Stromkreis bestimmt. Die Verwendbarkeit des Instruments ergibt sich aus der angezeigten Elektrizitätsmenge: $4 \cdot 10^{-12}$ Coulomb, Spannungsdifferenz: $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ Volt, registrierte Schwingungszahl: 77000 pro Sek. Gm.

A. A. Robb. On the conduction of electricity through gases between parallel plates. Phil. Mag. (6) **10**, 237-242, 664-676.

Die für das Problem charakteristische Differentialgleichung zweiter Ordnung enthält die Geschwindigkeiten für positive und negative Ionen in einer Form, die die allgemeine Lösung aussichtslos erscheinen läßt. Für den Fall, daß diese Geschwindigkeiten gleich sind, ist sie von J. J. Thomson integriert worden. In der vorliegenden Arbeit wird die Differentialgleichung umgeformt, so daß ihre Abhängigkeit von den Konstanten des Leitungsgases eine einfache Form annimmt, und gezeigt, daß auch bei verschiedenen Geschwindigkeiten zwei Drucke existieren, für die die Gleichung integrierbar ist. Die auftretenden Integranden sind allerdings im allgemeinen Fall nur durch Reihenentwicklungen zu integrieren. Solche Entwicklungen füllen den zweiten Teil der Arbeit. Br.

J. S. Townsend. A theory of the variation of the potential required to maintain a current in a gas. Phil. Mag. (6) **9**, 289-299.

Es werden die Bedingungen untersucht, die notwendig sind, um einen Strom von sehr kleiner Intensität zwischen parallelen Elektroden in einem ionisierbaren Gas zu unterhalten, insbesondere in Abhängigkeit von Natur und Zustand des Gases. Die Entwicklungen gehen bis zu numerischen, durch Versuche kontrollierbaren Rechnungen. Br.

O. M. Corbino. Coppie destate su una sfera conduttrice da un campo rotante. Nuovo Cimento (5) **9**, 204-223.

O. M. Corbino. Über Kräftepaare, welche durch ein rotierendes Feld auf einer leitenden Kugel hervorgerufen werden. Physik. Zs. **6**, 227-230.

Es handelt sich für den Verf. um Felder, welche mit Geschwindigkeiten von 500 bis 6000 Touren in der Sekunde rotieren, auf welche daher die von Hertz in seiner Dissertation berechneten Formeln keine

Anwendung finden. Für die Vollkugel sind diese Formeln nämlich nur zu berechnen in den Grenzfällen sehr kleiner und sehr großer Geschwindigkeit. Trotzdem zieht der Verf. aus den für diese Grenzfälle geltenden Formeln einige Folgerungen, die sich bei den von ihm ausgeführten Versuchen vorhersehen lassen. Lp.

A. Broca. Sur le pouvoir inducteur spécifique des métaux. C. R. **140**, 1677-1680.

Für das Verhältnis der Widerstände der Metalldrähte bei kontinuierlichen Strömen und bei Strömen hoher Frequenz hat Lord Kelvin eine Berechnung aufgestellt, die nach dem Verf. mit der Erfahrung nicht übereinstimmt. Er findet den Fehler darin, daß hierbei das spezifische Induktionsvermögen vernachlässigt ist. Nach Einführung dieser Größe leitet Verf. für jenes Verhältnis einen verbesserten Ausdruck ab, der auf eine Besselsche Funktion führt. Es wird jedoch zugegeben, daß immer noch Abweichungen von den experimentellen Ergebnissen übrig bleiben, die der Aufklärung bedürfen. Gt.

M. La Rosa. Sulla misura di piccoli coefficienti d' autoinduzione. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_1$, 621-627; Nuovo Cimento (5) **10**, 309-317.

Die Messung kleiner Selbstinduktionskoeffizienten geschieht mit Hülfe der Wheatstoneschen Brücke. Gt.

B. Strasser. Über die Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten von Solenoiden. Ann. der Phys. (4) **17**, 763-771.

Aus dem Selbstpotential eines Kreises:

$$L = 4\pi r\left(\ln\frac{v}{\varrho} + 0{,}333\right)$$

und dem gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier gleichen, koaxialen Kreise im Abstande m:

$$M = 4\pi r\left\{1 + \frac{3m^2}{16r^2} + \cdots\right\}\ln\frac{8r}{m} + 4\pi r\left\{-2 - \frac{1}{16}\frac{m^2}{r^2} + \cdots\right\}$$

ergibt sich für das Selbstpotential eines Solenoides:

$$L = 4\pi r\left\{n\left(\ln\frac{r}{\varrho} + 0{,}333\right) + n(n-1)\left(\ln\frac{8r}{g} - 2\right) - A \right.$$
$$\left. + \frac{g^2}{8r^2}\left[\left(3\ln\frac{8r}{g} - 1\right)\left(\frac{n^2(n^2-1)}{12}\right) - B\right]\right\},$$

wo $$A = 2 \ln [(n-1)!\,(n-2)! \ldots],$$
$$B = 3\,[(n-2)\,2^2 \ln 2 + (n-3)\,3^2 \ln 3 + \cdots]$$

n die Anzahl der Windungen, $2r$ den mittleren Durchmesser der Spule, g die Ganghöhe der Spule und ϱ die Dicke des Spulendrahtes bedeutet. Rns.

L. Hermann. Über die Effekte gewisser Kombinationen von Kapazitäten und Selbstinduktionen. Ann. der Phys. (4) **17**, 501-517, 779-780.

Es handelt sich zur Aufklärung gewisser Eigenschaften der Nerven um die Prinzipien der Messung von Selbstinduktion und Kapazität induktiver Kerne und Kapazitätsleiter. Es werden theoretisch und experimentell untersucht: Eine Kapazität und eine Selbstinduktion, mehrere Kapazitäten für Parallel- und Hintereinanderschaltung, sowie mehrere Kapazitäten und Induktionen. Rns.

H. A. Wilson. On the electric effect of rotating a dielectric in a magnetic field. Lond. Phil. Trans. (A) **204**, 121-137.

Enthält eine kurze Theorie, betreffend eine Versuchsanordnung, bei der man ein Dielektrikum in einem magnetischen Feld rotieren läßt. Die dadurch hervorgerufenen Veränderungen des Spannungszustandes stimmen mit der Theorie überein. Br.

G. Picciati. Campo elettromagnetico dovuto ad una corrente costante, elicoidale. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{14}_1$, 323-331.

G. Picciati. Sulla teoria del solenoidale elettrodinamico. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{14}_1$, 443-450.

Beide Arbeiten beschäftigen sich mit einem unendlich langen und unendlich dünnen Leiter, der die Gestalt einer zylindrischen Schraubenlinie besitzt und sich in einem unendlichen isotropen, nicht polarisierbaren Dielektrikum befindet. Die Fundamentalgleichungen für endliche Dimensionen der Spule werden durch Einführung von trigonometrischen Funktionen umgeformt, der Übergang zur Grenze, in welchem die Schraubenlinie unendlich lang wird, führt auf Zylinderfunktionen der ersten Art und auf Hankelsche Zylinderfunktionen. Gt.

T. Tamaru. Eine Beobachtungsmethode mit gedämpften Schwingungen bei fortrückender Ruhelage, besonders für ein Elektrometer. Physik. Zs. **6**, 285-290.

Bei einer piezoelektrischen Untersuchung verschob sich die Ruhelage der Nadel durch die Änderung der Zimmertemperatur und die dadurch bedingte Pyroelektrizität um große Beträge; in einem Falle betrug die Skalenverschiebung auf einer 3 m entfernten Skala 100 mm für 0,1° Temperaturänderung. Dies veranlaßte den Verf. zu einer theoretischen Untersuchung. Es sei a der Skalenwert der Ruhelage in einem Umkehraugenblick, $a + ct$ derjenige um t Sekunden später. Für den in jedem Augenblick der Nadellage entsprechenden Skalenwert x gilt die Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \alpha^2(x - a - ct) = 0.$$

Die Diskussion der Lösung dieser Gleichung

$$x = a + ct - \frac{2c\beta}{\alpha^2} + Ae^{-\beta t}\cos(\mu t - \varepsilon),$$

wo $\mu = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, in ihrer Anwendung auf die vorliegende Aufgabe bildet den theoretischen Teil der Arbeit. Lp.

W. C. Clinton. Note on the voltage ratios of an inverted rotary converter. Phil. Mag (6) **10**, 160-164.

Gibt eine Entwicklung über den Stromverlust in Umformern, in denen man den direkten Strom dem Kommutator zuführt. Br.

P. Riebesell. Über den Kurzschluß der Spulen und die Vorgänge bei der Kommutation des Stroms eines Gleichstromankers. Diss. Kiel. Schmidt & Klaunig. 62 S.

Arnold und Mie haben in einer in der Elektrotechn. Zeitschr. 1899 erschienenen Arbeit zur Berechnung der Kurzschlußstromkurve unter bestimmten Annahmen eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung aufgestellt und durch Potenzreihen integriert. Für den Moment, in dem der Kurzschluß aufhört, kamen sie auf eine Entwicklung nach hypergeometrischen Funktionen. Die vorliegende Arbeit übt nun Kritik an jenen Untersuchungen. Zunächst behauptet der Verf., daß die Reihen in dem erwähnten speziellen Falle nicht, wie diese Autoren angeben, divergent werden; sodann findet er einige Fehler in der Konstantenbestimmung und gibt das Integral jener Differentialgleichung an. An die Diskussion der Differentialgleichung nach der Theorie von Briot und

Bouquet, welche der Verf. durchführt, schließt sich die Untersuchung der günstigsten Bedingungen für den funkenfreien Gang an, welche anders lauten als bei Arnold und Mie. Es wird sodann die gegenseitige Induktion der Spulen in Rechnung gezogen und die Annahme, daß die kommutierende EMK eine lineare Funktion der Zeit sei, durch eine andere ersetzt. So gelangt Verf. zur vollständigen Differentialgleichung der Kurzschlußstromkurve. Schließlich wird die Wirkung der eingeschalteten Kapazität, sowie der Eigenkapazität der kurzgeschlossenen Spule betrachtet. Gt.

P. Drude. Rationelle Konstruktion von Tesla-Transformatoren. Ann. der Phys. (4) **16**, 116-133.

1. Die Formel für die Berechnung der Dimensionen einer Tesla-Spule aus gegebener Primärkapazität C_1 und Spulenhöhe g bei beliebigem $h/2r$ ist

$$r^3 = \pi\varphi \frac{g^3}{f^2 p^2} C_1 (\ln 8 r_1/\varrho_1 - 2).$$

2. Für $r_1 : r = 2$ ist das beste Verhältnis $h/2r$ einer Tesla-Spule $h/2r = 2{,}6$; für $r_1 : r$ wähle man $h/2r = 2{,}2$. Die Dimensionsberechnung der Tesla-Spule für diese beiden Fälle enthalten die Formeln:

$$r^3 = 0{,}155 \frac{r_1}{r} g^2 C_1 (\ln 8 r_1/\varrho - 2),$$

$$h = 5{,}2 r;$$

$$r^3 = 0{,}184 \frac{r_1}{s} g^2 C_1 (\ln 8 r_1/\varrho - 2),$$

$$h = 4{,}4 r.$$

Bei starker Beanspruchung der Spule auf Büschelbildung wähle man $h/2r$ etwas kleiner und $r_1 : r$ klein (1,25).

3. Das Maximumpotential am Tesla-Pol ist proportional zur dritten Wurzel aus $C_1 : g$.

4. Eine rohe Taxierung der Kapazität von Spulen gibt die Formel:

$$C_2 = \frac{\pi}{4} r f^2 \varphi \sqrt{h/2r} \frac{\log l/\varrho}{\ln l/\varrho} = 0{,}342\, r f^2 \varphi \sqrt{h/2r}.$$

5. Das Maximumpotential am Tesla-Pol ist mit der Windungszahl n der Spule proportional und wird erst bei vielen hundert Windungen wesentlich gesteigert gegenüber dem primären Funkenpotential. Rns.

J. K. Sumec. Der einphasige Induktionsmotor. Arch. der Math. u. Phys. (3) 8, 306-323.

Es wird gezeigt, daß für einen zweipoligen Motor, in dem die magnetische Achse des festen Systems die Richtung X hat und der

sekundäre Teil sich im Sinne des Uhrzeigers von X nach Y dreht, vorausgesetzt, daß die räumliche Verteilung der Felder und der zeitliche Verlauf der Primärspannung als sinusförmig angenommen werden kann, das ganze Strombild des Rotors sich in einem beliebigen Moment in zwei sinusförmige Strombilder nach den Achsen X und Y zerlegen läßt. Dies wird aus den Feldgleichungen abgeleitet und am Vektordiagramm erläutert. Hiernach werden die Ausdrücke für das momentane Drehmoment, die mechanische Leistung, sowie für die Stromwärme und den Wattverbrauch im Rotor entwickelt und mit den entsprechenden Ausdrücken für den Mehrphasenmotor verglichen. Es werden sodann die Vorgänge im primären System eingehender untersucht und die technisch wichtigen Spezialfälle behandelt. Gt.

C. Fredenhagen. Entwurf einer allgemeinen Theorie elektrolytischer Lösungskonstanten und Spannungsreihen, sowie der Löslichkeit und Dissoziation von Säuren und Basen. Ann. der Phys. (4) **17**, 285-331.

C. Fredenhagen. Über eine Theorie des elektrischen und dielektrischen Verhaltens der Leiter zweiter Klasse. Ann. der Phys. (4) **17**, 332-345.

Die erste dieser beiden Arbeiten, welche vorwiegend der Elektrochemie angehören, gelangt zu dem Ergebnis, daß die elektrolytische Dissoziation thermodynamisch einzig und allein durch eine binär-äquivalente Koppelung der Spaltungsprodukte charakterisiert ist; in der zweiten wird daraus die Folgerung gezogen, daß sich chemische Vorgänge überall dort, wo sie binär-äquivalent gekoppelt erfolgen, unter den geeigneten Bedingungen als galvanischer Strom äußern müssen. Gt.

R. Malmström. Versuch einer Theorie der elektrolytischen Dissoziation unter Berücksichtigung der elektrischen Energie. Ann. der Phys. (4) **18**, 413-449.

Verf. leitet zunächst die Formeln von Jahn und Nernst auf einem neuen Wege ab. Die Unmöglichkeit, die bisherige Theorie der Dissoziation auf stark dissoziierte Elektrolyte anzuwenden, führt den Verf. dazu, sie durch Einführung der elektrischen Energie zu vervollständigen, indem er annimmt, daß die Ionen um gewisse Gleichgewichtslagen schwingen, ohne zusammenzustoßen. Die elektrische Energie wird dabei proportional der Anzahl der Ionen und der dritten Wurzel aus der Konzentration angesetzt. Die Zustandsgleichung ergibt sich für einen vollständig dissoziierten Elektrolyten in der Form

$$\left(p + \frac{a}{v^{\frac{1}{3}}}\right) v = 2RT,$$

wobei v das Molekularvolumen und a eine Konstante ist. Diese Gleichung ist der van der Waalsschen Gleichung analog, nur fehlt die Volumenkorrektion, und anstatt des Exponenten 2 tritt hier der Exponent $\frac{1}{3}$ auf. Auch die Elektrostriktion wird berücksichtigt. Eine Reihe von Sonderfällen schließt sich an. Die Formel des Dissoziationsgleichgewichts wird auf die Form

$$\log \frac{c\alpha^2}{1-\alpha} - k_1 (c\alpha)^{\frac{1}{3}} = k_2$$

gebracht, in der c die Konzentration und α den Dissoziationsgrad bedeutet, und mit der Jahnschen Gleichung verglichen. Gt.

R. Dongier et A. Lesage. Sur la mesure de la résistance électrique des électrolytes au moyen des courants alternatifs. Applications médicales. Soc. Philom. Bull. (9) 7, 11-18.

Es muß auf die durch Zeichnungen erläuterte Abhandlung verwiesen werden. Rns.

E. Klupathy. Zur Theorie des Wehnelt-Unterbrechers. Ungar. Ber. **20**, 295-304.

Die Resultate der Untersuchung werden von dem Verf. in folgenden Punkten zusammengefaßt: 1. Die Erwärmung der Elektrode des Wehnelt-Unterbrechers durch äußeren Strom erhöht die Frequenz. 2. Die parallele Schaltung eines Kondensators bei dünner Anode und kleinerer Selbstinduktion erhöht ebenfalls die Frequenz, bei dickem Draht und größerer Selbstinduktion jedoch vermindert sie diese. 3. Die Erwärmung des Elektrolyten geschieht nicht bloß an der Spitze, sondern an der ganzen Oberfläche der Elektrode; ein Unterbrecher „ohne Spitze“ wirkt gerade so, wie einer mit Spitze von gleicher Dimension. 4. Die Joule-Wärme genügt nicht zur Verdampfung der die Elektrode umgebenden Flüssigkeitsschicht. 5. Die Peltier-Wirkung, welche an der Trennungsfläche des Elektrolyten und der Elektrode auftritt, ist hinreichend, um an der Anode die regelmäßigen Unterbrechungen hervorzurufen und die Polareigenschaften des Unterbrechers zu erklären. 6. Beim Lochunterbrecher wächst die Zeit der Unterbrechung mit dem Quadrat des Querschnittes der Öffnung. Rns.

S. R. Milner. On the polarization at a metallic anode. Phil. Mag. (6) **9**, 645-668.

Enthält Entwicklungen zur Berechnung bestimmter Versuchsanordnungen auf Grund der Darstellung von Nernst. Es handelt sich um

die Darstellung des allgemeinen Integrals der entsprechenden Differentialgleichung in Form einer Fourierschen Reihe oder beim Grenzübergang in Form eines bestimmten Integrals. Br.

S. Sano. Über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten in einem elektrischen Felde. Physik. Zs. **6**, 566-572.

„Das Gleichgewicht heterogener Substanzen hat für viele Forscher den Gegenstand der Untersuchung geliefert. Es scheint mir nun die Frage von einigem Interesse zu sein, welche Veränderungen in den Gleichgewichtsbedingungen notwendig werden, wenn man das System in ein elektromagnetisches Feld bringt. In dieser kurzen Notiz soll die Diskussion der Beständigkeit und der Kapillaritätswirkung nicht berührt werden." Die Rücksicht auf den verfügbaren Raum verbietet ein näheres Eingehen auf die formelreiche Arbeit. Lp.

S. Sano. On the equilibrium of fluids in an electromagnetic field. Tokio Math. Ges. **2**, 365-380.

Es werden die Bedingungen des mechanischen und chemischen Gleichgewichts für ein System von elektrolytischen Lösungen, das sich in einem elektromagnetischen Felde befindet, aufgestellt und unter Einführung der elektrischen Verschiebung, der Intensität der Magnetisierung, sowie der elektrischen und magnetischen Feldstärke umgewandelt. Unter bestimmten Annahmen kommt Verf. zu Ergebnissen, welche von denen abweichen, zu denen Hurmuzescu (C. R. **119**, 1894) und G. Jäger (Wien. Ber. **108**, 1899) gelangt sind. Gt.

A. Ponsot. Pouvoir thermoélectrique et effet Thomson. C. R. **140**, 1585-1587.

Unter der Bedingung, daß die Temperatur θ niedriger ist als diejenige des tiefsten neutralen Punktes eines beliebigen Paares von zwei aufeinanderfolgenden Metallen, welche so aneinander gereiht sind, daß ein elektrischer Strom Wärme absorbiert, indem er von einem Metall zum anderen nach rechts übergeht, ist die Anordnung der Metalle nach dem abnehmenden Werte des Koeffizienten vom Thomson-Effekt diejenige, in welcher die thermoelektrische Kraft eines Metalles in bezug auf das folgende positiv ist.

Die thermoelektrische Kraft ist $\frac{q}{\theta}$, wo q die von der Lötstelle absorbierte Wärme ist. Rns.

W. Voigt. Über Pyroelektrizität an zentrisch-symmetrischen Kristallen. Gött. Nachr. 1905, 394-431.

Neben der Frage nach dem Grunde der azentrischen Erregung in einem zentrischen Kristalle wird die Frage erörtert, ob eine wirklich, d. h. in den kleinsten Teilen zentrische Erregung eines Kristalls möglich sei, und welche Gesetze eine solche befolgen müßte. Die Kugelfunktionenreihe für die Wirkung eines neutralen Polsystems kann mit einem beliebig hohen Gliede beginnen; polar wirkende Polsysteme sind nur diejenigen, bei denen das Glied erster Ordnung von Null verschieden ist; für solche wird die Potentialfunktion auf hinreichend ferne Punkte durch

$$\psi_1 = M \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda}$$

dargestellt, wobei M ein Vektor in einer dem System individuellen Richtung, λ das Moment des neutralen Systems und r sein Abstand vom Aufpunkte ist. Verschwindet dagegen das Glied erster Ordnung, so kommt das folgende von der Form

$$\psi_2 = M_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \lambda_1^2} + M_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \lambda_2^2} + M_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \lambda_3^2}$$

in erster Linie zur Geltung; dabei stellt M_1, M_2, M_3 ein Tensortripel mit den Achsenrichtungen λ_1, λ_2, λ_3 dar. Ein Potential der zweiten Form entspricht einer zentrisch-symmetrischen elektrischen Verteilung. Während die angeführten Potentiale für ein Volumenelement gelten, wird nun das Potential der zweiten Form für einen Körper aufgestellt und durch eine zweimalige partielle Integration in ein Raumintegral und ein Oberflächenintegral, die beide gewöhnliche Newtonsche Potentiale sind und in dem Falle räumlich konstanter Erregung verschwinden, sowie ein zweites Oberflächenintegral zerlegt. Es stellt sich dabei heraus, daß die wirklich zentrische Pyroelektrizität eine speziell kristallphysikalische Erscheinung ist, wobei obenein das reguläre System ausfällt. Der einfachste in Betracht kommende Fall liegt bei Kristallen mit nur einer ausgezeichneten Achse vor. Für diese wird das Potential gebildet und für Körper von der Form einer Kugel, eines Polyeders und eines Prismas gedeutet. Es ergibt sich, daß ein zentrisch erregtes Polyeder mit lauter gleichwertigen Flächen, aus einem einachsigen Kristall hergestellt, nur auf seinen Kanten scheinbare Ladungen trägt. Auch rhombische Kristalle werden in derselben Weise untersucht. Gt.

T. Tamaru. Bestimmung der piezoelektrischen Konstanten von kristallisierter Weinsäure. Gött. Nachr. 1905, 128-158.

Die allgemeine Theorie der Piezoelektrizität ist von W. Voigt aufgestellt worden. Zu den bisherigen entsprechenden experimentellen Untersuchungen

fügt der Verf. die über den hemimorphisch monoklinen Kristall Rechtsweinsäure. Von den vier Parallelepipeden, welche untersucht werden, haben die beiden ersten die Flächennormalen: 1) $\xi(1, 0, 0)$, $\eta(0, 1, 0)$, $\zeta(0, 0, 1)$, 2) $\xi(1, 0, 0)$, $\eta\left(0, 1:\sqrt{2}, 1:\sqrt{2}\right)$, $\zeta\left(0, -1:\sqrt{2}, 1:\sqrt{2}\right)$, die beiden übrigen Kristalle sind dem zweiten analog. Gt.

E. Gehrcke. Über elektrische Wellen. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **9**, 150-157 (Antrittsvorlesung).

„Wir können sagen, daß den im freien Äther vor sich gehenden elektrischen Wellen heute noch genau dieselben Vorstellungen zugrunde gelegt werden, welche ihr Entdecker Hertz benutzte. Die sogenannten erzwungenen Schwingungen in Leitern werden aber heute etwas weniger allgemein gedacht, und man verbindet mit ihnen bestimmtere Vorstellungen, indem man sich die elektrische Strömung als in einer Bewegung von Elektronen bestehend denkt. Die Grundlagen unserer Auffassung sind jedoch auch hier unverändert diejenigen der Maxwell-Hertzschen Theorie." Lp.

W. Seitz. Die Wirkung eines unendlich langen Metallzylinders auf Hertzsche Wellen. Ann. der Phys. (4) **16**, 746-772.

Die Störungen, welche metallische Körper in Beziehung auf die Ausbreitung elektrischer Wellen hervorbringen, sind bis jetzt nur für die Fälle einer Metallwand und einer metallischen Kugel untersucht worden. Verf. betrachtet nun den Einfluß eines unendlich langen Zylinders, dessen Achse senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle liegt, auf ebene elektrische Wellen. Es werden die beiden Fälle behandelt, daß die Drehachse der elektrischen und der magnetischen Kraft parallel ist. Die auf Polarkoordinaten transformierten Maxwellschen Gleichungen führen in beiden Fällen auf eine Differentialgleichung, welche durch Besselsche Funktionen integriert wird. Gt.

A. Kalähne. Elektrische Schwingungen in ringförmigen Metallröhren. Ann. der Phys. (4) **18**, 92-127.

Verf. zeigt, daß sich die R. H. Webersche Lösung (Habilitationsschrift Heidelberg 1902) des Maxwellschen Gleichungssystems unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen auch zur Darstellung der elektrischen Schwingungen eines zum Kreisring gebogenen Metallrohres von rechteckigem Querschnitt eignet, und zwar für den Grenzfall unendlich großer Leitfähigkeit. Rns.

F. HACK. Das elektromagnetische Feld in der Umgebung eines gedämpft schwingenden linearen Oszillators. Ann. der Phys. (4) **18**, 634-638.

Der Verlauf der Kraftlinien bei gedämpften Schwingungen weicht so wenig von demjenigen bei ungedämpften Schwingungen ab, daß man für alle Zwecke, bei denen es nicht auf die äußerste Genauigkeit ankommt, denjenigen der ungedämpften Schwingungen zugrunde legen kann.

Rns.

W. v. IGNATOWSKY. Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht. Ann. der Phys. (4) **18**, 495-522, 1078.

Von der Voraussetzung ausgehend, daß, wenn B die Lösung für die reflektierten Wellen bei einer Leitfähigkeit $\sigma \neq 0$ und B' für $\sigma = 0$ ist:

$$\underset{\sigma=0}{B} = B',$$

gelangt Verf. zum richtigen Resultat durch Benutzung der Hankelschen Zylinderfunktionen.

Es werden die allgemeinen Lösungen gegeben für den Fall, daß die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel zur Achse des Drahtes ist, und für den Fall senkrecht zur Achse. Die im Drahte absorbierte Energie wird berechnet, ebenso die im und vom Drahte strömende. Die Rechnung wird ganz allgemein geführt bei der Voraussetzung, daß das den Draht umgebende Medium ein Dielektrikum ist. Hierfür werden zwei Spezialfälle herangezogen. 1. Der Draht ist ein absoluter Leiter. 2. Der Draht ist ein absolutes Dielektrikum. Zum Schluß wird die Berechnung für eine im Verhältnis zum Drahtdurchmesser große Wellenlänge ausgeführt, und zwar für einen Draht aus Kupfer. Der Draht verhält sich dabei in bezug auf Reflexion wie ein absoluter Leiter, er muß also Energie absorbieren.

Rns.

J. W. NICHOLSON. On electrical vibrations between confocal elliptic cylinders, with special reference to short waves. Phil. Mag. (6) **10**, 225-236.

Die begrenzenden Zylinderflächen sind als vollkommene Leiter vorausgesetzt. Unter dieser Voraussetzung werden Schwingungen parallel und senkrecht zur Zylinderachse untersucht, naturgemäß mit Hülfe von elliptischen Zylinderkoordinaten. Aus diesen kann man die allgemeine Lösung zusammensetzen. Für kurze Wellen ergeben sich in Annäherung verhältnismäßig einfache Ausdrücke, aus denen folgt, daß die elektrische Kraft keine axiale Komponente und die magnetische keine zu der Zylinderfläche normale besitzt.

Br.

E. Henderson. Alternators in parallel. Phil. Mag. (6) **9**, 309-313.

Beschäftigt sich mit Ungenauigkeiten, die bei der Behandlung des Problems in Perry's Calculus for engineers vorkommen sollen. Br.

J. A. Fleming. The application of the cymometer to the determination of the coefficient of coupling of oscillation transformers. Phil. Mag. (6) **9**, 758-767.

Einfache Theorie zur Berechnung einer speziellen Versuchsanordnung. Br.

L. Donati. Diagramma generale per trasformatori a corrente alternativa e motori asincroni polifasi. Bologna Mem. (6) **2**, 269-284.

Die Methode beruht darauf, die ursprünglichen Gleichungen, die den Verlauf der Schwingungsvorgänge angeben, auf Gleichungen zwischen den Charakteristiken zu reduzieren, die den Verlauf der Stromstärke oder Spannung im Primär- und Sekundärkreis darstellen. Diese lassen sich aus den gegebenen Daten graphisch ermitteln. Gm.

A. Garbasso. Le scariche oscillanti nei sistemi di conduttori complessi e la teoria elettromagnetica dell' analisi spettrale. Nuovo Cimento (5) **9**, 31-53, 113-150.

Beide Veröffentlichungen stellen das vierte und fünfte Kapitel einer größeren theoretischen und experimentellen Arbeit des Verf. dar. In dem vierten Kapitel wird zunächst die Theorie auf die Entladung eines beliebigen Systems vollkommener Leiter ausgedehnt und die allgemeine Lösung ermittelt, dann erfolgt die Anwendung auf Spezialfälle. Das fünfte Kapitel gibt die hieraus abgeleitete Theorie der Spektralanalyse. Zunächst wird ein Modell für ein materielles Molekül angenommen, später werden die möglichen Modelle für materielle Atome erörtert. Die Untersuchungen von Lockyer, Kayser und Runge, sowie Lenard werden diskutiert und mit den eigenen Ergebnissen verglichen. Gm.

S. Maisel. Zur Theorie ungedämpfter elektrischer Schwingungen. Physik. Zs. **6**, 38-43.

Zunächst werden die Theorien von Duddell und Janet bekämpft, die bei der Ableitung ihrer Bedingung $dv/di < 0$ für diese Schwingungen im Lichtbogen von der Voraussetzung eines gewöhnlichen Leiters ausgehen.

An dessen Stelle wird ein Leiter AB gesetzt, dessen Widerstand unendlich wird, wenn die Spannung an seinen Enden unter einen gewissen Betrag sinkt, während zu seinem Leitendwerden eine größere Spannung gebraucht wird. Der Verf. führt zunächst in die Rechnung eine fiktive gegenelektromotorische Kraft ein und erhält damit dann auch für das Verhältnis von Kapazität und Selbstinduktion im Abzweigungskreise beim Aufhören des Stromes den gleichen Wert, den Duddell experimentell gefunden hat. Nach diesem Aufhören des Stromes in AB wird nun der Kondensator im Nebenkreise geladen, bis an den Enden von AB die nötige Spannung erreicht ist, so daß durch ihn die Schwingungen gehen können. Diese passieren ihn, bis bei der Kondensatorentladung wieder die Minimalspannung eingetreten ist, und der Widerstand des Leiters AB wird wieder unendlich. So ist zwar jede Schwingung für sich stark gedämpft, die Gesamtheit aber nicht. Gm.

G. B. Dyke. On the flux of light from the electric arc with varying power supply. Phil. Mag. (6) **10**, 216-225.

Enthält einen Ansatz zur Berechnung der gesamten Lichtintensität, die von einer Bogenlampe unter verschiedenen Speisungsbedingungen ausgesendet wird. Br.

J. A. Fleming. On the ratio between the mean spherical and the mean horizontal candle-power of incandescent electric lamps. Phil. Mag. (6) **10**, 208-216.

Dieses Verhältnis (der Mittelwert bezieht sich auf die Rotation der Lampe um ihre Achse) wurde für neun verschiedene Typen von Glühlampen experimentell zu 0,78 ermittelt. Die Arbeit gibt eine theoretische Ableitung dafür, daß der Wert konstant sein muß. Br.

R. Hargreaves. Radiation and electromagnetic theory. Phil. Mag. (6) **9**, 313-350.

Die Arbeit beschäftigt sich zunächst allgemein mit dem Einfluß, den eine bewegte reflektierende und brechende Fläche auf eine auf sie fallende Strahlung irgend welcher Art ausüben muß. Insbesondere wird der Einfluß auf Reflexion, Brechung, Aberration und der entstehende Strahlungsdruck untersucht. Die Entwicklungen bleiben ziemlich schematisch, solange sie sich mit dem allgemeinen Problem beschäftigen, werden aber spezieller, sobald sie sich dem eigentlichen Thema der Arbeit zuwenden, nämlich der Untersuchung der elektromagnetischen Strahlung unter denselben Bedingungen. Sie enden hier in der näheren Untersuchung von Fällen, die der Bewegung der Erde im Äther äquivalent sind. Die Methode gründet sich auf die Vektorentheorie. Br.

R. Hargreaves. Radiation and electromagnetic theory. II. Aeolotropic potential. Phil. Mag. (6) **9**, 425-466.

Diese Arbeit betrifft die Anwendung der vorher allgemein entwickelten Formeln auf den speziellen Fall eines Ellipsoids, das leitend und von gleicher Dichte, aber als äolotrop gedacht wird. Die Anwendungen auf ein nichtleitendes und isotropes Medium ergeben sich dann leicht. Die verschiedenen Fälle werden ziemlich eingehend diskutiert, auch der Einfluß von Translation und Rotation besonders untersucht, darunter sogar ein Fall, wo die Translationsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit übersteigt, und für alle Fälle werden die ihnen entsprechenden Potentialformen aufgestellt. Br.

M. Reinganum. Über elektrooptische Konstanten der Metalle. Amst. Ak. Versl. **13**, 820-821.

M. Reinganum. Bemerkung zur Elektrooptik der Metalle. Ann. der Phys. (4) **16**, 958-960.

Die Grenze dafür, daß die elektrische Leitfähigkeit für das optische Verhalten der Metalle maßgebend ist, erhält man aus der Leitfähigkeitsformel der Elektronentheorie, wenn man darin die mittlere Zeit τ zwischen zwei Elektronenstößen einführt: $\sigma = \frac{1}{2} \tau \frac{e^2 N}{m}$. Setzt man darin für τ die Grenzzeit ein, die sich aus den Versuchen von Hagen und Rubens ergibt ($\lambda = 10 \mu$), so erhält man Werte, die mit denen aus den Dispersionstheorien gut übereinstimmen. Gm.

W. Westphal. Über die wichtigsten Beziehungen zwischen elektrischen und optischen Konstanten, insbesondere über den von Hagen und Rubens nachgewiesenen Zusammenhang des Reflexionsvermögens mit dem elektrischen Leitvermögen. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **9**, 36-47.

Der Artikel ist referierend; er erörtert die Beziehungen 1. der beiden elektrischen Maßeinheiten zur Lichtgeschwindigkeit, 2. daß der Brechungsindex gleich der Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstante ist, 3. des Reflexions- und des Emissionsvermögens der Metalle zu ihrer elektrischen Leitfähigkeit. Lp.

H. Th. Simon. Über die Dynamik der Lichtbogenvorgänge und über Lichtbogenhysteresis. Physik. Zs. **6**, 296-319.

„Die Ergebnisse der vorstehenden Arbeit sind: a) Die Methode der charakteristischen Kurven wurde mit Rücksicht auf die Lichtbogenphänomene zusammenfassend dargestellt und in einigen Richtungen erweitert.

b) Es wurde der Begriff der dynamischen Charakteristik eingeführt und zwei Methoden angegeben, die dynamische Charakteristik des Lichtbogens zu ermitteln. c) Mit Hülfe dieser Methoden wurde das Phänomen der Lichtbogenhysteresis gefunden, welche die Analogie zu dem entsprechenden Phänomen bei magnetischen Kreisen bildet. d) Es wurde die Abhängigkeit der Lichtbogenhysteresis von einigen besonderen Versuchsbedingungen festgestellt. e) Es wurde eine exakte Theorie der Lichtbogenvorgänge auf Grundlage der Ionentheorie des Lichtbogens aufgestellt und diskutiert. f) Es wurden die Versuchsergebnisse dieser Arbeit aus der gegebenen Theorie erklärt und zugleich eine exakte Erklärung vieler bisher nicht klar analysierter Beobachtungen an Wechselstromlichtbögen und Funkenentladungen erhalten. Namentlich wurde die Erscheinung des Entladeverzuges sowie der spezifische Unterschied im Verhalten des metallischen und Kohlelichtbogens auf einfache qualitative Faktoren zurückgeführt. g) Es wurde die Lichtbogenhysteresis als Ursache des Duddellschen selbsttönenden Lichtbogens erkannt.“ Lp.

H. A. Lorentz. De absorptie- en emissiebanden van gasvormige lichamen I. Amst. Ak. Versl. **14**, 518-534.

Die Absorption wird in der Schwingungsgleichnng des Elektrons durch ein der Geschwindigkeit proportionales Reibungsglied dargestellt. Dieses Reibungsglied wird kinetisch dadurch gerechtfertigt, daß bei der Absorption durch Zusammenstöße der Moleküle, von denen die Elektronen Teile darstellen, die freie Bewegung derselben gehemmt und in Wärmeenergie umgesetzt wird. Die Beobachtungen von Ångström an Kohlensäure und Hallo an Natriumdampf ergeben indessen, daß diese Zusammenstöße ganz bedeutend zahlreicher sein müssen, als sich nach der kinetischen Gastheorie ergibt. Gm.

J. Geest. La double réfraction magnétique de la vapeur de sodium. Arch. Néerl. (2) **10**, 291-335.

J. Geest. Über die Doppelbrechung von Natriumdampf im magnetischen Felde. Physik. Zs. **6**, 166-172, 249.

Die erste Abhandlung ist eine etwas modifizierte Übersetzung der Dissertation des Verf.: „Die magnetische dubbelbreking van natriumdamp in de nabijheid van de absorptiebanden“, Amsterdam, 1904. Die zweite Note ist ein Auszug daraus. Über den Gegenstand ist nach einem Berichte von Zeeman in der Amsterdamer Akademie referiert worden (F. d. M. **35**, 897, 1904). Lp.

J. Stark. Der Doppler-Effekt bei den Kanalstrahlen und die Spektra der positiven Atomionen. Gött. Nachr. 1905, 459-471.

Es wurden Serien- und Bandenspektren beobachtet, von denen nur die ersteren den Doppler-Effekt zeigten. Es entspricht dies der Hypothese des Verf., daß die ersteren von positiven Atomionen, die letzteren bei der Vereinigung dieser mit negativen Elektronen erzeugt werden. Da die Serienspektren den Zeeman-Effekt zeigen, muß man allerdings noch annehmen, daß in den Atomionen neben der positiven Ladung noch negative Elektronen vorhanden sind. Gm.

E. Rutherford. Radio-activity. Cambridge University Press. XI u. 558 S.

Der große Anklang, den dieses Werk gefunden hat, erhellt schon aus dem Umstand, daß bereits ein Jahr nach dem ersten Erscheinen eine zweite Auflage folgt. Der Verf. hat nicht nur die Literatur bis 1905 berücksichtigt und daher auch fast alle Kapitel entsprechend mehr oder weniger umgearbeitet, sondern auch einige ganz neu eingefügt. Der Inhalt der zweiten Auflage ist folgender: Die radioaktiven Substanzen. Die Ionisationstheorie der Gase. Messungsmethoden. Natur der Strahlungen. Eigenschaften der Strahlungen. Kontinuierliche Produktion radioaktiver Materie. Die Emanation. Sekundäre Radioaktivität. Theorie der sukzessiven Umwandlung. Umwandlungsprodukte des Uran, Thorium und Aktinium. Umwandlungsprodukte des Radium. Die bei der Emission auftretenden Energiemengen. Die radioaktiven Prozesse. Die Radioaktivität der Atmosphäre und gewöhnlicher Materialien. In zwei Anhängen werden noch die Eigenschaften der α-Strahlen und die radioaktiven Minerale behandelt. Gm.

W. H. Jackson. Note on a paper by W. Makower entitled: „On the method of transmission of the excited activity of radium to the cathode. Phil. Mag. (6) **10**, 532-537.

Gibt einen Ansatz zur Ermittelung derjenigen Energie, die auf eine Kathode infolge einer Radiumstrahlung übertragen wird, wenn diese ein dazwischen befindliches Gas ionisiert. Br.

G. W. Walker. On the drift produced in ions by electromagnetic disturbances, and a theory of radioactivity. Lond. R. S. Proc. **74**, 414-420.

Ausgehend von einer früher entwickelten, von allen Dämpfungserscheinungen abstrahierenden Theorie über die Einwirkung elektrischer Wellenstörung auf frei bewegliche Ionen, untersucht Verf. hier den Einfluß

speziell einer planpolarisierten elektrischen Welle, deren Aussendung in Verbindung mit der Aussendung freier Ionen als physikalisches Abbild der Radioaktivität angesehen wird. Br.

W. Duane. Sur l'ionisation produite entre des plateaux parallèles par l'émanation du radium. C. R. **140**, 786-788.

Es wurde die Ionisation beobachtet 1) direkt nach Einbringen der Emanation, 2) unter dem Einflusse der Emanation und induzierten Aktivität, Sättigungsstrom (nach drei Stunden), 3) unter der Einwirkung der vom Radium C herrührenden Aktivität (30 Minuten nach Entfernung der Emanation). Die Resultate entsprachen den theoretisch abgeleiteten Formeln:

$$(1) \qquad I = C[d - k(1 - e^{ad})],$$

$$(2) \qquad I = Cd(1 - e^{-\beta d}),$$

$$(3) \qquad i = i_0(1 - e^{-\gamma d}).$$

Gm.

H. Nagaoka. Notes on radioactivity. Tokio Math. Ges. **2**, 423-432.

Der erste Paragraph beschäftigt sich mit den Zusammenhängen zwischen verschiedenen geophysikalischen Erscheinungen, wie Vulkantätigkeit, Erdmagnetismus, Regenbildung etc. und der Radioaktivität. In dem zweiten wird Masse und Dichte der Elektronen erörtert unter der Annahme, daß diese als ein kontinuierlicher Stoff anzusehen seien, in dem dritten werden die Abweichungen vom Proutschen Gesetz zu erklären gesucht, wobei die scheinbare elektromagnetische Masse als dem Gravitationsgesetz unterworfen angenommen wird. Gm.

H. Mache. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXI. Wien. Ber. **114**, 1377-1388.

Verf. zeigt durch Rechnung, daß mit großer Wahrscheinlichkeit der Diffusion der Bodenluft aus den Erdkapillaren eine Hauptrolle bei dem Versehen der Atmosphäre mit Emanation zufällt. Die Luftdruckschwankungen sind hauptsächlich maßgebend, soweit es sich um die lokalen Schwankungen in der Emanationsführung und der Ionenzahl in der Atmosphäre handelt. Rns.

P. Langevin. Magnétisme et théorie des électrons. Ann. de chim. et phys. (8) **5**, 70-127.

Die Arbeit soll zeigen, wie es im Widerspruche zu der Ansicht von Thomson und Voigt möglich ist, unter der Elektronenhypothese den Ideen von Ampère und von Weber eine präzise Bedeutung zu geben,

für den Para- und den Diamagnetismus die völlig verschiedenen Deutungen, welche sie verlangen, zu finden, endlich auch wie es möglich ist, von diesem Gesichtspunkte aus die verwickelte Frage der magnetischen Energie aufzuklären. Die einzelnen Teile der Arbeit sind betitelt: I. Die partikularen Ströme. II. Wirkung eines äußeren magnetischen Feldes. Diamagnetismus. III. Die Webersche Theorie und die elektromagnetische Trägheit. IV. Das Zeemansche Phänomen. V. Die magnetische Energie. VI. Der Paramagnetismus und das Gesetz von Curie. — Schluß. Es ist nicht möglich, auf die vom Verf. gegebenen Entwicklungen hier genauer einzugehen. Die in dem Schlußparagraphen zusammengefaßten Ergebnisse nehmen zwei und eine halbe Druckseiten ein. Lp.

P. Langevin. Sur la théorie du magnétisme. Journ. de Phys. (4) 4, 678-693.

Die Ampèresche Hypothese der Molekularströme, die von Ewing wieder aufgenommen ist, gibt von gewissen Tatsachen des Ferro- und Paramagnetismus Rechenschaft, aber keine Andeutung über den Ursprung dieser Ströme und die sie unterhaltende Ursache. Ferner hat Weber zur Darstellung des Diamagnetismus in den Molekülen die Existenz von widerstandslosen Stromkreisen angenommen, bei denen die Hervorrufung eines äußeren Feldes solche induzierten Ströme erzeugt, daß der gesamte die Stromkreise durchlaufende Strom Null bleibt; die Richtung dieser Ströme entspricht nach dem Lenzschen Gesetze dem Diamagnetismus. Maxwell hat in seinem Treatise die Vereinigung der Hypothesen Ampères und Webers versucht, ohne jedoch eine genaue Lösung zu erhalten, woran der Mangel von Angaben über die molekulare Struktur schuld ist. Langevin gibt in dem vorliegenden Artikel auf Grund der jetzigen Annahmen über den Bau der Moleküle nach der Elektronentheorie eine Skizze der ganzen Theorie der magnetischen Erscheinungen. Lp.

S. J. Barnett. Energiedichte, Spannung und Druck im Magnetfelde. Physik. Zs. 6, 8-10.

Der bekannte Ausdruck für die magnetische Energiedichte in einem Punkte eines Magnetfeldes, in welchem die magnetische Induktion B zur magnetischen Feldstärke H proportional ist und mit ihr einen Winkel Θ einschließt, $W = BH \cos(\Theta/8\pi)$, wird einfach und streng abgeleitet. Dann wird die auf einen Teil eines einzelnen isolierten Stromkreises wirkende elektromotorische Kraft für ein Medium, in welchem die magnetische Induktion und Feldstärke proportional sind, in der Form berechnet: $X = -dW_{\Phi}/dx = dW_J/dx$. Mit Hülfe dieser Formeln wird endlich die zur Induktion parallele magnetische Spannung und der zur Induktion senkrechte magnetische Druck gefunden. Lp.

G. Meslin. Mesure de coefficients d'aimantation et étude du champ magnétique. C. R. **141**, 102-106.

Der Verf. gibt eine Methode an, um kleine Unterschiede der Magnetisierungskoeffizienten sichtbar zu machen. Rns.

H. Pellat. Champ magnétique auquel est soumis un corps en mouvement dans un champ électrique. C. R. **140**, 229-231.

Die Relation $H = K\Phi V \sin\alpha$ hat dieselbe Form wie die, welche die Intensität eines elektrischen Feldes angibt, das auf einen beweglichen Punkt wirkt, dessen Bahn unter einem Winkel α die Kraftlinien eines magnetischen Feldes schneidet. Rns.

R. Gans und R. H. Weber. Zur Frage: Was bleibt in einem permanenten Magneten konstant? Ann. der Phys. (4) **16**, 172-177.

Die Verf. beschränken sich auf so kleine Feldänderungen, daß die Hysteresis vernachlässigt werden kann, und beantworten obige Frage unter der Voraussetzung, daß der magnetische Widerstand im Bereich seines Feldes verändert wird.

Aus den Darlegungen ergibt sich: Wenn die Permeabilität des Stahlmagneten bei den vorgenommenen Veränderungen des äußeren Widerstandes als konstant angesehen werden darf, so bedingt die Konstanz der Magnetisierung die Konstanz der magnetomotorischen Kraft. Rns.

Th. R. Lyle. Investigation of the variations of magnetic hysteresis with frequency. Phil. Mag. (6) **9**, 102-124.

Enthält in theoretischer Beziehung eine Reihe von Formeln zur Berechnung periodischer Erscheinungen, die mit dem im Titel genannten Problem in Zusammenhang stehen. Br.

P. Duhem. De l'hystérésis magnétique produite par un champ oscillant superposé à un champ constant. C. R. **140**, 1216-1219.

P. Duhem. De l'hystérésis magnétique produite par un champ oscillant superposé à un champ constant. Comparaison entre la théorie et l'expérience. C. R. **140**, 1370-1373.

Wenn das magnetische Feld sehr schnelle und symmetrische Schwingungen ausführt zwischen den Werten $H_0 - \eta$ und $H_0 + \eta$, so nimmt die

Magnetisierung einen konstanten Wert M an; dieser Wert ist die natürliche Magnetisierung, welche einem gewissen Werte H des Feldes entsprechen würde und mit H_0 gleichzeitig Null wird. Die Differenz $(H - H_0)$ hat einen Wert, welcher abhängt von H_0 und von dem Gesetz $H - H_0 = F(t)$, welchem die Oszillation des Feldes entspricht.

Da man dieses Gesetz unveränderlich läßt, wenn man H_0 variieren läßt, so beschreibt der Abszissenpunkt H_0 und der Ordinatenpunkt $\mathfrak{M}$ eine Linie, welche durch den Koordinatenanfang geht und diesen als Mittelpunkt hat.

Diese Linie hat die gleichen Asymptoten wie die des natürlichen Zustandes. Die Asymptoten $\mathfrak{M} = \pm \mu$ entsprechen der Sättigung des Eisens. Rns.

K. Honda and T. Terada. On the change of elastic constants of ferro-magnetic substances by magnetization. Tokio Math. Ges. 2, 381-390.

Nickel, schwedisches Eisen und Nickelstahl von verschiedenem Prozentgehalt werden nach den direkten und indirekten Methoden untersucht. Rns.

A. von Böky. Ein neues Vertikal-Intensitätsvariometer. Physik. Zs. 6, 536-545.

Den Aufgaben des Jahrbuchs gemäß können wir nicht auf die Beschreibung des Instrumentes eingehen, sondern haben nur auf die ausführlich entwickelte Theorie desselben hinzuweisen, die eines ziemlichen Aufwandes von Rechnung bedarf. Hierbei wird die Entfernung ausgerechnet, in der ein Kompensiermagnet anzubringen ist, damit das Instrument keinen Temperaturgang habe; außerdem wird auch die Empfindlichkeit bestimmt. Lp.

A. Pflüger. Zur Deutung des Erdmagnetismus. Physik. Zs. 6, 415-416.

Wenn wir uns die Erde als eine mit gleichförmig verteilter Oberflächenladung versehene rotierende Kugel vorstellen, so ist die Frage von Interesse, ob ihr magnetisches Feld nach den Formeln von Bucherer (vgl. die Referate S. 914) etwa aus dieser Vorstellung erklärt werden könnte. Das Ergebnis der Rechnung lautet: Das erdmagnetische Feld kann nicht seine Ursache in der Rotation der Erdladung haben. Lp.

Weitere Literatur.

H. DANNEEL. Elektrochemie I. Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Leipzig: G. J. Göschen. 197 S. kl. 8° (Sammlung Göschen Nr. 252).

H. EBERT. Magnetische Kraftfelder. Die Erscheinungen des Magnetismus, Elektromagnetismus und der Induktion, dargestellt auf Grund des Kraftlinien-Begriffes. Zweite vollkommen neubearbeitete Auflage. Leipzig: J. A. Barth. XII u. 415 S.

R. VON FÖRSTER. Über die Asymmetrie der Ablenkungen und ihren Zusammenhang mit der Asymmetrie der Schwingungen bei einem Horizontalintensitäts-Variometer. Diss. Marburg. 35 S. 8°.

JOS. Ritter v. GEITLER. Elektromagnetische Schwingungen und Wellen. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. VIII u. 154 S. 8°. (Die Wissenschaft. Samml. naturw. u. math. Monographien.)

E. GÉRARD. Leçons sur l'électricité. 7e édition, refondue et complétée. (En 2 volumes.) Paris: Gauthier-Villars.

H. I. GRAMATZKI. Elektrizität und Gravitation im Lichte einer mathematischen Verwandtschaft. Versuch zur Grundlage einer einheitlichen Mechanik der elektrischen, gravitierenden und trägen Massen mit Hülfe der phänomenologischen Interpretation gewisser mathematischer Begriffsvorgänge. München: J. Lindauer. IV u. 92 S. gr. 8°.

A. HEYDWEILLER. Magnetostriktion (Entgegnung an Shizuwo Sano). Physik. Zs. **6**, 44.

FR. KOLAČEK. Magnetostriktion (Bemerkung zur Abhandlung von Shizuwo Sano). Physik. Zs. **6**, 143-147.

Vgl. F. d. M. **35**, 909, 1904.

W. GROSSE. Ionen und Elektronen. Eine kurze Darstellung der Entwickelung und Begründung neuerer Anschauungen, insbesondere der Ionentheorie. Leipzig: Quandt & Händel. V u. 94 S. 8°.

H. E. HADLEY. Magnetism and electricity for students. London: Macmillan and Co. X u. 575 S. [Nature **73**, 146-147.]

J. HERZOG und C. FELDMANN. Die Berechnung elektrischer Leitungsnetze in Theorie und Praxis. Zweite Auflage in zwei Teilen. Teil 2. Dimensionierung der Leitungen. Berlin: J. Springer. VIII u. 454 S. 8°.

G. HOLZMÜLLER. Zur vorläufigen Orientierung über die Elektronentheorie. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 117-121.

BR. KOLBE. Einführung in die Elektrizitätslehre. Vorträge. II. Dynamische Elektrizität. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Berlin: J. Springer. XIII u. 218 S. 8°.

H. A. LORENTZ. Ergebnisse und Probleme der Elektronentheorie. Vortrag. Berlin: J. Springer. 62 S. 8°.

H. von Mangoldt. Neuere Anschauungen über das Wesen der Elektrizität. Festrede zur Vorfeier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers und Königs Wilhelm II. Danzig. 12 S.

A. Nouguier. Précis de la théorie du magnétisme et de l'électricité. Paris: Béranger. 8°.

Ed. Riecke. Untersuchungen über Entladungserscheinungen in Geißlerschen Röhren. Ann. der Phys. (4) **16**, 282-307.

Abdruck aus Gött. Nachr. 1904 (F. d. M. **35**, 895, 1904).

E. Riecke. Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **8**, 29-35; **9**, 1-6, 245-253.

Abdruck aus Münch. Ber. **33**, 257-291; vgl. F. d. M. **34**, 915, 1903.

A. Russell. Alternating currents. Vol. I. Cambridge: The University Press. XII u. 407 S. (1904). [Nature **72**, 99.]

H. Poincaré and F. K. Vreeland. Maxwell's theory and wireless telegraphy. London: A. Constable and Co. XI u. 255 S. (1904). [Nature **72**, 99.]

J. Zenneck. Theorie und Praxis in der drahtlosen Telegraphie. Physik. Zs. **6**, 107-109.

Erwiderung auf die Bemerkung von E. F. Huth in der Physik. Zs. **5**, 748, über eine Arbeit von Zenneck in derselben Zeitschrift **5**, 586.

J. Zenneck. Theorie und Praxis in der drahtlosen Telegraphie. Physik. Zs. **6**, 196-200.

Gegen die Ausführungen von Drude in Physik. Zs. **5**, 745.

E. F. Huth. Theorie und Praxis in der drahtlosen Telegraphie. Physik. Zs. **6**, 378-379.

Antwort auf die Erwiderung von J. Zenneck (S. 107 desselben Bandes).

P. Drude. Theorie und Praxis in der drahtlosen Telegraphie. Physik. Zs. **9**, 502-503.

Antwort an Zenneck.

Kapitel 4.

Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

B. Weinstein. Thermodynamik und Kinetik der Körper. Dritter Band. Erster Halbband. Die verdünnten Lösungen. Die Dissoziation. Thermodynamik der Elektrizität und des Magnetismus. (Erster Teil.) Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn. XVI u. 464 S. gr. 8°.

Der dritte und letzte Band des Werkes ist in zwei Teile zerlegt, deren hier vorliegender erster die verdünnten Lösungen behandelt, die Dissoziation und die Thermodynamik der Elektrizität und des Magnetismus.

Nach einer kritischen Betrachtung des van't Hoffschen Gesetzes (dessen sachliche Bedeutung der Verf. wesentlich niedriger einschätzt, als es sonst geschieht) werden die Eigenschaften verdünnter Lösungen und ihr osmotisches Gleichgewicht besprochen. Der folgende Abschnitt über Dissoziation und Assoziation bringt die Selbstdissoziation, die Dissoziation von Lösungen, mehrfache Dissoziationen, Mischung und Isohydrie, Zersetzung und Verbindung von Lösungen. Dampfspannung und Gefriertemperatur verdünnter Lösungen bilden den Schluß des Kapitels.

Das nächste, umfangreiche Kapitel wird durch eine kurze Besprechung des Wesens von Elektrizität und Magnetismus eingeleitet, an die sich die allgemeine Theorie der elektrischen und magnetischen Kräfte, der Dichten, Ströme, Polarisierungen und Energien anschließt, ferner der elektromagnetischen Erscheinungen, der Entropie usw. Nach Behandlung der Energie elektrischer Ladungen, der Magnetisierung, der Elektro- und Magnetostriktion folgt die Erörterung der kinetischen Energie der Ströme und Magnete, dann das Joulesche Gesetz, die Thermoelektrizität, die thermomagnetischen und galvanomagnetischen Vorgänge. Den Schluß bildet die Kontaktelektrizität, einschließlich der elektrolytischen Potentialdifferenzen und der Gasketten.

Wie in den vorhergehenden Bänden ist überall auf ausführliche Mitteilung der grundlegenden Erfahrungstatsachen Wert gelegt, sorgfältig gesichtetes Zahlenmaterial eingeflochten und möglichst vollständig die einschlägige Literatur angeführt. Rtt.

Julius Meyer. Einführung in die Thermodynamik auf energetischer Grundlage. Halle a. S.: Wilhelm Knapp. VIII u. 209 S. gr. 8°.

Die Arbeit wird als ein Versuch zu einer möglichst anschaulichen Einführung in die Thermodynamik bezeichnet, welchem Zwecke die größere Faßlichkeit der energetischen Begriffe dienen soll. Dementsprechend werden zunächst die beiden Hauptsätze der Energetik behandelt, von wo der Übergang zu den besonderen thermodynamischen Sätzen durch Erörterung der thermischen Grundbegriffe erfolgt. Den größeren Teil des Buches bilden Anwendungen der Hauptsätze auf das chemisch-physikalische Gebiet. Rtt.

L. Marchis. Physique Industrielle. Thermodynamique. II. Introduction à l'étude des machines thermiques. Grenoble: A. Gratier et J. Rey. Paris: Gauthier-Villars. III u. 247 S. 8°.

In dem vorliegenden zweiten Teile des Werkes von Marchis werden die Eigenschaften der Gase und Dämpfe besprochen, als Grundlagen für

die besondere Theorie der Wärmemaschinen. Die Behandlung erfolgt im übrigen nach rein physikalischen Gesichtspunkten, auch zur Veranschaulichung werden technische Anwendungen nicht herangezogen, graphische Darstellungen nur spärlich benutzt. Rtt.

M. Schröter und L. Prandtl. Technische Thermodynamik. Enzyklop. d. math. Wissensch. V 1, 232-319.

Inhaltsübersicht: a) Technische Thermodynamik im engeren Sinne. Von M. Schröter. I. Die Grundlagen der technischen Thermodynamik. 1. Historische Übersicht. 2. Die allgemeinen Gleichungen der Thermodynamik. 3. Graphische Darstellungen. 4. Vollkommene Gase. 5. Zustandsänderungen der Gase. 6. Gesättigte Dämpfe. 7. Überhitzte Dämpfe. II. Kreisprozesse der thermodynamischen Maschinen. 8. Allgemeines über die technischen Kreisprozesse. 9. Die Wärmekraftmaschinen und ihr Wirkungsgrad. 10. Die Dampfmaschine im besonderen. 11. Verbundmaschine, Anwendung von überhitztem Dampf. 12. Der Wirkungsgrad der Dampfmaschine. 13. Die Verbrennungsmotoren (Gasmaschine, Dieselmotor). 14. Kältemaschinen.

b) Strömende Bewegung der Gase und Dämpfe. Von L. Prandtl. 15. Abgrenzung des Stoffes. 16. Allgemeine Theorie der stationären Strömungen. 17. Bewegung ohne Widerstände und Wärmemitteilung. 18. Ausströmung aus Öffnungen und Mundstücken. 19. Strömungswiderstände in Röhren. 20. Strömung durch Röhren und Düsen. 21. Stationäre Wellen in einem freien Gasstrahl. 22. Überströmen. 23. Dampfturbinen.

„Die technische Thermodynamik, wie sie hier verstanden wird, umfaßt die Anwendung der Sätze und Methoden der allgemeinen Thermodynamik auf technische Prozesse mit ausdrücklicher Ausschließung des Gebietes der Thermochemie, aber einschließlich der Verbrennungsmotoren... Die dem Techniker unentbehrliche graphische Darstellung ist, als für den Mathematiker besonders instruktiv, ausführlich behandelt, da sie außer der damit erreichten Anschaulichkeit und Durchsichtigkeit des Verfahrens in den meisten Fällen dem Genauigkeitsbedürfnis der Praxis vollständig genügt.“ Lp.

H. A. Lorentz. La thermodynamique et les théories cinétiques. Journ. de Phys. (4) 4, 533-560.

In diesem vor der französischen physikalischen Gesellschaft gehaltenen Vortrage wägt Lorentz die beiden Theorien gegeneinander ab, vermöge deren wir in gewisser Weise alles zu verstehen versuchen, was in der materiellen Welt vorgeht. Zuerst wird von der Thermodynamik gesprochen, genauer vom zweiten Hauptsatze, vom Carnot-Clausiusschen Prinzip, danach von den kinetischen Theorien.

Bei den Versuchen, die Thermodynamik auf die Prinzipien der Mechanik zurückzuführen, wird der Helmholtzschen Untersuchungen über monozyklische Systeme gedacht, sodann der Methoden der statistischen Mechanik bei Boltzmann und Gibbs, die ihrerseits auf Maxwell zurückgreifen.

„Obgleich die Thermodynamik noch lange unser sicherster Führer in dem Labyrinth der Erscheinungen sein muß, haben wir unsere guten Gründe, die kinetischen Theorien mehr und mehr zu entwickeln. Sie werden nicht sobald das Carnot-Clausiussche Prinzip ersetzen; aber sie können uns sehr nützlich sein, um das zu belichten, was man aus den Formeln der Thermodynamik ableitet, die an sich kaum zur Anschauung sprechen.“

Hiernach werden die thermoelektrischen Erscheinungen behandelt, dann die Wärmestrahlung, und an ihnen wird die Tragweite der kinetischen Theorien gezeigt. Lp.

M. Blieden. A restatement of the second law of thermodynamics and its bearing upon our views of heat and radiation. Brit. Ass. Rep. South Africa 1905, 344-346.

„Wärme ist diejenige Form der Energie, die zur Verrichtung einer Arbeit nur durch einen Temperaturfall gebracht werden kann.“ Zufolge dieser Definition zerfällt die innere Energie E eines Körpers in zwei unterschiedliche Teile; der erste heißt Wärme-Energie des Körpers, der andere seine wärmelose Energie. Die Wärme-Energie ist gleich dem Produkte aus seiner Entropie φ und seiner absoluten Temperatur t, also $H = \varphi t$. Die wärmelose Energie ist somit $E - \varphi t$. Diese Begriffe sollen die Helmholtzsche „freie“ und „gebundene“ Energie ersetzen. Lp.

M. A. Browne. The second law of thermodynamics. Nature 73, 102.

G. H. Bryan. The second law of thermodynamics. Nature 73, 125.

F. Soddy. The second law of thermodynamics. Nature 73, 125.

Die Frage, ob das zweite Hauptgesetz der Thermodynamik nicht mit den Tatsachen der Diffusion in Widerspruch stehe, wird von Bryan durch den Hinweis auf die Behandlung dieser Sache bei W. Voigt, Thermodynamik 2, 209, erledigt. Soddy gibt eine selbständige Betrachtung. Lp.

K. von Wesendonk. Zur Thermodynamik. Ann. der Phys. (4) 16, 558-564.

Ausgehend von der Definition der Entropie nach Swinburne (in dessen Buche „Entropy“ S. 37) betrachtet der Verf. die betreffenden

Darlegungen von Lorenz („Technische Wärmelehre" S. 420), die zu dem Mißverständnisse führen könnten, als sei ein teilweise irreversibel verlaufender adiabatischer Vorgang zu einem isentropischen zu machen. Unter Beachtung chemischer Umsetzungen und in Anlehnung an Gibbs wird dann gezeigt, in welchem Falle, der bei gewissen Daniellschen Elementen nahezu verwirklicht erscheint, die Zustandsänderung isentropisch und isotherm zugleich sein kann. Rtt.

K. von Wesendonk. Zur Thermodynamik. Physik. Zs. **6**, 50-52.

Erörterungen über die Frage, wie weit die durch einen chemischen Prozeß veranlaßte Energieänderung in nutzbare mechanische Arbeit oder Energie entsprechender Art übergeführt werden kann, unter Bezugnahme auf die von H. Lorenz, Nernst und McF. Orr vertretenen Ansichten. Lp.

V. Fischer. Eine Analogie zur Thermodynamik. Zs. f. Math. u. Phys. **51**, 426-431.

In einer ähnlichen früheren Arbeit (**47**, 1-14; F. d. M. **33**, 910, 1902) war der Verf. von Wirbelringen ausgegangen, an deren Stelle er jetzt Wirbelkugeln setzt. Eine solche ist gekennzeichnet als ein System konzentrisch angeordneter, von der Mitte nach dem Umfange entsprechend größer werdender kleiner Kugeln, die sich in sphärischen Bahnen schraubenförmig bewegen. Die ganze Kugel erfährt von einer Flüssigkeit allseitig gleichmäßigen Druck, dem der Druck der radialen Fliehkräfte entgegenwirkt. Nach Berechnung der Fliehkraft der Masseneinheit und der kinetischen Energie der Wirbelkugel ergibt die Integration des Energiedifferentiales einen dem potenzierten Druck-Volumengesetze formal gleichen Ausdruck, dessen Exponent als dem Verhältnisse der spezifischen Wärmen entsprechend nachgewiesen wird. Der Zahlenwert paßt allerdings nicht gut für einatomige Gase, wohl aber für zweiatomige (wenn zwei Einheitskugeln gekoppelt werden), wie sich beim Vergleiche mit einer größeren Zahl bekannter Versuchswerte zeigt. Rtt.

A. Boltzmann. Bemerkungen zu Herrn S. Valentiners Abhandlung: „Über den maximalen Wirkungsgrad umkehrbarer Kreisprozesse." Ann. der Phys. (4) **18**, 642-644.

Nach Valentiner (F. d. M. **35**, 920, 1904) könnte ohne den zweiten Hauptsatz bewiesen werden, daß der Wirkungsgrad beliebiger umkehrbarer Kreisprozesse höchstens gleich dem des Carnotschen sei, und daß eine Gruppe umkehrbarer Kreisprozesse in der Wirkung dem Carnotschen gleich sei. Der Beweis beruht auf der Darstellung des Kreisprozesses durch eine

schlossene Kurve der (ϑ, s)-Ebene, womit er aber auf den zweiten Hauptsatz gestützt wird, da der Kreisprozess im allgemeinen nur dann eine geschlossene Kurve gibt, wenn $\frac{dQ}{\vartheta}$ ein vollständiges Differential ist. Bei dem von Valentiner angewendeten Transformationsverfahren, das unter anderer Deutung den Wirkungsgrad des Carnotschen Prozesses als den größeren ergibt, wird auch der Sonderfall behandelt, wo das transformierte Abbild des gegebenen Kreisprozesses ein aus Isothermen und Adiabaten gebildetes Rechteck ist. Auch für dieses, das dem Carnotschen Prozesse entspricht, erweist sich aber der Wirkungsgrad als größer denn der des gegebenen Prozesses, so daß jener allgemein jeden um ein Endliches verschiedenen Prozeß übertrifft. Rtt.

M. Planck. On Clausius' theorem for irreversible cycles, and on the increase of entropy. Phil. Mag. (6) **9**, 167-168.

Bemerkungen zu einer Arbeit von W. McF. Orr in Phil. Mag. (6) **8**, 509 (F. d. M. **35**, 918, 1904). Br.

E. Buckingham. On certain difficulties which are encountered in the study of thermodynamics. Phil. Mag. (6) **9**, 208-214.

Betrifft dasselbe Thema. Br.

H. N. Davis. A PQ-plane for thermodynamic cyclic analysis. Amer. Ac. Proc. **40**, 629-655.

Im Anschlusse an eine frühere Arbeit von Lucke über „cyclic analysis of heat engines“ beabsichtigt der Verf., für die dort behandelten Prozesse (vornehmlich mit Gasen) bequemere Methoden aufzustellen. Zu diesem Zwecke scheinen ihm die graphischen Methoden allgemein am geeignetsten, und in vielen Fällen besonders die Darstellung von Kreisprozessen in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensysteme, dessen Ordinaten die Kompressionsverhältnisse (P) bedeuten, während die Abszissen die der Einheitsmasse von außen zugeführten Wärmemengen (Q) geben. Der Vorzug dieser Darstellungsweise wird gefunden in der Einfachheit und leichten physikalischen Deutbarkeit der Formeln, zu der sie führt.

Eine Anzahl verschiedener Fälle ist mit Hülfe von 21 Figuren und 3 Tafeln behandelt. Rtt.

P. Duhem. Sur l'équilibre de température d'un corps invariable et la stabilité de cet équilibre. Journ. de Math. (6) **10**, 77-94.

In Analogie mit der Stabilität des Gleichgewichtes nach Dirichlet wird die thermische Stabilität behandelt. Dabei wird das Gleichgewicht

als stabil definiert, wenn ein über alle Elemente des Systems ausgedehntes, die Temperaturdifferenzen enthaltendes Integral unterhalb einer vorbestimmten positiven Grenze bleibt. Als nicht wesentlich, nur zur Abkürzung der Formeln dienend, wird für den Körper stetige Veränderlichkeit seiner Konstitution von Punkt zu Punkt angenommen, als wesentlich aber die Unveränderlichkeit jedes in seinem Zustande vollkommen durch die Temperatur bestimmten Elementes nach Form und Lage.

Rtt.

A. Campbell. On direct reading resistance thermometers, with a note on composite thermocouples. Phil. Mag. (6) **9**, 713-722.

Enthält in theoretischer Beziehung eine Reihe einfacher Entwicklungen zur Theorie der Temperaturmessungen aus den Veränderungen des elektrischen Widerstandes für verschiedene Ausführungsformen des Instrumentes.

Br.

G. Meslin. Sur la constante de la loi de Mariotte et Gay-Lussac. Journ. de Phys. (4) **4**, 252-256.

Die Konstante R der Formel $pv = RT$ ergibt sich, wenn man das Kubikmeter als Volumeneinheit und das Kilogrammgewicht als Krafteinheit nimmt, als $R = 845$, also ziemlich genau gleich der doppelten Zahl für das mechanische Wärmeäquivalent A. Durch nähere Betrachtung kommt Meslin zu dem Ergebnis: „Das Verhältnis R/A ist sehr nahe der Zahl gleich, die man für die molekulare Masse des Wasserstoffs annimmt. Nähme man die Zahl 100 für das Atomgewicht des Sauerstoffs, so wäre $R/A = 12{,}5$. Dieses Zusammentreffen hat keinen theoretischen Grund, sondern hängt mit dem Werte der Dichtigkeit des Wasserstoffs zusammen."

Lp.

E. Haentzschel. Über die Berechnung der Konstanten a und b der van der Waalsschen Gleichung aus den kritischen Werten. Ann. der Phys. (4) **16**, 565-573; Verh. Deutsche Phys.-Ges. **7**, 61-62.

Von Guye und Friderich war (Arch. sc. phys. et nat. (4) **9**) die Berechnung der van der Waalsschen Konstantan a und b aus den kritischen Werten gezeigt. Aus der entsprechend geschriebenen van der Waalsschen Gleichung wird eine kubische Gleichung für b gewonnen, deren Wurzeln aber nur umständlich mit Hülfe siebenstelliger Logarithmen zu bestimmen sind, da sich die Koeffizienten der kubischen Gleichung als sehr kleine Zahlen darstellen. Zur Abkürzung des Verfahrens gaben die Urheber selbst ohne Beweis eine Näherungsformel. Eine einfache und bequeme Näherungsformel wird nun in der vorliegenden Arbeit entwickelt, indem bei der Herleitung der kubischen Gleichung auftretende

Ausdrücke geometrisch aufgefaßt werden, als Parabel und gleichseitige Hyperbel, deren reelle Schnittpunkte Schlüsse auf die Realität der Wurzeln der kubischen Gleichung erlauben. Es wird gezeigt, welcher Schnittpunkt die allein brauchbare Wurzel liefert, und daß die Berechnung von b gleichbedeutend ist mit der Bestimmung der Ordinate des fraglichen Schnittpunktes. Die andere Konstante ergibt sich dann leicht aus einer einfachen Beziehung. Das Verfahren wird an vier Beispielen erläutert.
Rtt.

J. P. Kuenen. Über die Berechnung der Konstanten a und b der van der Waalsschen Gleichung aus den kritischen Werten. Ann. der Phys. (4) **17**, 189-191.

Anschließend an die Arbeit von Haentzschel (Referat vorstehend). wird eine noch einfachere Näherungsberechnung mitgeteilt (beruhend auf der Tatsache, daß a und b kleine Brüche sind) und an einem Beispiele geprüft. Eine weitere Bemerkung bezieht sich auf die Zustandsgleichung selbst. Statt für die Gaskonstante R das Volumen der Substanz bei 1 Atm. und 273° als Einheit zu benutzen, welche Einheit bei Flüssigkeiten der nicht stabilen Region angehört oder (bei hohem Siedepunkte) imaginär wird, soll nicht das obige wirkliche Volumen, sondern das Idealvolumen genommen werden, das im Verhältnisse $(1+a)(1-b)$ größer als jenes ist. Damit wird die Zustandsgleichung und die Wertberechnung einfacher.
Rtt.

E. Mathias. La constante a des diamètres rectilignes et les lois des états correspondants. Journ. de Phys. (4) **4**, 77-91.

Diese zweite Abhandlung über die Konstante a schränkt das in der ersten Veröffentlichung aufgestellte Gesetz bedeutend ein (vgl. F. d. M. **30**, 806, 1899), oder vielmehr man hat gewisse Gruppen unter den Körpern zu unterscheiden, innerhalb deren eine Konstanz von a stattfindet.
Lp.

H. Happel. Das Gesetz der korrespondierenden Zustände. Physik. Zs. **6**, 389-397, 588.

„Einer Aufforderung der Redaktion dieser Zeitschrift folgend, beabsichtige ich, in diesen Zeilen einen Überblick über die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand des Theorems der übereinstimmenden Zustände zu geben. Kein anderes Gesetz der Wärmelehre ist so verschieden beurteilt wie dieses. Während die einen es anerkennen und die großen Vorteile rühmen, die es bietet, lassen die anderen es auch nicht als angenähert richtig gelten. Demgemäß mußte ich auf eine kritische Durcharbeitung der einschlägigen Literatur besonderen Wert legen; daneben aber war ich auch bemüht, möglichst alle in Betracht kommenden Arbeiten zu berücksichtigen."

I. Das Gesetz der korrespondierenden Zustände in seiner ursprünglichen Fassung und seine theoretische Begründung. II. Prüfung des Gesetzes der korrespondierenden Zustände. III. Abänderungen und Erweiterungen, die das Gesetz der korrespondierenden Zustände in der letzten Zeit erfahren hat. IV. Über einige Fragen, die mit dem Theorem der korrespondierenden Zustände in engem Zusammenhang stehen. Lp.

H. Kamerlingh Onnes et H. Happel. La représentation de la continuité des états liquide et gazeux d'une part et des divers états solides d'autre part par la surface entropie-volume-énergie de Gibbs. Arch. Néerl. (2) **10**, 62-96.

„Wir haben uns vorgenommen, auf einem Modell die experimentell bekannten Teile der Gibbsschen Oberfläche für Substanzen abzubilden, welche im festen Zustande existieren, diesen Teilen nach van der Waals die Dampf- und Flüssigkeitsgebiete hinzuzufügen und den so erhaltenen Bereich mit dem festen Grat so zu verbinden, daß die Isothermen auf der Gibbsschen Oberfläche so wenig wie möglich von der nicht modifizierten van der Waalsschen Isotherme abweichen, und daß der Verlauf der Isothermen ηv (Entropie-Volumen) in der Projektion so einfach wie möglich ist. Unter anderem haben wir jede Darstellung von Zuständen ausgeschlossen, bei denen $T=0$, falls nicht $\eta = -\infty$, und wir haben angenommen, daß jedem Wertesystem von η und v nur ein einziger Wert der Energie ε entspricht. Offenbar geht das so gefaßte Problem nicht weiter als die Auffindung einer stetigen Funktion, die mit der Gibbsschen Oberfläche auf dem bekannten Teile zusammenfällt, und die einem gegebenen Kriterium der Einfachheit genügt, von dem wir überdies hoffen, daß es unter einem physikalischen Gesichtspunkte glücklich gewählt ist. Aber gerade durch diese Beschränkung hat die Lösung des Problems einen gewissen Wert und bildet die Fortsetzung der auf die Reihenentwicklung der Zustandsgleichung bezüglichen Studie“ (vgl. F. d. M. **32**, 895, 1901). Lp.

H. Happel. Zur Zustandsgleichung einatomiger Stoffe. Gött. Nachr. 1905, 282-306.

Der Verf. hatte früher nachgewiesen (Ann. der Phys. **13**, 340, 1904), daß die von van der Waals und Boltzmann gegebene genauere Zustandsgleichung für mehratomige Stoffe quantitativ nicht zutrifft, auch wenn die Volumenkorrektion als Funktion des Volumens eingeführt wird, daß die einatomigen Stoffe Argon, Krypton, Xenon und Quecksilber miteinander korrespondieren, ihre reduzierten Isothermen aber nicht mit denen mehratomiger Stoffe zusammenfallen. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, ob die genauere Zustandsgleichung, wie nach obigem zu vermuten, das thermische Verhalten einatomiger Stoffe wiedergibt.

Zu dem Ende wird zunächst die Volumenkorrektion der Zustandsgleichung betrachtet, wobei es sich um Bestimmung der Koeffizienten der zweiten und dritten Potenzen von b/v handelt. Für den ersten Koeffizienten hat sich nach Jäger, Boltzmann und van der Waals jun. auf fünf verschiedenen Wegen übereinstimmend der demnach als sicher zu betrachtende Wert 5/8 ergeben, während gegen die Berechnung des zweiten Koeffizienten nach van Laar grundsätzliche Einwände erhoben sind. Es erscheint für den vorliegenden Zweck genügend, für den zweiten Koeffizienten zwei Grenzen zu ermitteln, da Unterschiede in den Werten erst in der Gegend der Flüssigkeitsvolumina merkbar werden, die sehr klein sind. In Anlehnung an eine Boltzmannsche Rechnung ergibt sich auf einfachem Wege als untere Grenze der Wert 0,201. Die obere Grenze wird nach einem von Boltzmann abweichenden Verfahren zu 0,385 bestimmt, so daß (eine gewisse Stütze für die Zuverlässigkeit des Verfahrens) der von Boltzmann gegebene Wert 0,287 zwischen den gefundenen Grenzen liegt.

Es wird dann mit den Boltzmannschen Werten die Zustandsgleichung für Argon, Krypton und Xenon geprüft, wobei das Molekulargewicht, die kritische Temperatur und der kritische Druck nach den Bestimmungen von Ramsay, Travers und Olszewski genommen werden. Für die Isothermen für 11,2° C. stimmen Beobachtung und Rechnung befriedigend überein. Die drei Stoffe haben auch ungefähr dieselbe reduzierte Schmelztemperatur und denselben Schmelzdruck. Aus allem ergibt sich die Gültigkeit der Zustandsgleichung für einatomige Stoffe, wenn sehr tiefe Temperaturen außer acht bleiben. Dagegen treffen gewisse Folgerungen, die Dampfspannungen betreffend, für Quecksilber nicht zu.

Rtt.

J. D. van der Waals. De transformatie van een zijplooi in een hoofdplooi en omgekeerd. Amst. Ak. Versl. **13**, 625-630.

Nachdem der Verf. schon in seiner „Théorie moléculaire“ bei Beschreibung der ψ-Fläche auf die Möglichkeit einer zweiten Falte neben der Hauptfalte hingewiesen hatte, werden hier auf graphischem Wege und vornehmlich unter Benutzung der Versuchswerte von Kuenen (Aethan und Alkohol) die beiden Faltenformen bei Temperaturänderungen näher behandelt. Rtt.

J. D. van der Waals. De gedaante der doorsneden van het saturatievlak, loodrecht op de x-as, in geval er tusschen twee temperaturen driephasen-druk bestaat. Amst. Ak. Versl. **14**, 176-185.

J. D. van der Waals. La forme des sections de la surface de saturation par des plans perpendiculaires à l'axe des x, dans le cas où existe, entre deux températures, un système de trois phases. Arch. Néerl. (2) **10**, 483-495.

Nachdem der Verf. in einer Arbeit vom März 1905 für drei verschiedene Temperaturen Schnitte der Sättigungsfläche senkrecht zur T-Achse behandelt hatte, veranschaulicht er hier auf graphischem Wege Schnitte der Sättigungsfläche für den im Titel genannten Fall. Rtt.

J. D. van der Waals. De (T, x)-evenwichten van vaste en fluïde phasen bij veranderlijke waarden van den druk. Amst. Ak. Versl. **14**, 185-187.

In Vervollständigung zweier Arbeiten vom Jahre 1903, in denen das Gleichgewicht einer festen und einer flüssigen Phase behandelt wurde, werden hier noch graphisch die (T, x)-Figuren bei konstantem p untersucht. Rtt.

J. D. van der Waals. Eigenschappen der kritische lijn (plooipuntslijn) aan de zijde der componenten. Amst. Ak. Versl. **14**, 230-240.

J. D. van der Waals. De eigenschappen der doorsneden van het saturatievlak van een binair mengsel aan den kant der componenten. Amst. Ak. Versl. **14**, 240-249.

J. D. van der Waals. De exacte getallenwaarden voor de eigenschappen der plooipuntslijn aan de zijde der componenten. Amst. Ak. Versl. **14**, 249-258.

Ausführliche analytische Behandlung der in den Überschriften angegebenen verwandten Stoffe. Zugrunde gelegt werden die van der Waalsschen Gleichungen, und einen wesentlichen Inhalt der Untersuchungen bildet die Frage nach der Natur der Größen a und b, um befriedigende Übereinstimmung mit den Beobachtungen zu erzielen. Im ganzen erweist es sich als notwendig, b als veränderlich zu nehmen, wobei teilweise die Annahme der Abhängigkeit vom Volumen genügt, ohne daß die genauere Form der Abhängigkeit bekannt ist. Rtt.

J. D. van der Waals. Sur la transformation d'un pli latéral en pli principal et inversement. Arch. Néerl. (2) **10**, 284-290.

„Wenn das gleichzeitige Bestehen zweier Falten (der ψ-Fläche) in einem großen Temperaturintervall beobachtet wird, so darf man von einer transversalen und von einer longitudinalen Falte reden und die unvollkommene Mischbarkeit der beiden Substanzen im flüssigen Zustande dem Bestehen der Längsfalte zuschreiben. Wenn man jedoch die beiden Falten nur zwischen ziemlich nahen Grenzen beobachtet, ist es besser, von einer

Hauptfalte und von einer Seitenfalte zu reden. Ich habe jene Benennungen gewählt, weil in derartigen Fällen eine der Falten wirklich als eine Hauptfalte betrachtet werden kann, während die andere sich wie eine Nebenfalte verhält. Ein Umstand aber, der jedoch bis jetzt noch nicht beachtet ist, bewirkt, daß bei einer gewissen Temperatur diese beiden Falten ihre Rollen vertauschen können: die frühere Seitenfalte kann Hauptfalte werden, und diese in den Stand der Nebenfalte übertreten. — Ich beabsichtige hier hauptsächlich, Transformationen zu beschreiben, welchen die ψ-Fläche mit der Temperatur unterliegen muß, um den Beobachtungen von Kuenen bezüglich der kritischen Erscheinungen der Gemische von Äthan mit einigen Alkoholen Rechnung zu tragen." (Übersetzt aus Amst. Ak. Versl. **13**, 625-630; vgl. oben S. 958). Lp.

J. J. van Laar. Over eenige verschijnselen, welke kunnen optreden bij de bemerkte mengbaarheid van twee vloeistoffen, waarvan de eene anomaal, speciaal water is. Amst. Ak. Versl. **13**, 573-588.

Van der Waals hat in seiner „Continuiteit . . . ." die Faltenlinie der ψ-Fläche eingehend behandelt, auch mit Bezug auf die sogenannten anomalen Komponenten, wobei erwähnt wird, daß bei gewissen Formen, die bei der Falte vorkommen können, eine der beiden Komponenten anomal sein muß. Die vorliegende Arbeit erweitert das Frühere durch Betrachtung des Einflusses assoziierender Komponenten, insbesondere des Wassers. Zunächst wird eine kurze Theorie der beschränkten Mengbarkeit binärer Gemische normaler Stoffe gegeben. Die beschränkte Mengbarkeit wird an Gemischen normaler Stoffe bei gewöhnlicher Temperatur deshalb so selten beobachtet, weil sich zeigt, daß zu ihrem Zustandekommen die kritischen Drucke der beiden Komponenten möglichst verschieden sein müssen. (Behandeltes Beispiel: Mischungen von Äther und Schwefelkohlenstoff, kritische Mischtemperatur — 27° C.) Wenn dagegen eine Komponente anomal, inbesondere Wasser ist, so kann die fragliche Temperaturgrenze viel höher liegen. Die Verhältnisse im einzelnen werden an der Hand einer Figurentafel erörtert, mit Unterlagen anderweitiger Versuchswerte (Phenol, Bernsteinsäurenitrat usw.) Rtt.

J. J. van Laar. Over de verschillende vormen en overgangen der grenslijnen bij gedeeltelijke mengbarheid van twee vloeistoffen. Amst. Ak. Versl. **13**, 660-672.

Nachdem der Verf. früher dargetan hatte, daß bei binären Gemischen mit einer anomalen Komponente die Grenzkurve verschiedene Formen annehmen kann, die in einander übergehen (vornehmlich abhängig von den kritischen Drucken der Komponenten), werden auf graphischem Wege Vorstellungen über den Verlauf der Grenzkurve für begrenzte Mischbarkeit innerhalb der kritischen Zustände Flüssigkeit-Gas geschaffen.

Rtt.

J. J. VAN LAAR. Een nauwkeurige uitdrukking voor het verloop der spinodale lijnen en van hunne plooipunten voor alle temperaturen, in het geval van mengsels van normale stoffen. Amst. Ak. Versl. **13**, 685-696.

J. J. VAN LAAR. Over het verloop der plooipuntslijnen bij mengsels van normale stoffen. Amst. Ak. Versl. **14**, 14-29.

In der ersten Arbeit werden aus der van der Waalsschen Gleichung unter bestimmten Voraussetzungen Gleichungen abgeleitet für eine Fläche, deren Schnitte die spinodalen Linien ergeben, und im Zusammenhange damit für die Faltenkurven. Die Voraussetzungen für die Ausgangsgleichung bestehen (außer in den üblichen Annahmen für a und b) vornehmlich in der Unabhängigkeit des b von v und T.

In der zweiten Arbeit werden die Gleichungen, rechnerisch mit vielen numerischen Werten und graphisch, eingehender behandelt. Rtt.

J. J. VAN LAAR. Eenige opmerkingen naar aanleiding der laatste verhandlingen van Dr. P. Kohnstamm. Amst. Ak. Versl. **14**, 30-33.

Verf. erklärt sich mit den drei Abhandlungen von Kohnstamm (Referat unten S. 963) über den osmotischen Druck im wesentlichen einverstanden und gibt nur einige Bemerkungen über verschiedene, ohnehin nur scheinbare Abweichungen in den Auffassungen. Rtt.

J. J. VAN LAAR. De moleculaire verhooging der laagste kritische temperatuur van een binair mengsel van normale componenten. Amst. Ak. Versl. **14**, 108-116.

Der Verf. hatte früher eine Formel für die im Titel genannte Änderung der kritischen Temperatur abgeleitet, die genauer ist als die Formel von van't Hoff, die aber mit Versuchen von Centnerszwer nur übereinstimmt, wenn dabei das Molekulargewicht von SO_2 verdoppelt wird. Zu einem ähnlichen Ergebnisse gelangte Büchner für CO_2. Gegen diese Maßnahme, die Formel zutreffend zu machen, sind Bedenken geäußert, die der Verf. hier durch eine erweiterte Formel gegenstandslos zu machen sucht. Rtt.

J. J. VAN LAAR. Les courbes de plissement et leur point double chez les mélanges de substances normales, dans le cas que les volumes moléculaires sont inégaux. Arch. Musée Teyler (2) **10**, 19-44.

Die Faltungskurve der Mischung gestaltet sich je nach dem Verhältnis der kritischen Temperaturen der Mischungssubstanzen. Zu beachten

ist ein Grenzfall, in welchem die Kurve einen Doppelpunkt aufweist. Zweck der Arbeit ist die Koordinatenbestimmung dieses Doppelpunktes, ohne irgend welche vereinfachenden Umstände vorauszusetzen. Kl.

J. J. VAN LAAR. L'expression pour le potentiel moléculaire des composantes d'un mélange binaire normal, dans l'état liquide. Arch. Musée Teyler (2) **10**, 45-48.

Herleitung einiger Ausdrücke für das molekulare Potential unter Zugrundelegung der van der Waalsschen Zustandsgleichung. Kl.

J. J. VAN LAAR. Sur quelques phénomènes remarquables chez la miscibilité partielle d'un mélange de deux liquides, dont l'un des deux est anomale. Arch. Musée Teyler (2) **9**, 369-412.

Aus der Untersuchung geht hervor, daß normale Substanzen in jedem Verhältnisse mit Wasser mischbar sind, wenn der kritische Druck 65 Atm. übersteigt, daß im Falle eines kritischen Drucks von 40 bis 65 Atm. nur teilweise Mischbarkeit mit isolierter Falte auftritt, und daß endlich bei einem kritischen Drucke von weniger als 40 Atm. teilweise Mischbarkeit und eine kontinuierliche Falte zu erwarten sind. Kl.

J. J. VAN LAAR. Quelques remarques sur l'équation d'état. Arch. Musée Teyler (2) **9**, 413-426.

Herleitung einiger neuen Gleichungen aus der van der Waalsschen Zustandsgleichung, welche dazu dienen können, die experimentelle Untersuchung der funktionalen Abhängigkeit $b = f(v)$ zu erleichtern. Kl.

J. J. VAN LAAR. Sur l'allure des courbes spinodales et des courbes de plissement. Arch. Néerl. (2) **10**, 373-413.

Die Abhandlung zerfällt in zwei Teile; der erste dient zur Entwicklung eines genauen Ausdrucks für das Verhalten der spinodalen Kurven und der Faltenkurven bei allen Temperaturen in dem Falle von Mischungen normaler Substanzen. Bei van der Waals ist zu diesem Zwecke ein ganzes System von Annäherungen gemacht, und Lorentz hat den Verf. darauf hingewiesen, daß diese Annäherungen zueinander in Widerspruch stehen könnten. Jedenfalls zeigt die jetzige Untersuchung, daß nicht alle Schlüsse bei van der Waals allgemein richtig sind. Als Resultat gibt

der Verf. selbst an: „Ich bin von der van der Waalsschen Zustandsgleichung ausgegangen, in der ich b unabhängig von v und von T angenommen habe, und ich habe als Gleichung der spinodalen Kurven bei den verschiedenen Temperaturen gefunden:

$$(9) \qquad RT = \frac{2}{v^3}\left[x(1-x)\ \theta^2 + a(v-b)^2\right],$$

als die der Faltenkurve in Projektion v, x:

$$(8) \qquad 0 = x(1-x)\,\theta^2[(1-2x)\,v - 3x(1-x)\beta]$$
$$+ \sqrt{a}(v-b)^2\ [3x(1-x)\ \theta(\theta - \beta\sqrt{a}) + a(v-b)(v-3b)].$$

Die Gleichung (9) ist schon von van der Waals gegeben; die Gleichung (8) dagegen ist hier zum ersten Male in diese einfache Gestalt gebracht."

Der zweite Teil beschäftigt sich denn nun mit dem Verhalten der Faltenkurven für Mischungen aus normalen Substanzen. Die Diskussion wird durch eine Reihe von Figuren unterstützt. Lp.

Ph. Kohnstamm. Een formule voor den osmotischen druk in geconcentreerde oplossingen, wier damp de gaswetten volgt. Amst. Ak. Versl. **13**, 781-787.

Die Formel für den osmotischen Druck kann thermodynamisch oder kinetisch abgeleitet werden. Der erstere Weg ist bisher nur vereinzelt beschritten. Er setzt im übrigen auch eine auf kinetische Anschauungen gegründete Zustandsgleichung voraus, so daß man genauer von einer rein kinetischen und einer thermodynamisch-kinetischen Ableitung sprechen muß. Die vorliegende, im letzteren Sinne angelegte Ableitung geht von der van der Waalsschen Zustandsgleichung aus, wobei b als Konstante genommen wird, und berechnet mit Hülfe des thermodynamischen Potentials in einem Gemenge beliebiger Bestandteile den Druckunterschied zwischen Lösung und Lösungsmittel, die durch eine semipermeable Wand getrennt sind. Das eine Lösungsmittel soll dabei unter dem Drucke des eigenen Dampfes stehen, der den Gasgesetzen folgt. Rtt.

Ph. Kohnstamm. Kinetische afleiding van van t' Hoff's wet voor den osmotischen druk in een verdunde oplossing. Amst. Ak. Versl. **13**, 788-800.

Entgegen den zu der kinetischen Auffassung des osmotischen Druckes geäußerten Bedenken scheint diese Behandlungsweise besonders deshalb empfehlenswert, weil sie eine anschauliche Erklärung des van 't Hoffschen

Gesetzes gibt, indem sie an allgemein bekannte Gasgesetze anknüpft. Der Verf. legt hier folgende Vorstellung zugrunde: In einer Flüssigkeit oder einem Gase befindet sich eine Wand von vollständig elastischem, undurchdringlichem Stoffe, die keine Anziehung auf die Moleküle ausübt. Der „kinetische Druck“ ist dann die Bewegungsgröße der Moleküle in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit. Wird ferner die Wand sehr dick angenommen im Verhältnisse zur Wirkungssphäre der Moleküle, so ist der „äußere Druck“ gegeben durch die von der Einheit der Fläche in der Zeiteinheit auf die Moleküle übertragene Bewegungsgröße. Wenn endlich die Wand in der (nunmehr als Mischung angenommenen) Flüssigkeit die Moleküle der einen Komponente ohne Änderung ihrer Geschwindigkeit durchläßt, so entspricht der Druck auf die Wand, gemessen durch die elastische Veränderung der Oberfläche, dem „osmotischen Drucke“.

Rtt.

Ph. Kohnstamm. Osmotische druk of thermodynamische potentiaal. Amst. Ak. Versl. **13**, 800-811.

Im Anschlusse an eine ähnliche Arbeit von van Laar und in teilweisem Gegensatze zu ihr wird zwischen der Behandlung der Lösungen mit Hülfe der Begriffe „osmotischer Druck“ und „thermodynamisches Potential“ abgewogen (der Verf. bevorzugt die letztere Methode), wobei die bei beiden Behandlungsweisen entstehenden Ausdrücke tabellarisch gegenübergestellt werden. Rtt.

A. Smits. Over de verborgen evenwichten in de p-x-doorsneden van een binair stelsel tengevolge van het optreden van vaste stoffen. Amst. Ak. Versl. **14**, 187-192.

Durch 10 Figuren werden im Anschlusse an die entsprechende Arbeit von van der Waals vom Jahre 1903 Schnitte der Sättigungsfläche dargestellt für Temperaturen, die über der Temperatur des Dreiphasendruckes der höchst-schmelzenden Komponente liegen. Rtt.

A. Smits. Bijdrage tot te kennis der p-x en p-t-lijnen voor het geval twee stoffen een verbinding aangaan, welke in de vloeistof- en gasphase is gedissocieerd. Amst. Ak. Versl. **14**, 192-200.

Von Bakhuis Roozeboom ist vor kurzem eine Darstellung der p, x, t-Verhältnisse entworfen für den Fall, daß allein die Komponenten als feste Phasen erscheinen. Im Anschlusse an diese Darstellung werden hier die wichtigsten Fälle des Gleichgewichtes zwischen Dampf, Flüssigkeit und fester Phase untersucht, wenn die feste Phase eine dissoziable

Verbindung ist. In der fast ausschließlich graphischen Behandlung werden die besonderen Fälle unterschieden, wo die Dampfspannung zwischen denen der Komponenten liegt, wo die Dampfspannung der Verbindung kleiner ist, als die der Komponenten, oder wo sie größer ist. Rtt.

O. Tumlirz. Die stabilen und labilen Zustände der Flüssigkeiten und Dämpfe. Wien. Ber. **114**, 167-187.

Auf Grund der Versuchsergebnisse von Andrews haben Maxwell und Clausius versucht, auf den Isothermen (unter Voraussetzung nicht stattfindenden Zerfalles in Phasen) die Punkte zu bestimmen, die als Grenzen der Verdampfung oder Kondensation zu betrachten sind, wenn labile Zustände eintreten, z. B. Verzögerung der Kondensation staubfreien Dampfes beim Zusammendrücken, Verzögerung der Verdampfung einer luftfreien Flüssigkeit bei Druckentlastung. In der vorliegenden Arbeit wird nach einem Kennzeichen für stabile und labile Zustände gesucht mit Hülfe mechanischer Vorstellungen, im besonderen des Prinzipes der virtuellen Verschiebungen. Die den Rechnungen zugrunde gelegte ideelle Versuchsanordnung besteht aus einer vertikalen Röhre mit wärmedichter Wand und wärmedichtem Kolben, während der Boden nach Bedarf wärmedicht oder wärmedurchlässig sein soll. Ausgehend von der Zustandsgleichung vollkommener Gase, wird nun zunächst abgeleitet, daß der Gleichgewichtszustand eines vollkommenen Gases immer stabil ist. Bei der Behandlung der wirklichen Gase und der Dämpfe, denen nach van der Waals innere Kräfte von der Natur der Kapillarkräfte zugeschrieben werden, führen aber die Rechnungen zu dem Widerspruche, daß die spezifische Wärme bei konstantem Drucke kleiner sein müßte als bei konstantem Volumen, welcher Widerspruch in der unvollkommenen Kenntnis der Kapillargesetze gesehen wird, womit sich auch die Notwendigkeit einer wesentlichen Korrektur der van der Waalsschen Gleichung ergäbe.
Rtt.

A. Bouzat. Courbes de pression des systèmes univariants qui comprennent une phase gazeuse. Ann. de chim. et phys. (8) **4**, 145-195.

Es sei Q_T die Wärmemenge, welche bei der Temperatur T, wo eine Reaktion der betrachteten Stoffe eintritt, frei wird oder absorbiert wird (für 1 Gasmolekül). Dann gilt die Clapeyronsche Formel

$$\frac{Q_T}{T} = \frac{1}{E}\left(u' - u\right)\frac{dp}{dT} = \frac{R}{E}\frac{1}{p}\,T\frac{dp}{dT}.$$

Hieraus schließt der Verf.: 1. Der Quotient Q_T/T hat denselben Wert für einen und denselben Wert p in allen Systemen einer und derselben

Gruppe. 2. Der Wert T_A/T_B bleibt konstant bei jedem Drucke für zwei beliebige Systeme A und B einer und derselben Gruppe. Die Arbeit verifiziert diese Sätze an einer Reihe von Stoffen. Lp.

L. Marchis. Sur le diagramme entropique d'un système formé d'un liquide et de sa vapeur saturée. Journ. de Phys. (4) **4**, 509-512.

Der Verf. betrachtet die Kurve, deren Koordinaten die Entropie und die Temperatur sind, für ein System von der Masse 1, bestehend aus Flüssigkeit und ihrem gesättigten Dampfe, bei einem gegebenen Drucke P. Aus der Form der Kurve erschließt man sofort den Sinn der isentropischen Transformationen eines gesättigten Dampfes, dessen Temperatur sich ändert. Lp.

K. Scheel. Ableitung von Formeln für die Sättigungsdrucke des Wasserdampfes über Wasser, Eis und verdünnter Schwefelsäure bei niedrigen Temperaturen. Verh. Deutsche Physik. Ges. **7**, 391-394; Physik. Zs. **6**, 867-868.

Es werden die Formeln von Hertz und Kolaček für den Dampfdruck von Quecksilber und Salzlösungen versuchsweise auf Wasser unter den im Titel genannten Bedingungen angewandt; es zeigt sich, daß sie die Beobachtungen auffallend gut darstellen. Br.

C. Dieterici. Die Energie-Isothermen des Wassers bei hohen Temperaturen. Ann. der Phys. (4) **16**, 907-930.

In einer früheren Arbeit (Ann. der Phys. **16**, 593-620) hatte der Verf. Beobachtungen über die Flüssigkeitswärme des Wassers mitgeteilt, die sich aber nur auf Temperaturen unter 100° bezogen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich zum größeren Teile mit der Berechnung der Energie-Isothermen des Wassers auf Grund der Beobachtungen bei höheren Temperaturen. Aus dem Verhalten der so gewonnenen U-Isothermen (mit Näherung an den Sättigungszustand nimmt die Energie des Dampfes ab, die Isothermen gehen kontinuierlich in den Energiesprung der Kondensation über) lassen sich zwei Folgerungen ableiten. Erstens ist die spezifische Wärme des Dampfes (c_v) bei festgehaltener Temperaturdifferenz und großer Verdünnung annähernd konstant; sie wächst aber mit zunehmender Dichte bis zu einem Maximum im Sättigungszustande. Diese Folgerung ist unter anderem schon von Reinganum 1903 wahrscheinlich gemacht. Als Ursache der Erscheinung ist anzunehmen, daß die Kondensation sich schon im Dampfe vorbereitet. Derselben Ursache

ist zweitens zuzuschreiben, daß nach den Diagrammen c_v bei festgehaltenem Volumen mit der Überhitzung abnimmt. Daher ist c_v des Wasserdampfes Volumen- und Temperaturfunktion, und dieses Ergebnis wird schließlich in seiner Bedeutung für die Zustandsgleichung gewürdigt, mit Rücksicht auf die mangelnde Übereinstimmung, welche die Berechnungen für kohärente Stoffe nach der van der Waalsschen Zustandsgleichung mit den Beobachtungen zeigen. Von der mathematischen Behandlung der U-Isothermen ist aber vorläufig abgesehen. Rtt.

M. Reinganum. Über Energie und spezifische Wärme in der Nähe der kritischen Temperatur. Ann. der Phys. (4) **18**, 1008-1019.

Es soll die Änderung der spezifischen Wärme nach den kalorimetrischen Versuchen von Dieterici (Ann. der Phys. (4) **12**, 154-185, 1903) verglichen werden mit der thermodynamisch aus bekannten Isothermenwerten ableitbaren. Im Anschlusse an eine frühere Arbeit des Verf. und unter Benutzung der Bezeichnungen von van der Waals wird eine von T, p, v abhängige Größe a definiert, die der Konstante a der van der Waalsschen Gleichung entspricht. Wird die definierte Größe für viele Punkte bekannter Isothermen berechnet, so gibt ihre Veränderlichkeit ein Maß für die Abweichungen von der van der Waalsschen Formel. Nach allgemeiner Entwicklung des Zusammenhanges der Größe a mit der Energie werden Ergebnisse früherer Berechnungen der Veränderung von a mit dem Volumen in der Nähe der kritischen Temperatur mitgeteilt, und Ergänzungen hinsichtlich der Abhängigkeit von a von der Temperatur. Erstere werden unter Zugrundelegung der Versuche von Ramsay, Amagat und Young für vier Stoffe durchgeführt, die mehr oder weniger gut dem Gesetze der korrespondierenden Zustände gehorchen. Wie danach zu erwarten, steht das Volumen, bei dem a ein Minimum wird, zum kritischen Volumen in konstantem Verhältnisse. Die Behandlung der Veränderung von a mit der Temperatur, gegeben durch den zweiten Differentialquotienten des Druckes nach der Temperatur, führt zwischen $v = 2{,}4$ und 10 ccm zu einem Maximum für c_v nach der Isothermen- wie nach der kalorimetrischen Methode, dessen Größe aber sehr verschieden ist. Eine empirische Beziehung zwischen a und seiner Änderung mit der Temperatur bildet den Schluß, ausgehend von der durch die Tabellenwerte nahegelegten Wahrscheinlichkeit, daß bei überkritischen Temperaturen a immer unabhängiger vom Volumen wird, immer mehr also der Annahme von van der Waals entspricht. Rtt.

E. Mathias. Sur la chaleur de vaporisation des gas liquéfiés. C. R. **140**, 1174-1176.

Der Verf. hatte früher eine auf kalorimetrische Versuche (mit CO_2) gegründete Formel für die Verdampfungswärme verflüssigter Gase angegeben, die aus dem Produkte zweier Ausdrücke besteht. Der erste

davon enthält außer einer Konstante nur die dem Kalorimeter zugeführte Wärme, also eine leicht meßbare Größe, während der zweite aus den Dichten der Flüssigkeit und des gesättigten Dampfes gebildet ist. Die Zuverlässigkeit der Formel war angezweifelt. Demgegenüber wird gezeigt, wie der erste Ausdruck allein (die „scheinbare" Verdampfungswärme), für den frühere, nicht veröffentlichte Messungen des Verf. Zahlenwerte geben, mit der zusammengesetzten Formel durch das Carnotsche Prinzip und die Formel von Clapeyron in Beziehung steht. Rtt.

C. Dieterici. Sur les chaleurs spécifiques de l'acide carbonique et de l'isopentane. Journ. de Phys. (4) **4**, 562-570.

Zurückweisung der Einwände, welche E. Mathias in einem Referate über die Arbeit Dietericis in Ann. der Phys. (4) **12**, 154-185 (F. d. M. **34**, 977, 1903) gemacht hatte. Lp.

I. Traube. Über den Raum der Atome. Die Theorien von Th. W. Richards und mir. Verh. Deutsche Phys. Ges. **7**, 199-214.

I. Traube. On the space occupied by atoms. Phil. Mag. (6) **10**, 340-352.

Verf. weist zunächst ausführlich auf das Gemeinsame seiner Theorie mit der von Richards hin; hierbei hebt er insbesondere seine Prioritätsansprüche auf die Beobachtung und Deutung verschiedener Tatsachen gegenüber Richards hervor. Zum Schluß diskutiert er die Verschiedenheiten in den Ansichten beider. Richards findet, daß die Traubeschen Hypothesen über Kovolumen und Kernvolumen, gebundenen und freien Äther die Überlegung erschweren; für Traube sind sie dagegen das Wesentliche. Denn nur durch diese Annahmen kann er die Universalität der Gasgesetze in der Form der van der Waalsschen Zustandsgleichung beweisen. Auch bei der Berechnung des inneren Druckes bietet die gesonderte Berechnung des Kovolumens Vorteile. Für die Beibehaltung von Außen- und Innenvolumen sprechen außerdem die Theorien von van der Waals sowie von Clausius-Mossotti-Exner und deren Bestätigung von Traube. Gm.

A. Fliegner. Über den Wärmewert chemischer Vorgänge. Zürich. Naturf. Ges. **50**, 201-212.

Der Verf. hatte früher chemische Vorgänge in die thermodynamischen Rechnungen eingeführt, indem er der ersten Hauptgleichung ein besonderes Glied für Änderung der chemischen Energie anfügte, wobei exothermische

und endothermische Prozesse durch das Vorzeichen des Gliedes unterschieden wurden. Aus Gründen der Molekularmechanik befriedigte diese Maßnahme aber nicht, weshalb nunmehr die chemische Energie mit der inneren Arbeit zusammengefaßt wird; dabei werden in dem Gemenge, das in chemischer Umsetzung begriffen ist, drei verschiedene Bestandteile unterschieden: solche mit noch möglicher chemischer Wechselwirkung, solche mit schon vollendeter chemischer Änderung, endlich chemisch indifferente. In ähnlicher Weise dann wie früher vorgehend, gelangt der Verf. zu einer Differentialgleichung, deren Integration das Verschwinden eines die Bestandteile zweiter Art darstellenden Faktors erfordern würde, was ungereimt wäre. Daraus würde sich der Schluß ergeben, daß die Änderung der Entropie bei einem chemischen Vorgange überhaupt nicht zu berechnen ist, in teilweisem Gegensatze zu früheren Folgerungen des Verf. Im Zusammenhange damit müßte auch die bisherige Annahme, daß chemische Prozesse (ohne Austausch nach außen) immer mit Zunahme der Entropie verbunden seien, als willkürlich erscheinen. Rtt.

S. Sano. Note on Gibbs's phase rule. Tokio Math. Ges. **2**, 391-394.

Die Arbeit ist im wesentlichen die Fortsetzung einer früheren, in der vom Verf. die Bedingungen des chemischen Gleichgewichtes allgemein für Flüssigkeiten behandelt waren, und die nun ergänzt wird durch Ausdehnung der Phasenregel auf den sonst nicht beachteten Fall, wo Potentialdifferenzen zwischen den verschiedenen Phasen auftreten. Ausgehend von der Grundannahme, daß jede Substanz mehr oder weniger elektrolytisch dissoziiert, wird die Untersuchung im Sinne der vorhergehenden weitergeführt unter einer Reihe beschränkender Annahmen, so unter der Annahme homogener Phasen, also unter Ausschaltung der Schwere, ebenso unter Vernachlässigung der Oberflächenspannung in den Grenzschichten. Eine auf diesem Wege gewonnene Schlußgleichung steht scheinbar im Widerspruche zur Gibbsschen Regel, wonach die Phasenzahl höchstens gleich der um zwei vermehrten Zahl der Komponenten sein kann. Doch löst sich der Widerspruch bei Beachtung zutreffender Definitionen. Rtt.

A. W. Visser. Een paar opmerkingen over autokatalyse en de omzetting van γ-oxyzuren, met en zonder toevoeging van andere zuren, opgevat als ionenreactie. Amst. Ak. Versl. **13**, 770-780.

In seinem Lehrbuche der Allgem. Chemie (II, 2 S. 270) hatte Ostwald eine allgemeine Differentialgleichung für katalytische Prozesse gegeben, ohne aber eine Methode mitteilen zu können, um aus dem beobachteten Verlaufe einer bestimmten Reaktion auf die Form der Funktion schließen zu können. Dagegen glaubt der Verf. aus früheren Arbeiten

eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Funktionsform ableiten zu können. Jene Arbeiten hatten sich unter anderem bezogen auf die Umsetzungen von Sacharose durch Invertose, wobei der veränderliche katalytische Einfluß durch Einführung eines richtigen Maßes für die Intensität eines Katalysators angegeben werden konnte. In diesem Sinne verallgemeinernd, beginnt der Verf. mit dem einfachsten Falle, wo die Intensitäts-Änderung des Katalysators zu der Konzentrations-Änderung des beeinflußten Stoffes in konstantem Verhältnisse steht. Auf teils rechnerischem, teils graphischem Wege gelangt er dann zu Ausdrücken, die für bestimmte Fälle scheinbar befriedigende Übereinstimmung mit Beobachtungswerten zeigen. Rtt.

A. Radzig. Mathematische Theorie über den Wärmewechsel in den Zylindern der Dampfmaschinen. Kiew 1904, 154 S. (Russisch.)

Die Arbeit enthält einen historischen Abriß verschiedener Arbeiten über die Wärmemenge, welche die Dampfzylinderwände absorbieren, und über die eigene theoretische Bearbeitung dieser Aufgabe durch den Autor. Jk.

R. Liouville. Sur la relation qui existe entre la vitesse de combustion des poudres et la pression. C. R. **140**, 1089-1091.

In der Note, über welche auf S. 789 dieses Bandes berichtet ist, war die Verbrennungsgeschwindigkeit der Pulver der Potenz 2/3 des Druckes proportional gesetzt. Nimmt man den Exponenten des Druckes gleich 1, so kommt man zu Folgerungen, die von den Beobachtungen bedeutende Abweichungen zeigen; der Exponent 2/3 dagegen führt zu Resultaten, die mit den Versuchen gut stimmen. Lp.

Weitere Literatur.

C. W. Berry. The temperature-entropy diagram. New York: Wiley XVI u. 134 S. 12mo.

H. Birven. Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. Stuttgart: F. Grub. VII u. 128 S. 41 Abb. 8°.

J. Boulvin. Théorie des machines thermiques (Cours de mécanique appliquée aux machines. Fascicule 3). 2e édition. Paris. 548 S. 8°.

O. D. Chwolson. Lehrbuch der Physik. Dritter Band. Die Lehre von der Wärme. Übersetzt von E. Berg. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. XI u. 988 S. gr. 8°.

F. Haber. Thermodynamik technischer Gasreaktionen. Sieben Vorlesungen. München: R. Oldenbourg. XV u. 296 S. gr. 8°.

Lord Kelvin. On the kinetic and statistical equilibrium of ether in ponderable matter at any temperature. Brit. Ass. Rep. South Africa, 346-347.

G. Lippmann. Thermodynamique. Leçons professées à la Faculté des sciences rédigées par A. Mathias et A. Renault. 2e édition, conforme à la première. Paris: A. Hermann.

J. Meyer. Die Phasentheorie und ihre Anwendung. Stuttgart: Enke. 50 S. 8°.

M. Planck. Vorlesungen über Thermodynamik. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig: Veit & Co. VIII u. 256 S. gr. 8°.

J. D. van der Waals. Déduction de la formule qui fait connaître la relation entre les compositions des phases coexistantes d'un mélange binaire. Arch. Néerl. (2) **10**, 113-120.

Übersetzt aus Amst. Ak. Versl. **13**, 145-151; vgl. F. d. M. **35**, 923, 1904.

B. Gastheorie.

G. Jäger. Zur Theorie des Maxwell-Boltzmannschen Gesetzes. Ann. der Phys. (4) **16**, 46-60.

Auf einem Wege, der von dem klassischen etwas abweicht, gelangt Verf. zu einer Reihe von Überlegungen, deren Resultat darin gipfelt, daß das bekannte Verteilungsgesetz über die Molekulargeschwindigkeiten in jedem Raume gilt, welches auch die Art seiner Begrenzung sei. Die Methode beruht auf der Betrachtung des Durchganges der Gase durch eine ideale Scheidewand, an der ein Energieverlust angenommen wird.

Br.

E. Bose. Über die verallgemeinerte Auffassung einer Formel der kinetischen Gastheorie. Ann. der Phys. (4) **16**, 155-159.

Gemeint ist die Formel für das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen einatomiger Gase. Deren Ableitung beruht bekanntlich darauf, daß in der allgemeinen Formel die molekulare Energie = 0 gesetzt wird, weil diese nur als kinetische Energie der an sich energielos gedachten Atome innerhalb des Moleküls angesehen wird. Verf. zeigt, daß die Annahme des an sich energielosen Einzelatoms zur Ableitung der Formel nicht notwendig ist, daß vielmehr auch dem Atom eine besondere innere Energie zugeschrieben werden dürfe (was man ja nach den Radiumerscheinungen als zutreffend vermuten kann), sobald nur diese Energie von der Temperatur unabhängig ist.

Br.

S. H. BURBURY. The diminution of entropy according to the kinetic theory of gases. Brit. Ass. Rep. South Africa 1905, 333.

Behandlung der Frage: Wenn die Bewegung der einzelnen Teile eines materiellen Systems dynamisch umkehrbar ist, kann dann die Bewegung der Gesamtheit nicht umkehrbar sein? Die vom Verf. gezogene Folgerung ist diese, daß die Bedingung der Unabhängigkeit mit der Stetigkeit der Bewegung nicht verträglich ist und deshalb ganz aufgegeben werden müßte. Lp.

Lord RAYLEIGH. The dynamical theory of gases. Nature **71**, 559.

J. H. JEANS. The dynamical theory of gases. Nature **71**, 607.

Lord RAYLEIGH. The dynamical theory of gases and of radiation. Nature **72**, 54-55.

J. H. JEANS. The dynamical theory of gases and of radiation. Nature **72**, 101-102.

Die erste kurze Note von Lord Rayleigh lautet: „In dem schätzbaren Werke von Jeans über diesen Gegenstand wird die berühmte Schwierigkeit der Versöhnung des Gesetzes gleichmäßiger Energieverteilung mit unserer Kenntnis über die spezifischen Wärmen der Gase in Angriff genommen. Bei Betrachtung eines Gases, dessen Molekeln in den leeren Raum ausstrahlen, wird gezeigt, daß in einem angenähert beharrenden Zustande die Energie der vibrierenden Vorgänge ein zu vernachlässigendes Verhältnis zu derjenigen der translatorischen oder rotatorischen Vorgänge besitzen kann. Die Schwierigkeit scheint jedoch wieder aufzuleben, sobald man ein Gas betrachtet, das nicht in den leeren Raum ausstrahlt, sondern in einen von einer vollständig reflektierenden Hülle umgebenen. Dann ist nichts von der Natur der Zerstreuung vorhanden. Wir wissen, daß die Energie der Ätherschwingungen, welche einem gegebenen Volumen und Temperatur entsprechen, nicht unendlich oder auch nur der Temperatur proportional ist. ... Eine völlige Erfassung würde hier wahrscheinlich eine Lösung der Schwierigkeit der spezifischen Wärme mit sich bringen." Die folgenden Artikel bringen theoretische Erörterungen über die durch diese Note angeregten Fragen. Lp.

J. H. JEANS. The dynamical theory of gases. Cambridge: The University Press. XVI u. 352 S. (1904). [Nature **71**, 601.]

J. H. JEANS. On the application of statistical mechanics to the general dynamics of matter and ether. Lond. Roy. Soc. Proc. **76**, 296-311.

Lord RAYLEIGH. On the pressure of gases and the equation of virial. Phil. Mag. (6) **9**, 494-505.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Abhängigkeit des mathematischen Ausdrucks für das Virial von der Form, die man für das Gesetz der

molekularen Anziehung oder Abstoßung annimmt, insbesondere für die Dimensionen, die aus einem die Abstoßung umgekehrt der n-ten Potenz der Entfernung festsetzenden Gesetz resultieren. Br.

S. H. Burbury. Lord Rayleigh on the virial equation. Phil. Mag. (6) **10**, 33-35.

Bemerkungen zu der vorstehend angezeigten Arbeit von Lord Rayleigh. Br.

Lord Rayleigh. On the momentum and pressure of gaseous vibrations, and on the connexion with the virial theorem. Phil. Mag. (6) **10**, 364-374.

Behandelt die Schwingungen eines in einem Zylinder eingeschlossenen Gases, insbesondere den auf die Endflächen ausgeübten Druck. Es werden die Einflüsse der verschiedenen Formen für die Gasgesetze auf den Schwingungszustand und den entsprechenden mathematischen Ausdruck dafür untersucht und die Verträglichkeit spezieller Annahmen über die Natur dieses Schwingungszustands mit den feststehenden Tatsachen der Gastheorie diskutiert. Br.

P. Langevin. Sur une formule fondamentale de la théorie cinétique. C. R. **140**, 35-38.

Die anschauliche und verhältnismäßig leichte Methode der kinetischen Gastheorie nach Clausius befriedigt wohl in der Anwendung auf die Diffussion, die innere Reibung und Wärmeleitung, sie nimmt aber die Moleküle als elastische Körper an, die nur bei Berührung aufeinander wirken. Die Ergebnisse der ausgesprochen statistischen Methode sind im allgemeinen zweifelhaft, da sie die dynamischen Stoßbedingungen nicht berücksichtigt. Die allein strenge, von Maxwell begründete und von Kirchhoff und Boltzmann weiter gebildete dynamische Methode verlangt dagegen sehr verwickelte Rechnungen, so daß Maxwell sie nur bis zu dem besondere Erleichterungen gebenden Sonderfalle geführt hat, wo die gegenseitige Abstoßung der Moleküle der fünften Potenz ihres Abstandes proportional ist. Dieses Wirkungsgesetz führt aber nicht zu erfahrungsgemäßen Ergebnissen. Der Verf. ist nun zu einer Lösung des Problems der Diffusion zweier Gase nach der Maxwellschen Methode gelangt, aber ohne ein bestimmtes Wirkungsgesetz anzunehmen. Die allgemeine Formel erfordert eine, der Maxwellschen analoge graphische Integration, die aber mit der Vorstellung der Moleküle als elastischer Kugeln wegfällt. In diesem Sonderfalle zeigt sich der Unterschied der Formel gegenüber der für denselben Fall nach Clausius zu gewinnenden in dem Einflusse der Molekülmassen, deren etwaige große Verschiedenheit

naturgemäß für die statistische Methode zu Fehlern führt. Die allgemeine Formel läßt ebenfalls ohne graphische Integration die Art der Abhängigkeit des Diffusions-Koeffizienten von der Temperatur erkennen. Der Verf. ist zu der allgemeinen Lösung angeregt durch seine frühere, in Gemeinschaft mit Moulin unternommene Behandlung der Bewegung eines Gases mit elektrisierten Zentren, die auf die Moleküle infolge der dielektrischen Polarisation wirken. Rtt.

P. Langevin. Une formule fondamentale de théorie cinétique. Ann. de chim. et phys. (8) **5**, 245-288.

Statt der Clausiusschen statistischen Methode der mittleren Weglänge hebt der Verf. die Vorteile der Maxwellschen dynamischen Methode hervor, wie sie von Kirchhoff und Boltzmann fortgebildet ist. Die Schwierigkeit liege darin, daß man sie nur unter der Annahme einer der fünften Potenz des Abstandes umgekehrt proportionalen Molekularkraft durchführen kann. Der Hauptteil der Arbeit besteht in der Herleitung einer Annäherungsformel für den Fall einer nach einem beliebigen Gesetze wirkenden Molekularkraft, und zwar in bezug auf das Problem der Diffusion zweier Gase ineinander, wenn sie beliebig aufeinander einwirken. Lp.

A. Colson. Sur la théorie des déplacements gazeux. J. de l'Éc. Pol. (2) **10**, 117-141.

Im Sinne der chemischen Mechanik werden Erscheinungen der Bildung gasartiger Systeme untersucht, wesentlich unter Benutzung der Clapeyronschen Formel, des Gesetzes von Berthollet und der Phasenregel. Es zeigt sich, daß die Bildung eines Gases, eines basischen oder sauren Dampfes, die Verdampfung eines flüchtigen Metalles usw. eine Gruppe von Erscheinungen darstellen, die von denselben Gesetzen beherrscht werden. Für den Vorgang der Bildung gilt: Das aus einem festen Systeme unter Wärmeentwicklung entstehende Gas kann nicht zur Rückbildung des ursprünglichen Systems eine Verbindung eingehen. Bei Wärmebindung ist der Vorgang umkehrbar, falls die Gleichgewichtsfaktoren bei der betreffenden Temperatur nicht verändert werden. Ein unter Wärmeentwicklung kondensierendes Gas kann bei passender Temperatur und bestimmtem Drucke unmittelbar in Verbindung treten; eine exothermische Kondensation ist nicht möglich, wenn sie aus Kondensationen resultiert, von denen wenigstens eine endothermisch ist. Rtt.

B. Hartmann. Untersuchung über die Leistungsfähigkeit der Aßmannschen Methode zur experimentellen Bestimmung des Verhältnisses c_p/c_v der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen von Gasen. Ann. der Phys. (4) **18**, 252-298.

Das hier behandelte theoretische Problem lautet: „Eine in einem kreisringförmigen Rohr mit horizontaler Rotationsachse befindliche Quecksilbermasse, über deren Oberfläche zwei Gasmassen abgeschlossen sind, führt, durch einen äußeren Impuls aus ihrer Ruhelage gebracht, unter der Wirkung der Schwerkraft, der Gasdrucke und der auftretenden Reibungskräfte Schwingungen aus. Die Gasdrucke hängen ab von den durch die Oszillationen hervorgerufenen Verdichtungen und Verdünnungen, sowie von ihren Begleiterscheinungen, den Erwärmungen und Erkaltungen des Gases, deren Stärke mit dem Verhältnis $k = c_p/c_v$ der spezifischen Wärmen im Zusammenhang steht, und von dem unvermeidlichen Wärmeaustausch zwischen Gas und Gefäßwand. Gesucht wird die Beziehung zwischen den die Flüssigkeitsbewegung charakterisierenden Größen, eventuell Schwingungsdauer und logarithmisches Dekrement, und den wirkenden Kräften, um mittels dieser Beziehung k durch Beobachtungsgrößen auszudrücken." Die Behandlung des Problems geht von dem hydrodynamischen Ansatz aus, der mit Riemannschen Ringkoordinaten durchgeführt wird, und führt dann die thermodynamischen Größen ein, und zwar zunächst für adiabatische, dann aber auch für nicht adiabatische Zustandsänderungen. Hier hört allerdings jede Strenge auf; es werden aber doch die aus Strahlung, Leitung und Konvektion folgenden Wärmeverluste diskutiert, und ihr Einfluß auf die Bestimmung der direkt zur Beobachtung geeigneten Größen in Betracht gezogen, wobei sie allerdings alle auf die eine Fehlerquelle der Wärmeleitung geworfen werden. Br.

A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. Ann. der Phys. (4) 17, 549-560.

Es wird vom Standpunkt der kinetischen Wärmetheorie aus unter Ausbildung von Methoden, die denen der Gastheorie nachgebildet sind, der Bewegungszustand feiner in einer Flüssigkeit suspendierter Teilchen untersucht. Für diese Theorie besteht ein grundsätzlicher Unterschied zwischen gelösten und bloß suspendierten Teilchen, abgesehen von der Größe der Teilchen, nicht. Dementsprechend ergeben sich auch für solche Teilchen im Widerspruch mit der Lösungstheorie Ausdrücke für osmotischen Druck und Diffusionsgeschwindigkeit. Diese werden entwickelt und bilden die Grundlage für die dann folgende Bestimmung des Bewegungszustandes selbst und der damit in Zusammenhang stehenden Größen, wie freie Weglänge, mittlere Geschwindigkeit usw. Der Zweck der Arbeit ist, für die Ableitung von Zahlenwerten dieser Größen, die sich mikroskopisch nachprüfen ließen, die Grundlage zu bilden. Br.

S. Chella. Su di un apparecchio per la misura assoluta del coefficiente di attrito interno dei gas. Rom. Acc. L. Rend. (5) **14**$_2$, 23-30.

Eine zylindrische Glocke schwingt in einem zylindrischen Ringraum, der mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist. Es wird die Theorie dieser Anordnung entwickelt und eine Formel abgeleitet, mit deren Hülfe man aus solchen Beobachtungen den Koeffizienten für die innere Reibung berechnen kann. Br.

Jouguet. Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz. Journ. de Math. (6) **1**, 347-425.

Es handelt sich um die Fortpflanzung der Explosionswelle in Gasgemischen, die an sich explosibel, aber primär noch nicht auf die Explosionstemperatur erhitzt sind, sondern diese Temperatur durch die Fortpflanzung der Explosionswelle erst gewinnen. Hierbei wird von der Wärmeleitung abgesehen, so daß als Ursache der Explosionsfortpflanzung allein die Explosionswelle angenommen wird. Diese hat aber einen doppelten Charakter und damit auch eine doppelte Wirkung, nämlich erstens den Charakter einer Schwingungswelle und zweitens den einer Stoßwelle. Die aus der Schwingungserregung folgenden Erscheinungen sind bereits früher von andern, namentlich von Duhem diskutiert worden, Verf. wiederholt sie aber, um eine abgeschlossene Arbeit zu liefern, von etwas abweichenden Gesichtspunkten aus. Er fügt dann selbst, da die Schwingungstheorie allein die Beobachtungen nicht erklären kann, die Theorie der Stoßwellenwirkung hinzu. Dabei werden die für eine thermodynamische Behandlung des Problems notwendigen Größen eingeführt, dagegen ist von der Diffusion und der inneren Reibung als sekundären Fehlerquellen abstrahiert. Nachträglich wird aber wenigstens der Einfluß, den die Reibung auf die Resultate haben kann, doch noch diskutiert. Br.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

S. Zaremba. Solution générale du problème de Fourier. Krakau. Anz. 1905, 69-168.

Als Fouriersches Problem wird die etwas verallgemeinerte Aufgabe der Wärmeleitung bezeichnet. Das Problem wird folgendermaßen formuliert: Für einen durch eine überall reguläre, sonst beliebige Fläche S begrenzten, ganz im Endlichen gelegenen Bereich D soll eine Funktion V bestimmt werden, die folgende Eigenschaften besitzt. V selbst ist innerhalb D sowie auf S endlich und kontinuierlich, ihr absoluter Betrag in irgend einem Punkte von D bleibt unterhalb einer endlichen Grenze. $\frac{\partial V}{\partial t}$ sowie

die zweiten Ableitungen von V nach den Koordinaten sind für $t > 0$ im Innern von D endlich und kontinuierlich. V genügt ferner in D der Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \Delta V, \tag{1}$$

während für Punkte der Oberfläche

$$h' \frac{\partial V}{\partial N} = hV + \varphi \tag{2}$$

ist. Darin ist h' eine gegebene Konstante, die positiv oder Null sein kann, h eine gegebene kontinuierliche Funktion der Koordinaten, φ eine gegebene Funktion der Koordinaten und der Zeit, N die innere Normale von S. Endlich soll V für beliebig kleine positive Werte von t sich von der gegebenen Funktion $f(x, y, z)$ beliebig wenig unterscheiden. — Falls in (2) $\varphi = 0$ ist, wird das Problem das reduzierte Fouriersche Problem genannt.

Der Verf. bespricht zunächst, wie weit das Problem durch die Untersuchungen von Poincaré (vgl. F. d. M. **22**, 977, 1890; **25**, 1526, 1893/1894), der zuerst die Existenzbeweise der Potentialtheorie auf andre Differentialgleichungen der mathematischen Physik ausgedehnt hat, erledigt ist. Er führt weiter an, in welcher Hinsicht die Nachfolger Poincarés, insbesondere Le Roy (s. F. d. M. **28**, 830, 1897; **29**, 782, 1898), Stekloff (F. d. M. **29**, 782, 1898; **30**, 374, 1898) und Zaremba selbst (F. d. M. **30**, 328, 1899; **31**, 419 und 731, 1900), dessen Resultate erweitert haben. Zu erledigen bleiben noch folgende Punkte: 1) die Existenz der harmonischen Funktionen für den Fall, daß $h : h'$ eine beliebige kontinuierliche Funktion ist; 2) die Lösung des reduzierten Fourierschen Problems, falls von der Funktion $f(x, y, z)$ nur vorausgesetzt wird, daß sie kontinuierlich ist; 3) die Zurückführung des allgemeinen Fourierschen Problems auf das reduzierte, falls $h : h'$ eine beliebige kontinuierliche Funktion ist.

Der Lösung dieser Fragen ist die vorliegende Arbeit gewidmet; nebenbei werden noch einige allgemeinere Fragen berührt. Als Hülfsmittel der Untersuchung dient die Theorie der verallgemeinerten Potentiale, bei denen $\frac{1}{r} e^{-\mu r}$ an Stelle von $\frac{1}{r}$ tritt, sowie die Eigenschaften der verallgemeinerten Greenschen Funktion. Es ist dies diejenige Funktion G, die in D der Gleichung

$$\Delta G + \xi G = 0$$

genügt, die ferner die Eigenschaft hat, daß $G - \frac{1}{4\pi r}$ überall in D kontinuierlich ist, während an der Grenze

$$h' \frac{\partial G}{\partial N} = hG$$

wird. r ist dabei der Abstand zweier Punkte P_0, P von D, ξ ein im allgemeinen komplexer Parameter. Die Lösung des reduzierten Fourierschen Problems wird in doppelter Form gegeben, einmal in Form einer unendlichen Reihe, sodann in Form eines komplexen Integrals. Zum Schluß wird gezeigt, wie man das allgemeine Problem auf das reduzierte zurückführen kann. — Hinsichtlich der Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Wn.

E. W. Hobson und H. Diesselhorst. Wärmeleitung. Enzyklop. d. math. Wissensch. V 1, 161-231.

Inhaltsübersicht: I. Mathematischer Teil (Rechnungsmethoden). Von E. W. Hobson. 1. Allgemeines über Dissipation. 2. Die Grundlagen der Theorie der Wärmebewegung. 3. Die partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung in einem isotropen festen Körper. Allgemeine Sätze. 4. Die Wärmeleitung in krystallinischen Körpern. 5. Die lineare Wärmeleitung. 6. Die Behandlung der linearen Wärmebewegung durch die Methode der Quellenpunkte. 7. Die Wärmeleitung in zwei oder drei Dimensionen. 8. Wärmeleitung in einer Kugel. 9. Wärmeleitung in einem Kreiszylinder. 10. Wärmeleitung in Körpern von verschiedenen speziellen Formen. 11. Theorie des Schmelzens und des Gefrierens bei Wärmeleitung. 12. Die Wärmeleitung und innere Reibung in einer bewegten Flüssigkeit. 13. Diffusion.

II. Physikalischer Teil (Meßmethoden). Von H. Diesselhorst. 14. Zweck der Messungen. 15. Grundlagen und Voraussetzungen. 16. Allgemeine Übersicht über die Methoden. 17. Methode von Péclet (1841). 18. Wärmedurchgang durch Heizflächen. 19. Methode von Berget (1887). 20. Methode von Despretz (1822) und Forbes (1852). 21. Äußere Wärmeleitung. 22. Methode von Angström (1861). 23. Methoden von Fr. Neumann (1862). 24. Methode von Kirchhoff und Hansemann (1879). 25. Methode von L. Lorenz (1881). 26. Methoden aus dem Berliner physikalischen Institut (1898-1903). a) Bespülung der Endflächen mit einem Wasserstrahl. b) Bestrahlung der Endflächen mit einem glühenden Platinblech. c) Berechnung der nach diesen Methoden angestellten Versuche. 27. Isothermenmethode von Voigt (1897). 28. Wärmeleitung in Krystallen (Allgemeines). 29. Methode von H. de Sénarmont (1847). 30. Methode von Voigt (1896). 31. Messungsergebnisse. Lp.

G. Glage. F. E. Neumanns Methode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit gut leitender Körper in Stab- und Ringform und ihre Durchführung an Eisen, Stahl, Kupfer, Silber, Blei, Zinn, Zink, Messing, Neusilber. Ann. der Phys. (4) 18, 904-940.

Bei der Darstellung der obigen Methode Fr. Neumanns durch H. F. Weber und Kirchhoff scheint ein kennzeichnender Umstand über-

sehen zu sein, nämlich die Unabhängigkeit der Methode von einem thermisch genau definierten Anfangszustande. Doch wird Neumann dieser Umstand wohl bekannt gewesen sein, wie aus seinen noch vorhandenen Meßvorrichtungen zu schließen ist (seine nur kurze Veröffentlichung vom Jahre 1862 gibt darüber keine Auskunft). Die Methode besteht in der Erwärmung eines Stabendes (oder bestimmten Ringquerschnittes) bis zu einem beliebigen Anfangszustande und in kurzfristiger Beobachtung der Änderung von Summe und Differenz der Temperaturen zweier Querschnitte in der Nähe der Stabenden (bzw. diametraler Querschnitte). Die Differenzen liefern die innere, die Summen die äußere Leitfähigkeit.

Zur genaueren Untersuchung der Methode wird zunächst ihre schematische Theorie entwickelt, worauf die Abweichungen untersucht werden, erstens als Folge des endlichen Querschnittes (es zeigt sich, wie schon früher H. F. Weber erkannte, daß bei gewisser Vorsicht der Einfluß der Querschnittgröße verschwindet), zweitens infolge Abhängigkeit der Leitfähigkeiten und spezifischen Wärme von der Temperatur (die Endergebnisse und kennzeichnenden Züge der schematischen Theorie bleiben ungeändert), drittens endlich infolge der Anordnung der Thermoelemente in einigem Abstande von den Stabenden. Der übrige größere Teil der Arbeit bezieht sich auf die Ausbildung einer Beobachtungsmethode, auf Prüfung ihrer Genauigkeit, Mitteilung von Versuchen usw. Rtt.

C. Niven. On a method of finding the conductivity of heat. Lond. R. S. Proc. (A) **76**, 34-48.

Enthält in mathematischer Beziehung eine Diskussion der Wärmeströmung in lediglich einseitig, oder ring- oder schalenförmig begrenzten Medien vom Standpunkt der Fourierschen Betrachtungen aus. Für verschiedene einfache Fälle wird die Wärmeverteilung beim stationären Zustand als Funktion der Koordinaten und der Zeit dargestellt. Br.

Ch. H. Lees. Effects of temperature and pressure on the thermal conductivities of solids. Part I: The effect of temperature on the thermal conductivities of some electrical insulators. Lond. Phil. Trans. (A) **204**, 433-466.

Enthält eine auf der Fourierschen Betrachtungsweise fußende Theorie einer speziellen Versuchsanordnung, bei der ein Versuchsdraht von mehreren wärmeleitenden Hüllen umgeben ist. Br.

J. Boussinesq. Pouvoir refroidissant d'un courant fluide sur un ellipsoïde à axes inégaux, immergé dans ce courant. C. R. **140**, 15-20.

Die Note ist die Fortsetzung derer, über welche F. d. M. **35**, 944, 1904, berichtet ist. Der dort wiedergegebene Satz lautet: Das Abkühlungsvermögen ist proportional zu $\theta_0\sqrt{KCV\varpi}$, wo ϖ das Volumen des Körpers ist, K, C, V die am angeführten Ort erklärten Konstanten, θ_0 die Temperaturdifferenz von Körper und Flüssigkeit. Die Formel gilt für alle ähnlichen Körper, welche zur Strömung ähnlich liegen. Für jede Gestalt des Körpers und jede Orientierung desselben gegen die Strömung muß daher der numerische Koeffizient der Proportionalität berechnet werden. In einer Fußnote der früheren Note waren die Rechnungen für das dreiachsige Ellipsoid bereits angedeutet, für das Drehellipsoid und eine Strömung in Richtung der Drehachse ausgeführt worden. Jetzt geht der Verf. auf den Fall des dreiachsigen Ellipsoids ein; das auszuführende Integral, dessen Form hergeleitet wird, bietet jedoch im allgemeinen Falle unübersteigliche Schwierigkeiten. Der nunmehr noch vollständig durchgerechnete Fall ist der eines unendlich dünnen Ellipsoids mit einer Strömung senkrecht zum Hauptschnitte. Lp.

J. Boussinesq. Conductibilité extérieure ou superficielle, représentative, pour un corps donné, du pouvoir refroidissant d'un courant fluide. C. R. **140**, 65-70.

„Es ist natürlich, das Abkühlungsvermögen des Stroms vermittelst einer fiktiven oberflächlichen Leitfähigkeit k auszudrücken, die dem Körper derart zugeschrieben wird, daß der gesamte Wärmefluß, der ihm auf Grund dieser Leitfähigkeit und gemäß dem üblichen Newtonschen Gesetze in der Zeiteinheit entführt wird, genau dem Betrage gleichkommt, den der Strom in der Tat wegnimmt. Damit hat man eine Leitfähigkeit, die dem Flüssigkeitsstrome in bezug auf das Abkühlungsvermögen gleichwertig ist, und dieser wird sozusagen in Leitfähigkeit ausgewertet oder auf sie zurückgeführt." Nach dieser Feststellung wird der Satz bewiesen: „Die äußere Leitfähigkeit k, welche das Abkühlungsvermögen eines Flüssigkeitsstromes darstellt, ist proportional zu $\sqrt{KCV/L}$, d. h. zu den vier Quadratwurzeln aus der inneren Leitfähigkeit K des Stromes, seiner Wärmekapazität C für die Einheit des Volumens, seiner allgemeinen Geschwindigkeit V, der umgekehrten Weglänge L der Flüssigkeitsfäden auf dem Körper." Einige Beispiele, bei denen der Proportionalitätsfaktor bestimmt wird, dienen zur Bestätigung. Lp.

J. Boussinesq. Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides. Journ. de Math. (6) **1**, 285-332.

Die wichtigsten Ergebnisse dieser Abhandlung befinden sich in einzelnen Noten der C. R. (vgl. F. d. M. **35**, 944, 1904 und die vorstehenden

Referate). Das interessante praktische Resultat der mathematischen Behandlung des Problems ist die Berechnung der gesamten Wärmemenge, welche dem Körper durch den Flüssigkeitsstrom in der Zeiteinheit entführt wird, welche Menge das auf den Körper ausgeübte „Abkühlungsvermögen" genannt wird. Die ersten Untersuchungen hierüber befinden sich in des Verf. „Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière", Band II, S. 172-196 (Paris, 1903). Es handelt sich dabei um die Abkühlung eines festen Körpers im Innern einer unbegrenzten Flüssigkeitsmasse, welche als Ganzes eine gleichmäßige und gegebene Translation V besitzt. Die Lösung hängt von einer partiellen Differentialgleichung ab, der die Temperatur θ des festen Körpers genügen muß.

Gegenwärtig wird gezeigt, daß die in jenem Buche entwickelte Lösung auf den Fall anwendbar ist, bei welchem die Strömung einen Zylinder von unbestimmter Länge senkrecht zu seiner Achse trifft, wenn jede Erzeugende des Zylinders auf einer gleichmäßigen Temperatur θ_0 in ihren verschiedenen Punkten gehalten wird. Wenn der Körper nicht zylindrisch ist, sondern ein Umdrehungskörper um eine längs des Stromes gerichtete Achse, mit der nämlichen Temperatur θ_0 längs jedes Parallelkreises, so braucht man nur zwei den Zylinderkoordinaten analoge krummlinige Koordinaten einzuführen, um zu passenden Quadraturen zu gelangen.

Die abkühlende Wirkung des Stromes wird vom Verf. dem Einflusse gleichgestellt, welchen eine gewisse mittlere äußere Leitfähigkeit k des Körpers ausüben würde; das Produkt derselben mit dem gegebenen Temperaturüberschuß θ_0 und der gesamten Oberfläche des Körpers würde genau die gesuchte Wärmemenge geben. Diese fiktive äußere Leitfähigkeit k (vgl. das vorstehende Referat) scheint am einfachsten das zu bewertende Abkühlungsvermögen zu charakterisieren.

Die Theorie setzt einen permanenten, selbst kalorischen Zustand des Flüssigkeitsstromes voraus, ist aber auch noch anwendbar auf die Abkühlung eines Körpers, dessen Wärmevorrat nicht stetig erneuert würde, vorausgesetzt daß die Abkühlung hinreichend langsam vor sich geht.

Lp.

J. H. JEANS. A comparison between two theories of radiation. Nature **72**, 293-294.

Bei zwei Gelegenheiten hat Lord Rayleigh zu einer kritischen Vergleichung zweier Theorien der Strahlung aufgefordert, der Planckschen (Ann. der Phys. (4) **1**, 69 und **4**, 553) und derjenigen von Jeans. Hierdurch veranlaßt, setzt Jeans seine Bedenken gegen die Plancksche auseinander.

Lp.

J. H. JEANS. On the laws of radiation. Lond. R. S. Proc. (A) **76**, 545-552.

Durch vergleichende Überlegungen kommt Verf. zu folgendem Strahlungsgesetz: $dS = \lambda^{-4}\, Tf(\lambda T)\, d\lambda$, wo S die Strahlungsenergie, T die

absolute Temperatur und λ die Wellenlänge bedeuten, und $f(\lambda T)$ sich für große Werte des Argumentes einer Konstante, für kleine der Funktion $e^{-\varepsilon/\lambda T}$ nähert. Br.

P. Ehrenfest. Über die physikalischen Voraussetzungen der Planckschen Theorie der irreversiblen Strahlungsvorgänge. Wien. Ber. **114**, 1301-1314.

Nach vorheriger wörtlicher Anführung mehrerer von Planck zur Entwicklung seiner Theorie gegebenen Stellen bemerkt der Verf., daß ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Totalenergie und Spektralverteilung bei stationärer Strahlung nur dann nachgewiesen sei, wenn erstens eine gewisse Funktion bei allen im Planckschen Modelle möglichen Strahlungszuständen nur zunimmt oder konstant bleibt, wenn zweitens diese Funktion bei vorgegebener Totalenergie zeitlich nur konstant ist, sofern der stationäre Strahlungszustand eine eindeutig bestimmte Spektralverteilung besitzt. Die erste Bedingung ist durch Planck erledigt, die zweite aber noch nicht, und der Verf. weist in Anlehnung an eine allgemeinere dimensionelle Betrachtung von H. A. Lorentz nach, daß aus den Grundgleichungen der Planckschen Theorie die zweite Bedingung nicht gefolgert werden kann, weil sich danach unendlich viele „natürliche“ und stationäre Strahlungen von derselben Totalenergie angeben lassen, bei denen die erste Bedingung erfüllt ist, und die trotzdem unendlich viele verschiedene Spektralverteilungen besitzen. Die Plancksche Theorie liefere eindeutige Ergebnisse demnach nur unter Einführung einer dritten (tatsächlich auch untergelegten) unabhängigen Forderung, bei deren weiterer Ausführung der Anschluß an das Boltzmannsche H-Theorem für einatomige Gase gewonnen werden könne. Rtt.

H. A. Lorentz. Over de warmtestraling in een stelsel lichamen van overal gelijke temperatuur. I. u. II. Amst. Ak. Versl. **14**, 345-360, 408-412.

Um den Gleichgewichtszustand eines körperlichen Systems zu bestimmen, in dem alle Körper gleiche Temperatur haben, und der durch gleiche Absorption und Emission aller Körper gekennzeichnet ist, wobei diese in einer vollkommen schwarzen oder innen vollkommen spiegelnden Hülle enthalten sind, kann man sich eines Kunstgriffes bedienen. Man kann sich nämlich vorstellen, daß die Ausstrahlung, die in Wirklichkeit als Folge von Elektronenbewegungen anzusehen ist, hervorgebracht wird durch periodische elektromotorische Kräfte in den Volumenelementen. Von der Elektronentheorie wird dabei kein Gebrauch gemacht; auch brauchen die Körper nicht aus Molekülen bestehend angenommen zu werden, vielmehr können sie als Kontinua behandelt werden. Auf diese Weise wird ein fiktiver Mechanismus ausgebildet, der dieselbe Strahlung wie in Wirklichkeit ergibt. Die Rechnungen, deren vorbereitende Sätze, in Anlehnung an entsprechende Arbeiten des Verf. in der Mathematischen Enzyklopädie,

vorausgeschickt werden, beziehen sich zunächst auf eine dünne Platte, von da aus auf die Kräfte in den Volumenelementen und ihre Analogie mit der Strahlung und führen zur Berechnung der Strahlungsenergie in der Volumeneinheit, wobei sich übereinstimmende Werte für die verschiedenen Energien ergeben. In einer Schlußbemerkung wird auf die Gründe dafür hingedeutet und betont, daß die Strahlung zwischen nahe beieinander liegenden Molekülen nicht unmittelbar in derselben Weise behandelt werden kann. Rtt.

E. Aschkinass. Die Wärmestrahlung der Metalle. Ann. der Phys. (4) 17, 960-976; Verh. Deutsche Phys. Ges. 7, 251-254.

Nach der Planckschen Formel läßt sich aus Wellenlänge und Temperatur die spektrale Verteilung der Strahlungsenergie eines absolut schwarzen Körpers berechnen, und aus der Formel ergeben sich ohne weiteres die drei Grundgesetze der schwarzen Strahlung, Verschiebungsgesetz, Verhältnis des Energiemaximums zur Temperatur, Stefan-Boltzmannsches Gesetz. Bei einem nicht schwarzen Körper ist die Strahlung außer von Wellenlänge und Temperatur auch noch vom Reflexionsvermögen abhängig. Dann erscheint in dem Kirchhoffschen Satze das prozentische Reflexionsvermögen im allgemeinen als unregelmäßige Funktion von Wellenlänge und Temperatur, weshalb allgemein gültige Gesetze wie bei der schwarzen Strahlung nicht bestehen können. Dagegen zeigt der Verf., daß sich Strahlungsgesetze von beschränkter Gültigkeit für alle Metalle ableiten lassen.

Aus der von Hagen und Rubens gegebenen Beziehung zwischen der Leitfähigkeit der Metalle und ihrem Reflexionsvermögen und dem Kirchhoffschen Satze folgt nämlich bei tiefen Temperaturen auch für die Metalle ein Verschiebungsgesetz nach Wien, mit einer kleineren Konstante als beim schwarzen Körper (2666 statt 2940), weshalb das Energiemaximum für die Metalle bei kürzeren Wellen liegt. Unter der weiteren Beschränkung auf so tiefe Temperaturen, daß die kurzwellige Strahlungsenergie gegenüber der langwelligen vernachlässigt werden kann, läßt sich mit Hülfe einer Substitution der Ausdruck für die Gesamtstrahlung auf eine Gammafunktion zurückführen und verwerten. Das Verschiebungsgesetz ist in guter Übereinstimmung mit den Untersuchungen von Lummer und Pringsheim. Um vollständige Beziehungen zwischen maximaler Energie, bzw. Gesamtstrahlung und Temperatur zu erhalten, wird in bekannter Weise der Temperatur-Koeffizient des Widerstandes dem Ausdehnungs-Koeffizienten thermischer Gase gleichgesetzt. Unter dieser Annahme ergibt sich bei niedrigen Temperaturen für die Strahlung reiner Metalle die Maximalenergie proportional der sechsten, die Gesamtstrahlung proportional der fünften Potenz der absoluten Temperatur, dieselben Werte, die früher empirisch von Lummer und Kurlbaum für Platin gefunden wurden. Es wird dann die Strahlung des absolut schwarzen Körpers mit der aus den entwickelten Beziehungen für Metalle zu findenden

verglichen, wobei sich zunächst ergibt, daß die Metalle mit steigender Temperatur „schwärzer" werden, und weiterhin, daß die für Platin experimentell festgestellten Gesetze innerhalb gewisser Grenzen für alle reinen Metalle gelten. Rtt.

F. Hasenöhrl. Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern. Berichtigung. Ann. der Phys. (4) **16**, 589-592.

In einer früheren Arbeit gleichen Titels (Ann. der Phys. **15**, 344; F. d. M. **35**, 838, 1904) hatte der Verf. den Begriff der scheinbaren Masse der Hohlraumstrahlung aufgestellt und einen Wert dafür angegeben. Aus einer dem Verf. von M. Abraham mitgeteilten (im Texte kurz wiederholten) Methode berechnet sich aber der Wert gerade zur Hälfte des vom Verf. ermittelten. Dieser hat den Grund der Abweichung in einem ihm untergelaufenen Rechenfehler gefunden, nach dessen Ausmerzung die Übereinstimmung der beiden Berechnungsweisen vollkommen ist. Die weiteren thermodynamischen Überlegungen bleiben durch Einführung des berichtigten Wertes grundsätzlich unverändert. Doch genügt zur Lösung des Widerspruches mit dem zweiten Hauptsatze nicht mehr die Kontraktionshypothese von Lorentz und Fitzgerald; es müßte vielmehr noch die vom Verf. in der ersten Arbeit schon angedeutete Hypothese hinzugefügt werden, daß das wahre Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers explizit von der Bewegung abhängt. Rtt.

R. Lucas. Bemerkungen zu dem Gesetz der Helligkeitszunahme eines glühenden Körpers mit der Temperatur. Physik. Zs. **6**, 19-20.

Die Abhängigkeit der photometrischen Gesamthelligkeit Φ von der Temperatur T glühender Körper wird nach Rasch (Ann. der Phys. (4) **14**, 193, 1904) durch die Gleichung dargestellt: $\ln \Phi = C - K/T$. Das Wien-Plancksche Energieverteilungsgesetz liefert das Gesetz der Helligkeitszunahme für monochromatisches Licht. Die Wiensche Gleichung liefert durch Logarithmierung $\ln J = C - K/T$, wobei K und T aus der Gleichung folgende Konstanten sind. „Es erscheint bemerkenswert, daß die Abhängigkeit der photometrischen Gesamthelligkeit von der Temperatur durch das gleiche Gesetz dargestellt wird." Lp.

R. Lucas. Über den Temperaturunterschied von glühendem Platin und schwarzem Körper bei gleicher photometrischer Helligkeit. Physik. Zs. **6**, 418-419.

„Die Strahlung des schwarzen Körpers und des Platins, obwohl dem absoluten Betrage nach verschieden, ist im gleichen Maße von der Temperatur abhängig." Lp.

A. D. Denning. A simple method of determining the radiation constant. Phil. Mag. (6) **10**, 270-278.

Die Methode ist bolometrisch. Als Anhang enthält die Arbeit eine mathematische Entwicklung zur Bestimmung des Einflusses, den die Trägheit der Galvanometerspule und die Luftreibung auf die Ablesungen ausüben. Br.

G. H. Darwin. The analogy between Lesage's theory of gravitation and the repulsion of light. Lond. R. S. Proc. (A) **76**, 387-410.

Es wird zuerst in umfangreicher Rechnung der Druck bestimmt, der zwei Kugeln zusammentreibt, die einem dauernden Bombardement aus dem Unendlichen kommender Ätherteilchen unterworfen sind. Dieser ergibt für vollkommen unelastische Ätherteilchen das Attraktionsgesetz. Die Strahlung wird umgekehrt als das Aussenden solcher Teilchen aufgefaßt, so daß vollkommene Strahlung das Coulombsche Abstoßungsgesetz ergibt. Aus Zwischenannahmen aller Art ergeben sich Analogieschlüsse für verschiedene Strahlungserscheinungen und ihre Folgen. Br.

O. Heaviside. The pressure of radiation. Nature **71**, 439-440.

Der Verf. erörtert die Schwierigkeiten in der theoretischen Behandlung des Strahlungsdrucks bei ruhendem Äther. „Die Dunkelheiten und augenscheinlichen Widersprüche entstehen aus der Annahme, daß der Äther ganz bewegungslos ist. Wenn wir die Sache weiter fassen und die Kräfte in einem sich bewegenden Äther aufsuchen, mit einer ebenso sich bewegenden polarisierbaren Masse in ihm, so ist dies zwar einerseits ein größeres Wirrnis, andererseits aber, nämlich für die fraglichen Vorstellungen, eine Vereinfachung." Die analytischen Skizzen können wir hier nur erwähnen, ohne den Versuch zu machen, über sie näher zu berichten. Lp.

T. H. Havelock. The pressure of radiation on a clear glass vane. Nature **72**, 269.

In Nature **72**, 198 beschreibt Hull Versuche, durch welche er den Nachweis geführt zu haben meint, daß der Druck auf eine durchsichtige Scheibe gleich der Differenz in der Dichtigkeit der Energie vor und hinter der Scheibe ist. Dabei wird Bezug genommen auf einen Zwiespalt der Ansichten bezüglich der Drucktheorie in einem absorbierenden Medium. Die Note bezweckt eine theoretische Aufklärung dieses Umstandes. Lp.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Kapitel 1.

Geodäsie.

O. Zanotti-Bianco. I concetti moderni sulla figura matematica della Terra. Appunti per la storia della Geodesia. Nota 2ª. Saigey e le variazioni della gravità. Torino Atti **40**, 18-42.

In dieser historisch-kritischen Abhandlung wird hauptsächlich die Reduktion der beobachteten Schwerkraft auf das Meeresniveau, sowie die Ableitung der Abplattung des Erdsphäroids aus Schwerkraftsmessungen dargestellt (vgl. F. d. M. **35**, 949, 1904). K.

A. Börsch. Die Grundlagen der Bestimmung der Erdgestalt. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb. 459-475.

An der Hand der historischen Entwicklung gibt der Verf. sowohl nach der theoretischen, als auch nach der praktischen Seite hin einen Überblick über den heutigen Stand der Erkenntnis der Erdgestalt. Als mathematische Erdgestalt, Geoid, wird eine der Niveauflächen: W_0 = constans, definiert, die aus der Kräftefunktion W der Erde entspringt und mit dem mittleren Meeresniveau zusammenfällt. Unter gewissen Annahmen erhält man aus der Entwicklung von W bei Beschränkung auf Glieder zweiten Ranges (Bruhns), oder vierten Ranges (Helmert), Rotationsflächen — Niveausphäroide, Normalsphäroide —, die von einem Rotationsellipsoid so wenig abweichen, daß dieses in den meisten Fällen als erste Bezugsfläche (Referenzellipsoid) gelten kann. Als Abplattung für das Normalsphäroid wird von Helmert aus den Schweremessungen als neuester Wert 1 : 298,3 abgeleitet. Die Erhebungen und Senkungen der Geoidfläche gegen das Normalsphäroid infolge der kontinentalen Erhebungen wurden früher bedeutend überschätzt, nach den neuesten Ermittelungen dürften sie ± 100 m nicht überschreiten, ein Resultat, das

durch die neueren Gradmessungen, im wesentlichen aber durch die Schweremessungen erhalten worden ist. Die englischen Messungen in Vorderindien hatten schon 1855 Pratt zu der Annahme geführt, daß die Anhäufungen der Kontinentalmassen durch unterirdische Dichtigkeitsverminderungen (Massendefekte) kompensiert werden (Isostasie), diese Hypothese ist wesentlich auch durch die Schweremessungen zur See (O. Hecker) gestützt worden. K.

A. BÖRSCH. Bericht über Lotabweichungen (1903). Abh. d. 14. allg. Konfer. der internat. Erdmessung, 1905. Leiden: J. Brill. 30 S.

Der Bericht schließt sich an den gleichnamigen, der Stuttgarter Konferenz 1898 erstatteten, an und enthält die seitdem bekannt gewordenen Ergebnisse derjenigen astronomisch-geodätischen Arbeiten, die zur Bestimmung der Erdgestalt durch Lotabweichungen benutzt werden können. In Betracht kommen: Deutschland. Österreich und Ungarn, Schweiz, Italien, Frankreich, Dänemark, Schweden, Rußland, sowie die außereuropäischen Länder: Indien, Südafrika, Australien, Java und die Vereinigten Staaten von Nordamerika. K.

L. KRÜGER. Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen. Veröff. des Preuß. Geodät. Instituts. Neue Folge 18, 24 S.

Gauß hat bei der hannoverschen Gradmessung ein in dem Suppl. theor. comb. observ. entwickeltes Annäherungsverfahren durch unvollständige Ausgleichung angewandt, bei der er die Seitengleichungen in bestimmter Weise umformte. Für diese Umformung findet sich keine Entwicklung bei Gauß. Deshalb hat der Verf. eine Ableitung der Umformung gegeben, eine Verallgemeinerung dafür entwickelt und eine Untersuchung über die Anwendbarkeit angestellt, wobei er zu dem Resultat kommt, „daß das gegebene Ausgleichungsverfahren in zwei Gruppen gegen die gewöhnliche Ausgleichung in einem Gusse nur dann von Vorteil sein kann, wenn sich aus den zur ersten Gruppe gehörigen Normalgleichungen die Korrelaten in einfacherer Weise darstellen lassen, als durch den Gaußschen Algorithmus." Außerdem hat Verf. ein Näherungsverfahren für die getrennte Ausgleichung nach Winkel- und Seitengleichungen angegeben, das bereits in der ersten Anwendung gute Werte liefert. Alle Ableitungen sind auf Zahlenbeispiele angewandt worden. K.

E. HEGEMANN. Günstige Lage des durch Rückwärtseinschnitt bestimmten Punktes. Zs. für Vermessungsw. 34, 425-430.

Die Lage des Neupunktes wird eine günstige, wenn die Tangenten an die Bestimmungskreise im Neupunkt sich annähernd unter einem

rechten Winkel schneiden. Wird der Neupunkt gegen mehr als drei Punkte rückwärts eingeschnitten, so wird die Bestimmung gut, wenn die anvisierten Punkte möglichst gleichmäßig verteilt auf der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Mittelpunkt der Neupunkt und dessen Radius möglichst klein ist. K.

S. FINSTERWALDER. Der „gefährliche Ort“ beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel. Münch. Ber. **35**, 3-11.

Dem „gefährlichen Kreis“ in der Ebene entspricht auf der Kugel der „gefährliche Ort“; er unterscheidet sich jedoch von dem ersteren dadurch, daß nicht die Aufgabe unbestimmt wird, sondern daß durch Abweichungen der gegebenen Winkel von der zweiten Ordnung Verschiebungen des rückwärts eingeschnittenen Punktes von der ersten Ordnung bedingt werden. Der Fall tritt ein, wenn von den vier Lösungen der Gleichung für den eingeschnittenen Punkt zwei zusammenfallen. Durch kinematische Betrachtungen kommt Verf. zu dem Resultat: „Der gefährliche Ort beim Rückwärtseinschneiden nach einem sphärischen Dreieck und seinem Polardreieck ist eine durch die Ecken beider Dreiecke gehende Kurve, die von einem Kegel dritter Ordnung mit der Spitze im Kugelmittelpunkt ausgeschnitten wird. Fällt man von einem Punkte dieser Kurve Lote auf die Seiten des Dreiecks oder seines Polardreiecks, so liegen die Fußpunkte auf je einem Großkreise und die Ebenen der letzteren umhüllen einen Kegel dritter Klasse, der die Seiten beider Dreiecke sowie ihre gemeinsamen Höhen berührt und polarreziprok zum Kegel dritter Ordnung liegt.“ Es wird noch eine eigentümliche Beziehung der untersuchten Kurve zur Steinerschen ebenen Kurve dritter Klasse erörtert. K.

S. FINSTERWALDER. Flüchtige Aufnahmen mittels Photogrammetrie. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb., 476-485.

Die Arbeit behandelt die Aufgabe der Konstruktion eines Lageplanes aus Bildern mit innerer (gegenseitige Lage von Linse und lichtempfindlicher Platte ist bekannt) und äußerer (Lage des Apparates in bezug auf Lotlinie und Himmelsgegenden ist bekannt) Orientierung. Dies geschieht mit Benutzung der „gnomonischen“ Projektion, wobei im wesentlichen graphisch vorgegangen wird. Als ein Beispiel der Methode wird eine Aufnahme des Talschlusses des Val di Genova gegeben. Für die Anwendung der Methode ist ein größerer Höhenunterschied in den Standpunkten und Objektpunkten erforderlich, weil bei geringen Höhenunterschieden die gnomonische Projektion ins Unendliche wächst. K.

K. Fuchs. Photogrammetrie ohne Theodolit. Zs. f. Vermessungsw. **34**, 449-457.

Aus zwei photographischen Terrainaufnahmen läßt sich ein Situationsplan (mit unbekanntem Maßstab) herstellen, wenn 1) auf den Platten Horizont und optischer Mittelpunkt erkenntlich sind, 2) die optische Achse bei der Aufnahme horizontal war, und 3) auf den Platten identische Punkte mit großen Höhenunterschieden vorhanden sind. Für die Konstruktion werden trigonometrische Formeln nach zwei verschiedenen Methoden abgeleitet, jedoch ohne Anwendung auf ein praktisches Beispiel.
K.

N. Jadanza. Nuovo metodo per determinare il rapporto diastimometrico in un cannocchiale distanziometro. Torino Atti **40**, 691-697.

Ableitung der Reduktionskonstanten für ein Distanzfernrohr. K.

Weitere Literatur.

J. Collet. Compensation des figures géodésiques. Théorie et applications. Ann. Univ. Grenoble **17**, 413-456.

M. Doll und P. Nestle. Lehrbuch der praktischen Geometrie, bearbeitet für den Unterricht an den Hoch- und Tiefbauabteilungen der Baugewerkschulen und technischen Mittelschulen, sowie für den Gebrauch in der Praxis. Zweite erweiterte und umgearbeitete Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. VII u. 164 S.

G. Erede. Manuale di geometria pratica. 4ta edizione, riveduta e aumentata. Milano: Hoepli. XVI u. 257 S. 16mo.

F. Hartner. Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie. Fortgesetzt von J. Wartler. Neunte Auflage, umgearbeitet von E. Dolezal. Band II. Wien. VII u. 544 S.

P. Pizzetti. Trattato di geodesia teoretica. Bologna: Zanichelli. IX u. 467 S. [Nature **72**, 242-243.]

Kapitel 2.

Astronomie.

Annuaire pour l'an 1905, publié par le Bureau des Longitudes. Avec une Notice scientifique. Paris: Gauthier-Villars. IV u. 669 u. 74 u. 44 S. 16mo.

Außer dem feststehenden Inhalt des klassischen Kalenders wird dem Leser diesmal nur die Fortsetzung der im Vorjahre begonnenen Abhandlung

geboten: P. Hatt, Explication élémentaire des marées. Deuxième partie. Phénomène local, eine Arbeit, die eine größere Verbreitung verdient.

Lp.

Astronomischer Kalender für 1905. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Der ganzen Reihe 67. Jahrgang; der neuen Folge 24. Jahrgang. Wien: Karl Gerolds Sohn. 138 S. gr. 8°.

Die wissenschaftlichen Beigaben des Musterkalenders sind diesmal:

A. Prey. Die Figur der Planeten auf Grund der Theorien über das Gleichgewicht rotierender Flüssigkeitsmassen (S. 114-125).

J. Holetschek. Die Sonnenfinsternis am 30. August 1905 (S. 126-130).

E. Weiß. Neue Planeten und Kometen (S. 131-138). Lp.

F. Cohn. Reduktion der astronomischen Beobachtungen. (Sphärische Astronomie im engeren Sinne.) Enzyklop. d. math. Wissensch. VI 2. 17-79.

Die theoretische Astronomie bedarf gewisser Beobachtungsdaten, welche ihr die praktische Astronomie liefern muß. Die praktische Astronomie zerfällt in zwei Teile, von denen die beobachtende das Rohmaterial liefert. Dieses Rohmaterial bedarf einer vorbereitenden Verarbeitung: Elimination der Refraktion, Aberration, Präzession usw. Diese vorbereitende Arbeit fällt dem zweiten Teile zu, der sphärischen Astronomie. Damit ist das Gebiet begrenzt, das in dem vorliegenden Referate (VI 2, 2) behandelt wird.

Inhaltsübersicht. 1. Aufgabe der sphärischen Astronomie. 2. Definition der üblichen Koordinatensysteme und der Zeit; erste Formulierung. 3. Prinzip der Messung der äquatorealen Koordinaten und der Zeit; Prinzip der Meridianbeobachtungen. 4. Die gegenwärtige Praxis der Meridianbeobachtungen. 5. Kritische Untersuchung der Voraussetzungen. a) Änderungen der Visierrichtung (Parallaxe, Refraktion, Aberration). b) Änderungen des Koordinatensystems (Präzession, Nutation, Bewegung des Erdpols). c) Rotationsgeschwindigkeit. Konstanz des Zeitmaßes. 6. Scharfe Definition der Koordinaten und der Zeit. 7. Reduktion der scheinbaren Örter in mittlere. a) Parallaxe und Aberration. b) Präzession und Nutation. c) Zusammenhang sämtlicher Reduktionen. 8. Die weitere Verarbeitung der Meridianbeobachtungen, Sternkataloge, Jahrbücher. 9. Die Bestimmung der Entfernungen der Gestirne. a) Des Mondes. b) Der Sonne und der Planeten. c) Der Fixsterne. Lp.

C. W. Wirtz. Geographische Ortsbestimmung, nautische Astronomie. Enzykl. d. math. Wissensch. VI 2, 80-162.

„Die geographische Ortsbestimmung stellt sich vor allen Dingen in den Dienst der Erdkunde und Geodäsie; für die Astronomie im engeren Sinne ist die Disziplin nur von untergeordneter Bedeutung. Da sie sich aber ausschließlich astronomischer Daten zur Lösung der ihr erwachsenden Aufgaben bedient, hat man sie von alters her im Anschluß an die Astronomie behandelt, und zwar an dasjenige Kapitel der Himmelskunde, dem die geographische Ortsbestimmung einzig ihre Elemente und Hülfsmittel entlehnt, der sphärischen Astronomie. Das Hauptziel des vorliegenden Abrisses soll nun darin bestehen, die Grundlehren der Ortsbestimmung kurz darzustellen und unter den zahlreichen Methoden nicht nur jene herauszugreifen, die unmittelbar aus den Grundanschauungen hervorgehend als klassische oder fundamentale bezeichnet werden, sondern auch von den andern die, welche für irgend einen Zweig des Wissens und der Technik unter Umständen von Bedeutung sein mögen."

Inhaltsübersicht. Literatur. I. Allgemeine Lehrbücher. II. Monographien. III. Nautische Astronomie. — Einleitung. 1. Begrenzung des Themas. 2. Definition von Polhöhe, Zeit und Länge. 3. Einfluß der Erdfigur bei Ortsbestimmungen.

I. Zeitbestimmung. A. Durch Höhen. 4. Eine einzelne Höhe. 5. Korrespondierende Höhen. 6. Gleiche Höhen verschiedener Gestirne. 7. Eine Höhendifferenz. B. Durch Azimute. 8. Im Meridian. 9. Im Vertikal des Polarsterns. 10. Im beliebigen Azimut; Olberssches Verfahren. 11. Mehrere Azimute. 12. Näherungsmethoden. 13. Azimut-, Höhen- und Zeitdifferenz.

II. Polhöhenbestimmung. 14. Meridianhöhe. 15. Circummeridianhöhe. 16. Polarishöhe. 17. Zweihöhenprobleme, Spezialfälle und verwandte Aufgaben. 18. Gaußsche Methode. 19. Drei Höhen. 20. Horrebow-Talcottsche Methode. 21. Durchgänge durch den ersten Vertikal. 22. Digressionen. 23. Absolute Methoden. 24. Instrumente zur Beobachtung gleicher Höhen. 25. Photographische Methoden.

III. Längenbestimmung. A. Durch gleichzeitige Signale. 26. Mondfinsternisse, Verfinsterungen der Jupitersatelliten. 27. Sternschnuppen. 28. Künstliche Signale. B. Durch Zeitübertragungen. 29. Chronometerreisen. 30. Telegraph. C. Auf den Mondort gegründete Methoden. 31. Mondkulminationen. 32. Mondhöhen. 33. Monddistanzen. 34. Sternbedeckungen und Sonnenfinsternisse. 35. Verwandte Okkultationsphänomene.

IV. Azimutbestimmung. 36. Allgemeiner Weg. 37. Spezielle Methoden.

V. Nautische Astronomie. 38. Die Kimm und ihr Verhalten. 39. Instrumente zur Bestimmung und Elimination der Kimmtiefe. 40. Begriff der Standlinie und ihre Festlegung. 41. Zweihöhenproblem nach der Standlinienmethode. 42. Drei oder mehr Standlinien. 43. Standlinie für eine Höhendifferenz. 44. Berechnung der Höhe, Höhentafeln. 45. Gebrauch der Merkatorfunktion. 46. Azimuttafeln. 47. Ortsbestimmung mit Hülfe der erdmagnetischen Elemente. 48. Aeronautische Astronomie.

VI. Anhang. 49. Die sphärischen Grundformeln der geographischen Ortsbestimmung. 50. Weitere Literatur. Lp.

C. Ed. Caspari. Theorie der Uhren. Enzykl. d. math. Wissensch. VI 2, 163-193.

Dieser Artikel (VI 2, 4) steht an der Grenze der zu berücksichtigenden Schriften; als theoretisch und als zugehörig zur Enzyklopädie muß er aber erwähnt werden. Der Inhalt behandelt in zwölf Nummern: 1. Allgemeines. 2. Freies Pendel. 3. Kompensationspendel. 4. Isochronismus der Chronometerspirale. 5. Kompensationsunruhe. 6. Die Hemmung. 7. Störungen des Pendels. 8. Störungen der Chronometer. 9. Räder- und Triebwerk. 10. Zeitübertragung. 11. Gangformeln. 12. Geschwindigkeitsregulatoren. — Der Verf., gegenwärtig wohl die erste Autorität auf diesem Gebiete, hat es verstanden, in dem verhältnismäßig kurzen Aufsatze eine Menge von Belehrung zu geben. Lp.

C. L. Charlier. Die Mechanik des Himmels. Vorlesungen. Zweiter Band, erste Abteilung. Leipzig: Veit & Co. 320 S. 8°.

Der erste Band dieses Werkes ist 1902 erschienen. Es soll eine möglichst einheitliche Darstellung des jetzigen Standpunktes der Untersuchungen über die Mechanik des Himmels geben, soweit diese sich mit der Bewegung der Himmelskörper beschäftigt. Der erste Band umfaßt sieben Abschnitte, in denen der Reihe nach behandelt sind: Hülfssätze aus der Mathematik und der Mechanik, die Differentialgleichungen der Mechanik und die bedingt periodischen Bewegungen auf Grundlage der Untersuchungen von Staude, die Bewegung eines von zwei festen Zentren nach dem Newtonschen Gesetze angezogenen Punktes, das Problem der zwei Körper nebst einer einfachen Theorie der Kometenschweife, das Problem der drei Körper, die Störungstheorie, die Theorie der säkularen Störungen. Vier Hülfstafeln schließen den Band.

Der dem Berichtsjahre angehörende Teil des Werkes enthält die Abschnitte VIII und IX sowie einen Teil des Abschnittes X. Der Abschnitt VIII über mechanische Quadratur behandelt in fünf Paragraphen die Eulersche Summenformel, Anwendungen der Eulerschen Reihe, Relationen zwischen Differentialquotienten und Differenzen, die Formeln für mechanische Quadratur und Zahlenbeispiele. Den periodischen Lösungen sind im Abschnitt IX dreizehn Paragraphen gewidmet: Strenge Lösungen des Dreikörperproblems, Periodische Lösungen in der Nähe der Librationszentren, die Hillsche Grenzkurve, Fortsetzung der periodischen Lösungen in der Nähe der Librationszentren, periodische Lösungen in der Umgebung der Massen, das Cauchysche Existenztheorem nebst Erweiterung von Poincaré, Methode von Poincaré zur Aufsuchung periodischer Lösungen, Form der Entwicklung der Störungsfunktion, periodische Lösungen

der ersten, zweiten und dritten Gattung, andere Gattungen periodischer Lösungen. Mit der Konvergenz der Reihen in der Mechanik des Himmels beschäftigt sich der Abschnitt X, von welchem fünf Paragraphen gegeben werden: Konvergenz der Reihen im Zweikörperproblem, die Hillsche Grenzkurve, Konvergenz der Entwicklungen nach Potenzen der störenden Massen, Konvergenz der Reihen in der Störungstheorie. Ausführliche Anzeigen der beiden bis 1905 erschienenen Teile des Werkes von R. Lehmann-Filhés befinden sich in der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft **38**, 2-28, 1902 und **41**, 47-67, 1906. Die erste Besprechung betont am Schlusse die „Bedeutung des Werkes, das für jeden, der sich überhaupt für die Mechanik des Himmels interessiert, ein willkommenes Hülfsmittel bilden wird". Lp.

H. Poincaré. Leçons de Mécanique céleste professées à la Sorbonne. Tome I. Théorie générale des perturbations planétaires. Paris: Gauthier-Villars. VI u. 367 S. 8°.

Gegenüber den Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste (1892, 1894, 1899) sollen diese Vorlesungen zur Einführung in die Himmelsmechanik dienen und sind daher auf den unmittelbar brauchbaren Stoff beschränkt. Die 13 Kapitel des Werkes behandeln: Die Prinzipien der Mechanik, das Dreikörperproblem, die elliptische Bewegung, die Prinzipien der Methode von Lagrange, ihre Anwendung, Transformationen verschiedener Entwicklungen, das eingeschränkte Problem, die elementare Theorie der säkularen Störungen, ihre vollständige Theorie, allgemeiner Fall des Dreikörperproblems, Poissons Theorem, Symmetrie der Entwicklungen, periodische Lösungen, Prinzip der Methode von Delaunay. Lp.

W. Foerster. Astrometrie oder die Lehre von der Ortsbestimmung im Himmelsraum. Zugleich als Grundlage aller Zeit- und Raummessung. Erstes Heft: Die Sphärik und die Koordinatensysteme, sowie die Bezeichnungen und die sphärischen Koordinatenmessungen. Berlin: G. Reimer. 158 S. 8°.

Der Verf. hebt öfter die Absicht hervor, nur die wesentlichen methodischen und didaktischen Grundzüge der Astrometrie zu behandeln. Die Fortsetzung soll in einer freien Folge von ähnlichen Heften gegeben werden. Das vorliegende erste Heft zerfällt in drei Abschnitte. Der erste erörtert die Sphärik überhaupt, der zweite die Koordinatensysteme der Astronomie und der dritte die sphärischen Koordinatenmessungen.

Die in dem Heft verstreuten sphärischen Figuren sollen nur Skizzen sein. Von den Instrumenten aber fehlen selbst Skizzen. Auch vieles andere ist nur sehr flüchtig hingeworfen. Eine Gleichung z. B. wie die folgende auf Seite 41:

$$\operatorname{tang}\frac{x}{R}=\frac{x}{R}+\frac{1}{1\cdot 3}\cdot\left(\frac{x}{R}\right)^3+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot\left(\frac{x}{R}\right)^5+\cdots,$$

in der rechts das dritte Glied falsch ist und nach seiner Schreibweise ganz den Eindruck erweckt, als ob die Entwicklung nach dem angedeuteten einfachen Gesetz in inf. fortschritte, sollte richtig dastehen. Leider bezeugt auch die folgende Seite, daß kein Druckfehler vorliegt.

Dz.

A. Marcuse. Handbuch der geographischen Ortsbestimmung für Geographen und Forschungsreisende. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. X u. 341 S. 2 Tafeln.

Das Buch zerfällt in vier Teile. Der erste enthält die Grundbegriffe der astronomischen Geographie, welche recht vollständig und sehr klar entwickelt werden. Der zweite erläutert in gleicher Weise die rechnerischen und der dritte die instrumentellen Hülfsmittel zur geographischen Ortsbestimmung. Der vierte behandelt eingehend die Methoden zur geographischen Ortsbestimmung. Ein Anhang bringt Tafeln, angenäherte Ortsbestimmungen ohne Winkelmessungen und Ortsbestimmungen im Luftballon.

Vorzügliche Figuren, Abbildungen und Skizzen erleichtern das Studium des Werkes, in welchem der Leser auch zahlreiche praktische Winke und Unterweisungen findet. Dz.

M. Schneidewin. Einige Grundeinsichten der Himmelskunde in allgemein verständlicher Darstellung. Progr. (Nr. 358) Städt. Gymn., Realprogymn. u. Realsch. Hameln 1905, 35 S.

In zwölf Abschnitten werden so einfach wie möglich einige Hauptfragen der Himmelskunde behandelt. Dz.

A. Pansiot. Sur le jour sidéral. C. R. **141**, 342-344.

Es wird diejenige Komponente berechnet, welche man wegen der Exzentrizität der Erdbahn in ihre tägliche Drehung einführen müßte, wenn es darauf ankäme, die jährlich wiederkehrenden kleinen Schwankungen in der Dauer des Sterntages durch Unregelmäßigkeiten der täglichen Drehung zu erklären, wie es Kopernikus in seinem Weltsysteme getan hatte unter Bezugnahme auf die Tatsache, daß der Mond uns immer dieselbe Seite zukehrt. Die genannte Komponente ist klein, und die Schwankungen des Sterntages betragen etwa $0{,}04^s$ nach beiden Seiten.

Dz.

O. Beau. Das christliche Osterfest. Geschichtliches und Berechnung. Progr. (Nr. 95) Gymn. Sorau. 24 S.

Es werden die Regeln für die Berechnung des Ostersonntags abgeleitet und geschichtliche Bemerkungen hinzugefügt. Eine Schlußtafel gibt alle Ostersonntage vom Jahre 323 bis 2526. Dz.

H. Kimura. Variation of latitude. Tokio Math.-Ges. **2**, 357-364.

Bericht über die bisherigen Ergebnisse und Theorien. Dz.

R. Spitaler. Periodische Verschiebungen des Schwerpunktes der Erde. Wien. Ber. **114**, 695-710.

Die jahreszeitlichen Massenverschiebungen von Luft und Wasser verschieben den Schwerpunkt der Erde nach den vom Verf. angestellten Berechnungen nur um wenige Millimeter, was bei weitem nicht ausreicht, um die kleine jährliche Welle in den Breitenschwankungen, welche Kimura herausgefunden und Albrecht bestätigt hatte, zu erklären. Dz.

P. Pizzetti. Intorno al calcolo della rifrazione astronomica, senza speciali ipotesi sul modo di variare della temperatura dell' aria coll' altezza. Nuovo Cimento (5) **10**, 407-418.

Es wird untersucht, mit welchem Grade der Annäherung man die astronomische Refraktion berechnen kann, wenn man auf besondere Hypothesen bezüglich der Art der Temperaturänderung der Luft mit der Höhe Verzicht leistet. In den drei Teilen der Untersuchung werden drei Voraussetzungen über unsere Unkenntnis dieser Änderung besonders behandelt, und es wird jedesmal die Größe der Abweichung von dem gewöhnlichen Zustande berechnet. Lp.

Loewy. Nouvelle méthode pour la détermination directe de la réfraction à toutes les hauteurs. C. R. **141**, 157-168.

Loewy. Étude de la réfraction à toutes les hauteurs. Formules relatives à la détermination des coordonnées des astres. C. R. **141**, 289-295.

Verf. hat 1886 zwei Methoden zur direkten Bestimmung der Refraktion angegeben, welche auf der Bestimmung des Abstandes zweier Gestirne beruhen mittels eines Apparates, der zwei gegeneinander unter einem Winkel α geneigte Spiegel enthält. Dieser optische Apparat erlaube den genannten Abstand, wie groß er auch sei, mit derselben Präzision zu messen, welche den mikrometrischen Messungen kleiner Abstände zukommt. Die Methoden seien frei von jedem Fehler des Instrumentes, von der Präzession, der Nutation usw. Verf. zeigt, wie man mit einem Winkel α, etwa $\alpha = 45^{\circ}$, auskommen kann, um die Refraktion in allen Höhen zu messen. Der Abstand der beiden Gestirne wird sehr verschieden von ihren beiden Refraktionen beeinflußt, je nach ihren Höhen

und ihren Azimutunterschieden, die sich durch die tägliche Drehung beständig ändern. An den Differentialformeln zeigt der Verf., welche Lagen am günstigsten sind, und wie man die Beobachtungen anzuordnen habe. Hülfstafeln für den praktischen Gebrauch sind beigegeben. Dz.

L. COURVOISIER. Kimuras Phänomen und die „jährliche Refraktion“ der Gestirne. Astron. Nachr. **167**, Nr. 3990-3991, 81-106.

Kimura hat in der Polbewegung ein Glied von jährlicher Periode entdeckt. Verf. prüft an dem vorhandenen Beobachtungsmaterial die Hypothese, daß die von den Fixsternen ausgehenden Strahlen schon im Äther des Sonnensystems eine schwache Refraktion erfahren, die alsdann eine jährliche Periode haben müßte und sich mit der jährlichen Parallaxe vermischen würde. Dz.

P. HARZER. Über die kosmische Strahlenbrechung. Astron. Nachr. **168**, Nr. 4025, 261-270.

Es wird unter Bezugnahme auf den vorstehend besprochenen Aufsatz von L. Courvoisier angenommen, daß die optischen Flächen abgeplattete Ellipsoide seien. Die Ablenkungsbeträge ergeben sich durch mechanische Quadratur; sie zerfallen in zwei Teile, einen „optischen“ und einen „parallaktischen“, den zuerst Hansen auch in der atmosphärischen Strahlenbrechung erkannt haben soll. Dz.

F. MORANO. Tavole matematiche pei calcoli di riduzione delle fotografie stellari per la zona vaticana (55°—64°). Rom. Acc. P. d. N. L. Atti **58**, 35-45.

Fortsetzung der ihm Vorjahre angezeigten Tafel (F. d. M. **35**, 955, 1904). Lp.

M. MÖLLER. Orientierung nach dem Schatten. Studien über eine Touristenregel. Wien: A. Hölder. 156 S., 30 Fig. gr. 8°.

Auf das Zifferblatt einer horizontal liegenden Taschenuhr fällt der Schatten eines vertikalen Stabes längs des Stundenzeigers. Dann weist die Halbierungslinie des Winkels zwischen Zeigerspitze und Zwölf nach Süden. Diese einfache und bekannte Regel wird einer bis ins einzelne gehenden Diskussion in bezug auf ihre Genauigkeit unterworfen. Sk.

A. Claude et L. Driencourt. **L'instrument des hauteurs égales en Astronomie de position ou astrolabe à prisme.** Rev. générale des sc. **16**, 972-983, 1071-1083.

Die Verf. zeigen die Überlegenheit der Methode der gleichen Höhen, sowohl unter dem theoretischen, als auch unter dem praktischen Gesichtspunkte. Sie liefert Lagen und nicht Koordinaten. Die beobachtete Größe ist immer und allein die Zeit; dies macht die Beobachtungen vergleichbar. Bis zu den Anfängen der Methode zurückgehend, stellen die Verf. eine Untersuchung an, warum diese Methode bisher vernachlässigt worden ist. Fe. (Lp.)

A. N. Panoff. L'attraction newtonienne considérée comme une fonction du temps. Astron. Nachr. **167**, Nr. 4001, 273-287.

Das Problem ist im wesentlichen dasselbe, das man sonst als zeitliche Fortpflanzung der Schwerkraft bezeichnet. Verf. führt in jedem Augenblick T außer den wirklichen auch noch fiktive Massenpunkte und Massenkörper ein, deren Lage im Raum dem zurückliegenden Augenblick T_0 (bei einem Körper ist T_0 wegen der verschiedenen Abstände für die verschiedenen Punkte verschieden) entspricht, in welchem die eben auf den angezogenen Körper wirkende Schwere erregt worden war. Auf diese fiktive Masse werden auch die nach Newtons Gesetz von der Actio und Reactio geltenden Gegenkräfte bezogen.

Es werden die Eigenschaften des fiktiven Körpers, sein Schwerpunkt, sein Potential usw. untersucht, wobei sich herausstellt, daß die Laplacesche partielle Differentialgleichung und überhaupt alle sonstigen Theoreme der Mechanik in dem vom Verf. definierten Sinne erhalten bleiben. Wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit endlich ist, so muß sie auch eine täglich wiederkehrende Ablenkung der Lotlinie zur Folge haben, die möglicherweise durch das Horizontalpendel bestimmt werden könnte. Zum Schluß kommt der Verf. auf die Beweise, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit viel größer als die Lichtgeschwindigkeit sein müsse (vgl. S. 843 dieses Bandes). Dz.

J. Sterba. Elementare Bahnbestimmung eines Planeten. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **36**, 321-329.

Folgende Annahmen liegen den gegebenen Entwicklungen zugrunde. 1. Die Bahnen der Planeten sind Kreise. 2. Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne. — Die unter diesen Voraussetzungen entwickelten Formeln, bei deren Herleitung nur die Kenntnis der elementaren Mathematik mit Einschluß der sphärischen Trigonometrie gefordert ist, werden zum Schlusse an der Bahnbestimmung des Planeten 59 Elpis erläutert. Trotz der verhältnismäßig großen Exzentrität 0,117 der Bahn

sind die durch die Annahme einer Kreisbahn bedingten Fehler nicht bedeutend. Die gefundenen Werte können also in Anbetracht der einfachen Rechnungsweise für elementare Zwecke als vollkommen hinreichend betrachtet werden. Lp.

J. WEEDER. Nauwkeurige benaderingsformules voor de verhoudingen der driehoeken in de berekening van eene elliptische baan uit 3 waarnemingen. I, II. Amst. Ak. Versl. **13**, 811-819; **14**, 160-166.

Annäherungformeln zur Berechnung der Verhältnisse der Dreiecksflächen aus drei Abständen und den drei zugehörigen Zeiten. In II treten a und p hinzu. Dz.

P. HARZER. Über die Bestimmung des Apex. Astron. Nachr. **167**, Nr. 3998, 225-238.

Die Ausgleichung kann so vorgenommen werden, daß eine quadratische Form:

$$V = \sum \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

ein Minimum werden soll unter der Bedingung $\sum x_\alpha^2 = 1$. Sie führt daher auf die Transformation von V in drei Quadrate und auf die Lösung einer Gleichung dritten Grades. Die Koeffizienten $a_{\alpha,\beta}$ enthalten implizite die Beobachtungsfehler, und es wird die Abhängigkeit der x von ihnen ermittelt. Dz.

E. W. BROWN. On a general method for treating transmitted motions and its applications to indirect perturbations. American M. S. Trans. **6**, 332-343.

Es werden die Differentialgleichungen in der kanonischen Form:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad \left[\Phi = \Phi(x_i, y_i, t)\right]$$

vorausgesetzt und mit ihnen die üblichen Transformationen vorgenommen, welche wieder auf die kanonische Form führen. Die Lösung hängt von der partiellen Differentialgleichung:

$$\varphi\left(x_i, \frac{\partial S}{\partial t}, t + \frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0$$

ab, welche auch dann zum Ziele führt, wenn rechts statt 0 eine Größe B steht, welche nur die neuen Veränderlichen p_i, aber nicht q_i enthält. Die Lösung ist dann:

$$p_i = c_i, \; a_i = w_i = b_i + E_i, \; b_i = -\frac{\partial B}{\partial c_i}.$$

Soweit sind die Entwicklungen des Verf. bekannt. Nunmehr setzt der Verf. voraus, daß auch in Φ selbst m Konstanten α_k enthalten seien, und bringt diese bei der Inangriffnahme des Störungsproblems außer den zu variierenden Konstanten c_i und E_i mit hinein. Es ergeben sich dann unter der Annahme, daß die Störungsfunktion R selbst mit der Variation der α zusammenhängt, Transformationen, welche zu einem Theorem führen bezüglich langperiodischer Glieder. Spezielle Anwendungen auf die planetarischen Störungen der Mondbahn werden vorbehalten. Dz.

A. Wilkens. Zur Erweiterung eines Problems der Säkularstörungen. Berl. Ber. 1905, 1062-1076.

Die genannte Erweiterung besteht darin, daß zu dem säkularen Teil der Störungsfunktion zwischen zwei Planeten noch periodische Glieder, die von demselben Argument, nämlich entweder $i\lambda - (i+1)\lambda_1$ oder $i\lambda - (i+a)\lambda_1$ und seinen Vielfachen abhängen, hinzugenommen werden. Bei Beschränkung auf einschließlich zweite Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen erhält man ein System von linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, die aber durch eine lineare Substitution konstant werden. Die Integration ist also durchführbar und führt, wie bei der Beschränkung auf den säkularen Teil, auf trigonometrische Funktionen, selbst wenn die vorhin genannten Glieder langperiodisch sind. Nur bei allzugroßer Annäherung an Kommensurabilität treten Hyperbelfunktionen auf.

Zum Schluß wird eine Anwendung auf das Asteroidenproblem gemacht, also die Masse des gestörten Körpers $= 0$ gesetzt. Die Lösung wird dann erheblich einfacher. Beschreibt der störende Körper überdies eine Kreisbahn, und setzt man auch die Eigenexzentrizität des gestörten Körpers abgesehen von den Störungen $= 0$, so erhält man im Falle $i\lambda - (i+1)\lambda_1$ bei angenäherter Kommensurabilität die Poincaréschen „solutions périodiques de la première sorte“, die von Schwarzschild im Falle des Hekubatypus (Astr. Nachr. No. 3839) eingehend studiert worden sind. Übrigens sei bereits Tisserand 1883 im Besitz dieser Lösungen gewesen. Dz.

A. Wilkens. Untersuchungen über eine neue Klasse periodischer Lösungen des Problems der drei Körper. Wien. Ber. **114**, 1071-1113.

Verf. nennt diese neue Klasse asymmetrisch im Gegensatz zu den symmetrischen Lösungen, bei denen die Apsidenlinien zusammenfallen. Es werden nur ebene Bahnen und völlige Kommensurabilität der mittleren Bewegungen vorausgesetzt. Nach Einführung der Delaunayschen Bahnelemente wird die Störungsfunktion nach Potenzen einer kleinen, von den störenden Massen abhängenden Größe μ entwickelt, und nun werden für die Koordinaten auch solche Potenzreihen angesetzt, deren Koeffizienten

rein periodische Funktionen der Zeit werden sollen. So erhält man zu allererst für die Glieder nullten Grades drei Bedingungsgleichungen, welche die Bahnelemente betreffen, wobei noch zwei Parameter übrig bleiben. Sie werden für den schon von Schwarzschild behandelten Hekubatypus aufgelöst und ergeben dann die Glieder des ersten, dann des zweiten usw. Grades durch ein Rekursionsverfahren. Darauf werden die Nachbarlösungen und die Stabilität der periodischen Bahnen im Sinne Poincarés betrachtet, wobei es darauf ankommt, ob, abgesehen von den immer auftretenden verschwindenden Exponenten, die übrigen rein imaginär oder reell sind. Die Bedingung hierfür erscheint im vorliegenden Falle in sehr einfacher Form. Sie wird zum Schluß für den Hekubatypus geprüft und für richtig befunden, so daß die entsprechenden periodischen Bahnen stabil sind. Dz.

A. Wilkens. Über die Störungen der Planetoiden und Kometen durch die Anziehung des Planetoidenringes. Astron. Nachr. **169**, Nr. 4036, 49-62.

Verf. nimmt mit P. Harzer an, daß die Gesamtheit der Planetoiden durch einen Kreisring ersetzt werden dürfe. Ein solcher Ring hat in Bezug auf einen beliebigen Punkt nach Poincaré das Potential:

$$V = k^2 M_0 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{m^2 \cos^2\psi + M^2 \sin^2\psi}},$$

wo k die Gaußsche Konstante, M_0 die Masse des Ringes, m und M den kleinsten und größten Abstand des angezogenen Punktes vom Kreisring bedeuten. Nach Einsetzen von V in die Differentialgleichungen für die Bahnelemente ergeben sich durch entsprechende Umformungen, die zum großen Teil auf der Theorie der elliptischen Integrale und der ϑ-Funktionen beruhen, die Störungsausdrücke. Dz.

E. Strömgren. Ein asymptotischer Fall im Dreikörperproblem. Astron. Nachr. **167**, Nr. 4015, 105-108.

Es handelt sich um die asymptotische Annäherung an den Lagrangeschen Fall, daß die drei Körper in den drei Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind und bleiben. Stockwell hatte behauptet, daß sie für zwei in derselben mittleren Entfernung vom Zentralkörper um diesen laufende Planeten oder Monde immer eintreten würde; während hier durch Diskussion der Variationsgleichungen gezeigt wird, daß ganz besondere Umstände hierzu notwendig sind, weil vier der Integrationskonstanten verschwinden müßten. Dz.

E. Strömgren. Analytische Störungsausdrücke für parabolische Bahnen. Astron. Nachr. **169**, Nr. 4033-4034, 1-28.

Wenn die Bahn des gestörten Körpers nahezu parabolisch ist, empfiehlt es sich, die gewöhnlichen Störungstheorien entsprechend umzuändern, besonders, so lange er weit von der Sonne und von störenden Körpern entfernt ist. Von fundamentaler Bedeutung ist, daß dann das System auf den gemeinsamen Schwerpunkt bezogen wird und die oskulierenden elliptischen Bahnelemente verworfen werden.

Verf. beschränkt sich auf den Fall, daß die gestörte Bahn anfänglich rein parabolisch war und der störende Körper einen Kreis beschreibt. Er gibt die Reihenentwicklungen für die wahre Anomalie und berechnet darauf die Störungsausdrücke, welche als Koeffizienten Integrale von der Form:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^n}}\, dx \text{ und } \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^n}}\, dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

enthalten, die sich durch teilweise Integration auf die Werte $n = 1, 2, 3$ zurückführen lassen. Für letztere werden Reihenentwicklungen angesetzt.

Eine spätere Arbeit soll die allgemeinere Theorie, sowie ausführliche Tafeln und numerische Anwendungen bringen. Dz.

H. Poincaré. Sur la méthode horistique de Gyldén. Acta Math. **29**, 235-272.

In einer Einleitung werden die sehr großen wissenschaftlichen Verdienste Gyldéns, welche er sich durch neue und korrekte Methoden erworben hat, anerkannt, aber auch deren Nachteile hervorgehoben, welche in einer Fülle überflüssiger Entwicklungen und in einer Fülle von Veränderlichen sowie in Formeln von unübersichtlichem Bau liegen. Dagegen werden seine „Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes“, in welchen die horistische Methode auseinandergesetzt wird, für völlig verfehlt erklärt, was der Verf. schon an anderen Orten behauptet und nachgewiesen hatte (F. d. M. **35**, 725 u. 960, 1904).

Der Verf. vervollständigt diese Nachweise durch eine in elf Abschnitte gegliederte Analyse des Gyldénschen Werkes, soweit eine solche bei der Dunkelheit (obscurité) desselben möglich ist und schließt mit den Sätzen:

„En résumé de tout ce grand effort, il ne reste rien. Quelques-uns des résultats sont manifestement exacts, mais on aurait pu y arriver par une voie beaucoup plus rapide; un plus grand nombre sont manifestement faux; la plupart sont énoncés d'une façon trop obscure pour qu'on puisse décider s'ils sont vrais ou faux“. Dz.

E. Fagerholm. Definitiv banbestämning för komet 1886 VIII (Barnard). Arkiv för mat., fys. och astr. 2, Nr. 19, 22 S.

Endgültige Bestimmung der Bahn des Kometen 1886 VIII (Barnard). Msn.

A. Svedstrup. Untersuchungen über die Bahn des Kometen 1886 I. Herausgegeben von T. N. Thiele. Kopenhagen: Bianco Lunos Buchdr. 40 S.

Svedstrup hat der Berechnung besondere Sorgfalt gewidmet, weil die Bahn hyperbolisch zu sein schien, zahlreiche Beobachtungen vor und nach dem Perihel vorhanden waren und der Komet der Erde sehr nahe gekommen war. In seinen nachgelassenen Papieren findet sich die Vermutung einer merkbaren Verminderung der Wirkung der Schwerkraft; sie ist der Hauptgrund für die Veröffentlichung gewesen, zumal gerade jetzt die Theorie des Lichtdruckes mit der Größe der abstoßenden Kraft in Zusammenhang gebracht wird. Dz.

H. Rosenberg. Über eine Methode zur Bestimmung von Meteorbahnen. Astron. Nachr. 167, Nr. 3988, 49-54.

Die für die kurze Beobachtungszeit als gerade vorausgesetzte Bahn wird in analytisch-geometrischer Weise bestimmt als Schnitt zweier Ebenen, in denen sich die Bahn von zwei Stationen aus an den Sternenhimmel projiziert. Dz.

G. v. Niessl. Bahnbestimmung des Meteors vom 14. März 1905. Wien. Ber. 114, 1477-1518.

Die Bahn wird, so genau es nach den eingegangenen Berichten möglich ist, bestimmt und mit Bahnen anderer Feuerkugeln verglichen, wobei sich auffallende Übereinstimmungen herausstellen. Dz.

M. Brendel. Theorie des Mondes. Gött. Abh. (2) 3, Nr. 4, 97 S.

Verf. wendet die Gyldénsche Störungstheorie mit entsprechenden Abänderungen, sonst aber in gleicher Weise auf die Mondbahn an, wie in seiner Theorie der kleinen Planeten geschehen ist. Nach einer Einleitung, in welcher die Arbeit wesentlich als numerisches Experiment bezeichnet wird, werden im Kapitel I die Differentialgleichungen der Mondbewegung zunächst in rechtwinkligen Koordinaten abgeleitet und dann die Gyldénschen Transformationen

$$r_1 = \frac{a_1(1-\eta^2)}{1+\varrho}, \quad r_1^2 \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{M a_1 (1-\eta^2)}}{1+S}$$

angewendet (auf die Breitenstörungen wird nicht eingegangen; die auf Seite 12 Nr. 3 skizzierte Transformation auf die oskulierende Bahnebene kommt später nur in einer ganz nebensächlichen Bemerkung in Betracht, und der Verf. hätte von vornherein die Mondbahn mit der Ekliptik zusammenfallen lassen können innerhalb der Grenzen, welche er sich gesteckt hat). Darauf folgt im Kapitel II die Entwicklung der Störungsfunktion nebst numerischer Berechnung der Koeffizienten. In den Kapiteln III und IV wird die periodische Lösung nullten Grades entwickelt, welche im wesentlichen derjenigen von Hill und Brown entspricht, jedoch mit der Abweichung, daß hier die Entwicklung nach Potenzen von m vermieden und durch ein numerisches Verfahren ersetzt wird. Im Kapitel V folgen dann die Glieder ersten Grades.

Verf. hofft, die Glieder höheren Grades in einer folgenden Abhandlung zu bringen. Von Interesse wäre es wohl gewesen, wenn die Vergleichung mit den Formeln von Hill und Brown durchgeführt worden wäre, und zwar sowohl hinsichtlich der Übereinstimmung, als auch der Zeit und Mühe. Denn nur so wird doch die „gewisse Kontrolle", von welcher der Verf. in der Einleitung spricht, überhaupt erst möglich.

Dz.

P. H. Cowell. A lunar theory from observation. Nature 73, 80-81.

„Des Mondes Länge enthält ungefähr 150, seine Breite ungefähr 100 Ungleichheiten über 0″,1. Die Argumente dieser Ungleichheiten und die mittlere Länge des Mondes verlangen eine Kenntnis dreier Winkel, die mit dem Mond zusammenhängen, nämlich des Mondes mittlere Länge, die mittlere Länge des Perigäums und die mittlere Länge des Knotens. Das Problem, das mir vorschwebte, besteht in der Bestimmung dreier Winkel als Funktionen der Zeit und in der Aufstellung einer Liste von etwa 250 Ungleichheiten, die im ganzen so genau wie möglich wäre. Vor der Zeit Newtons war dies der einzig mögliche Weg, wie das Problem der Mondbewegung angefaßt werden konnte ... Mein Gesichtspunkt ist derjenige, welcher vor der Zeit Newtons notwendig der einzige war." Der für die Nature geschriebene Aufsatz setzt die Grundgedanken für die gewählten Methoden auseinander.

Lp.

W. Schur und L. Ambronn. Die Messungen des Sonnendurchmessers an dem Repsoldschen 6-zölligen Heliometer der Sternwarte zu Göttingen. Gött. Abh. (2) 4, Nr. 3, 126 S.

Von 1889 bis 1901 haben Schur und Ambronn unter allen erdenklichen Vorsichtsmaßregeln Messungen des Sonnendurchmessers völlig unabhängig voneinander ausgeführt. Die Schursche Reihe ist durch seinen Tod beendet, die Ambronnsche geht bis 1902 und wird noch weiter fortgesetzt. Die Ergebnise sind:

Schur: 1920″,14 ± 0,040, Ambronn: 1919″,80 ± 0,036.

Die Diskussion über eine etwaige Veränderlichkeit des Durchmessers, etwa der Fleckenperiode entsprechend, und über eine etwaige Abplattung der Sonne hat ein völlig negatives Ergebnis gehabt, da die errechneten Werte ganz innerhalb der durch die Beobachtungsfehler gesteckten Grenzen bleiben. Dz.

E. Przybyllok. Die Juliussche Sonnentheorie in ihrer neueren Entwicklung. Physik. Zs. **6**, 634-638.

Zusammenfassende Bearbeitung der von H. W. Julius entwickelten Ansichten. Lp.

Ch. Nordmann. La structure de la couronne solaire. Rev. générale des sc. **16**, 103-111.

Darlegung des gegenwärtigen Standes des Problems der Sonnenkorona; danach folgen einige neue Betrachtungen, die aus der Himmelsmechanik und der Experimentalphysik sich ergeben. Fe. (Lp.)

J. Y. Buchanan. Eclipse predictions. Nature **72**, 603.

A. M. W. Downing. Eclipse predictions. Nature **72**, 629.

Buchanan macht auf die Abweichungen aufmerksam, welche zwischen den Angaben über Sonnenfinsternisse im Nautical Almanach und in der Connaissance des temps vorhanden sind. Downing klärt diese Verschiedenheiten durch die Angabe auf, daß in der Connaissance des temps der Monddurchmesser 2″,7 größer gerechnet ist als im Nautical Almanach. Lp.

T. J. J. See. Researches on the internal densities, pressures and moments of inertia of the principal bodies of the planetary system. Astron. Nachr. **167**, Nr. 3992, 113-142.

Es wird das Laplacesche Gesetz für die Dichte im Innern eines Weltkörpers

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\sin qx}{qx},$$

wo σ_0 die Dichte im Mittelpunkt, σ im Abstand x vom Mittelpunkt und q eine Konstante bedeutet, zugrunde gelegt, um die Ziffernwerte der inneren Dichten, Drucke und der Trägheitsmomente aus den Messungen abzuleiten. Für den Mittelpunkt der Sonne z. B. ergibt sich ein Druck von rund zweihunderttausend Millionen Atmosphären. Dz.

L. Weineck. Zur Theorie der Sonnenuhren. Wien. Ber. **114**, 831-841.

Es werden die verschiedenen Systeme im Zusammenhang theoretisch abgeleitet. Dz.

Weitere Literatur.

G. Adam. Concepts of the electrical phenomena of planetary systems. A monograph applying a fundamental hypothesis to astronomical facts. San Francisco: Adam. 84 S. 12mo.

G. Baldauf. Keplers Neue Astronomie im Auszuge und in Übersetzung der wichtigsten Abschnitte. I. Neue Astronomie mit Beweisführung oder Physik des Himmels, dargestellt in Abhandlungen über die Bewegung des Sternes Mars. Progr. Freiberg. 39 S. 4°.

H. Bentabol y Ureta. Cuestiones astronómicas y de mecánica celeste. Madrid. 8vo.

A. v. Brunn. Die Säkularbeschleunigung des Mondes. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 102 S. Lex. 8°.

R. Buchanan. The mathematical theory of eclipses, according to Chauvenet's transformation of Bessel's method. Explained and illustrated. Philadelphia and London: J. P. Lippincott Co. X u. 247 S. (1904). [Nature **71**, 244-245.]

A. M. Clerke. The system of the stars. Second edition. London: A. and C. Black. XVI u. 403 S. [Nature **73**, 505-508.]

E. Decante. Détermination de la hauteur d'un astre quand l'horizon n'est pas visible. Paris: Chapelot. 8 S. 8°.

E. Fagerholm. Photographical measurement of the principal stars in the cluster of Coma Berenices and determination of their proper motions. Arkiv för mat., fys. och astr. **2**, Nr. 31, 30 S.

E. Fagerholm. Talcott-observations made at Upsala during the summer of 1905. Arkiv för mat., fys. och astr. **2**, Nr. 30, 18 S.

Joh. Frischauf. Die Gauß-Gibbssche Methode der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Mit einem Anhang zum „Grundriß der theoretischen Astronomie". Leipzig: W. Engelmann. V u. 47 S. gr. 8°.

W. Hassenstein. Neue Bearbeitung von William Herschels Beobachtungen der inneren Saturnsmonde (1789). Diss. Königsberg. 35 S. 4°.

E. Hellebrand. Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1883 I (Brooks). Wien. Denkschr. 1905, 77 S. 4°.

K. Hessen. Die rechnerische Bearbeitung der Messungen von Monddistanzen. Diss. Berlin. 27 S. 4°.

R. Jaegermann. Über die beim Kometen Borrelly 1903 IV beobachtete hyperbolische Bewegung der Schweifmaterie. (Petersburger Denkschriften.) St. Petersburg. 42 S., 4 Fig. 4⁰.

H. Löschner. Über Sonnenuhren. Beiträge zu ihrer Geschichte und Konstruktion nebst Aufstellung einer Fehlertheorie. Graz: Leuschner & Lubensky. 155 S. gr. 8⁰.

H. C. Lord. The elements of geodetic astronomy, for civil engineers. Columbus, O.: Lord. 150 S. 8⁰.

H. Michnik. Aufgaben aus der mathematischen Erd- und Himmelskunde. I. Über die Länge der Tagbogen der Gestirne. II. Bestimmung der Kurve, die der höchste Punkt der Ekliptik über dem Horizonte eines gegebenen Beobachtungsortes beschreibt. Progr. Beuthen O.-S. 14 S. 8⁰.

P. Moschick. Eine neue Methode zur Bahnbestimmung von Meteoren. Die Bahn des am 21. März 1904 in Süddeutschland sichtbaren Meteors. Mitteilung der großherzoglichen Sternwarte zu Heidelberg V. Karlsruhe: G. Braun. 36 S. Lex. 8⁰.

C. H. Müller. Ein neues Weltsystem. Erster Band. Was ist der Sternhimmel? Charlottenburg: F. Harnisch & Co. 54 S. gr. 8⁰ mit 2 Taf.

W. Münch. Zur Bestimmung der absoluten oder kosmischen Bewegung unseres Planetensystems durch vervollständigte Aberrationsmessungen. Diss. Berlin. 67 S. 8⁰.

Newcomb-Engelmanns populäre Astronomie. Dritte Auflage. Herausgegeben von H. C. Vogel. Leipzig: W. Engelmann. X u. 748 S. Lex. 8⁰.

S. Newcomb. Contributions to stellar statistics. I. On the position of the galactic and other planes toward which the stars tend to crowd. Washington. 30 S. 4⁰.

A. Souchon. La construction des cadrans solaires, ses principes, sa pratique, précédée d'une histoire de la gnomonique. Paris: Gauthier-Villars. VIII u. 52 S.

A. Stupar. Lehrbuch der terrestrischen Navigation. Im Auftrage des k. k. Reichskriegsministeriums, Marinesektion, verfaßt. Fiume (Wien: Gerold). XIII u. 242 S. 8⁰.

A. Wegener. Die Alfonsinischen Tafeln für den Gebrauch eines modernen Rechnens. Berlin: E. Ebering. Diss. 63 S. 1 Taf. gr. 8⁰.

A. Wilkens. Untersuchungen über Poincarésche periodische Lösungen des Problems der drei Körper. (Astronomische Abhandlungen, Nr. 8; herausgegeben von H. Kreutz.) Hamburg: W. Mauke Söhne. 29 S. 1 Taf. Lex. 8⁰.

W. F. Wislicenus. Der Kalender in gemeinverständlicher Darstellung. Leipzig: B. G. Teubner. 118 S. kl. 8⁰ (Aus Natur und Geisteswelt, Nr. 69).

G. Witt. Untersuchung über die Bewegung des Planeten (433) Eros. Diss. Berlin. 42 S. 4⁰.

Kapitel 3.

Mathematische Geographie und Meteorologie.

CHR. SCHMEHL. **Die Elemente der sphärischen Astronomie und der mathematischen Geographie. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben.** Gießen: E. Roth. VIII u. 110 S. gr. 8°.

Das vorliegende Buch setzt sich die Aufgabe, die Grundlehren der mathematischen Geographie und Astronomie so zu behandeln, daß alle einschlägigen Aufgaben systematisch erklärt und behandelt werden.

Zu dem Zwecke werden zunächst die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie ohne Beweis zusammengestellt, sodann der Reihe nach die Koordinatensysteme auf der Himmelskugel eingeführt und in zahlreichen, zum Teil gelösten Aufgaben eingeübt. Zum Schluß wird die geographische Länge und Breite erklärt und werden Aufgaben darüber gegeben. Den nichtgelösten Aufgaben sind die Ergebnisse beigefügt. Die Sammlung wird für Schule und Selbstunterricht gute Dienste leisten. Sk.

H. MICHNIK. **Aufgaben aus der mathematischen Erd- und Himmelskunde.** Progr. (Nr. 209) Gymn. Beuthen. 14 S. u. 1 Taf.

Die Projektion des halben Tagbogens eines Gestirns mit der Deklination δ auf die Einheitskugel ist

$$b = t \cos \delta,$$

worin t den entsprechenden Stundenwinkel bezeichnet. Die Veränderlichkeit dieser Größe b wird durch die Kurven konstanter geographischer Breite des Beobachtungsortes und die Kurven $t =$ const. in einer Ebene veranschaulicht, in der δ und b als Abszissen und Ordinaten gewählt sind.

Ein zweiter Teil ist der Aufgabe gewidmet: Bestimmung der Kurve, die der höchste Punkt der Ekliptik über dem Horizont eines gegebenen Beobachtungsortes beschreibt. Lwt.

J. FRISCHAUF. **Die Abbildungslehre und deren Anwendung auf Kartographie und Geodäsie.** Zs. für math. u. naturw. Unterr. 35, 393-402, 477-497.

In 53 Nummern werden kurz und scharf die allgemeinen Prinzipien der Abbildungslehre und die gebräuchlichsten Abbildungsarten, sowie die Geschichte ihrer Theorien dargelegt. Als oberstes Gesetz gilt das Affinitätsgesetz, welches darauf hinauskommt, daß diejenigen Funktionen, welche die Abbildung vermitteln, stetig und differenzierbar sind. Es folgen die konformen oder winkeltreuen Abbildungen und darauf besondere Abbildungsarten, welche diese oder jene besondere Eigenschaft besitzen, wie

z. B. die stereographische Projektion oder die Planisphäre der alten Astronomen und Geographen. Eine gedrängte geschichtliche Übersicht bildet den Schluß. Dz.

C. Chree. On the stresses in the Earth's crust before and after the sinking of a bore-hole. Phil. Mag. (6) **9**, 785-801.

Das im Titel genannte Problem wird theoretisch untersucht. Die Erde wird dabei als ein isotroper elastischer Körper angesehen und zuerst als homogene Kugel, dann als aus Kruste und Kern bestehend und endlich als rotierendes Sphäroid dieser Konstitution aufgefaßt. Die Absicht der Arbeit geht darauf aus, die Entstehung von Rissen auf Grund dieser Voraussetzung zu untersuchen und zu erklären. Es werden für eine ziemlich große Anzahl von Spezialfällen die entsprechenden Entwicklungen gegeben, zum Teil bis zu einer Spezialisierung, die die Kontrolle durch Beobachtungen gestatten würde. Br.

G. Herglotz. Über die Elastizität der Erde bei Berücksichtigung ihrer variablen Dichte. Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 275-299.

Verf. findet durch Annahme des von Roche angegebenen Dichtigkeitsgesetzes eine bessere Übereinstimmung mit den Beobachtungszahlen als vor ihm Darwin und Thomson, welche konstante Erddichte annahmen. Bei Voraussetzung der Entwickelbarkeit des Potentials der äußeren Kräfte und in der Folge auch der radialen Verschiebung in Reihen von Kugelfunktionen fortschreitenden Grades gelingt es dem Verf. leicht, auch die Form des Gravitationspotentials der deformierten Kugel anzugeben. Die durch Annahme der Inkompressibilität vereinfachten Grundgleichungen führen zu einem System von totalen linearen Differentialgleichungen sechster Ordnung, aus deren abhängigen Variablen die Reihe für die radiale Verschiebung gebildet werden kann. Bei der Erde sind die besonderen äußeren Kräfte die Anziehung des Mondes und der Sonne sowie die Zentrifugalkraft. Da deren Potential als Kugelfunktion zweiten Grades darstellbar ist, so reduziert sich das System auf eine einzige totale lineare Differentialgleichung sechster Ordnung, deren Lösung durch Entwickelung nach Potenzreihen gefunden wird. Die Ausführung der numerischen Rechnung ergibt unter Zugrundelegung eines Elastizitätsgrades wie der des Stahles sehr nahe mit der Beobachtung übereinstimmende Werte für die Abplattung, die Elliptizität und das Vergrößerungsverhältnis der Eulerschen Periode der freien Nutation. Zum Schluß wird noch auf die Wiechertsche Hypothese der Dichteverteilung, der abteilungsweisen Homogeneität eingegangen, welche kein wesentlich abweichendes Resultat liefert. Le.

R. v. Kövesligethy. Die Berechnung seismischer Elemente. Ungar. Ber. **23**, 42-77.

Die Grundgedanken hat der Verf. in seiner „Neuen geometrischen Theorie seismischer Erscheinungen“ entwickelt (Ungar. Ber. **13**, 418-464; F. d. M. **27**, 810, 1896). Setzt man für die Dichtigkeit s im Erdinnern das Rochesche Gesetz $s(1-\alpha)=s_1(1-\alpha\varrho^2)$ und für den Brechungsindex die Newtonsche Regel $(n^2-1)s_1=(n_1^2-1)s$ voraus, so ergibt die Integration für die Bahn des Erdbebenstrahles eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Erdmittelpunkt übereinstimmt. Damit ist die Grundlage der Berechnung gefunden, die nun weiter ausgebaut wird. Dz.

H. Nagaoka. The rigidity of the Earth and the velocity of seismic waves. Tokio Math. Ges. **2**, 353-356.

Verschiedene Versuche sind gemacht, um die Festigkeit und den Youngschen Elastizitätsmodul E der Erde zu bestimmen. Zuerst wurde der Unterschied zwischen der Eulerschen Periode von zehn Monaten benutzt, welche sich auf eine starre Erde, und der Chandlerschen Periode von 14 Monaten, die sich auf die wirkliche, elastisch feste Erde bezieht. Andere bringen E in Beziehung zu der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Erdbebenwellen. Verf. findet die Theorie Lord Kelvins bestätigt, daß die Erde fester sei als Stahl. Dz.

H. Nagaoka. On the existence of secondary vibrations in seismic waves. Tokio Math. Ges. **2**, 443-446.

Die sekundären Wellen werden mit der Abweichung vom Hookeschen Grundgesetz in Verbindung gebracht. Nimmt man an, daß die elastische Kraft von der Form $-n^2u-\alpha u^2-\beta u^3-\cdots$ sei, so werden in die elastischen Schwingungen Glieder sekundärer Art mit der Hälfte und einem Drittel der Periode eingeführt. Dz.

V. W. Ekman. On the influence of the Earth's rotation on ocean currents. Arkiv för mat., astr. och fys. **2**, Nr. 11, 52 S.

Die von F. Nansen auf seiner Fahrt mit der Fram gemachten Beobachtungen zeigten, daß die Richtung einer Meeresströmung nicht mit derjenigen des erzeugenden Windes übereinstimmt. Um die Ursache dieser Ablenkung zu finden, hat der Verf. auf Veranlassung von Nansen in seiner Dissertation („Om jordrotationens inverkan på vindströmmar i hafvet“.

Nyt Magazin for Naturvidenskap **40**, Heft 1, Kristiania 1902) den Einfluß der Erddrehung auf die Meeresströmungen mathematisch untersucht. Diese Untersuchung nahm aber keine Rücksicht auf die Störungen, die z. B. von Kontinenten oder von Strömungen in der Nähe des untersuchten Meerstroms hervorgebracht werden können. Im vorliegenden Aufsatze, der übrigens von der Dissertation völlig unabhängig ist, wird der Einfluß der Erddrehung mit Rücksicht auf die genannten Störungen näher untersucht. Msn.

J. HANN. Bemerkungen über die Schwerekorrektion bei den barometrischen Höhenmessungen. Meteor. Zs. **22**, 456-462.

Der Aufsatz ist ein Auszug aus einer Mitteilung in Petermanns Geogr. Mitteilungen 1903, Heft VII. Die Schwereabnahme mit der Höhe wird in ihrer Bedeutung für die barometrische Höhenmessung etwas schärfer ins Auge gefaßt, als dies gewöhnlich geschieht. Für die einzelnen zu unterscheidenden Fälle werden besondere Formeln zur Korrektion aufgestellt, und ihre Wirksamkeit wird an bekannten Höhen geprüft.

Lp.

O. ZANOTTI-BIANCO. Helmert's formula for gravity. Nature **72**, 534.

Hinweis auf einen Fehler in Everett, Illustrations of the C. G. S.-System etc. London 1902, bei der Wiedergabe der angeführten Formel (F. d. M. **32**, 780, 1901). Lp.

J. P. VAN DER STOK. Over frequentie-krommen van meteorologische grootheden. Amst. Ak. Versl. **14**, 270-283.

Nachdem in der Einleitung die Wichtigkeit des Verlaufes der Frequenzkurven hervorgehoben ist, folgt eine Untersuchung über die Frage, inwieweit die Monatsmittel dem üblichen Wahrscheinlichkeitsgesetze folgen. Die Untersuchung erstreckt sich auf die Monatsmittel des Barometerstandes zu Helder von August 1843 bis Juli 1902, desgleichen zu Batavia von 1866 bis 1902, endlich die Temperaturmittelwerte für Frankreich von 1851 bis 1900. Lp.

J. P. VAN DER STOK. Frequentie-krommen in meteorologie. Amst. Ak. Versl. **14**, 373-374.

Kurze Notiz. Lp.

J. J. TAUDIN-CHABOT. Geometrisches zum sogenannten Sonnenuntergang; die fünf merkwürdigen Stellungen. Meteor. Zs. **22**, 463-464.

„Sobald der steigende Erdhorizont begonnen hat, das Sonnenbild zu bedecken, d. h. vom Augenblick der ersten, äußeren Berührung an, wandern die beiden Schnittpunkte der Peripherie dieses Bildes unseren Horizont entlang, und zwar mit je einmaligem Richtungswechsel sowie mit variierender Geschwindigkeit — unter Hinzutritt allerdings von mancherlei Komplikationen infolge der atmosphärischen Strahlenbrechung. Ohne Berücksichtigung dieser letzteren werden die betreffenden Verhältnisse kurz erläutert." Lp.

F. HOEPFNER. Die Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erde. Wien. Ber. **114**, 1315-1357.

Es wird die Gleichung integriert $r^2 dW = C \sin h dt$, wo dW die unendlich kleine Wärmemenge bezeichnet, welche die Sonne in der Zeit dt auf eine unter dem Winkel h gestellte Flächeneinheit ausstrahlt. Verf. vereinfacht die Aufgabe durch Zurückführung auf Pol und Äquator und vergleicht seine Ergebnisse mit denjenigen früherer Berechner. Dz.

G. A. FAVARO. La durata della insolazione a Padova. Ven. Ist. Atti [(8) 7] **64**, 1529-1566.

Der Natur der Sache nach ist die Arbeit eine statistische; nur die zur Berechnung dienenden Methoden sind für das Jahrbuch zu erwähnen. Lp.

J. SEBELIEN. The distribution of the actinic sunlight on the northern hemisphere at summer solstice. Phil. Mag. (6) **9**, 351-360.

Enthält einfache Formeln zur Berechnung der im Titel angegebenen Größe. Br.

H. GERDIEN. Der Elektrizitätshaushalt der Erde und der unteren Schichten der Atmosphäre. Physik. Zs. **6**, 647-666.

„In jüngster Zeit ist die Frage nach dem Ursprung und der Unterhaltung des elektrischen Feldes der Atmosphäre und der negativen Ladung der Erde wieder in den Vordergrund des Interesses getreten. Bei der fundamentalen Bedeutung dieser Frage für den weiteren Ausbau unserer Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität erscheint es nicht unangebracht, vor dem Eintritt in die Diskussion der in Betracht kommenden Hypothesen einmal die experimentellen und theoretischen Grundlagen des Problems in Kürze darzulegen." Lp.

H. Ebert. Über die Aufrechterhaltung des normalen elektrischen Erdfeldes. Physik. Zs. **6**, 825-828.

H. Ebert. Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Gerdien: Der Elektrizitätshaushalt der Erde und der unteren Schichten der Atmosphäre. Physik. Zs. **6**, 828-832.

Beide Aufsätze dienen zur Verteidigung der von Ebert im Vorjahre aufgestellten Hypothesen (vgl. F. d. M. **35**, 972-973, 1904) unter Beibringung vielen neuen Beweismaterials. Der erste Aufsatz richtet sich gegen Simpsons Einwände in der Physik. Zeitschrift **5**, 325, 1904. Der zweite sucht die Argumente zu entkräften, welche Gerdien in der vorstehend besprochenen Abhandlung gegen Ebert vorgebracht hat.

Lp.

F. M. Exner. Über Druck und Temperatur bewegter Luft. Wien. Ber. **114**, 1271-1292; Meteor. Zs. **22**, 574-575.

Es wird mittelst der kinetischen Gastheorie der Druck der Luft auf eine senkrechte Wand unter vereinfachenden Annahmen berechnet. Verf. findet die Formel $p = \frac{1}{3}\varrho(c^2 \pm 3u^2)$, in welcher ϱ die Gasdichte, c die mittlere molekulare Geschwindigkeit und u die Strömungsgeschwindigkeit bezeichnet. Das Vorzeichen $+$ oder $-$ bezieht sich auf die dem Wind zugekehrte und abgekehrte Seite. Sodann wird die Temperaturänderung auf diesen beiden Seiten nach dem Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetz $p = \varrho RT$ (T absolute Temperatur, R Gaskonstante) berechnet. Anwendungen auf meteorologische Fragen erläutern den Gebrauch dieser Formeln.

Dz.

A. Anderkó. Über den vertikalen Gradienten des Luftdruckes. Meteor. Zs. **22**, 547-559.

Für das Jahrbuch kommt hauptsächlich der erste Abschnitt der Abhandlung in Betracht über die theoretische Bestimmung der dynamischen Korrektion. Hier wird eine Form der hypsometrischen Gleichung abgeleitet, welche auch für bewegte Luft gültig ist. Die Formel lautet

$$\log B = \log b + \left[\frac{h}{a} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2ga}\right] \left[1 - 0{,}002(t_1 + t_2)\right]^{-1},$$

$$a = 18400\left(1 + 0{,}00259 \cos 2\lambda\right)\left(1{,}00157 + \frac{h + 2Z}{R}\right).$$

Die Formel enthält ein Glied mehr, welches von der Windgeschwindigkeit des Beobachtungsortes abhängt und in der statischen Formel ganz fehlt, nämlich $(v_1^2 - v_2^2)/2ag$; es wird als die dynamische Korrektion bezeichnet. Ist also die Geschwindigkeit des Windes an den beiden Stationen verschieden, so entsteht eine durch die Höhendifferenz nicht erklärte Druckdifferenz ΔB, ein vertikaler Gradient. Dieser vertikale

Druckgradient ist im Sommer und bei Tage nach oben, im Winter und in der Nacht nach unten gerichtet. Die Beobachtungen bestätigen dies tatsächlich; ferner zeigen sie noch, daß dieser Gradient im Sommer und bei Tage geringer ist als im Winter und in der Nacht. Lp.

K. Honda. A portable Aëro-Mercurial Tide-Gauge. Tokio Math. Ges. **2**, 302-306.

Beschreibung und Theorie des Apparates, einer Modifikation des Richardschen Hydrometers. Dz.

W. Ule. Niederschlag und Wasserführung der Flüsse Mitteleuropas. Meteor. Zs. **22**, 282-284.

P. Schreiber hat im Vorjahre (F. d. M. **35**, 970) sich bemüht, rein theoretisch eine Formel aufzustellen, die geeignet ist, die Abflußvorgänge an allen Flußläufen mit einer gewissen Genauigkeit darzustellen. Diesen Weg der Untersuchung hält Ule nicht für richtig; zunächst müsse das Wesen des Abflußvorganges selbst erforscht werden. Daher habe er in einer Abhandlung „Niederschlag und Abfluß in Mitteleuropa“ (Forsch. z. deutsch. Landes- u. Volkskunde **14**, 1903) nach einer empirisch gefundenen Kurve eine Gleichung aufgestellt, die die Natur dieser Kurve am besten wiedergibt. Dies schließe nicht aus, daß andere Gleichungen, vielleicht sogar die Schreibersche, besser dazu geeignet seien. Der Kernpunkt sei aber der, daß die Aufstellung einer Abflußformel nur auf Grund rein theoretischer Erwägungen nicht annehmbar sei. Lp.

Weitere Literatur.

Anleitung zur Anstellung und Berechnung meteorologischer Beobachtungen. Herausgegeben vom königl. preuß. meteorol. Institut. Zweite völlig umgearbeitete Auflage. Zweiter Teil. Besondere Beobachtungen und Instrumente. Berlin: A. Asher & Co. III u. 49 S. u. 2 Taf. Lex. 8°.

F. Baur. Mathematische Geographie. Leipzig: A. O. Paul. 140 S. 16mo. (Miniatur-Bibliothek Nr. 673.)

G. Effert. Mathematische Geographie für humanistische Gymnasien. Zweite Auflage mit 18 Figuren und zahlreichen Übungsaufgaben nebst Lösungen. München: I. Lindauer. IV u. 77 S. 8°.

S. Grenander. Les gradients verticaux de la température dans les minima et les maxima barométriques. Arkiv för mat., astr. och fys. **2**, Nr. 7, 15 S.

S. Günther. Astronomische Geographie. (Samml. Göschen 92.) Leipzig: G. J. Göschen. 170 S. kl. 8°.

JUL. HANN. Lehrbuch der Meteorologie. Zweite umgearbeitete Auflage in etwa sechs Lieferungen. Erste Lieferung. Leipzig: Ch. H. Tauchnitz. 96 S. 6 Taf. Lex. 8°.

N. HERZ. Lehrbuch der mathematischen Geographie. Wien: C. Fromme. VIII u. 360 S. 90 Abb. 4 Taf. Lex. 8°.

K. HONDA, Y. YOSHIDA, T. TERADA. Über die sekundären Wellenbewegungen der Meeresgezeiten. Physik. Zs. **6**, 115-119.

Vgl. F. d. M. **35**, 967, 1904.

KNOPF. Aufgaben aus der Astronomie und Geodäsie für den mathematischen Unterricht. Unterrichtsbl. f. Math. **11**, 105-106.

J. RÜEFLI. Grundlinien der mathematischen Geographie. Für Mittelschulen bearbeitet. Zweite Auflage. Bern: A. Francke. 46 S.

K. THEN. Die bayerischen Kartenwerke in ihren mathematischen Grundlagen. München. VIII u. 192 S. 8°.

A. THULOUP. La sphéricité de la Terre; sa rotation et le pendule de Foucault. Melun: Imprimerie administrative. 31 S. 8°.

J. WESTMAN. Beobachtungsergebnisse von sechs Ballonfahrten der Schwedichen Aeronautischen Gesellschaft. Arkiv för mat., astr. och fys. **2**, Nr. 26, 23 S.

Anhang.

O. Gutsche. Mathematische Übungsaufgaben. Für Primaner von Realanstalten und jüngere Studierende. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. IV u. 82 gr. 8°; Progr. (Nr. 264) Oberrealsch. Breslau. 44 S. 8°.

Die erste Hälfte des Buches gibt eine Zusammenstellung der an der Breslauer Oberrealschule von 1888 bis 1904 behandelten Abiturientenaufgaben und ihre Lösungen; ihnen folgen weitere 345 ungelöste Aufgaben. Stark bevorzugt ist die Geometrie, Anwendungen fehlen fast völlig. Auch die Elemente der Differentialrechnung sind zu einseitig in den Dienst geometrischer Probleme gestellt, als daß man von der Mächtigkeit dieses analytischen Hülfsmittels eine rechte Vorstellung erhalten könnte. Die Sammlung wird wie die in den letzten Jahren zahlreich erschienenen anderen Zusammenstellungen von Abiturientenaufgaben den Schülern einen willkommenen Übungsstoff bieten; dem Lehrenden wird sie indessen kaum neue Anregungen geben, da sich ihre Aufgaben ganz in den Bahnen des Üblichen bewegen. Sk.

W. Hall. Tables and constants to four figures. For use in technical, physical and nautical computation. Cambridge: University Press. IX u. 60 S. gr. 8°.

Das vorzüglich ausgestattete Werkchen unterscheidet sich sowohl in der Anordnung als auch im Inhalt wesentlich von den bei uns üblichen Rechentafeln. Es wird von Gewöhnung und Geschmack des einzelnen abhängen, welcher Art von Tafeln er den Vorzug gibt. Den eigentlichen Logarithmen, die nur zwei Seiten in Anspruch nehmen, gehen „traverse tables“ voraus, die aus Hypotenuse (von 10-100 um eine Einheit fortschreitend) und Winkel (in ganzen Graden) die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks auf drei geltende Ziffern geben. Gleichfalls englischen Tafeln eigentümlich sind die haversines [half-versed-sine α $= \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$] und deren Logarithmen. Die log sin, log tg, log sec stehen auf je einem Blatt, wodurch die Funktionen desselben Winkels

an sechs verschiedenen Stellen aufgesucht werden müssen. Von arithmetischen Tafeln finden sich Quadrate, Quadratwurzeln und reziproke Werte. Den Beschluß bilden astronomische und physikalische Konstanten. Sk.

TH. ALBRECHT. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Dezimalstellen. Neunte Stereotyp-Auflage. Berlin: P. Stankiewicz. XVI u. 174 S. gr. 8°.

Diese zuerst 1884 erschienene Logarithmentafel, die sich seither in Schule und Praxis wohl bewährt hat, benutzt die Anordnung der Bremikerschen sechsstelligen Tafeln. Bequem ist, daß die Logarithmen mit einfachem Eingang gefunden werden. Außer den wichtigsten astronomischen und physikalischen Konstanten sind auch die für die Rechnung wichtigsten mathematischen Formelsysteme aufgenommen. Sk.

M. und M. R. RÜHLMANN. Logarithmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln. 13. vermehrte und verbesserte Auflage. Leipzig: J. Klinkhardt. XL u. 326 S. kl. 8°.

Die Rühlmannschen sechsstelligen Tafeln, die jetzt in 13. Auflage vorliegen, sind durch handliches Format und eine Fülle von chemischen, physikalischen und technischen Hülfstafeln ausgezeichnet, die wiederum um drei vermehrt worden sind. Sk.

M. DOLL und P. NESTLE. Lehrbuch der praktischen Geometrie. Zweite erweiterte und umgearbeitete Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. VII u. 164 S. 145 Fig. gr. 8°.

Dieses für den Unterricht an den Hoch- und Tiefbauabteilungen der Baugewerkschulen und technischen Mittelschulen bestimmte Werkchen unterscheidet sich wesentlich von der 1880 erschienenen ersten Auflage. Der Umfang ist über das Doppelte angewachsen und umfaßt nunmehr alles, was dem praktischen Techniker in Hoch- und Tiefbau an geodätischen Aufgaben begegnet. Die beiden ersten Teile: Horizontalaufnahmen und Theodolit sind noch von dem inzwischen verstorbenen Herausgeber der ersten Auflage M. Doll bearbeitet, das übrige von P. Nestle. Neu hinzugekommen ist Teil IV und V: Abstecken von Kreisbogen, Lattenprofile und Schnurgerüste, während der dritte Teil der ersten Auflage, die Berechnung der Erdmassen, fortgelassen ist, wohl um das Buch nicht allzustark anschwellen zu lassen. Die Darstellung ist ausführlich und klar, sie wird durch zahlreiche instruktive Abbildungen unterstützt, so daß sie mit Nutzen auch von dem Lehrer der Mathematik zu Rate gezogen werden kann, der seinen Unterricht mit Aufgaben der geodätischen Praxis beleben will. Sk.

Weitere Literatur.

JOH. G. HAGEN. Synopsis der höheren Mathematik. Dritter Band. Differential- und Integralrechnung. Siebente Lieferung. Berlin: F. L. Dames. VI u. S. 385-471. 4°.
Vgl. F. d. M. **35**, 975, 1904.

Des Ingenieurs Taschenbuch. Herausgegeben vom akad. Verein „Hütte". 19. neu bearbeitete Auflage. Zweite Abteilung. Berlin: W. Ernst & Sohn. XI u. 1334 u. VI u. 926 S. 8°.

R. GRIMSHAW. Taschenbuch für Ingenieure. Erste Abteilung. Mathematik. Erster Abschnitt. Hannover: M. Jänecke. 200 S. kl. 8°.

G. SOULÉ. Philosophical practical mathematics. New Orleans. 1013 S. 8°.

G. DARIÈS. Mathématiques (Volume n° 1 de la Bibliothèque du conducteur des travaux publics). Paris: Dunod.

L. COUTURAT. L'algèbre de la logique. Paris: Gauthier-Villars. 100 S. 8°. (Collection Scientia Nr. 24).

W. S. ANDREWS. Magic squares. The Monist **15**, 429-461, 555-586.

A. S. HATHAWAY. Newtonian idea of the calculus. Proc. Indiana Ac. of Sc. 1904, 237-240.

J. GAJDECZKA. Maturitätsprüfungsfragen aus der Mathematik zusammengestellt und mit Auflösungen versehen. Zweite verbesserte Auflage. Wien: F. Deuticke. IV u. 80 S. gr. 8°.

Intermediate science papers of applied mathematics. Questions set at the University of London from 1867 to 1905. London. 68 S. 8°.

London matriculation mathematics papers, from January 1903 to June 1905. London: Clive. 146 S. 12mo (University tutorial series).

Model answers to intermediate pure mathematics papers set at the London University examination in arts and science from 1897 to 1905. London: Clive. 174 S. 12mo (University tutorial series).

G. J. VAN DE WELL. Oplossingen der wiskundige opgaven van examen B der Polytechnische School te Delft; met nieuwe opgaven. Deel I: Vraagstukken over B I. 2te druk. Deventer 185 S. 8°.

J. ARBES. Vierstellige Logarithmentafeln zum Schulgebrauche. Wien: F. Tempsky. Leipzig: G. Freytag. 36 S. gr. 8°.

FR. BIDSCHOF und A. VITAL. Fünfstellige mathematische und astronomische Tafeln. Zum Gebrauche für Mathematiker, Astronomen, Geographen und Seeleute zusammengestellt und mit Formelsammlungen versehen. Stereotyp-Ausgabe. Wien: F. Deuticke. XVIII u. 219 S. Lex. 8°.

CHAMBER. Mathematical tables, consisting of logarithms of numbers from 1 to 108000, trigonometrical, nautical and other tables. New edition, edited by J. Pryde. New York: Van Nostrand. 454 S. 8°.

H. Hartl. Zur Einführung in die Logarithmenlehre. Mit einer Sammlung von Beispielen, für deren logarithmische Ausführung keine Interpolationen nötig sind. Wien: F. Deuticke. 16 S. 8°.

L. Heptner. Tafeln für Wertsberechnungen. Multiplikationstafeln. Leobschütz: Selbstverlag. VIII u. 201 S. Lex. 8°.

G. J. Hoüel. Fünfstellige Logarithmentafeln der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen, nebst den Gaußischen Additions- und Subtraktionslogarithmen und verschiedenen Hülfstafeln. Neue durchgesehene und vermehrte Ausgabe. Berlin: W. Praußnitz. XLVI u. 118 S. gr. 8°.

C. G. Knott. Four-figure mathematical tables. London: Chambers. 24 S. 8°.

F. W. Küster. Logarithmische Rechentafeln für Chemiker. Im Einverständnis mit der Atomgewichtskommission der Deutschen Chemischen Gesellschaft für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet und auch mit Erläuterungen versehen. Fünfte Auflage. Leipzig: Veit & Co. 99 S. kl. 8°.

J. de Lalande. Tables des logarithmes. Avec additions et modifications par E. E. Neël. 10e édition. Louvain. 210 S. 8°.

O. Müller. Tavole di logaritmi con cinque decimali. 8a edizione, aumentata delle tavole dei logaritmi d' addizione e sottrazione, per cura di M. Rajna. Milano: Hoepli. XXXVI u. 191 S. 16mo (Manuali Hoepli).

Nouvelles tables de logarithmes à cinq décimales pour les lignes trigonométriques dans les deux systèmes de la division centésimale et de la division sexagésimale du quadrant, et pour les nombres de 1 à 12 000, suivies des mêmes tables à quatre décimales et de diverses tables et formules usuelles. 2e édition, revue et corrigée. Paris: Gauthier-Villars. 8°. (Service géographique de l'armée.)

K. v. Ott. Tafeln der Logarithmen und anderer beim mathematischen Unterrichte unentbehrlichen Zahlenwerte für Mittelschulen. Fünfte Auflage. Prag: J. G. Calve. XXII u. 160 S.

F. W. Rex. Vierstellige Logarithmentafeln. Schulausgabe. Zweite Auflage. Stuttgart: J. B. Metzler. II u. 29 S. gr. 8°.

E. Schultz. Vierstellige mathematische Tabellen. Sechste Auflage. Ausgabe A für Maschinenbauschulen (mit Anleitung). (VI u. 176 S.) 8°. Nebst: Anleitung zum Gebrauche der mathematischen Tabellen in den technischen Kalendern. An 25 Beispielen aus der Praxis erläutert. (31 S.) 16°. Ausgabe B ohne Anleitung. Essen: G. D. Baedeker.

Tafeln zur Berechnung von Höhenunterschieden aus Horizontaldistanz und Höhenwinkel in Zentesimal- und Sexagesimalteilung. Nebst Hülfstafeln und Anleitung. Herausgegeben vom eidgenössischen Departement des Innern. Brugg. (Bern: H. Körber.) XXX u. 105 S. gr. 8°.

K. Teichmann und H. Gross. Vierstellige mathematische Tafeln. Dritte unveränderte Auflage. Stuttgart: K. Wittwer. 19 S. 8°.

Namenregister.

Berichtigungen.

Seite 159 Zeile 20 von oben statt e el 5° grado lies e del 5° grado.
„ 184 „ 26 „ „ „ E. Engel „ F. Engel.
„ 268 „ 11 „ „ „ L. S. E. v. Rechtenstamm lies L. Schrutka.
„ 404 „ 9 „ unten „ differential lies difference.

Aus einem Briefe von Hrn. L. Schlesinger:

„Zu der Note von E. Cunningham S. 383 ist zu bemerken, daß ich die von ihm beanstandete Stelle meines Handbuches (Bd. I, Nr. 95) schon in den „Nachträgen und Berichtigungen zum ersten Bande", die im Bande II, 1 des Handbuches (1897) S. 525 abgedruckt sind, S. 530: „Zu den Nummern 95, 96" selbst berichtigt habe."